Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Семенов, О случайном блуждании “пьяной компании”, *ТМФ*, 2016, том 187, номер 2, 350–359

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9033>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 11:19:13

© 2016 г.

А. Г. Семенов^{*†‡}

О СЛУЧАЙНОМ БЛУЖДЕНИИ “ПЬЯНОЙ КОМПАНИИ”

Исследуется коллективное поведение системы броуновских агентов, каждый из которых движется, ориентируясь на группу в целом. Данная система является простейшей моделью блуждания “дружной пьяной компании”. При помощи метода функционального интегрирования для такой системы вычислена вероятность перехода из одной точки в другую и зависимость от времени плотности вероятности найти кого-то из “пьяной компании” вблизи заданной точки. Оказалось, что система проявляет интересное коллективное поведение на больших временах, которое не описывается простейшим приближением типа среднего поля. Также получено точное решение для случая, когда один из агентов является “трезвым” и движется по заданной траектории. На основании полученных результатов обсуждается применимость различных теоретических подходов к описанию подобных систем.

Ключевые слова: броуновские агенты, стохастическая динамика, метод функционального интегрирования.

DOI: 10.4213/tmf9033

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время методы теоретической и математической физики используются далеко за пределами естественных наук. В частности, есть надежда на то, что они помогут описать и объяснить некоторые социальные и экономические явления [1]–[3]. Это мотивировано тем, что к настоящему моменту статистическая механика достигла серьезных успехов в описании сложных многочастичных физических систем, таких как, например, классические и квантовые жидкости, неупорядоченные системы, стёкла и др. При этом для многих таких систем установлена связь между их микроскопическим поведением на атомарных масштабах с макроскопическим и коллективным поведением на больших масштабах. Оказалось, что

^{*}Отделение теоретической физики им. И. Е. Тамма, Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия. E-mail: semenov@lpi.ru

[†]Русский фонд содействия образованию и науке, Москва, Россия

[‡]Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия

поведение на больших масштабах гораздо более универсально, нежели поведение на микроскопических масштабах.

В применении к социально-экономическим явлениям это, возможно, означает, что, хотя мы и не можем предсказать точное поведение отдельного индивида (его еще называют агентом¹⁾), характерные черты в поведении социума, состоящего из множества похожих агентов, мы предсказать сможем. В этом направлении уже достигнут ряд успехов, однако до понимания многих явлений еще очень далеко [1], [2], [4], [5]. И хотя многие социально-экономические системы похожи на физические, очень часто они более разнообразны и свободны от естественных ограничений, существующих в физике. Например, влияние одного агента на другого совершенно не обязано быть таким же, как обратное влияние второго агента на первого. Или очень часто бывает так, что взаимодействие между агентами не парное, как в физике, а существенно многоагентное. Помимо этого социально-экономические системы чаще всего состоят из небольшого числа агентов и находятся в неравновесном состоянии. Именно поэтому поведение таких систем интересно для изучения с позиций статистической механики.

Настоящая работа посвящена исследованию модели пьяной компании. Компания состоит из N агентов, каждый из которых при движении руководствуется двумя принципами. Рациональное начало агента желает того, чтобы он шел вместе со всей компанией (и его фактически "тянет" к компании в целом). Однако опьянение добавляет случайную компоненту к его движению (а также к его оценке положения других агентов), и это не позволяет компании собраться в одной точке. Естественной моделью такого поведения является броуновская частица, на которую действует внешняя сила. Внешняя сила (которая в рассматриваемом случае возникает из-за внутренних желаний агента) описывает рациональную часть поведения, а случайная сила описывает шатания агента, вызванные его нетрезвым состоянием. Таких агентов иногда называют броуновскими из-за их сходства с броуновской частицей [3]–[5]. Единственное идейное различие с аналогичной физической системой состоит в том, что агент ориентируется на всю компанию в целом, а не взаимодействует попарно, как в физике. В нашей статье мы рассмотрим лишь точно решаемый линейный случай, но полученные результаты позволят сделать вывод и о более общей задаче.

