Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Смирнов, О разложениях по собственным функциям для уравнения Шредингера с обратноквадратичным потенциалом, *ТМФ*, 2016, том 187, номер 2, 360–382

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9032>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 16:21:20

© 2016 г.

А. Г. Смирнов*

О РАЗЛОЖЕНИЯХ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ОБРАТНОКВАДРАТИЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Рассмотрено одномерное уравнение Шредингера $-f'' + q_\kappa f = Ef$ на положительной полуоси с потенциалом $q_\kappa(r) = (\kappa^2 - 1/4)r^{-2}$. Для каждого комплексного ϑ построено решение $u_\vartheta^\kappa(E)$ данного уравнения, аналитическое по κ в комплексной окрестности интервала $(-1, 1)$ и, в частности, в “сингулярной” точке $\kappa = 0$. При $-1 < \kappa < 1$ и вещественных ϑ решения $u_\vartheta^\kappa(E)$ однозначно определяют унитарный оператор разложения по собственным функциям $U_{\kappa, \vartheta}: L_2(0, \infty) \rightarrow L_2(\mathbb{R}, \mathcal{V}_{\kappa, \vartheta})$, где $\mathcal{V}_{\kappa, \vartheta}$ – положительная мера на пространстве $\mathbb{R}$. Показано, что каждая самосопряженная реализация формального дифференциального выражения $-\partial_r^2 + q_\kappa(r)$ для гамильтониана диагонализуетс оператором $U_{\kappa, \vartheta}$ при некотором $\vartheta \in \mathbb{R}$. При помощи подходящих сингулярных m -функций Титчмарша–Вейля явно найдены меры $\mathcal{V}_{\kappa, \vartheta}$ и доказана их непрерывность по κ и ϑ .

Ключевые слова: уравнение Шредингера, обратноквадратичный потенциал, самосопряженные расширения, разложения по собственным функциям, m -функция Титчмарша–Вейля.

DOI: 10.4213/tmf9032

*Посвящается профессору И. В. Тютину
в связи с его 75-летием*

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена разложениям по собственным функциям, связанным с одномерным уравнением Шредингера

$$-\partial_r^2 f(r) + \frac{\kappa^2 - 1/4}{r^2} f(r) = Ef(r), \quad r > 0, \quad (1)$$

где κ и E – вещественные параметры. Нетрудно видеть, что функция $f(r) = r^{1/2} J_\kappa(E^{1/2}r)$, где J_κ – функция Бесселя первого рода порядка κ , представляет собой решение уравнения (1) для любых $E > 0$ и $\kappa \in \mathbb{R}$ (это немедленно следует из

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия.
E-mail: smirnov@lpi.ru

того, что J_κ удовлетворяет уравнению Бесселя). Эти решения можно использовать для разложения квадратично-интегрируемых функций на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$. Точнее говоря, если имеются $\kappa > -1$ и квадратично-интегрируемая комплексная функция ψ на $\mathbb{R}_+$, обращающаяся в нуль при больших r , то мы можем определить функцию $\hat{\psi}$ на $\mathbb{R}_+$ при помощи соотношения

$$\hat{\psi}(E) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \sqrt{r} J_\kappa(\sqrt{E}r) \psi(r) dr, \quad E > 0. \quad (2)$$

Тогда отображение $\psi \rightarrow \hat{\psi}$ с точностью до замены переменных совпадает с известным преобразованием Ханкеля [1] и однозначно задает унитарный оператор в $L_2(\mathbb{R}_+)$. С тех пор как Вейлем [2] была развита общая теория сингулярных задач Штурма–Лиувилля, данное преобразование использовалось многими авторами для иллюстрации различных подходов к разложениям по собственным функциям в такого рода задачах [3]–[8].

Если $\kappa \geq 1$, то преобразование (2) с точностью до нормировки собственных функций является единственным разложением по собственным функциям, которое можно связать с уравнением (1). С другой стороны, при $|\kappa| < 1$ из решений уравнения (1) можно построить однопараметрическое семейство различных разложений (см. главу 4 в монографии [4]). Причина такой неоднозначности заключается в том, что формальное дифференциальное выражение для гамильтониана

$$-\partial_r^2 + \frac{\kappa^2 - 1/4}{r^2} \quad (3)$$

при $|\kappa| < 1$ не определяет квантово-механическую задачу единственным образом и допускает различные самосопряженные реализации в пространстве $L_2(\mathbb{R}_+)$, которым отвечают различные разложения по собственным функциям. В работе [9] все самосопряженные реализации выражения (3) были охарактеризованы при помощи подходящих асимптотических граничных условий и были явно найдены соответствующие разложения по собственным функциям.

Как в [4], так и в [9] случаи $0 < |\kappa| < 1$ и $\kappa = 0$ рассматривались по отдельности, причем разложения по собственным функциям при $\kappa = 0$ не могли быть получены из разложений при $0 < |\kappa| < 1$ при помощи предельного перехода $\kappa \rightarrow 0$. Такая ситуация не вполне удовлетворительна с физической точки зрения. Самосопряженные операторы, связанные с выражением (3), можно использовать, в том числе, для построения самосопряженных реализаций гамильтониана Ааронова–Бома [10]. При этом κ , равное нулю, и κ , отличные от нуля, отвечают соответственно целым и нецелым значениям безразмерного магнитного потока сквозь соленоид. Поэтому существование хорошо определенного предела $\kappa \rightarrow 0$ необходимо для того, чтобы иметь непрерывный переход между целыми и нецелыми значениями потока в модели Ааронова–Бома. В данной статье предлагается параметризация самосопряженных реализаций выражения (3) и соответствующих разложений по собственным функциям, обладающая свойством непрерывности по κ на интервале $(-1, 1)$ (и, в частности, при $\kappa = 0$).

Сформулируем теперь основные результаты статьи. Пусть λ – мера Лебега на $\mathbb{R}$, а $C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ – пространство всех гладких функций на $\mathbb{R}_+$ с компактным носителем.

Если имеется функция f , определенная λ -п.в.¹⁾ на $\mathbb{R}_+$, то ее класс эквивалентности относительно меры Лебега на $\mathbb{R}_+$ (т. е. сужения меры λ на $\mathbb{R}_+$) обозначим через $[f]$. Для каждого $\kappa \in \mathbb{R}$ дифференциальное выражение (3) естественным образом определяет оператор $\check{h}_\kappa$ в $L_2(\mathbb{R}_+)$, область определения $D_{\check{h}_\kappa}$ которого состоит из всех элементов $[f]$, отвечающих $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$:

$$\begin{aligned} D_{\check{h}_\kappa} &= \{[f]: f \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)\}, \\ \check{h}_\kappa[f] &= [-f'' + q_\kappa f], \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+). \end{aligned} \quad (4)$$

Через q_κ здесь обозначен потенциальный член в (3):

$$q_\kappa(r) = \frac{\kappa^2 - 1/4}{r^2}, \quad r \in \mathbb{R}_+. \quad (5)$$

Оператор $\check{h}_\kappa$, очевидно, является симметрическим и, следовательно, замыкаем. Замыкание $\check{h}_\kappa$ будем обозначать через h_κ :

$$h_\kappa = \overline{\check{h}_\kappa}. \quad (6)$$

Самосопряженные расширения h_κ (или, что то же самое, $\check{h}_\kappa$) естественно понимать как самосопряженные реализации формального выражения (3) (ср. замечание 5 ниже).

Для любых $z, \kappa \in \mathbb{C}$ определим функцию $u^\kappa(z)$ на $\mathbb{R}_+$ посредством соотношения²⁾

$$u^\kappa(z|r) = r^{1/2+\kappa} \mathcal{X}_\kappa(r^2 z), \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad (7)$$

где целая функция $\mathcal{X}_\kappa$ дается формулой

$$\mathcal{X}_\kappa(\zeta) = \frac{1}{2^\kappa} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \zeta^n}{\Gamma(\kappa + n + 1) n! 2^{2n}}, \quad \zeta \in \mathbb{C}. \quad (8)$$

Функция $\mathcal{X}_\kappa$ тесно связана с функциями Бесселя: при $z \neq 0$ справедливо равенство

$$\mathcal{X}_\kappa(\zeta) = \zeta^{-\kappa/2} J_\kappa(\zeta^{1/2}). \quad (9)$$

Поскольку J_κ удовлетворяет уравнению Бесселя, имеем

$$-\partial_r^2 u^{\pm\kappa}(z|r) + q_\kappa(r) u^{\pm\kappa}(z|r) = z u^{\pm\kappa}(z|r), \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad (10)$$

для всех $\kappa \in \mathbb{C}$ и $z \neq 0$ ³⁾. По непрерывности это верно и при $z = 0$. В частности, $u^{\pm\kappa}(E)$ являются решениями спектральной задачи (1) для любых $\kappa, E \in \mathbb{R}$.

Если имеются положительная борелевская мера σ на $\mathbb{R}$ и σ -измеримая комплексная функция g , то обозначим через $\mathcal{T}_g^\sigma$ оператор умножения на g в $L_2(\mathbb{R}, \sigma)$ ⁴⁾. Если

¹⁾Мы используем здесь общепринятое сокращение п.в., которое означает либо “почти все”, либо “почти всюду”.

²⁾Для краткости через $u^\kappa(z|r)$ будем обозначать значение функции $u^\kappa(z)$ в точке r : $u^\kappa(z|r) = (u^\kappa(z))(r)$.

³⁾Здесь и далее предполагается, что функция q_κ на $\mathbb{R}_+$ определена формулой (5) для всех $\kappa \in \mathbb{C}$.

⁴⁾Точнее говоря, $\mathcal{T}_g^\sigma$ есть оператор в $L_2(\mathbb{R}, \sigma)$, график которого состоит из всех таких пар (φ_1, φ_2) , что $\varphi_1, \varphi_2 \in L_2(\mathbb{R}, \sigma)$ и $\varphi_2(E) = g(E)\varphi_1(E)$ для σ -п.в. E .

функция g вещественна, то оператор T_g^σ самосопряжен. При $\kappa > -1$ определим положительную меру Радона⁵⁾ $\mathcal{V}_\kappa$ на $\mathbb{R}$ посредством соотношения

$$d\mathcal{V}_\kappa(E) = \frac{1}{2} \Theta(E) E^\kappa dE, \quad (11)$$

где Θ – функция Хевисайда, т.е. $\Theta(E) = 1$ при $E \geq 0$ и $\Theta(E) = 0$ при $E < 0$. Обозначим через $L_2^c(\mathbb{R}_+)$ подпространство пространства $L_2(\mathbb{R}_+)$, состоящее из всех его элементов, обращающихся в нуль λ -п.в. вне некоторого компактного подмножества $\mathbb{R}_+$.

Известно (см., например, [5], [6], [9]), что при $\kappa \geq 1$ оператор h_κ самосопряжен и может быть диагонализирован при помощи преобразования Ханкеля (2). В терминах функций $u^\kappa(z)$ этот результат можно сформулировать следующим образом.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\kappa > -1$ и мера $\mathcal{V}_\kappa$ на $\mathbb{R}$ определена формулой (11). Тогда существует единственный унитарный оператор $U_\kappa: L_2(\mathbb{R}_+) \rightarrow L_2(\mathbb{R}, \mathcal{V}_\kappa)$ такой, что

$$(U_\kappa \psi)(E) = \int_0^\infty u^\kappa(E|r) \psi(r) dr, \quad \psi \in L_2^c(\mathbb{R}_+),$$

для $\mathcal{V}_\kappa$ -п.в. E . Оператор $U_\kappa^{-1} \mathcal{T}_\kappa^\mathcal{V} U_\kappa$, где ι – тождественная функция на $\mathbb{R}$ (т.е. $\iota(E) = E$ для всех $E \in \mathbb{R}$), есть самосопряженное расширение h_κ , совпадающее с h_κ при $\kappa \geq 1$.

