Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Грюндланд, Солитонные поверхности в подходе обобщенной симметрии, *ТМФ*, 2016, том 188, номер 3, 416–428

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9035>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 18:37:29

© 2016 г.

А. М. Грюндланд^{*†}

СОЛИТОННЫЕ ПОВЕРХНОСТИ В ПОДХОДЕ ОБОБЩЕННОЙ СИММЕТРИИ

Изучаются некоторые особенности обобщенных симметрий интегрируемых систем с целью получения формулы Фокаса–Гельфанда, описывающей погружение двумерных солитонных поверхностей в алгебры Ли. Показано, что если существует общая симметрия представления нулевой кривизны интегрируемого дифференциального уравнения в частных производных и его линейной спектральной задачи, то формула погружения Фокаса–Гельфанда является применимой в ее первоначальном виде. В общем случае показано, что если симметрия представления нулевой кривизны не является симметрией его линейной спектральной задачи, то функция погружения двумерной поверхности определяется расширенной формулой, включающей дополнительные члены в выражении для касательных векторов. Эти результаты проиллюстрированы примерами, включающими эллиптическое обыкновенное дифференциальное уравнение и уравнение CP^{N-1} -сигма-модели.

Ключевые слова: интегрируемая система, солитонная поверхность, формула погружения, обобщенная симметрия.

DOI: 10.4213/tmf9035

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О СОЛИТОННЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ И ОБОБЩЕННЫХ СИММЕТРИЯХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Настоящая работа является продолжением исследований [1]–[9], посвященных теории солитонных поверхностей и обобщенных симметрий. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных, записанную в терминах двух независимых переменных ξ_1, ξ_2 и m зависимых переменных $\theta^k(\xi_1, \xi_2)$:

$$\Omega[\theta] = 0. \quad (1)$$

Работа была финансирована исследовательским грантом NSERC of Canada.

^{*}Centre de Recherches Mathématiques Université de Montréal, Montréal, Canada.
E-mail: grundlan@crm.umontreal.ca

[†]Département de Mathématiques et d'Informatique Université du Québec à Trois-Rivières, Trois-Rivières, Canada

Предположим, что система (1) может быть линеаризована с помощью матричной линейной спектральной задачи (ЛСЗ)

$$\Lambda_\alpha([\theta], \lambda) \equiv D_\alpha \Phi([\theta], \lambda) - U_\alpha([\theta], \lambda) \Phi([\theta], \lambda) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \alpha = 1, 2; \quad (2)$$

условия совместности этих уравнений записываются как условие нулевой кривизны (УНК)

$$\Omega[\theta] = D_2 U_1 - D_1 U_2 + [U_1, U_2] = 0, \quad (3)$$

которое считается не зависящим от $\lambda \in \mathbb{C}$. Мы полагаем, что волновая функция $\Phi([\theta], \lambda)$ и матрицы потенциала $U_\alpha([\theta], \lambda)$ могут быть определены на расширенном пространстве струй $\mathcal{N} = (N, \lambda)$. Здесь мы используем сокращенное обозначение пространства струй $N \ni [\theta] = (\xi_1, \xi_2, \theta^k, \theta_j^k)$,

$$\frac{\partial^n \theta^k}{\partial \xi_{j_1} \dots \partial \xi_{j_n}} \equiv \theta_{J,}^k, \quad J = (j_1, \dots, j_n), \quad j_k \in \{1, 2\}, \quad |J| = n. \quad (4)$$

Полные производные обозначаются следующим образом:

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} + \theta_{j, \alpha}^k \frac{\partial}{\partial \theta_j^k}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (5)$$

Здесь и ниже по повторяющимся индексам предполагается суммирование. Обобщенное векторное поле в эволюционном представлении и его расширение записываются в следующем виде:

$$\omega_R = R^k[\theta] \frac{\partial}{\partial \theta^k}, \quad \text{pr } \omega_R = R^k[\theta] \frac{\partial}{\partial \theta^k} + (D_J R^k[\theta]) \frac{\partial}{\partial \theta_J^k}. \quad (6)$$

В работе [2] рассматривались двумерные поверхности общего вида, погруженные в полупростую алгебру Ли $\mathfrak{g}$ (которую можно отождествить с пространством $\mathbb{R}^n$ с соответствующим скалярным произведением), для которой уравнения Гаусса–Майнард–Кодацци эквивалентны бесконечно малым деформациям $\Omega[\theta] = 0$, и была найдена мгновенная бесконечно малая деформация ЛСЗ (2) и УНК (3)

$$\begin{vmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \tilde{\Phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \Phi \end{vmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \Psi = \Phi F \end{pmatrix}, \quad 0 < \epsilon \ll 1, \quad (7)$$