План статьи таков. Сначала рассмотрен отдельный пьяный агент и предпринята попытка описать пьяную компанию естественным образом при помощи самосогласованного приближения типа среднего поля. После этого найдено точное решение и показано, что из-за того, что число агентов конечно и не всегда велико, самосогласованное приближение не может полностью описать поведение пьяной компании, и это поведение интереснее, чем получается в рамках данного приближения. В заключение обсуждается применимость полученных результатов к другим системам.

2. БЛУЖДАЮЩИЙ ПЬЯНЫЙ АГЕНТ

Как уже было сказано во введении, целью настоящей работы является исследование коллективного поведения группы агентов, каждый из которых движется весьма случайным образом, ориентируясь при этом на всю группу в целом. Но прежде

¹⁾Строго говоря, иногда в роли агента может выступать целая группа людей, объединенная определенным образом. Примером такого агента может быть отдельная фирма или домохозяйство в экономике.

чем анализировать данную задачу, обсудим поведение одного единственного пьяного агента, который ориентируется на какую-то заданную точку в пространстве. Для простоты мы рассмотрим одномерный случай, когда движение происходит вдоль действительной оси. Итак, траектория броуновского агента задается уравнением типа уравнения Ланжевена

$$\dot{x}(t) = -\alpha(x(t) - \tilde{x}) + \xi(t). \quad (1)$$

Здесь $x(t)$ – положение агента в момент времени t , $\tilde{x}$ – положение в пространстве точки, к которой агента “тянут внутренние желания”, а $\xi(t)$ – белый шум, который и описывает случайное блуждание. Иными словами, первый член в правой части описывает рациональное поведение агента, в то время как второй описывает иррациональное поведение. Для простоты мы взяли линейную зависимость от расстояния для первого вклада. Это позволит нам решить задачу точно и выявить общие закономерности, для которых детальный вид этой зависимости не так важен. Данная задача эквивалентна задаче о броуновской частице во внешнем гармоническом потенциале в пределе большой вязкости среды. Ее решение хорошо известно, однако мы кратко опишем способ его получения.

Основная величина, представляющая для нас интерес, – это вероятность перехода из одной точки в другую, которая может быть представлена в виде

$$P(x, y|t) = \langle \delta(x - x_\xi(t)) \rangle_\xi, \quad (2)$$

где $x_\xi(t)$ – это решение стохастического уравнения при данной реализации случайной силы с начальным условием $x_\xi(0) = y$. Перепишем данное выражение через функциональный интеграл по всем траекториям от функциональной дельта-функции [6], [8], которая выделяет решение уравнения (1):

$$P(x; y|t) = \int_{z(0)=y}^{z(t)=x} \mathcal{D}z(t) \langle \mathcal{J}[z(t)] \delta(\dot{z}(t) + \alpha(z(t) - \tilde{x}) - \xi(t)) \rangle_\xi. \quad (3)$$

Здесь $\mathcal{J}[z(t)] = \det[\partial_t + \alpha]$ – это соответствующий данному уравнению якобиан²⁾, который легко вычисляется и равен $e^{\alpha t/2}$ (см., например, книгу [6]). Гауссово усреднение по $\xi(t)$ также несложно сделать, что приводит к выражению

$$P(x; y|t) = \int_{z(0)=y}^{z(t)=x} \mathcal{D}z(t) \exp \left\{ \frac{\alpha t}{2} - \frac{1}{4D} \int_0^t d\tau (\dot{z}(\tau) + \alpha(z(\tau) - \tilde{x}))^2 \right\}, \quad (4)$$

где коэффициент диффузии³⁾ D возникает из коррелятора случайной силы

$$\langle \xi(t) \xi(t') \rangle_\xi = 2D \delta(t - t').$$

²⁾Строго говоря, он плохо определен, и его значение напрямую зависит от того, каким образом мы определяем производную и функциональный интеграл. Мы понимаем функциональный интеграл как предел многократного интеграла, а производную понимаем в симметричном смысле. Это позволяет манипулировать производными в обычном смысле, а также интегрировать по частям. Детальное обсуждение этого вопроса можно найти, например, в книге [8].

³⁾Будем называть его степенью нетрезвости.