В силу (7) и (9) имеем $u^\kappa(E|r) = E^{-\kappa/2} r^{1/2} J_\kappa(E^{1/2}r)$, $r \in \mathbb{R}_+$, для любого $E > 0$. Поэтому оператор U_κ совпадает с преобразованием (2) с точностью до нормировки собственных функций. Заметим, что $h_\kappa = h_{|\kappa|}$ для всех $\kappa \in \mathbb{R}$, и, следовательно, h_κ диагонализуется оператором $U_{|\kappa|}$ для всех таких вещественных κ , что $|\kappa| \geq 1$. Если $0 \leq \kappa < 1$, то $U_\kappa^{-1} \mathcal{T}_\kappa^\mathcal{V} U_\kappa$ представляет собой расширение Фридрихса h_κ (см. [11]).

Обратимся теперь к параметризации всех самосопряженных расширений h_κ в случае $-1 < \kappa < 1$. Пусть

$$\mathcal{O} = \{\kappa \in \mathbb{C}: \kappa \neq \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

Для $\kappa \in \mathcal{O}$ и $\vartheta, z \in \mathbb{C}$ определим функцию $u_\vartheta^\kappa(z)$ на $\mathbb{R}_+$, полагая

$$u_\vartheta^\kappa(z) = \frac{u^\kappa(z) \sin(\vartheta + \vartheta_\kappa) - u^{-\kappa}(z) \sin(\vartheta - \vartheta_\kappa)}{\sin \pi \kappa}, \quad \kappa \in \mathcal{O} \setminus \{0\}, \quad (12)$$

и

$$\begin{aligned} u_\vartheta^0(z|r) &= \lim_{\kappa \rightarrow 0} u_\vartheta^\kappa(z|r) = \\ &= u^0(z|r) \cos \vartheta + \frac{2}{\pi} \left[\left(\ln \frac{r}{2} + \gamma \right) u^0(z|r) - \sqrt{r} \mathcal{Y}(r^2 z) \right] \sin \vartheta, \quad r \in \mathbb{R}_+, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\vartheta_\kappa = \frac{\pi \kappa}{2}, \quad (14)$$

⁵⁾Напомним, что борелевская мера σ на $\mathbb{R}$ называется мерой Радона на $\mathbb{R}$, если $\sigma(K) < \infty$ для любого компактного множества $K \subset \mathbb{R}$.

целая функция $\mathcal{Y}$ дается формулой

$$\mathcal{Y}(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n c_n}{(n!)^2 2^{2n}} \zeta^n, \quad c_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j},$$

и $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (c_n - \ln n) = 0,577 \dots$ – константа Эйлера⁶⁾.

Для $\alpha \in \mathbb{R}$ положим $R_\alpha = \{z \in \mathbb{C}: z = re^{i\alpha} \text{ для некоторого } r \geq 0\}$ и

$$\mathbb{C}_\alpha = \mathbb{C} \setminus R_\alpha. \quad (15)$$

Таким образом, $\mathbb{C}_\alpha$ есть комплексная плоскость с разрезом вдоль луча R_α .

Следующее утверждение показывает, что величина $u_\vartheta^\kappa(z|r)$, несмотря на кусочный характер ее определения, в действительности аналитична по всем своим аргументам.

ЛЕММА 2. *Существует единственная функция F , аналитическая в области $\mathcal{O} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}_\pi$ и удовлетворяющая равенству $F(\kappa, \vartheta, z, r) = u_\vartheta^\kappa(z|r)$ для любых $\vartheta, z \in \mathbb{C}$, $\kappa \in \mathcal{O}$ и $r \in \mathbb{R}_+$.*

Доказательство леммы 2 приведено в приложении А.

Для любых $\kappa \in \mathcal{O}$ и $\vartheta, z \in \mathbb{C}$ равенство (10) остается справедливым при замене $u^{\pm\kappa}(z)$ на $u_\vartheta^\kappa(z)$ (это очевидным образом вытекает из (12) при $\kappa \in \mathcal{O} \setminus \{0\}$; в силу леммы 2 можно перейти к пределу $\kappa \rightarrow 0$ и заключить, что то же верно при $\kappa = 0$ ⁷⁾).

Определим теперь для каждого $\kappa \in (-1, 1)$ и $\vartheta \in \mathbb{R}$ положительную меру Радона $\mathcal{V}_{\kappa, \vartheta}$ на $\mathbb{R}$ следующим образом. Для $0 < |\kappa| < 1$ положим

$$\mathcal{V}_{\kappa, \vartheta} = \begin{cases} \tilde{\mathcal{V}}_{\kappa, \vartheta}, & \vartheta \in [-|\vartheta_\kappa|, |\vartheta_\kappa|] + \pi\mathbb{Z}, \\ \frac{\pi \sin \pi \kappa |E_{\kappa, \vartheta}|}{2\kappa \sin(\vartheta + \vartheta_\kappa) \sin(\vartheta - \vartheta_\kappa)} \delta_{E_{\kappa, \vartheta}} + \tilde{\mathcal{V}}_{\kappa, \vartheta}, & \vartheta \in (|\vartheta_\kappa|, \pi - |\vartheta_\kappa|) + \pi\mathbb{Z}, \end{cases} \quad (16)$$

где ϑ_κ определено формулой (14), положительная мера Радона $\tilde{\mathcal{V}}_{\kappa, \vartheta}$ на $\mathbb{R}$ дается соотношением

$$\begin{aligned} d\tilde{\mathcal{V}}_{\kappa, \vartheta}(E) &= \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Theta(E) \sin^2 \pi \kappa}{E^{-\kappa} \sin^2(\vartheta + \vartheta_\kappa) - 2 \cos \pi \kappa \sin(\vartheta + \vartheta_\kappa) \sin(\vartheta - \vartheta_\kappa) + E^\kappa \sin^2(\vartheta - \vartheta_\kappa)} dE \end{aligned} \quad (17)$$

и $\delta_{E_{\kappa, \vartheta}}$ есть мера Дирака в точке

$$E_{\kappa, \vartheta} = - \left(\frac{\sin(\vartheta + \vartheta_\kappa)}{\sin(\vartheta - \vartheta_\kappa)} \right)^{1/\kappa}. \quad (18)$$

При $\kappa = 0$ мера $\mathcal{V}_{\kappa, \vartheta}$ определяется при помощи предельного перехода $\kappa \rightarrow 0$ в формулах (16)–(18). Это дает

$$\mathcal{V}_{0, \vartheta} = \begin{cases} \tilde{\mathcal{V}}_{0, \vartheta}, & \vartheta \in \pi\mathbb{Z}, \\ \frac{\pi^2 |E_{0, \vartheta}|}{2 \sin^2 \vartheta} \delta_{E_{0, \vartheta}} + \tilde{\mathcal{V}}_{0, \vartheta}, & \vartheta \notin \pi\mathbb{Z}, \end{cases} \quad (19)$$

⁶⁾ Чтобы вычислить предел $u_\vartheta^\kappa(z|r)$ при $\kappa \rightarrow 0$, следует применить правило Лопиталья и воспользоваться равенством $\Gamma'(1+n)/\Gamma(1+n) = c_n - \gamma$ (см. [12], раздел 1.7.1, формула (9)).

⁷⁾ Другой способ заключается в том, чтобы выразить $u_\vartheta^0(z|r)$ через функции Бесселя J_0 и Y_0 при помощи равенства $\pi Y_0(\zeta) = 2(\gamma + \ln(\zeta/2))J_0(\zeta) - 2\mathcal{Y}(\zeta^2)$ (см. [12], раздел 7.2.4, формула (33)) и воспользоваться уравнением Бесселя.

где

$$E_{0,\vartheta} = -e^{\pi \operatorname{ctg} \vartheta} \quad (20)$$

и положительная мера Радона $\tilde{\mathcal{V}}_{0,\vartheta}$ на $\mathbb{R}$ имеет вид

$$d\tilde{\mathcal{V}}_{0,\vartheta}(E) = \frac{1}{2} \frac{\Theta(E)}{(\cos \vartheta - \pi^{-1} \ln E \sin \vartheta)^2 + \sin^2 \vartheta} dE. \quad (21)$$

Следующая теорема описывает самосопряженные расширения h_κ при $-1 < \kappa < 1$ в терминах их разложений по собственным функциям.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $-1 < \kappa < 1$. Для любого $\vartheta \in \mathbb{R}$ существует единственный унитарный оператор $U_{\kappa,\vartheta}: L_2(\mathbb{R}_+) \rightarrow L_2(\mathbb{R}, \mathcal{V}_{\kappa,\vartheta})$ такой, что

$$(U_{\kappa,\vartheta}\psi)(E) = \int_0^\infty u_\vartheta^\kappa(E|r)\psi(r) dr, \quad \psi \in L_2^c(\mathbb{R}_+),$$

для $\mathcal{V}_{\kappa,\vartheta}$ -п.в. E . Оператор

$$h_{\kappa,\vartheta} = U_{\kappa,\vartheta}^{-1} T_\iota^{\mathcal{V}_{\kappa,\vartheta}} U_{\kappa,\vartheta},$$

где ι – тождественная функция на $\mathbb{R}$, является самосопряженным расширением h_κ . Обратно, каждое самосопряженное расширение h_κ равно $h_{\kappa,\vartheta}$ для некоторого $\vartheta \in \mathbb{R}$. Если $\vartheta, \vartheta' \in \mathbb{R}$, то равенство $h_{\kappa,\vartheta} = h_{\kappa,\vartheta'}$ справедливо тогда и только тогда, когда $\vartheta - \vartheta' \in \pi\mathbb{Z}$.

При $\vartheta = \vartheta_\kappa$ имеем $\mathcal{V}_{\kappa,\vartheta} = \mathcal{V}_\kappa$ и $u^\kappa(z) = u_{\vartheta}^\kappa(z)$ для всех $z \in \mathbb{C}$, и, следовательно, оператор $U_{\kappa,\vartheta}$ совпадает с преобразованием Ханкеля U_κ .

Разложения, описываемые теоремой 3, обладают тем преимуществом, что $\kappa = 0$ не является точкой разрыва ни для собственных функций $u_\vartheta^\kappa(E)$, ни для спектральных мер⁸⁾ $\mathcal{V}_{\kappa,\vartheta}$. Это вытекает из леммы 2 и следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 4. Пусть φ – непрерывная (ограниченная борелевская) функция на $\mathbb{R}$ с компактным носителем. Тогда $(\kappa, \vartheta) \rightarrow \int \varphi(E) d\mathcal{V}_{\kappa,\vartheta}(E)$ является непрерывной (борелевской) функцией на $(-1, 1) \times \mathbb{R}$, ограниченной на $[-\alpha, \alpha] \times \mathbb{R}$ для любого $0 \leq \alpha < 1$.

Теоремы 3 и 4 представляют собой главные результаты настоящей работы. Мы также даем новое доказательство теоремы 1, основанное на локально определенных сингулярных m -функциях (см. ниже).

Для доказательства теорем 1 и 3 мы используем вариант теории Титчмарша–Вейля–Кодаиры, недавно развитый в работах [6], [8], где было предложено обобщение понятия m -функции Титчмарша–Вейля, применимое не только к задачам с регулярным концом, но и к широкому классу операторов Шредингера с двумя сингулярными концами. Использование таких сингулярных m -функций приводит к заметному упрощению при работе с разложениями по собственным функциям по сравнению с общей теорией [13], [5], основанной на матричнозначных мерах (отметим вместе

⁸⁾В данной статье термин “спектральная мера” всюду используется по отношению к определенным положительным мерам на $\mathbb{R}$, точное определение которых будет дано ниже в предложении 14. Это отличается от терминологии, принятой в работе [10], где указанный термин применялся к прокторнозначным мерам в гильбертовом пространстве.

с тем, что результаты работ [6], [8] о разложениях по собственным функциям нетрудно вывести из общего подхода Кодаиры [13]; см. замечание 16 ниже).

Статья организована следующим образом. В разделе 2 сообщаются основные факты общей теории самосопряженных расширений одномерных операторов Шредингера и их разложений по собственным функциям. Предложение 14, являющееся главным утверждением этого раздела, сходно с теоремой 3.4 в [8], но, в отличие от последней, дает локальную версию формулы для спектральных мер, которая позволяет использовать различные m -функции для разных областей спектрального параметра. В разделе 3 приводится вывод теоремы 1, иллюстрирующий этот локальный подход к отысканию спектральных мер, и доказывается теорема 3. Раздел 4 посвящен доказательству теоремы 4.

2. ОДНОМЕРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ШРЕДИНГЕРА

В данном разделе мы напомним основные факты [5], [14], [15], касающиеся самосопряженных расширений одномерных операторов Шредингера, и кратко опишем развитый в работах [6], [8] подход к разложениям по собственным функциям. Отличительной чертой приведенного ниже изложения является использование понятия граничного пространства (см. определение 6 ниже), которое может рассматриваться как формализация концепции самосопряженного граничного условия. Применение граничных пространств во многих случаях дает нам возможность единообразно рассматривать случаи предельной точки и предельной окружности и, тем самым, ведет к более прозрачной формулировке результатов.

Пусть $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $\lambda_{a,b}$ – сужение на интервал (a, b) меры Лебега λ на $\mathbb{R}$, $\mathcal{D}$ – пространство всех комплексных непрерывно дифференцируемых функций на (a, b) , производные которых абсолютно непрерывны на (a, b) (т. е. абсолютно непрерывны на каждом отрезке $[c, d]$, где $a < c \leq d < b$). Пусть q – комплексная локально интегрируемая функция на (a, b) . Для $z \in \mathbb{C}$ обозначим через $l_{q,z}$ такой линейный оператор из $\mathcal{D}$ в пространство комплексных $\lambda_{a,b}$ -классов эквивалентности, что

$$(l_{q,z}f)(r) = -f''(r) + q(r)f(r) - zf(r) \quad (22)$$

для λ -п.в. $r \in (a, b)$, и положим

$$l_q = l_{q,0}.$$

Для любых $f \in \mathcal{D}$ и $z \in \mathbb{C}$ имеем $l_{q,z}f = l_qf - z[f]$, где $[f] = [f]_{\lambda_{a,b}}$ есть $\lambda_{a,b}$ -класс эквивалентности функции f . Для каждого $c \in (a, b)$ и любых комплексных чисел z , ζ_1 и ζ_2 имеется единственное решение f уравнения $l_{q,z}f = 0$ такое, что $f(c) = \zeta_1$ и $f'(c) = \zeta_2$. Отсюда следует, что решения уравнения $l_{q,z}f = 0$ образуют двумерное подпространство в $\mathcal{D}$. Для любых функций $f, g \in \mathcal{D}$ их вронскиан $W_r(f, g)$ в точке $r \in (a, b)$ определяется соотношением

$$W_r(f, g) = f(r)g'(r) - f'(r)g(r). \quad (23)$$

Очевидно, что функция $r \rightarrow W_r(f, g)$ абсолютно непрерывна на (a, b) . Если f и g таковы, что $r \rightarrow W_r(f, g)$ есть постоянная функция на (a, b) (в частности, это так, если f и g – решения уравнения $l_{q,z}f = l_{q,z}g = 0$ при некотором $z \in \mathbb{C}$), то ее

значение будет обозначаться через $W(f, g)$. Из (23) сразу следует, что для всех $f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathcal{D}$ и $r \in (a, b)$ верны тождества

$$W_r(f_1, f_2)W_r(f_3, f_4) + W_r(f_1, f_3)W_r(f_4, f_2) + W_r(f_2, f_3)W_r(f_1, f_4) = 0, \quad (24)$$

$$W_r(f_1, f_2, f_3, f_4) = f_1(r)f_3(r)W_r(f_2, f_4) + W_r(f_1, f_3)f_2(r)f_4(r). \quad (25)$$

В оставшейся части данного раздела функция q будет предполагаться вещественной. Пусть

$$\mathcal{D}_q = \{f \in \mathcal{D}: f \text{ и } l_q f \text{ квадратично-интегрируемы на } (a, b)\}.$$

Будем говорить, что $\lambda_{a,b}$ -измеримая комплексная функция f является квадратично-интегрируемой слева (справа) на (a, b) , если $\int_a^c |f(r)|^2 dr < \infty$ ($\int_c^b |f(r)|^2 dx < \infty$) для любого $c \in (a, b)$. Подпространство $\mathcal{D}$, состоящее из таких квадратично-интегрируемых слева (справа) функций f на (a, b) , что функция $l_q f$ также квадратично-интегрируема слева (справа) на (a, b) , будет обозначаться через $\mathcal{D}_q^l$ ($\mathcal{D}_q^r$). Очевидно, имеем $\mathcal{D}_q = \mathcal{D}_q^l \cap \mathcal{D}_q^r$. При помощи интегрирования по частям из (22) следует, что

$$\int_c^d ((l_{q,z}f)(r)g(r) - f(r)(l_{q,z}g)(r)) dr = W_d(f, g) - W_c(f, g)$$

для любых $f, g \in \mathcal{D}$, $z \in \mathbb{C}$ и $c, d \in (a, b)$. Поэтому пределы $W_a(f, g) = \lim_{r \downarrow a} W_r(f, g)$ и $W_b(f, g) = \lim_{r \uparrow b} W_r(f, g)$ существуют для любых $f, g \in \mathcal{D}_q^l$ и $f, g \in \mathcal{D}_q^r$ соответственно. Как следствие, имеем

$$\langle l_q f, [g] \rangle - \langle [f], l_q g \rangle = W_b(\bar{f}, g) - W_a(\bar{f}, g) \quad (26)$$

для всех $f, g \in \mathcal{D}_q$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $L_2(a, b)$.

Для любого линейного подпространства Z пространства $\mathcal{D}_q$ обозначим через $L_q(Z)$ линейный оператор в $L_2(a, b)$, определенный соотношениями

$$\begin{aligned} D_{L_q(Z)} &= \{[f]: f \in Z\}, \\ L_q(Z)[f] &= l_q f, \quad f \in Z. \end{aligned} \quad (27)$$

Определим минимальный оператор L_q , полагая

$$L_q = L_q(\mathcal{D}_q^0), \quad (28)$$

где

$$\mathcal{D}_q^0 = \{f \in \mathcal{D}_q: W_a(f, g) = W_b(f, g) = 0 \text{ для любого } g \in \mathcal{D}_q\}. \quad (29)$$

В силу (26) оператор $L_q(Z)$ является симметрическим тогда и только тогда, когда $W_a(\bar{f}, g) = W_b(\bar{f}, g)$ для всех $f, g \in Z$. В частности, оператор L_q симметрический. Кроме того, L_q замкнут и плотно определен, а его сопряженный оператор L_q^* имеет вид

$$L_q^* = L_q(\mathcal{D}_q) \quad (30)$$

(см. лемму 9.4 в [14]). Если T – симметрическое расширение L_q , то L_q^* – расширение T^* и, следовательно, T . Ввиду (30) отсюда следует, что T есть оператор вида $L_q(Z)$ для некоторого подпространства Z пространства $\mathcal{D}_q$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Самосопряженные операторы вида $L_q(Z)$ естественно рассматривать как самосопряженные реализации дифференциального выражения $-d^2/dr^2 + q$. Если оператор $L_q(Z)$ самосопряжен, то из равенства (30) и замкнутости L_q вытекает, что $L_q(Z)$ является расширением L_q , так как $L_q(\mathcal{D}_q)$ есть расширение $L_q(Z)$. Таким образом, самосопряженные реализации выражения $-d^2/dr^2 + q$ – это в точности самосопряженные расширения минимального оператора L_q .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Будем говорить, что линейное подпространство X пространства $\mathcal{D}_q^1$ является левым граничным пространством, если выполнены следующие условия:

- 1) $W_a(\bar{f}, g) = 0$ для всех $f, g \in X$;
- 2) если $g \in \mathcal{D}_q^1$ удовлетворяет равенству $W_a(\bar{f}, g) = 0$ для всех $f \in X$, то $g \in X$.

Определение правого граничного пространства получается заменой $\mathcal{D}_q^1$ на $\mathcal{D}_q^r$ и a на b .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Если $W_a(f, g) = 0$ для всех $f, g \in \mathcal{D}_q^1$, то говорят, что q отвечает случаю предельной точки (СПТ) в a . В противном случае говорят, что q отвечает случаю предельной окружности (СПО) в a . Сходным образом q отвечает СПТ в b , если $W_b(f, g) = 0$ для всех $f, g \in \mathcal{D}_q^r$ и отвечает СПО в b в противном случае.

Ясно, что q отвечает СПТ в a (в b) тогда и только тогда, когда $\mathcal{D}_q^1$ – единственное левое ($\mathcal{D}_q^r$ – единственное правое) граничное пространство. Для $f \in \mathcal{D}_q^1$ ($f \in \mathcal{D}_q^r$) положим

$$\mathcal{D}_{q,f}^1 = \{g \in \mathcal{D}_q^1 : W_a(\bar{f}, g) = 0\} \quad (\mathcal{D}_{q,f}^r = \{g \in \mathcal{D}_q^r : W_b(\bar{f}, g) = 0\}). \quad (31)$$

Для каждого $E \in \mathbb{R}$ обозначим через $S_{q,E}^1$ ($S_{q,E}^r$) множество всех таких нетривиальных вещественных элементов f пространства $\mathcal{D}_q^1$ ($\mathcal{D}_q^r$), что $l_{q,E}f = 0$.

Следующее предложение является переформулировкой известных результатов о самосопряженных расширениях оператора L_q (см., например, раздел 9.2 в [14]) на языке граничных пространств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть q – вещественная локально интегрируемая функция на (a, b) . Тогда верны следующие утверждения.

1. Пусть X и Y – соответственно левое и правое граничные пространства. Тогда оператор $L_q(X \cap Y)$ является самосопряженным расширением L_q .

2. Предположим, что $L_q(X \cap Y) = L_q(\tilde{X} \cap \tilde{Y})$ для некоторых левых граничных пространств X и $\tilde{X}$ и правых граничных пространств Y и $\tilde{Y}$. Тогда $X = \tilde{X}$ и $Y = \tilde{Y}$.

3. Пусть $E \in \mathbb{R}$ и $f \in S_{q,E}^1$ ($f \in S_{q,E}^r$). Тогда $\mathcal{D}_{q,f}^1$ – левое ($\mathcal{D}_{q,f}^r$ – правое) граничное пространство.

4. Пусть $z \in \mathbb{C}$. Тогда q отвечает СПО в a (в b) в том и только том случае, если каждая функция $f \in \mathcal{D}$ такая, что $l_{q,z}f = 0$ квадратично-интегрируема слева (справа) на (a, b) .

5. Если q отвечает СПТ в a или в b , то каждое самосопряженное расширение L_q совпадает с $L_q(X \cap Y)$ для некоторого левого граничного пространства X и правого граничного пространства Y .

6. Пусть q отвечает СПО в a (в b) и $E \in \mathbb{R}$. Тогда каждое левое (правое) граничное пространство совпадает с $\mathcal{D}_{q,f}^1$ ($\mathcal{D}_{q,f}^r$) для некоторого $f \in S_{q,E}^1$ ($f \in S_{q,E}^r$).

Операторы вида $L_q(X \cap Y)$, где X и Y – левое и правое граничные пространства, называются самосопряженными расширениями L_q с разделяющимися граничными условиями.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Как уже упоминалось выше, граничные пространства можно понимать как самосопряженные граничные условия. В этом смысле область определения $L_q(X \cap Y)$ состоит из $(\lambda_{a,b}$ -классов эквивалентности) всех элементов $\mathcal{D}_q$, удовлетворяющих слева и справа самосопряженным граничным условиям X и Y соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Пусть f и g – линейно независимые решения уравнения $l_{q,z}f = l_{q,z}g = 0$, где $\text{Im } z \neq 0$. Предположим, что f удовлетворяет самосопряженному граничному условию в a (т.е. принадлежит некоторому левому граничному пространству). Обозначим через A множество всех таких $\zeta \in \mathbb{C}$, что $g + \zeta f$ принадлежит некоторому правому граничному пространству. Тогда A является либо одноточечным множеством, либо окружностью в зависимости от того, какому случаю в b отвечает q – СПТ или СПО. Более того, A есть предел окружностей A_c , получающихся при замене b регулярным концом $c \in (a, b)$ в определении множества A . Такой предельный переход был исходно использован Вейлем [2] для введения различия между СПТ и СПО.

Если q отвечает СПТ как в a , так и в b , то из утверждения 1 предложения 8 следует, что оператор $L_q(\mathcal{D}_q)$ самосопряжен. Ввиду (30) это означает, что оператор L_q самосопряжен.