где $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, A_1, A_2, F \in \mathfrak{g}$ и $\tilde{\Phi} = \Phi(\mathbb{I} + \epsilon F) \in G$. Матричные функции $(\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{\Phi})^T$ должны иметь ту же структуру сингулярности в точке λ , что и $(U_1, U_2, \Phi)^T$. Подставляя (7) в УНК (3) и в ЛСЗ (2) и сохраняя члены первого порядка по ϵ , получаем бесконечно малую деформацию УНК (3). Это приводит к следующему требованию: матричные функции A_1 и A_2 должны удовлетворять выражению

$$D_2 A_1 - D_1 A_2 + [A_1, U_2] + [U_1, A_2] = 0. \quad (8)$$

Из бесконечно малой деформации УНК (2) следует, что функция Ψ удовлетворяет уравнению

$$D_\alpha \Psi = U_\alpha \Psi + A_\alpha \Phi, \quad \alpha = 1, 2. \quad (9)$$

Требование (8) совпадает с условием совместности системы (9). Тогда с учетом соотношений (7)–(9) условие существования $\mathfrak{g}$ -значной функции погружения двумерной поверхности в $\mathfrak{g}$ вида

$$F = \left(\Phi^{-1} \frac{d\tilde{\Phi}}{d\epsilon} \right) \Big|_{\epsilon=0} \in \mathfrak{g} \quad (10)$$

может быть выражено в терминах матриц A_1 и A_2 , которые удовлетворяют (8) и (9). Эти результаты приводят к следующим теоремам.

ТЕОРЕМА 1 (Фокас, Гельфанд [2]). *Предположим, что существуют две $\mathfrak{g}$ -значные матричные функции U_1, U_2 и G -значная функция Φ , выбранная так, чтобы удовлетворять УНК (3) и связанной с ним ЛСЗ (2). Также предположим, что $\mathfrak{g}$ -значные матрицы A_1 и A_2 являются линейно независимыми и удовлетворяют бесконечно малой деформации УНК (8). Тогда существует двумерная поверхность с такой $\mathfrak{g}$ -значной функцией погружения $F([\theta], \lambda)$, что касательные векторы даются выражением*

$$D_\alpha F([\theta], \lambda) = \Phi^{-1} A_\alpha([\theta], \lambda) \Phi, \quad \alpha = 1, 2. \quad (11)$$

Первая и вторая фундаментальные формы поверхности можно выразить только в терминах U_α, A_α .

Под интегрируемыми поверхностями мы понимаем поверхности, связанные с интегрируемыми уравнениями Гаусса–Майнарди–Кодацци.

Следующая теорема представляет собой основной результат по погружению поверхностей.

ТЕОРЕМА 2 (Фокас и др. [3]). *Пусть множество скалярных функций $\{\theta^j\}$ удовлетворяет интегрируемым нелинейным дифференциальным уравнениям $\Omega[\theta] = 0$ и пусть G -значная функция $\Phi([\theta], \lambda)$ удовлетворяет ЛСЗ (2), где $\mathfrak{g}$ -значные функции $U_\alpha([\theta], \lambda)$ удовлетворяют УНК (3). Определим линейно независимые $\mathfrak{g}$ -значные матричные функции $A_\alpha([\theta], \lambda)$:*

$$A_\alpha([\theta], \lambda) = \beta(\lambda) D_\lambda U_\alpha + (D_\alpha S + [S, U_\alpha]) + \frac{DU_\alpha}{D\theta^j} R^j \in \mathfrak{g}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (12)$$

где $\beta(\lambda)$ – произвольная скалярная функция от λ , $S([\theta], \lambda)$ – произвольная $\mathfrak{g}$ -значная матричная функция, определенная на пространстве струй (N, λ) , $R^k[\theta]$ – обобщенные симметрии нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (1), $(DU_\alpha/D\theta^j)R^j$ – производные Фреше от U_α в направлениях R^k . Тогда существует двумерная поверхность с функцией погружения $F([\theta], \lambda)$ в алгебру Ли $\mathfrak{g}$, которая определяется формулой

$$F([\theta], \lambda) = \Phi^{-1} \left(\beta(\lambda) D_\lambda \Phi + S\Phi + \frac{D\Phi}{D\theta^j} R^j \right) \in \mathfrak{g} \quad (13)$$

(с точностью до аддитивной $\mathfrak{g}$ -значной константы).