Раскрывая скобки, получим

$$P(x; y|t) = \exp \left\{ \frac{\alpha t}{2} - \frac{\alpha(x^2 - y^2)}{4D} + \frac{\alpha(x - y)\check{x}}{2D} \right\} \times \\ \times \int_{z(0)=y}^{z(t)=x} \mathcal{D}z(t) \exp \left\{ -\frac{1}{4D} \int_0^t d\tau (\dot{z}^2(\tau) + \alpha^2(z(\tau) - \check{x})^2) \right\}. \quad (5)$$

Для вычисления гауссова интеграла необходимо найти стационарную траекторию, удовлетворяющую уравнению

$$-\ddot{z}_s(\tau) + \alpha^2(z_s(\tau) - \check{x}) = 0, \quad z_s(0) = y, \quad z_s(t) = x. \quad (6)$$

Подставляя решение

$$z_s(\tau) = \check{x} + \frac{(x - \check{x}) \operatorname{sh}(\alpha\tau) + (y - \check{x}) \operatorname{sh}(\alpha(t - \tau))}{\operatorname{sh}(\alpha t)} \quad (7)$$

в исходное выражение, получим

$$P(x; y|t) = \exp \left\{ \frac{\alpha t}{2} - \frac{\alpha(x^2 - y^2)}{4D} + \frac{\alpha(x - y)\check{x}}{2D} - \frac{\alpha((x - \check{x})^2 + (y - \check{x})^2) \operatorname{ch}(\alpha t) - 2\alpha(x - \check{x})(y - \check{x})}{4D \operatorname{sh}(\alpha t)} \right\} \times \\ \times \int_{z(0)=0}^{z(t)=0} \mathcal{D}z(t) \exp \left\{ -\frac{1}{4D} \int_0^t d\tau (\dot{z}^2(\tau) + \alpha^2 z^2(\tau)) \right\}. \quad (8)$$

Оставшийся функциональный интеграл можно и не вычислять напрямую, достаточно лишь заметить, что вероятность перехода должна удовлетворять условию сохранения полной вероятности

$$\int dx P(x, y|t) = 1, \quad (9)$$

а вся зависимость от начальной и конечной точек уже вычислена.

В итоге получается хорошо известный ответ (см., например, монографию [7])

$$P(x; y|t) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi D(1 - e^{-2\alpha t})}} \exp \left\{ -\frac{\alpha(x - \check{x} - (y - \check{x})e^{-\alpha t})^2}{2D(1 - e^{-2\alpha t})} \right\}. \quad (10)$$

Видно, что в пределе больших времен (много больших α^{-1}) плотность распределения стремится к стационарному состоянию, описываемому гауссовой плотностью с шириной, пропорциональной $\sqrt{D/\alpha}$. Иными словами, чем выше степень нетрезвости агента и чем меньше его "внутренняя тяга", тем шире распределение.

3. НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА–ПЛАНКА

После того как мы рассмотрели блуждание одного отдельного агента, естественным образом попробуем приблизительно описать поведение множества из N агентов. Если считать, что агентов очень много, то с точностью до нормировки их число вблизи какой-то точки и есть фактически одноагентная (одночастичная) плотность распределения $P(x, t)$ или, иными словами, плотность вероятности найти агента

вблизи данной точки. Это означает, что положение центра компании может быть вычислено как среднее по данному распределению⁴⁾:

$$\bar{x}(t) = \int dx x P(x, t). \quad (11)$$

Динамика отдельных агентов дается уравнением (1), в котором точка притяжения заменена на положение центра компании, $\tilde{x} \rightarrow \bar{x}(t)$, а параметр α , описывающий “тягу” агента к точке $\tilde{x}$, заменен на параметр γ , описывающий “тягу” агента к своей компании. Переходя от уравнения Ланжевена к уравнению Фоккера–Планка (см., например, монографию [7]), получим уравнение для плотности распределения

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma(x - \bar{x}(t)) P(x, t) + D \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \right). \quad (12)$$