Для любого $f \in \mathcal{D}_q^1$ положим

$$L_q^f = L_q(\mathcal{D}_{q,f}^1 \cap \mathcal{D}_q^r). \quad (32)$$

ЛЕММА 11. Пусть $E \in \mathbb{R}$ и q отвечает СПО в a и СПТ в b . Тогда самосопряженные расширения L_q – это в точности операторы L_q^f , где $f \in S_{q,E}^1$. Если $f, g \in S_{q,E}^1$, то равенство $L_q^f = L_q^g$ справедливо тогда и только тогда, когда $g = cf$ для некоторого вещественного $c \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение сразу следует из утверждений 1, 3, 5 и 6 предложения 8. Пусть $f, g \in S_{q,E}^1$. Если $g = cf$, то в силу (31) имеем

$$\mathcal{D}_{q,f}^1 = \mathcal{D}_{q,g}^1 \quad (33)$$

и, следовательно, $L_q^f = L_q^g$. Обратно, если $L_q^f = L_q^g$, то равенство (33) вытекает из утверждений 2 и 3 предложения 8. Поскольку $f \in \mathcal{D}_{q,f}^1$ в силу (31), заключаем, что $f \in \mathcal{D}_{q,g}^1$. Это означает, что $W_a(g, f) = 0$. Так как $l_{q,z}f = l_{q,z}g = 0$, то $W(g, f) = 0$, и потому $g = cf$. ■

Рассмотрим теперь связанные с L_q разложения по собственным функциям.

Пусть $O \subset \mathbb{C}$ – открытое множество. Будем говорить, что отображение $u: O \rightarrow \mathcal{D}$ является q -решением в O , если $l_{q,z}u(z) = 0$ для любого $z \in O$. Назовем q -решение u в O аналитическим, если функции $z \rightarrow u(z|r)$ и $z \rightarrow \partial_r u(z|r)$ аналитичны в O для любого $r \in (a, b)$. Назовем q -решение u в O необнуляющимся, если $u(z) \neq 0$ для любого $z \in O$, и вещественным, если функция $u(E)$ вещественна для любого $E \in O \cap \mathbb{R}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Тройка (q, Y, u) называется тройкой разложения, если q – вещественная локально интегрируемая функция на (a, b) , Y – правое граничное пространство, u – вещественное необнуляющееся аналитическое q -решение в $\mathbb{C}$, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $u(z) \in \mathcal{D}_q^1$ для всех $z \in \mathbb{C}$;
- 2) найдется такое $E \in \mathbb{R}$, что $W_a(u(E), u(z)) = 0$ для всех $z \in \mathbb{C}$.

ЛЕММА 13. Пусть $\mathbf{t} = (q, Y, u)$ – тройка разложения. Тогда существует единственное левое граничное пространство $X^{\mathbf{t}}$ такое, что $u(z) \in X^{\mathbf{t}}$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Для любого $E \in \mathbb{R}$ имеем $X^{\mathbf{t}} = \mathcal{D}_{q, u(E)}^1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $E \in \mathbb{R}$ и X – левое граничное пространство, содержащее $u(E)$. В силу (31) и условия 1 определения 6 имеем $X \subset \mathcal{D}_{q, u(E)}^1$. С другой стороны, если $g \in \mathcal{D}_{q, u(E)}^1$, то $W_a(\bar{f}, g) = 0$ для всех $f \in X$, так как $\mathcal{D}_{q, u(E)}^1$ есть левое граничное пространство согласно утверждению 3 предложения 8. Ввиду условия 2 определения 6 заключаем, что $g \in X$ и, следовательно, $X = \mathcal{D}_{q, u(E)}^1$. Это означает, что пространство $X^{\mathbf{t}}$ (если оно существует) единственно и совпадает с $\mathcal{D}_{q, u(E)}^1$ для всех $E \in \mathbb{R}$. В силу (31) и определения 12 найдется такое $E \in \mathbb{R}$, что $u(z) \in \mathcal{D}_{q, u(E)}^1$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Тем самым доказано существование $X^{\mathbf{t}}$. ■

Пусть $\mathbf{t} = (q, Y, u)$ – тройка разложения, $\tilde{u}$ – такое вещественное аналитическое q -решение в $\mathbb{C}$, что $W(u(z), \tilde{u}(z)) \neq 0$ для любого $z \in \mathbb{C}$, и v – такое необнуляющееся аналитическое q -решение в $\mathbb{C}_+^{(9)}$, что $v(z) \in Y$ для всех $z \in \mathbb{C}_+$ (такие $\tilde{u}$ и v всегда существуют, см. лемму 2.4 в [8] и лемму 9.8 в [14]). Тогда $W(v(z), u(z)) \neq 0$ для любого $z \in \mathbb{C}_+$, поскольку в противном случае мы бы имели $u(z) \in X^{\mathbf{t}} \cap Y$ и, следовательно, самосопряженный оператор $L_q(X^{\mathbf{t}} \cap Y)$ обладал бы собственным значением в $\mathbb{C}_+$. Определим аналитическую функцию $\mathcal{M}_u^{\mathbf{t}}$ в $\mathbb{C}_+$ при помощи соотношения

$$\mathcal{M}_u^{\mathbf{t}}(z) = \frac{1}{\pi} \frac{W(v(z), \tilde{u}(z))}{W(v(z), u(z))W(u(z), \tilde{u}(z))} \quad (34)$$

(данное определение, очевидно, не зависит от выбора v). Следуя [8], будем называть такие функции сингулярными t -функциями Титчмарша–Вейля. Мы увидим, что иногда бывает полезно рассматривать q -решения $\tilde{u}$, определенные не на всей комплексной плоскости, а на некотором открытом множестве $O \subset \mathbb{C}$. В таком случае будем предполагать, что функция $\mathcal{M}_u^{\mathbf{t}}$ определена на $O \cap \mathbb{C}_+$.

Обозначим через $L_2^c(a, b)$ подпространство пространства $L_2(a, b)$, состоящее из всех его элементов, обращающихся в нуль λ -п.в. вне некоторого компактного подмножества (a, b) . Следующее предложение дает способ построения разложений по собственным функциям для самосопряженных расширений L_q с разделяющимися граничными условиями.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. Пусть $\mathbf{t} = (q, Y, u)$ – тройка разложения. Тогда верны следующие утверждения.

⁹⁾Как обычно, $\mathbb{C}_+$ обозначает открытую верхнюю полуплоскость комплексной плоскости: $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.

1. Существует единственная положительная мера Радона σ на $\mathbb{R}$ (называемая спектральной мерой для $\mathfrak{t}$) такая, что

$$\int \varphi(E) \operatorname{Im} \mathcal{M}_{\tilde{u}}^{\mathfrak{t}}(E + i\eta) dE \rightarrow \int \varphi(E) d\sigma(E) \quad (\eta \downarrow 0)$$

для любой непрерывной функции φ на $\mathbb{R}$ с компактным носителем и любого такого вещественного аналитического q -решения $\tilde{u}$ в $\mathbb{C}$, что $W(u(z), \tilde{u}(z)) \neq 0$ для всех $z \in \mathbb{C}$.

2. Пусть σ – спектральная мера для $\mathfrak{t}$. Существует единственный унитарный оператор $U: L_2(a, b) \rightarrow L_2(\mathbb{R}, \sigma)$ (называемый спектральным преобразованием для $\mathfrak{t}$) такой, что

$$(U\psi)(E) = \int_a^b u(E|r)\psi(r) dr, \quad \psi \in L_2^c(a, b),$$

для σ -п.в. E .

3. Пусть σ и U – спектральные мера и преобразование для $\mathfrak{t}$, а левое граничное пространство $X^{\mathfrak{t}}$ удовлетворяет условиям леммы 13. Тогда

$$L_q(X^{\mathfrak{t}} \cap Y) = U^{-1}T_{\iota}^{\sigma}U,$$

где ι – тождественная функция на $\mathbb{R}$.

4. Пусть σ – спектральная мера для $\mathfrak{t}$, $O \subset \mathbb{C}$ – открытое множество, $\tilde{u}$ – такое вещественное аналитическое q -решение в O , что $W(u(z), \tilde{u}(z)) \neq 0$ для всех $z \in O$. Тогда

$$\int_{\operatorname{supp} \varphi} \varphi(E) \operatorname{Im} \mathcal{M}_{\tilde{u}}^{\mathfrak{t}}(E + i\eta) dE \rightarrow \int_{O \cap \mathbb{R}} \varphi(E) d\sigma(E) \quad (\eta \downarrow 0)$$

для любой непрерывной функции φ на $O \cap \mathbb{R}$ с компактным носителем ($\operatorname{supp} \varphi$ обозначает носитель φ).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения 1–3 представляют собой простую переформулировку соответствующих результатов работы [8] на языке граничных пространств. Пусть O и $\tilde{u}$ удовлетворяют условиям утверждения 4, а θ – такое вещественное аналитическое q -решение в $\mathbb{C}$, что $W(u(z), \theta(z)) \neq 0$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Подстановка $f_1 = u(z)$, $f_2 = v(z)$, $f_3 = \tilde{u}(z)$ и $f_4 = \theta(z)$ в (24) с последующим делением результата на $\pi W(u(z), v(z))W(u(z), \theta(z))W(u(z), \tilde{u}(z))$ приводит к равенству

$$\mathcal{M}_{\tilde{u}}^{\mathfrak{t}}(z) = \mathcal{M}_{\theta}^{\mathfrak{t}}(z) + \frac{1}{\pi} \frac{W(\tilde{u}(z), \theta(z))}{W(u(z), \theta(z))W(u(z), \tilde{u}(z))}$$

для любого $z \in O \cap \mathbb{C}_+$. Утверждение 4 теперь следует из утверждения 1, так как последнее слагаемое в правой части аналитично в O и вещественно на $O \cap \mathbb{R}$. ■

СЛЕДСТВИЕ 15. Пусть σ и U – спектральные мера и преобразование для тройки разложения $\mathfrak{t} = (q, Y, u)$. Тогда

$$(U^{-1}\varphi)(r) = \int u(E|r)\varphi(E) d\sigma(E), \quad \varphi \in L_2^c(\mathbb{R}, \sigma), \quad (35)$$

для λ -п.в. $r \in (a, b)$. Если $\sigma(\{E\}) \neq 0$ для некоторого $E \in \mathbb{R}$, то $[u(E)]$ – собственная функция оператора $L_q(X^{\mathfrak{t}} \cap Y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\varphi \in L_2^c(\mathbb{R}, \sigma)$ и $r \in (a, b)$ обозначим через $\check{\varphi}(r)$ правую часть (35). Согласно утверждению 2 предложения 14 имеем

$$\langle \psi, U^{-1}\varphi \rangle = \langle U\psi, \varphi \rangle = \int \varphi(E) d\sigma(E) \int_a^b \overline{\psi(r)} u(E|r) dr = \int_a^b \overline{\psi(r)} \check{\varphi}(r) dr$$

для любого $\psi \in L_2^c(a, b)$. Отсюда следует равенство (35). В частности, имеем $U^{-1}[\chi_{\{E\}}]_\sigma = \sigma(\{E\})[u(E)]$, где $\chi_{\{E\}}$ – характеристическая функция одноточечного множества $\{E\}$. Согласно утверждению 3 предложения 14 это означает, что $[u(E)]$ является собственной функцией оператора $L_q(X^t \cap Y)$ при условии $\sigma(\{E\}) \neq 0$. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 16. Приведенное выше доказательство предложения 14 опирается на результаты работы [8]. В то же время это утверждение нетрудно вывести исходя из общего подхода Кодаиры [13], основанного на использовании матричнозначных мер. В самом деле, если положить $s_1(z) = \tilde{u}(z)/W(u(z), \tilde{u}(z))$ и $s_2(z) = u(z)$ для $z \in \mathbb{C}$, то единственный не вещественный элемент $M_{22}(z)$ характеристической матрицы M , определенной формулой (1.13) в работе [13], будет равен $\pi M_u^t(z)$, и, следовательно, в этом случае теорема 1.3 в [13] в основном совпадает с утверждениями 1–3 предложения 14. Данное в [8] простое прямое доказательство использует лишь одну m -функцию и обходится без привлечения матричнозначных мер. Оно существенно опирается на технику, развитую в статье [6] для потенциалов, отвечающих СПТ на обоих концах рассматриваемого интервала (анализ в том же духе для СПО на одном из концов можно найти в [16]). Подобный подход к отысканию спектральных мер был также предложен в работе [9] в контексте уравнения Шредингера с обратноквадратичным потенциалом.