Совместно с условием (11) данное уравнение образует замкнутую систему, которая может быть переписана как одно нелинейное уравнение. Иногда его называют нелинейным уравнением Фоккера–Планка [9]. Подобный подход используется при описании различных экономических и биологических явлений. Несложно видеть, что $\bar{x}(t) = \bar{x}(0) = \int dx x P(x, 0)$ и решение имеет вид

$$P(x, t) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi D(1 - e^{-2\gamma t})}} \int dy \exp \left\{ -\frac{\gamma(x - \bar{x}(0) - (y - \bar{x}(0))e^{-\gamma t})^2}{2D(1 - e^{-2\gamma t})} \right\} P(y, 0).$$

Если в начальный момент времени агенты находились в точках $y_1, \dots, y_N$, то с течением времени плотность вероятности найти пьяного агента в момент времени t в точке x равна

$$P(x, t) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi N^2 D(1 - e^{-2\gamma t})}} \sum_{k=1}^N \exp \left\{ -\frac{\gamma(x - \bar{y} - (y_k - \bar{y})e^{-\gamma t})^2}{2D(1 - e^{-2\gamma t})} \right\}, \quad (13)$$

где $\bar{y} = (1/N) \sum_{k=1}^N y_k$. Согласно этому решению пьяная компания с течением времени (при $t \gg \gamma^{-1}$) соберется вблизи точки $\bar{y}$ и ее характерный размер будет порядка $\langle (x - \bar{y})^2 \rangle = D/\gamma$. Далее мы покажем, что это утверждение не является правильным, но для того чтобы разобраться в этом, решим задачу о компании из N пьяных агентов точно.

4. ПЬЯНАЯ КОМПАНИЯ И ЕЕ БЛУЖДЕНИЕ

Обобщим полученный в разделе 2 результат на группу из N агентов. Уравнения для их координат в этом случае имеют вид

$$\dot{x}_i(t) = -\gamma(x_i(t) - \bar{x}(t)) - \alpha(x_i(t) - \tilde{x}) + \xi_i(t), \quad \bar{x}(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t). \quad (14)$$

⁴⁾Строго говоря, следует отличать текущее положение центра компании при заданной реализации случайной компоненты и среднее, взятое с данной плотностью распределения, которое включает в себя дополнительно усреднение по всем реализациям случайной компоненты. Однако в самосогласованном подходе при большом N эти две величины считаются равными.

Эти уравнения описывают блуждания пьяных агентов, каждый из которых смотрит на центр компании и идет, ориентируясь на него⁵⁾. Также мы добавили член, описывающий притяжение агента к точке $\check{x}$, для удобства последующего анализа. Иррациональная компонента у каждого из агентов собственная и не зависит от остальных агентов. Как и ранее, считаем ее белым шумом:

$$\langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = 2D \delta_{ij} \delta(t - t'). \quad (15)$$

Степени нетрезвости у всех агентов считаем одинаковыми.

Полностью аналогично случаю одного агента представим вероятность перехода из точек $y_1, \dots, y_N$ в точки $x_1, \dots, x_N$ через функциональный интеграл:

$$P(x_1, \dots, x_N; y_1, \dots, y_N | t) = \mathcal{A}(t) \int_{z_k(0)=y_k}^{z_k(t)=x_k} \mathcal{D}z_1(t) \dots \mathcal{D}z_N(t) \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{4D} \sum_{k=1}^N \int_0^t d\tau (\dot{z}_k(\tau) + \gamma(z_k(\tau) - \bar{z}(\tau)) + \alpha(z_k(\tau) - \check{x}))^2 \right\}. \quad (16)$$

Этот интеграл также является гауссовым, и уравнение для стационарной траектории имеет вид

$$-\ddot{z}_k(\tau) + (\gamma + \alpha)^2(z_k(\tau) - \bar{z}(\tau)) + \alpha^2(\bar{z}(\tau) - \check{x}) = 0, \quad (17)$$

где мы использовали обозначение $\bar{z}(\tau) = (1/N) \sum_{k=1}^N z_k(\tau)$. Суммируя по k данные выражения, получим уравнение для $\bar{z}(\tau)$, которое имеет следующее решение:

$$\bar{z}(\tau) = \check{x} + \frac{(\bar{x} - \check{x}) \operatorname{sh}(\alpha\tau) + (\bar{y} - \check{x}) \operatorname{sh}(\alpha(t - \tau))}{\operatorname{sh}(\alpha\tau)}, \quad (18)$$