Если функция q локально интегрируема на (a, b) , то из формул (28) и (29) следует, что пространство $C_0^\infty(a, b)$ гладких функций на (a, b) с компактным носителем содержится в D_q^0 , а L_q является расширением $L_q(C_0^\infty(a, b))$. Доказательство следующей леммы приведено в приложении Б.

ЛЕММА 17. Пусть q – вещественная локально интегрируемая функция на (a, b) . Тогда L_q есть замыкание $L_q(C_0^\infty(a, b))$.

3. РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ДЛЯ ОБРАТНОКВАДРАТИЧНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Предположим теперь, что $a = 0$ и $b = \infty$, и применим приведенную выше общую теорию к потенциалу q_κ , определенному формулой (5). Из (4) и (27) сразу следует, что $h_\kappa = L_{q_\kappa}(C_0^\infty(\mathbb{R}_+))$. Ввиду (6) и леммы 17 отсюда вытекает, что

$$h_\kappa = L_{q_\kappa}, \quad \kappa \in \mathbb{R}. \quad (36)$$

Уравнение $l_{q_\kappa} f = 0$ имеет линейно независимые решения $r^{1/2 \pm \kappa}$ при $\kappa \neq 0$ и решения $r^{1/2}$ и $r^{1/2} \ln r$ при $\kappa = 0$. В силу утверждения 4 предложения 8 можно сделать следующие заключения:

- 1) q_κ отвечает СПТ в точках 0 и ∞ для таких вещественных κ , что $|\kappa| \geq 1$;
- 2) q_κ отвечает СПТ в ∞ и СПО в 0 при $-1 < \kappa < 1$.

Поэтому оператор h_κ самосопряжен при $|\kappa| \geq 1$ и имеет различные самосопряженные расширения при $-1 < \kappa < 1$.

Для любого $\kappa \in \mathbb{C}$ определим отображение $u^\kappa: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{D}$ при помощи (7). В силу (10) имеем

$$l_{q_\kappa, z} u^{\pm\kappa}(z) = 0, \quad z, \kappa \in \mathbb{C}. \quad (37)$$

Мы будем в дальнейшем систематически пользоваться обозначением (15) для комплексной плоскости с разрезом вдоль луча. Обозначим через $\ln$ ветвь логарифма в $\mathbb{C}_{3\pi/2}$, удовлетворяющую условию $\ln 1 = 0$, и положим $z^\rho = e^{\rho \ln z}$ для всех $z \in \mathbb{C}_{3\pi/2}$ и $\rho \in \mathbb{C}$.

Для каждого $\kappa \in \mathbb{C}$ определим отображение $v^\kappa: \mathbb{C}_{3\pi/2} \rightarrow \mathcal{D}$ при помощи соотношения

$$v^\kappa(z|r) = \frac{i\pi}{2} e^{i\pi\kappa/2} r^{1/2} H_\kappa^{(1)}(r z^{1/2}), \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad z \in \mathbb{C}_{3\pi/2}, \quad (38)$$

где $H_\kappa^{(1)}$ – функция Ханкеля первого рода порядка κ . Поскольку $H_\kappa^{(1)}$ – решение уравнения Бесселя, имеем

$$l_{q_\kappa, z} v^\kappa(z) = 0 \quad (39)$$

для любых $z \in \mathbb{C}_{3\pi/2}$ и $\kappa \in \mathbb{C}$. Из равенства $H_{-\kappa}^{(1)} = e^{i\pi\kappa} H_\kappa^{(1)}$ ([12], раздел 7.2.1, формула (9)) вытекает, что

$$v^{-\kappa}(z) = v^\kappa(z), \quad \kappa \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C}_{3\pi/2}. \quad (40)$$

Пользуясь известным асимптотическим видом функции $H_\kappa^{(1)}(\zeta)$ при $\zeta \rightarrow \infty$ (см. [12], раздел 7.13.1, формула (1)), находим, что

$$v^\kappa(z|r) \sim 2^{-1} \sqrt{\pi} (i+1) z^{-1/4} e^{iz^{1/2}r}, \quad r \rightarrow \infty, \quad (41)$$

для любых $\kappa \in \mathbb{C}$ и $z \in \mathbb{C}_{3\pi/2}$, и, следовательно, функция $v^\kappa(z)$ квадратично-интегрируема справа для всех $\kappa \in \mathbb{C}$ и $z \in \mathbb{C}_+$. С учетом выражения

$$W_z(J_\kappa, H_\kappa^{(1)}) = \frac{2i}{\pi z} \quad (42)$$

для вронскиана функций Бесселя ([12], раздел 7.11, формула (29)) и равенства (40) из формул (7), (9) и (38) следует, что

$$W(v^\kappa(z), u^\kappa(z)) = z^{-\kappa/2} e^{i\pi\kappa/2}, \quad W(v^\kappa(z), u^{-\kappa}(z)) = z^{\kappa/2} e^{-i\pi\kappa/2} \quad (43)$$

для любых $\kappa \in \mathbb{C}$ и $z \in \mathbb{C}_{3\pi/2}$.

ЛЕММА 18. Пусть $\kappa > -1$. Тогда $u^\kappa(z)$ является нетривиальным элементом $\mathcal{D}_{q_\kappa}^1$ для любого $z \in \mathbb{C}$ и $W_0(u^\kappa(z), u^\kappa(z')) = 0$ для всех $z, z' \in \mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\kappa > -1$, из (7) следует, что функция $u^\kappa(z)$ квадратично-интегрируема слева для всех $z \in \mathbb{C}$. Согласно (37) это означает, что $u^\kappa(z) \in \mathcal{D}_{q_\kappa}^1$ для всех $z \in \mathbb{C}$. При $z \neq 0$ функция $u^\kappa(z)$ нетривиальна в силу (7), так как в противном случае функция $\mathcal{X}_\kappa$ была бы тождественно равна нулю. Поскольку $u^\kappa(0|r) = 2^{-\kappa} r^{1/2+\kappa} / \Gamma(\kappa+1)$ в силу (7) и (8), заключаем, что функция $u^\kappa(0)$ нетривиальна при $\kappa > -1$. Согласно (7) и (25) имеем

$$W_r(u^\kappa(z), u^\kappa(z')) = 2r^{2+2\kappa} (z' \mathcal{X}_\kappa(r^2 z) \mathcal{X}'_\kappa(r^2 z') - z \mathcal{X}'_\kappa(r^2 z) \mathcal{X}_\kappa(r^2 z')),$$

и, следовательно, $W_0(u^\kappa(z), u^\kappa(z')) = 0$ для всех $z, z' \in \mathbb{C}$. ■

В силу (37) u^κ является вещественным аналитическим q_κ -решением в $\mathbb{C}$ для любого $\kappa \in \mathbb{R}$. Так как q_κ отвечает СПТ в ∞ , $\mathcal{D}_{q_\kappa}^r$ есть правое граничное пространство для всех $\kappa \in \mathbb{R}$. Поэтому из определения 12 и леммы 18 вытекает, что $\mathbf{t}_\kappa = (q_\kappa, \mathcal{D}_{q_\kappa}^r, u^\kappa)$ является тройкой разложения для любого $\kappa > -1$. Обозначим через σ_κ спектральную меру для $\mathbf{t}_\kappa$.

ЛЕММА 19. Пусть $\kappa > -1$. Тогда $\sigma_\kappa = \mathcal{V}_\kappa$, где $\mathcal{V}_\kappa$ – мера на $\mathbb{R}$, определяемая формулой (11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (38), (39) и (41) v^κ есть необнуляющееся аналитическое q_κ -решение в $\mathbb{C}_{3\pi/2}$, удовлетворяющее условию $v^\kappa(z) \in \mathcal{D}_{q_\kappa}^r$ для любого $z \in \mathbb{C}_+$. Обозначим через $\tilde{u}_1$ сужение $v^\kappa|_O$ отображения v^κ на область $O = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$. Согласно (38) при $E < 0$ имеем $\tilde{u}_1(E) = r^{1/2} K_\kappa(r\sqrt{|E|})$, где K_κ – модифицированная функция Бесселя второго рода порядка κ ([12], раздел 7.2.2, формула (15)). Поэтому функция $\tilde{u}_1(E)$ вещественна для вещественных $E < 0$. В силу (43) для всех $z \in O$ имеем $W(\tilde{u}_1(z), u^\kappa(z)) \neq 0$. Подставляя $\mathbf{t} = \mathbf{t}_\kappa$, $v = v^\kappa|_{\mathbb{C}_+}$ и $\tilde{u} = \tilde{u}_1$ в (34), находим, что $\mathcal{M}_{\tilde{u}_1}^{\mathbf{t}_\kappa}(z) = 0$ для всех $z \in O \cap \mathbb{C}_+$. В силу утверждения 4 предложения 14 заключаем, что σ_κ обращается в нуль и, как следствие, совпадает с $\mathcal{V}_\kappa$ на $(-\infty, 0)$. Зададим отображение $\tilde{u}_2: \mathbb{C}_\pi \rightarrow \mathcal{D}$ равенством $\tilde{u}_2(z|r) = r^{1/2} Y_\kappa(rz^{1/2})$, где Y_κ – функция Бесселя второго рода порядка κ . Так как Y_κ удовлетворяет уравнению Бесселя, то для любого $z \in \mathbb{C}_\pi$ имеем $l_{q_\kappa, z} \tilde{u}_2(z) = 0$, и, следовательно, $\tilde{u}_2$ является аналитическим q_κ -решением в $\mathbb{C}_\pi$. Поскольку функция Y_κ вещественна для положительных вещественных значений аргумента, функция $\tilde{u}_2(E)$ вещественна при $E > 0$. Так как $H_\kappa^{(1)} = J_\kappa + iY_\kappa$, то из (42) следует, что

$$W_z(J_\kappa, Y_\kappa) = W_z(H_\kappa^{(1)}, Y_\kappa) = -iW_z(J_\kappa, H_\kappa^{(1)}) = \frac{2}{\pi z}.$$

В силу (7), (9) и (38) находим, что $W(u^\kappa(z), \tilde{u}_2(z)) = 2z^{-\kappa/2}/\pi \neq 0$ при $z \in \mathbb{C}_\pi$ и $W(v^\kappa(z), \tilde{u}_2(z)) = ie^{i\pi\kappa/2}$ при $z \in \mathbb{C}_+$. Ввиду (43) подстановка $\mathbf{t} = \mathbf{t}_\kappa$, $v = v^\kappa|_{\mathbb{C}_+}$ и $\tilde{u} = \tilde{u}_2$ в (34) дает равенство

$$\mathcal{M}_{\tilde{u}_2}^{\mathbf{t}_\kappa}(z) = \frac{iz^\kappa}{2}, \quad z \in \mathbb{C}_+.$$

Поэтому согласно утверждению 4 предложения 14 заключаем, что σ_κ совпадает с $\mathcal{V}_\kappa$ на $(0, \infty)$. Остается заметить, что $\sigma_\kappa(\{0\}) = 0$, потому что в противном случае функция $u^\kappa(0)$ была бы квадратично-интегрируемой в силу следствия 15. ■

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Из утверждения 2 предложения 14 и леммы 19 следует, что оператор U_κ существует и совпадает со спектральным преобразованием для $\mathbf{t}_\kappa$. Поэтому в силу утверждения 1 предложения 8, утверждения 3 предложения 14, формулы (36) и леммы 19 заключаем, что $U_\kappa^{-1} \mathcal{T}_l^{\mathcal{V}_\kappa} U_\kappa$ представляет собой самосопряженное расширение h_κ . При $\kappa \geq 1$ оператор h_κ самосопряжен и, следовательно, совпадает со своим самосопряженным расширением $U_\kappa^{-1} \mathcal{T}_l^{\mathcal{V}_\kappa} U_\kappa$. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 20. Как уже отмечалось в разделе 1, оператор U_κ в основном совпадает с преобразованием Ханкеля. В работах [6], [8], где данное преобразование рассматривалось сходным образом, требовалось, чтобы второе решение $\tilde{u}$, используемое при вычислении спектральной меры, было глобально определено. Это приводило к необходимости различать целые и нецелые значения κ . Использование

локально определенного отображения $\tilde{y}$ в доказательстве леммы 19 позволило нам единообразно рассматривать все значения κ .