откуда сразу следует решение уравнений для траектории:

$$z_k(\tau) = \bar{z}(\tau) + \frac{(x_k - \bar{x}) \operatorname{sh}((\gamma + \alpha)\tau) + (y_k - \bar{y}) \operatorname{sh}((\gamma + \alpha)(t - \tau))}{\operatorname{sh}((\gamma + \alpha)t)}. \quad (19)$$

Собирая полученные выражения и учитывая нормировочный множитель, получим ответ для вероятности перехода:

$$P(x_1, \dots, x_N; y_1, \dots, y_N | t) = \left(\frac{\alpha}{2\pi D(1 - e^{-2\alpha t})} \right)^{1/2} \left(\frac{\alpha + \gamma}{2\pi D(1 - e^{-2(\alpha + \gamma)t})} \right)^{(N-1)/2} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{\alpha N(\bar{x} - \check{x} - (\bar{y} - \check{x})e^{-\alpha t})^2}{2D(1 - e^{-2\alpha t})} - \frac{\alpha + \gamma}{2D(1 - e^{-2(\alpha + \gamma)t})} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x} - (y_k - \bar{y})e^{-(\alpha + \gamma)t})^2 \right\}.$$

Это наиболее общий ответ, анализируя который, можно сделать вывод о поведении компании в целом. Далее мы рассмотрим некоторые интересные случаи.

⁵⁾ Легко можно учесть и тот факт, что агента тянет не к центру компании в целом, а к центру компании из всех остальных агентов $\bar{x}_{-i} = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1, k \neq i}^N x_k$. Для этого следует сделать замену $\gamma \rightarrow \gamma N / (N - 1)$.

5. N ПЬЯНЫХ АГЕНТОВ

Для начала рассмотрим случай, когда компания предоставлена самой себе и агенты двигаются, только ориентируясь друг на друга. Пусть в начальный момент времени они расположены в точках $y_1, \dots, y_N$. Нас интересует зависимость плотности вероятности найти какого-либо агента в окрестности заданной точки или, иными словами, одноагентная функция распределения. Она определена как

$$P(x, t) = \frac{1}{N} \left(\int dx_2 \dots dx_N P(x, \dots, x_N; y_1, \dots, y_N | t) + \right. \\ \left. + \int dx_1 dx_3 \dots dx_N P(x_1, x, \dots, x_N; y_1, \dots, y_N | t) + \dots + \right. \\ \left. + \int dx_1 \dots dx_{N-1} P(x_1, \dots, x; y_1, \dots, y_N | t) \right). \quad (20)$$

Используя решение из предыдущего раздела при $\alpha \rightarrow 0$ и интегрируя его, получим ответ для плотности распределения:

$$P(x, t) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi N D (2\gamma t + (N-1)(1 - e^{-2\gamma t}))}} \times \\ \times \sum_{k=1}^N \exp \left\{ -\frac{\gamma N (x - \bar{y} - (y_k - \bar{y})e^{-\gamma t})^2}{2D (2\gamma t + (N-1)(1 - e^{-2\gamma t}))} \right\}. \quad (21)$$

Сравним его с ответом (13), полученным при помощи самосогласованного подхода. Как видно, ответы различны, причем не только количественно, но и качественно. Согласно приближенному решению компания из агентов соберется с течением времени в локализованную группу, в то время как точное решение говорит нам о том, что при больших временах группа расплывется по всей действительной оси. Объяснение данного различия состоит в том, что основное предположение о связи плотности агентов в пространстве с одноагентной функцией распределения верно, строго говоря, лишь в “термодинамическом” пределе бесконечного числа агентов $N \rightarrow \infty$. Оказывается, что данный предел не коммутирует с пределами $\alpha \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$. Действительно, если предел $N \rightarrow \infty$ взять до предельного перехода $\alpha \rightarrow 0$, то

$$P(x, t) = \sqrt{\frac{\alpha + \gamma}{2\pi N^2 D (1 - e^{-2(\alpha + \gamma)t})}} \times \\ \times \sum_{k=1}^N \exp \left\{ -\frac{(\alpha + \gamma)(x - \bar{y}e^{-\alpha t} - (y_k - \bar{y})e^{-(\alpha + \gamma)t})^2}{2D (1 - e^{-2(\alpha + \gamma)t})} \right\}, \quad (22)$$

что совпадает с (13) при $\alpha = 0$. Несмотря на это, приближенный способ решения с использованием нелинейного уравнения Фоккера–Планка может быть применен и в данной задаче, но только на временах $t \ll N\gamma^{-1}$.

При большом N группа за время порядка γ^{-1} соберется вблизи точки $\bar{y}$, после чего одноагентная функция распределения будет становиться все более широкой. Однако происходить это будет за счет того, что группа как целое будет блуждать вдоль оси. И действительно, из уравнений Ланжевена можно получить, что центр

Рис. 1. Одноагентная функция распределения в различные моменты времени. Число агентов $N = 10$.

компании ведет себя как броуновская частица с коэффициентом диффузии D/N . Этот эффект нельзя вывести из самосогласованного подхода, и он является существенным при небольшом числе агентов. На рис. 1 изображен пример одноагентной функции распределения в различные моменты времени.

В заключение раздела отметим, что в рамках равновесной статистической механики системы обычно рассматриваются в термодинамическом пределе. С этой точки зрения наблюдаемое в данной системе явление есть по сути дела спонтанное нарушение трансляционной инвариантности. Сколь угодно малое внешнее возмущение локализует систему в определенной точке, и это состояние не разрушается после выключения возмущения. При этом все величины, получающиеся в самосогласованном подходе, следует понимать аналогично квазисредним Боголюбова [10].

6. N ПЬЯНЫХ АГЕНТОВ И ... ОДИН ТРЕЗВЫЙ

В предыдущем разделе мы получили, что даже при малом внешнем воздействии на агентов группа локализуется в определенной точке пространства. Теперь рассмотрим случай, когда в компанию пьяных агентов затесался один трезвый, который движется по определенной траектории $\eta(t)$. Тогда соответствующие этому случаю уравнения движения примут вид

$$\dot{x}_i(t) = -\frac{\gamma N}{N+1}(x_i(t) - \bar{x}(t)) - \frac{\gamma}{N+1}(x_i(t) - \eta(t)) + \xi_i(t). \quad (23)$$

С помощью замены

$$x_k(t) \rightarrow x_k(t) + \zeta(t) \equiv x_k(t) + \frac{\gamma}{N+1} \int_0^t d\tau \exp\left\{-\frac{\gamma}{N+1}(t-\tau)\right\} \eta(\tau) \quad (24)$$

задача сводится к уже решенной. Итоговый ответ для функции распределения нетрезвых агентов записывается как

$$P(x, t) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi ND((N+1)(1 - e^{-\frac{2\gamma}{N+1}t}) + (N-1)(1 - e^{-2\gamma t}))}} \times \\ \times \sum_{k=1}^N \exp\left\{-\frac{\gamma N(x - \zeta(t) - \bar{y}e^{-\frac{\gamma}{N+1}t} - (y_k - \bar{y})e^{-\gamma t})^2}{2D((N+1)(1 - e^{-\frac{2\gamma}{N+1}t}) + (N-1)(1 - e^{-2\gamma t}))}\right\}. \quad (25)$$

Поведение при временах $t \ll N\gamma^{-1}$ совершенно аналогично уже рассмотренному случаю, а вот на больших временах нетрезвые агенты группой следуют за единственным трезвым агентом по траектории $\zeta(t)$ и при этом характерный размер группы определяется равенством $\langle (x - \zeta(t))^2 \rangle = 2D/\gamma$, т. е. в $\sqrt{2}$ раз больше, чем в предыдущем случае. Отметим, что реакция пьяной компании на движения трезвого довольно медленная, и фактически компания в целом видит лишь усредненное положение трезвого агента за время порядка $N\gamma^{-1}$. Например, если трезвый агент движется с постоянной скоростью $\eta(t) = vt$, то