Для $\kappa \in \mathcal{O}$ и $\vartheta \in \mathbb{C}$ определим отображение $u_{\vartheta}^{\kappa}: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{D}$ формулами (12) и (13). Так как равенство (10) остается верным при замене $u^{\pm\kappa}(z)$ на $u_{\vartheta}^{\kappa}(z)$ (см. раздел 1), то

$$l_{q_{\kappa}, z} u_{\vartheta}^{\kappa}(z) = 0, \quad \kappa \in \mathcal{O}, \quad \vartheta, z \in \mathbb{C}. \quad (44)$$

В силу (12) и (43) имеем

$$W(v^{\kappa}(z), u_{\vartheta}^{\kappa}(z)) = \frac{z^{-\kappa/2} e^{i\pi\kappa/2}}{\sin \pi\kappa} (\sin(\vartheta + \vartheta_{\kappa}) - e^{-i\pi\kappa} z^{\kappa} \sin(\vartheta - \vartheta_{\kappa})) \quad (45)$$

для всех $\kappa \in \mathcal{O} \setminus \{0\}$, $\vartheta \in \mathbb{C}$ и $z \in \mathbb{C}_{3\pi/2}$. Согласно лемме 2 функция $\kappa \rightarrow W(v^{\kappa}(z), u_{\vartheta}^{\kappa}(z))$ аналитична в $\mathcal{O}$ при фиксированных ϑ и z , и, следовательно, величину $W(v^0(z), u_{\vartheta}^0(z))$ можно найти, вычисляя предел $\kappa \rightarrow 0$ в (45). В результате получаем

$$W(v^0(z), u_{\vartheta}^0(z)) = \cos \vartheta + (i - \pi^{-1} \ln z) \sin \vartheta, \quad \vartheta \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C}_{3\pi/2}. \quad (46)$$

Для любых $\kappa \in \mathcal{O}$ и $z \in \mathbb{C}$ положим

$$w^{\kappa}(z) = u_{\pi/2 + \vartheta_{\kappa}}^{\kappa}(z), \quad (47)$$

где ϑ_{κ} задается формулой (14). Из (12) и (13) следует, что

$$w^{\kappa}(z) = \frac{u^{\kappa}(z) \cos \pi\kappa - u^{-\kappa}(z)}{\sin \pi\kappa}, \quad \kappa \in \mathcal{O} \setminus \{0\}, \quad (48)$$

$$w^0(z|r) = \frac{2}{\pi} \left[\left(\ln \frac{r}{2} + \gamma \right) u^0(z|r) - \sqrt{r} \mathcal{Y}(r^2 z) \right], \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad (49)$$

для любого $z \in \mathbb{C}$ и

$$u_{\vartheta}^{\kappa}(z) = u^{\kappa}(z) \cos(\vartheta - \vartheta_{\kappa}) + w^{\kappa}(z) \sin(\vartheta - \vartheta_{\kappa}) \quad (50)$$

для всех $\kappa \in \mathcal{O}$ и $\vartheta, z \in \mathbb{C}$. В силу (44) и (47) имеем

$$l_{q_{\kappa}, z} w^{\kappa}(z) = 0, \quad \kappa \in \mathcal{O}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (51)$$

ЛЕММА 21. Пусть $-1 < \kappa < 1$. Тогда $u^{\kappa}(z), w^{\kappa}(z) \in \mathcal{D}_{q_{\kappa}}^1$ для любого $z \in \mathbb{C}$ и

$$W_0(w^{\kappa}(z), w^{\kappa}(z')) = 0, \quad W_0(u^{\kappa}(z), w^{\kappa}(z')) = \frac{2}{\pi}$$

для всех $z, z' \in \mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку q_{κ} отвечает СПО в 0 при $-1 < \kappa < 1$, из утверждения 4 предложения 8 и равенств (37) и (51) вытекает, что $u^{\kappa}(z), w^{\kappa}(z) \in \mathcal{D}_{q_{\kappa}}^1$ для любого $z \in \mathbb{C}$. Для $z \in \mathbb{C}$ и $-1 < \kappa < 1$ определим гладкую функцию a_z^{κ} на $\mathbb{R}$, полагая $a_z^{\kappa}(r) = \mathcal{X}_{\kappa}(r^2 z)$, где $\mathcal{X}_{\kappa}$ задается формулой (8). Для $r \in \mathbb{R}_+$ имеем $u^{\kappa}(z|r) = r^{1/2+\kappa} a_z^{\kappa}(r)$. Поэтому из (25) получаем

$$W_r(u^{\kappa}(z), u^{-\kappa}(z')) = r W_r(a_z^{\kappa}, a_{z'}^{-\kappa}) - 2\kappa a_z^{\kappa}(r) a_{z'}^{-\kappa}(r)$$

для любых $r \in \mathbb{R}_+$ и $z, z' \in \mathbb{C}$. Поскольку $a_z^\kappa(0) = 2^{-\kappa}/\Gamma(1+\kappa)$ для любого $z \in \mathbb{C}$, заключаем, что $W_0(u^\kappa(z), u^{-\kappa}(z')) = -2 \sin \pi \kappa / \pi$. Утверждение леммы для $0 < |\kappa| < 1$ теперь следует из (48) и леммы 18. Для $z \in \mathbb{C}$ определим гладкую функцию b_z на $\mathbb{R}$, полагая

$$b_z(r) = (\gamma - \ln 2) \mathcal{X}_0(r^2 z) - \mathcal{Y}(r^2 z).$$

В силу (49) имеем

$$\frac{1}{2} \pi w^0(z|r) = r^{1/2} \ln r a_z^0(r) + r^{1/2} b_z(r)$$

для любого $r \in \mathbb{R}_+$. Поэтому из (25) находим

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} W_r(u^0(z), w^0(z')) &= r W_r(a_z^0, b_{z'}) + r \ln r W_r(a_z^0, a_{z'}^0) + a_z^0(r) a_{z'}^0(r), \\ \frac{\pi^2}{4} W_r(w^0(z), w^0(z')) &= r \ln^2 r W_r(a_z^0, a_{z'}^0) + r \ln r (W_r(a_z^0, b_{z'}) + W_r(b_z, a_{z'}^0)) + \\ &\quad + r W_r(b_z, b_{z'}) + b_z(r) a_{z'}^0(r) - a_z^0(r) b_{z'}(r) \end{aligned}$$

для любых $r \in \mathbb{R}_+$ и $z, z' \in \mathbb{C}$. Поскольку $a_z^0(0) = 1$ и $b_z(0) = \gamma - \ln 2$ для любого $z \in \mathbb{C}$, отсюда следует требуемое утверждение при $\kappa = 0$. ■

С учетом (37) и (51) из леммы 21 вытекает, что

$$W(u^\kappa(z), w^\kappa(z)) = \frac{2}{\pi} \quad (52)$$

для любых $z \in \mathbb{C}$ и $-1 < \kappa < 1$ (и, следовательно, для всех $z \in \mathbb{C}$ и $\kappa \in \mathcal{O}$), и в силу (50) получаем

$$W(u_{\vartheta}^\kappa(z), u_{\vartheta-\pi/2}^\kappa(z)) = -\frac{2}{\pi}, \quad \vartheta, z \in \mathbb{C}, \quad \kappa \in \mathcal{O}. \quad (53)$$

Пусть $-1 < \kappa < 1$ и $\vartheta \in \mathbb{R}$. Согласно (44) и (53) отображение u_{ϑ}^κ является вещественным необнуляющимся аналитическим q_κ -решением в $\mathbb{C}$. В силу (50), леммы 18 и леммы 21 имеем $u_{\vartheta}^\kappa(z) \in \mathcal{D}_{q_\kappa}^1$ для всех $z \in \mathbb{C}$ и $W_0(u_{\vartheta}^\kappa(z), u_{\vartheta}^\kappa(z')) = 0$ для всех $z, z' \in \mathbb{C}$. Так как $\mathcal{D}_{q_\kappa}^r$ – правое граничное пространство, то из определения 12 следует, что $\mathbf{t}_{\kappa, \vartheta} = (q_\kappa, \mathcal{D}_{q_\kappa}^r, u_{\vartheta}^\kappa)$ есть тройка разложения. Обозначим через $\sigma_{\kappa, \vartheta}$ спектральную меру для $\mathbf{t}_{\kappa, \vartheta}$.

ЛЕММА 22. Пусть $-1 < \kappa < 1$ и $\vartheta \in \mathbb{R}$. Тогда $\sigma_{\kappa, \vartheta} = \mathcal{V}_{\kappa, \vartheta}$, где $\mathcal{V}_{\kappa, \vartheta}$ – мера на $\mathbb{R}$, задаваемая формулами (16)–(21).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (38), (39) и (41) отображение v^κ является таким необнуляющимся аналитическим q_κ -решением в $\mathbb{C}_{3\pi/2}$, что $v^\kappa(z) \in \mathcal{D}_{q_\kappa}^r$ для любого $z \in \mathbb{C}_+$. Определим мероморфную функцию $\mathcal{M}_{\kappa, \vartheta}$ в $\mathbb{C}_{3\pi/2}$ соотношением

$$\mathcal{M}_{\kappa, \vartheta}(z) = -\frac{1}{2} \frac{W(v^\kappa(z), u_{\vartheta-\pi/2}^\kappa(z))}{W(v^\kappa(z), u_{\vartheta}^\kappa(z))}, \quad z \in \mathbb{C}_{3\pi/2}. \quad (54)$$

Подставляя $\mathbf{t} = \mathbf{t}_{\kappa, \vartheta}$ и $v = v^\kappa|_{\mathbb{C}_+}$ в (34) и учитывая (53), заключаем, что $\mathcal{M}_{\kappa, \vartheta}$ совпадает на $\mathbb{C}_+$ с сингулярной m -функцией Титчмарша–Вейля $\mathcal{M}_{\tilde{u}}^{\mathbf{t}_{\kappa, \vartheta}}$ для $\tilde{u} = u_{\vartheta-\pi/2}^\kappa$. Согласно утверждению 1 предложения 14 имеем

$$\int \varphi(E) d\sigma_{\kappa, \vartheta}(E) = \lim_{\eta \downarrow 0} \int \varphi(E) \operatorname{Im} \mathcal{M}_{\kappa, \vartheta}(E + i\eta) dE \quad (55)$$

для любой непрерывной функции φ на $\mathbb{R}$ с компактным носителем. Заметим, что $\sigma_{\kappa, \vartheta}(\{0\}) = 0$, потому что в противном случае функция $u_{\vartheta}^{\kappa}(0)$ была бы квадратично-интегрируемой в силу следствия 15. Поэтому достаточно показать, что $\sigma_{\kappa, \vartheta}$ совпадает с $\mathcal{V}_{\kappa, \vartheta}$ на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$. Это нетрудно сделать, пользуясь представлением (55) для $\sigma_{\kappa, \vartheta}$. Поскольку явные выражения для $\mathcal{M}_{\kappa, \vartheta}$ отличаются друг от друга при $0 < |\kappa| < 1$ и $\kappa = 0$, мы рассмотрим эти случаи по отдельности.

1. Случай $0 < |\kappa| < 1$. Согласно (45) и (54) имеем

$$\mathcal{M}_{\kappa, \vartheta}(z) = \frac{1 \cos(\vartheta + \vartheta_{\kappa}) - e^{-i\pi\kappa} z^{\kappa} \cos(\vartheta - \vartheta_{\kappa})}{2 \sin(\vartheta + \vartheta_{\kappa}) - e^{-i\pi\kappa} z^{\kappa} \sin(\vartheta - \vartheta_{\kappa})}. \quad (56)$$

Легко видеть, что $\mathcal{M}_{\kappa, \vartheta}$ не имеет особенностей на $(0, \infty)$ и

$$\operatorname{Im} \mathcal{M}_{\kappa, \vartheta}(E) = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \pi \kappa}{E^{-\kappa} \sin^2 \vartheta_+ - 2 \cos \pi \kappa \sin \vartheta_+ \sin \vartheta_- + E^{\kappa} \sin^2 \vartheta_-}, \quad E > 0,$$

где $\vartheta_{\pm} = \vartheta \pm \vartheta_{\kappa}$. В силу (16), (17) и (55) заключаем, что $\sigma_{\kappa, \vartheta}$ совпадает с $\mathcal{V}_{\kappa, \vartheta}$ на $(0, \infty)$. При $\vartheta \in [-|\vartheta_{\kappa}|, |\vartheta_{\kappa}|] + \pi\mathbb{Z}$ функция $\mathcal{M}_{\kappa, \vartheta}$ вещественна на $(-\infty, 0)$ и не имеет особенностей на этом множестве. Поэтому из формулы (55) следует, что $\sigma_{\kappa, \vartheta}$ обращается в нуль на $(-\infty, 0)$ для таких ϑ . Если $\vartheta \in (|\vartheta_{\kappa}|, \pi - |\vartheta_{\kappa}|) + \pi\mathbb{Z}$, то функция $\mathcal{M}_{\kappa, \vartheta}$ имеет простой полюс в точке $E_{\kappa, \vartheta}$, определенной формулой (18), и, следовательно, представима в виде

$$\mathcal{M}_{\kappa, \vartheta}(z) = g(z) + \frac{A}{E_{\kappa, \vartheta} - z},$$

где g – функция, аналитическая в $\mathbb{C}_{3\pi/2}$ и вещественная на $(-\infty, 0)$, и

$$A = \lim_{z \rightarrow E_{\kappa, \vartheta}} (E_{\kappa, \vartheta} - z) \mathcal{M}_{\kappa, \vartheta}(z) = \frac{\sin \pi \kappa |E_{\kappa, \vartheta}|}{2\kappa \sin(\vartheta + \vartheta_{\kappa}) \sin(\vartheta - \vartheta_{\kappa})}.$$

Поэтому из (55) вытекает, что мера $\sigma_{\kappa, \vartheta}$ равна $\pi A \delta_{E_{\kappa, \vartheta}}$ на $(-\infty, 0)$. Таким образом, $\sigma_{\kappa, \vartheta}$ совпадает с $\mathcal{V}_{\kappa, \vartheta}$ на $(-\infty, 0)$ для всех ϑ .

2. Случай $\kappa = 0$. Согласно (46) и (54) имеем

$$\mathcal{M}_{0, \vartheta}(z) = \frac{1}{2} \frac{(i - \pi^{-1} \ln z) \cos \vartheta - \sin \vartheta}{\cos \vartheta + (i - \pi^{-1} \ln z) \sin \vartheta}.$$

Легко видеть, что $\mathcal{M}_{0, \vartheta}$ не имеет особенностей на $(0, \infty)$ и

$$\operatorname{Im} \mathcal{M}_{0, \vartheta}(E) = \frac{1}{2} \frac{1}{(\cos \vartheta - \pi^{-1} \ln E \sin \vartheta)^2 + \sin^2 \vartheta}, \quad E > 0.$$

В силу (19), (21) и (55) заключаем, что $\sigma_{0, \vartheta}$ совпадает с $\mathcal{V}_{0, \vartheta}$ на $(0, \infty)$. При $\vartheta \in \pi\mathbb{Z}$ функция $\mathcal{M}_{0, \vartheta}$ вещественна на $(-\infty, 0)$ и не имеет особенностей на этом множестве. Поэтому из формулы (55) следует, что мера $\sigma_{0, \vartheta}$ обращается в нуль на $(-\infty, 0)$ для таких ϑ . Если $\vartheta \notin \pi\mathbb{Z}$, то функция $\mathcal{M}_{0, \vartheta}$ имеет простой полюс в точке $E_{0, \vartheta}$, определенной формулой (20), и, следовательно, представима в виде

$$\mathcal{M}_{0, \vartheta}(z) = g(z) + \frac{A}{E_{0, \vartheta} - z},$$

где g – функция, аналитическая в $\mathbb{C}_{3\pi/2}$ и вещественная на $(-\infty, 0)$, и

$$A = \lim_{z \rightarrow E_{0,\vartheta}} (E_{0,\vartheta} - z) \mathcal{M}_{0,\vartheta}(z) = \frac{\pi |E_{0,\vartheta}|}{2 \sin^2 \vartheta}.$$

Поэтому из (55) вытекает, что мера $\sigma_{0,\vartheta}$ равна $\pi A \delta_{E_{0,\vartheta}}$ на $(-\infty, 0)$. Таким образом, $\sigma_{0,\vartheta}$ совпадает с $\mathcal{V}_{0,\vartheta}$ на $(-\infty, 0)$ для всех ϑ . ■

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Из утверждения 2 предложения 14 и леммы 22 следует, что оператор $U_{\kappa,\vartheta}$ существует и совпадает со спектральным преобразованием для $\mathfrak{t}_{\kappa,\vartheta}$. Поэтому согласно утверждению 3 предложения 14 и лемме 22 оператор $h_{\kappa,\vartheta}$ равен $L_q(X^{\mathfrak{t}_{\kappa,\vartheta}} \cap \mathcal{D}_{q_\kappa}^r)$. В силу утверждения 1 предложения 8 и формулы (36) заключаем, что $h_{\kappa,\vartheta}$ есть самосопряженное расширение h_κ . В силу леммы 13 и формулы (32) имеем

$$h_{\kappa,\vartheta} = L_{q_\kappa}^{u_\vartheta^\kappa(0)}. \quad (57)$$

В силу (50) и (52) каждая вещественная функция $f \in \mathcal{D}$, удовлетворяющая уравнению $l_{q_\kappa} f = 0$, пропорциональна $u_\vartheta^\kappa(0)$ для некоторого $\vartheta \in \mathbb{R}$. Поэтому из леммы 11 и формул (36) и (57) следует, что каждое самосопряженное расширение h_κ равно $h_{\kappa,\vartheta}$ для некоторого $\vartheta \in \mathbb{R}$. Пусть $\vartheta, \vartheta' \in \mathbb{R}$. Согласно лемме 11 и формуле (57) равенство $h_{\kappa,\vartheta} = h_{\kappa,\vartheta'}$ справедливо тогда и только тогда, когда $u_\vartheta^\kappa(0) = cu_{\vartheta'}^\kappa(0)$ для некоторого вещественного $c \neq 0$. Ввиду (50) и (52) последнее условие выполнено в том и только том случае, если $\vartheta - \vartheta' \in \pi\mathbb{Z}$. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 23. Следует отметить, что функция q_κ , задаваемая формулой (5), вещественна не только при вещественных κ , но и при чисто мнимых κ . Полное описание разложений по собственным функциям для этого случая приведено в работе [9]. Легко видеть, что $\mathfrak{t}_{\kappa,\vartheta} = (q_\kappa, \mathcal{D}_{q_\kappa}^r, u_\vartheta^\kappa)$ является тройкой разложения и для мнимых κ , а спектральную меру для $\mathfrak{t}_{\kappa,\vartheta}$ по-прежнему можно вычислить, пользуясь формулами (55) и (56). Действуя таким образом, можно получить аналог теоремы 3 для мнимых κ .

4. НЕПРЕРЫВНОСТЬ СПЕКТРАЛЬНЫХ МЕР

В данном разделе мы докажем теорему 4.

Определим непрерывную функцию Φ на $(-1, 1) \times \mathbb{R}_+$, полагая

$$\Phi(\kappa, E) = -\frac{\ln E}{\pi \operatorname{sinc}(\pi\kappa)} \operatorname{sinc}\left(\frac{i\kappa}{2} \ln E\right), \quad (58)$$

где целая функция sinc задается равенством

$$\operatorname{sinc} \zeta = \begin{cases} \zeta^{-1} \sin \zeta, & \zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \\ 1, & \zeta = 0. \end{cases}$$

Имеем

$$\Phi(\kappa, E) = \begin{cases} -\ln E/\pi, & \kappa = 0, \\ (\sin \pi\kappa)^{-1} (E^{-\kappa/2} - E^{\kappa/2}), & 0 < |\kappa| < 1. \end{cases} \quad (59)$$

Для каждого $\vartheta \in \mathbb{R}$ и $-1 < \kappa < 1$ определим функцию $t_{\kappa,\vartheta}$ на $\mathbb{R}_+$ формулой

$$t_{\kappa,\vartheta}(E) = 2 + \Phi(\kappa, E)^2 (1 - \cos 2\vartheta \cos \pi\kappa) + \Phi(\kappa, E) (E^{-\kappa/2} + E^{\kappa/2}) \sin 2\vartheta. \quad (60)$$

Прямое вычисление с использованием формул (17), (21) и (59) дает

$$d\tilde{\mathcal{V}}_{\kappa,\vartheta}(E) = t_{\kappa,\vartheta}(E)^{-1}\Theta(E) dE \quad (61)$$

для всех $\vartheta \in \mathbb{R}$ и $-1 < \kappa < 1$. В силу неравенства Коши–Буняковского имеем

$$|-c \cos 2\vartheta + d \sin 2\vartheta| \leq \sqrt{c^2 + d^2}$$

для любых $c, d \in \mathbb{R}$. Применяя эту оценку к $c = \Phi(\kappa, E)^2 \cos \pi \kappa$ и

$$d = \Phi(\kappa, E)(E^{-\kappa/2} + E^{\kappa/2}) = \Phi(\kappa, E)\sqrt{\Phi(\kappa, E)^2 \sin^2 \pi \kappa + 4},$$

выводим из (60), что $t_{\kappa,\vartheta}(E) \geq f(\Phi(\kappa, E)^2)$, где $f(y) = 2 + y - \sqrt{y^2 + 4y}$, $y \geq 0$. Поскольку

$$f(y) = \frac{4}{2 + y + \sqrt{y^2 + 4y}} \geq \frac{2}{2 + y}, \quad y \geq 0,$$

заключаем, что $t_{\kappa,\vartheta}(E)^{-1} \leq 1 + \Phi(\kappa, E)^2/2$ для всех $E > 0$, $-1 < \kappa < 1$ и $\vartheta \in \mathbb{R}$. Из (58) вытекает, что $\kappa \rightarrow \Phi(\kappa, E)^2$ есть четная возрастающая на $[0, 1)$ функция для любого $E > 0$. Пусть $0 < \alpha < 1$. Ввиду (59) заключаем, что

$$t_{\kappa,\vartheta}(E)^{-1} \leq 1 + \frac{1}{2}\Phi(\alpha, E)^2 \leq \frac{1}{2\sin^2 \pi \alpha}(E^\alpha + E^{-\alpha}) \quad (62)$$

для всех $E > 0$, $\vartheta \in \mathbb{R}$ и $-\alpha \leq \kappa \leq \alpha$. Пусть φ – ограниченная борелевская функция на $\mathbb{R}$ с компактным носителем и $B = (-1, 1) \times \mathbb{R}$. Поскольку функция $(\kappa, \vartheta) \rightarrow t_{\kappa,\vartheta}(E)^{-1}\varphi(E)$ непрерывна на B для любого $E > 0$, из соотношений (61) и (62) и теоремы о мажорированной сходимости следует, что функция $(\kappa, \vartheta) \rightarrow \int \varphi(E) d\tilde{\mathcal{V}}_{\kappa,\vartheta}(E)$ непрерывна на B и ограничена на $[-\alpha, \alpha] \times \mathbb{R}$ для любого $0 \leq \alpha < 1$. Пусть

$$B' = \{(\kappa, \vartheta) \in B: \vartheta \in (|\vartheta_\kappa|, \pi - |\vartheta_\kappa|) + \pi\mathbb{Z}\}.$$

В силу (16) и (19) имеем

$$\int \varphi(E) d\mathcal{V}_{\kappa,\vartheta}(E) = \int \varphi(E) d\tilde{\mathcal{V}}_{\kappa,\vartheta}(E) + b_\varphi(\kappa, \vartheta),$$

где функция b_φ на B определяется соотношением

$$b_\varphi(\kappa, \vartheta) = \begin{cases} \tilde{\Phi}(\kappa, |E_{\kappa,\vartheta}|)\varphi(E_{\kappa,\vartheta}), & (\kappa, \vartheta) \in B', \\ 0, & (\kappa, \vartheta) \in B \setminus B', \end{cases} \quad (63)$$