$$\zeta(t) = vt - \frac{(N+1)v}{\gamma}(1 - e^{-\frac{\gamma}{N+1}t}).$$

Таким образом, пьяная компания, хотя в итоге и ползет с той же скоростью, что и трезвый агент, очень сильно отстает от него. Полученное решение еще раз демонстрирует тот факт, что для корректного описания поведения группы из небольшого числа агентов следует аккуратно применять приближения типа приближения среднего поля. Мы также видим, что рациональное поведение всего лишь одного агента из N кардинальным образом меняет поведение системы на больших временах.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе мы рассмотрели точно решаемую модель коллективного поведения группы из блуждающих агентов. Несмотря на простоту модели, благодаря которой мы нашли точное решение, из ее анализа можно сделать ряд важных выводов и о более сложных системах с подобным коллективным поведением. Одним из интересных наблюдений, полученных в работе, является тот факт, что термодинамический предел не совсем корректно описывает поведение группы на больших временах, особенно в случае, когда число агентов недостаточно велико. Использование подхода, основанного на этих идеях, предсказывает возникновение в системе локализованного упорядоченного состояния. В действительности, как это следует из точного решения, малые (при большом числе агентов) флуктуации разрушают упорядочение на больших временах. Это же явление будет наблюдаться и в более сложных системах, например, если зависимость “притяжения” пьяного агента к компании дается не линейной, а более сложной функцией. Еще одно интересное наблюдение состоит в том, что всего один агент, движущийся рациональным

образом, может качественно изменить поведение всей системы в целом на больших временах. Наличие трезвого агента, в частности, достаточно для того, чтобы в системе возникло упорядоченное состояние, причем возникшее состояние будет отличаться от решения нелинейного уравнения Фоккера–Планка. Вероятнее всего, данное явление также будет наблюдаться и в более сложных системах.

В заключение отметим, что полученные точные решения указывают на то, что многоагентные системы, подобные рассмотренным в работе, могут иметь нетривиальное динамическое поведение, и, возможно, их исследование даст ключ к пониманию законов, по которым живет социум.

Благодарности. При написании работы не было выпито ни грамма алкоголя. Автор благодарит В. В. Лосякова, С. М. Апенко, А. В. Леонидова, П. И. Арсеева, А. В. Маршакова и других участников семинара по теории твердого тела Отделения теоретической физики ФИАН за мотивацию проведенного исследования и бурное обсуждение полученных в работе результатов.

Список литературы

- [1] D. Helbing, *Rev. Modern Phys.*, **73**:4 (2001), 1067–1141, arXiv: cond-mat/0012229.
- [2] V. M. Yakovenko, J. Barkley Rosser, Jr., *Rev. Modern Phys.*, **81**:4 (2009), 1703–1725, arXiv: 0905.1518.
- [3] F. Schweitzer, *Browning Agents and Active Particles*, Springer, Berlin, 2003.
- [4] T. Vicsek, A. Zafeiris, *Phys. Rep.*, **517**:3–4 (2012), 71–140.
- [5] P. Romanczuk, M. Bär, W. Ebeling, B. Lindner, L. Schimansky-Geier, *Eur. Phys. J. Special Top.*, **202**:1 (2012), 1–162.
- [6] G. Junker, *Supersymmetric Methods in Quantum and Statistical Physics*, Springer, Berlin, 1996.
- [7] H. Risken, *The Fokker–Planck Equation. Methods of Solution and Applications*, Springer Series in Synergetics, **18**, Springer, Berlin, 1989.
- [8] F. Langouche, D. Roekaerts, E. Tirapegui, *Functional Integration and Semiclassical Expansions*, Mathematics and Its Applications, **10**, Dordrecht, 1982.
- [9] T. D. Frank, *Nonlinear Fokker–Planck Equations. Fundamentals and Applications*, Springer, Berlin, 2005.
- [10] Н. Н. Боголюбов, Н. Н. Боголюбов (мл.), *Введение в квантовую статистическую механику*, Наука, М., 1984.

Поступила в редакцию 25.08.2015