и непрерывная функция $\tilde{\Phi}$ на $(-1, 1) \times \mathbb{R}_+$ задается равенством

$$\tilde{\Phi}(\kappa, E) = \frac{1}{2}E\pi^2 \operatorname{sinc}(\pi\kappa) \left(\Phi(\kappa, E)^2 + \frac{1}{\cos^2 \vartheta_\kappa} \right).$$

Для любого $(\kappa, \vartheta) \in B'$ имеем $|\operatorname{ctg} \vartheta \operatorname{tg} \vartheta_\kappa| < 1$, и из (18) и (20) следует, что

$$E_{\kappa,\vartheta} = -\exp \left[\frac{\pi \operatorname{ctg} \vartheta}{2 \cos \vartheta_\kappa} \operatorname{sinc}(\vartheta_\kappa) g(\operatorname{ctg} \vartheta \operatorname{tg} \vartheta_\kappa) \right],$$

где g – такая непрерывная функция на $(-1, 1)$, что $g(y) = y^{-1} \ln((1+y)(1-y)^{-1})$ при $y \neq 0$ и $g(0) = 2$. Таким образом, функция $(\kappa, \vartheta) \rightarrow E_{\kappa, \vartheta}$ непрерывна на B' , и, следовательно, b_φ есть борелевская функция на B . Оценивая $\Phi(\kappa, E)^2$, как и выше, получаем

$$\tilde{\Phi}(\kappa, E) \leq \frac{\pi^2 E}{2 \sin^2 \pi \alpha} (E^\alpha + E^{-\alpha}), \quad (\kappa, E) \in [-\alpha, \alpha] \times \mathbb{R}_+, \quad (64)$$

для любого $0 < \alpha < 1$. С учетом (63) отсюда вытекает, что b_φ ограничена на $[-\alpha, \alpha] \times \mathbb{R}$ для любого $0 \leq \alpha < 1$. Для завершения доказательства нам осталось установить, что непрерывность φ влечет непрерывность b_φ на B . Пусть $-1 < \kappa < 1$. Из (18) и (20) следует, что $|E_{\kappa, \vartheta}|$ строго убывает от ∞ до 0, когда ϑ пробегает от $|\vartheta_\kappa|$ до $\pi - |\vartheta_\kappa|$. Следовательно, для каждого $E > 0$ имеется единственное число $\tau_E(\kappa) \in (|\vartheta_\kappa|, \pi - |\vartheta_\kappa|)$ такое, что $|E_{\kappa, \tau_E(\kappa)}| = E$. Ввиду непрерывности $E_{\kappa, \vartheta}$ по (κ, ϑ) функция τ_E непрерывна на $(-1, 1)$ для любого $E > 0$. Пусть $\beta > 0$ таково, что $\varphi(E) = 0$ для любого $E \leq -\beta$. Для $0 < \alpha < 1$ и $0 < \delta$ определим открытое подмножество $B_{\alpha, \delta}$ множества B , полагая

$$B_{\alpha, \delta} = \{(\kappa, \vartheta) \in (-\alpha, \alpha) \times \mathbb{R} : \vartheta \in (\tau_\delta(\kappa) - \pi, \tau_\beta(\kappa)) + \pi\mathbb{Z}\}.$$

Если $\delta < 1$, то в силу (63) и (64) имеем

$$|b_\varphi(\kappa, \vartheta)| \leq \frac{\pi^2 \delta^{1-\alpha}}{\sin^2 \pi \alpha} \sup_{E \in \mathbb{R}} |\varphi(E)|, \quad (\kappa, \vartheta) \in B_{\alpha, \delta}.$$

Пусть $(\kappa, \vartheta) \in B \setminus B'$ и $\varepsilon > 0$. Выберем произвольное $\alpha \in (|\kappa|, 1)$ и найдем столь малое $\delta > 0$, чтобы правая часть последнего неравенства была меньше ε . Тогда $B_{\alpha, \delta}$ является окрестностью (κ, ϑ) , где абсолютное значение b_φ меньше, чем ε . Тем самым доказано, что функция b_φ непрерывна в каждой точке множества $B \setminus B'$. Так как функция b_φ , очевидно, непрерывна на B' , то теорема доказана.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Доказательство леммы 17

Пусть Ln – ветвь логарифма в $\mathbb{C}_\pi$, удовлетворяющая условию $\text{Ln } 1 = 0$, и p – аналитическая функция в $\mathbb{C} \times \mathbb{C}_\pi$, определенная соотношением $p(\kappa, r) = e^{\kappa \text{Ln } r}$ (так что $p(\kappa, r) = r^\kappa$ при $r \in \mathbb{R}_+$). Пусть G – такая аналитическая функция в $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}_\pi$, что $G(\kappa, z, r) = p(1/2 + \kappa, r) \mathcal{X}_\kappa(r^2 z)$ для всех $\kappa, z \in \mathbb{C}$ и $r \in \mathbb{C}_\pi$. Тогда $G(\kappa, z, r) = u^\kappa(z|r)$ для всех $\kappa, z \in \mathbb{C}$ и $r \in \mathbb{R}_+$. Определим функцию F на $\mathcal{O} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}_\pi$, полагая

$$F(\kappa, \vartheta, z, r) = \frac{G(\kappa, z, r) \sin(\vartheta + \vartheta_\kappa) - G(-\kappa, z, r) \sin(\vartheta - \vartheta_\kappa)}{\sin \pi \kappa}, \quad \kappa \in \mathcal{O} \setminus \{0\},$$

$$F(0, \vartheta, z, r) = G(0, z, r) \cos \vartheta + \frac{2}{\pi} \left[\left(\text{Ln } \frac{r}{2} + \gamma \right) G(0, z, r) - p\left(\frac{1}{2}, r\right) \mathcal{Y}(zr^2) \right] \sin \vartheta$$

для любых $z, \vartheta \in \mathbb{C}$ и $r \in \mathbb{C}_\pi$. Из (12), (13) и определения F немедленно следует, что $F(\kappa, \vartheta, z, r) = u_\vartheta^\kappa(z|r)$ для любых $\vartheta, z \in \mathbb{C}$, $\kappa \in \mathcal{O}$ и $r \in \mathbb{R}_+$. Функция $(\vartheta, z, r) \rightarrow F(\kappa, \vartheta, z, r)$, очевидно, аналитична в $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}_\pi$ для любого фиксированного $\kappa \in \mathcal{O}$. Функция $\kappa \rightarrow F(\kappa, \vartheta, z, r)$ аналитична в $\mathcal{O} \setminus \{0\}$ и непрерывна при $\kappa = 0$

(это доказывается тем же вычислением, которое было использовано для нахождения предела в (13)) и, следовательно, аналитична в $\mathcal{O}$ для любых фиксированных $\vartheta, z \in \mathbb{C}$ и $r \in \mathbb{C}_\pi$. Поэтому функция F аналитична в $\mathcal{O} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}_\pi$ в силу теоремы Гартогса.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Доказательство леммы 17

Пусть $T = L_q(C_0^\infty(a, b))$. Так как оператор L_q замкнут, то достаточно показать, что $T^* = L_q^*$. Для этого нам надо лишь проверить, что $D_{T^*} \subset D_{L_q^*}$, поскольку L_q есть расширение T и, следовательно, T^* есть расширение L_q^* . В силу (30) $D_{L_q^*}$ состоит из всех элементов $[g]$, где $g \in \mathcal{D}_q$. Таким образом, для каждого $\phi \in D_{T^*}$ нам надо найти такую функцию $g \in \mathcal{D}_q$, что $\phi = [g]$. Пусть $\psi = T^*\phi$. Тогда

$$\langle T[f], \phi \rangle = \langle [f], \psi \rangle, \quad f \in C_0^\infty(a, b).$$

Так как $(T[f])(r) = -f''(r) + q(r)f(r)$ для λ -п.в. $r \in (a, b)$, то

$$-\int_a^b \overline{f''(r)}\phi(r) dr = \int_a^b \overline{f(r)}(\psi(r) - q(r)\phi(r)) dr, \quad f \in C_0^\infty(a, b).$$

Поскольку функции q и ϕ локально квадратично-интегрируемы на (a, b) , функция $q\phi$ локально интегрируема на (a, b) . Выберем $c \in (a, b)$ и определим $h \in \mathcal{D}$, полагая

$$h(r) = \int_c^r d\rho \int_c^\rho (\psi(t) - q(t)\phi(t)) dt.$$

Очевидно, имеем $h''(r) = \psi(r) - q(r)\phi(r)$ для λ -п.в. $r \in (a, b)$. Интегрируя по частям, получаем

$$\int_a^b \overline{f''(r)}(\psi(r) - q(r)\phi(r)) dr = \int_a^b \overline{f''(r)}h(r) dr$$

и, следовательно,

$$\int_a^b \overline{f''(r)}(\phi(r) + h(r)) dr = 0, \quad f \in C_0^\infty(a, b).$$

Это означает, что вторая производная $\phi + h$ в смысле обобщенных функций равна нулю. Поэтому найдутся такие $A, B \in \mathbb{C}$, что $\phi(r) + h(r) = Ar + B$ для λ -п.в. $r \in (a, b)$. Определим $g \in \mathcal{D}$ формулой $g(r) = Ar + B - h(r)$, $r \in (a, b)$. Тогда, очевидно, имеем $[g] = \phi$. Так как $g''(r) = -\psi(r) + q(r)\phi(r)$, то $(l_q g)(r) = \psi(r) - q(r)\phi(r) + q(r)g(r) = \psi(r)$ для λ -п.в. $r \in (a, b)$ и, следовательно, $l_q g = \psi$. Поэтому обе функции g и $l_q g$ квадратично-интегрируемы, а значит, $g \in \mathcal{D}_q$.

Благодарности. Автор признателен Б. Л. Воронову и И. В. Тютину за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] Н. Hankel, *Math. Ann.*, **8:4** (1875), 471–494.
- [2] Н. Weyl, *Math. Ann.*, **68:2** (1910), 220–269.
- [3] Н. Weyl, *Gött. Nachr.*, **1910** (1910), 442–467.

- [4] E. C. Titchmarsh, *Eigenfunction Expansions Associated with Second-Order Differential Equations. Part I*, Clarendon Press, Oxford, 1962.
- [5] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969.
- [6] F. Gesztesy, M. Zinchenko, *Math. Nachr.*, **279**:9–10 (2006), 1041–1082, arXiv: math/0505120.
- [7] C. Fulton, *Math. Nachr.*, **281**:10 (2008), 1418–1475.
- [8] A. Kostenko, A. Sakhnovich, G. Teschl, *Internat. Math. Res. Notices*, **2012**:8 (2012), 1699–1747, arXiv: 1007.0136.
- [9] D. M. Gitman, I. V. Tyutin, B. L. Voronov, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **43**:14 (2010), 145205, 34 pp., arXiv: 0903.5277.
- [10] A. G. Smirnov, *J. Math. Phys.*, **56**:12 (2015), 122101, 50 pp., arXiv: 1411.5351.
- [11] W. N. Everitt, H. Kalf, *J. Comput. Appl. Math.*, **208**:1 (2007), 3–19.
- [12] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions*, v. I, II, McGraw-Hill, New York–Toronto–London, 1953.
- [13] K. Kodaira, *Amer. J. Math.*, **71**:4 (1949), 921–945.
- [14] G. Teschl, *Mathematical Methods in Quantum Mechanics*, Graduate Studies in Mathematics, **99**, AMS, Providence, RI, 2009.
- [15] J. Weidmann, *Spectral Theory of Ordinary Differential Operators*, Lecture Notes in Mathematics, **1258**, Springer, Berlin, 1987.
- [16] C. Bennewitz, W. N. Everitt, “The Titchmarsh–Weyl eigenfunction expansion theorem for Sturm–Liouville differential equations”, *Sturm–Liouville Theory* (Geneva, Italy, September 15–19, 2003), eds. W. O. Amrein, A. M. Hinz, D. B. Pearson, Birkhäuser, Basel, 2005, 137–171.

Поступила в редакцию 24.08.2015,
после доработки 9.11.2015