Интегральная форма (13) определяет отображение $F: (N, \lambda) \rightarrow \mathfrak{g}$; мы будем ссылаться на нее как на формулу погружения Фокаса–Гельфанда. Три слагаемых

в скобках в формуле (13) соответствуют сдвигу спектрального параметра λ (формула Сима–Тафеля для погружения [4]), калибровочной симметрии ЛСЗ (2) [5], [6] и обобщенным симметриям интегрируемых дифференциальных уравнений (1) [2].

Ниже мы будем рассматривать случай $\beta = S = 0$. Формула погружения, связанная с обобщенными симметриями интегрируемых дифференциальных уравнений в частных производных (1), дается выражением

$$F([\theta], \lambda) = \Phi^{-1} \frac{D\Phi}{D\theta^j} R^j \in \mathfrak{g}, \quad (14)$$

где касательные векторы имеют вид

$$D_\alpha F([\theta], \lambda) = \Phi^{-1} A_\alpha([\theta], \lambda) \Phi, \quad A_\alpha([\theta], \lambda) = \frac{DU_\alpha}{D\theta^j} R^j \in \mathfrak{g}. \quad (15)$$

2. ОБОБЩЕННЫЕ СИММЕТРИИ И ФОРМУЛА ПОГРУЖЕНИЯ ФОКАСА–ГЕЛЬФАНДА

Покажем, когда справедлива формула погружения Фокаса–Гельфанда в ее первоначальном виде. Векторное поле ω_R , записанное в эволюционном виде и определенное на пространстве струй N , является симметрией УНК (3) тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \text{pr } \omega_R(D_2 U_1 - D_1 U_2 + [U_1, U_2]) &= D_2(\text{pr } \omega_R U_1) - D_1(\text{pr } \omega_R U_2) + \\ &+ [\text{pr } \omega_R U_1, U_2] + [U_1, \text{pr } \omega_R U_2] = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

если $\Omega[\theta] = D_2 U_1 - D_1 U_2 + [U_1, U_2] = 0$. Выражение (16) эквивалентно бесконечно малой деформации УНК (8) с

$$A_\alpha = \text{pr } \omega_R U_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \quad (17)$$

так как имеют место уравнения

$$[D_\alpha, \text{pr } \omega_R] = 0, \quad \alpha = 1, 2. \quad (18)$$

Производная Фреше от Φ по θ^k в направлении R^k может быть выражена в терминах расширения векторного поля ω_R [7]:

$$F = \Phi^{-1} \frac{D\Phi}{D\theta^k} R^k = \Phi^{-1} (\text{pr } \omega_R \Phi). \quad (19)$$

Дифференцируя (19) и используя ЛСЗ (2), мы получаем

$$D_\alpha F = D_\alpha \left(\Phi^{-1} \frac{D\Phi}{D\theta^k} R^k \right) = \Phi^{-1} \left[-U_\alpha \frac{D\Phi}{D\theta^k} R^k + D_\alpha \left(\frac{D\Phi}{D\theta^k} R^k \right) \right]. \quad (20)$$

Используя соотношения (18) и (19), мы можем записать второй член в правой части (20) как

$$D_\alpha \left(\frac{D\Phi}{D\theta^k} R^k \right) = D_\alpha (\text{pr } \omega_R \Phi) = \text{pr } \omega_R (D_\alpha \Phi). \quad (21)$$

Применяя тождество

$$\text{pr } \omega_R (D_\alpha \Phi) = \text{pr } \omega_R (U_\alpha \Phi) + \text{pr } \omega_R (D_\alpha \Phi - U_\alpha \Phi) \quad (22)$$

мы обнаруживаем, что второй член в (22) не обязательно обращается в нуль. Этот член обращается в нуль тогда и только тогда, когда векторное поле ω_R также является симметрией ЛСЗ $\Lambda([\theta], \lambda) = 0$, т. е.

$$\text{pr } \omega_R(D_\alpha \Phi - U_\alpha \Phi) = 0, \quad \text{если } D_\alpha \Phi - U_\alpha \Phi = 0. \quad (23)$$

Если мы считаем, что равенство (23) имеет место, то из (22) мы получаем

$$\begin{aligned} \text{pr } \omega_R(D_\alpha \Phi) &= \text{pr } \omega_R(U_\alpha \Phi) = (\text{pr } \omega_R U_\alpha) \Phi + U_\alpha (\text{pr } \omega_R \Phi) = \\ &= \left(\frac{DU_\alpha}{D\theta^k} R^k \right) \Phi + U_\alpha \left(\frac{D\Phi}{D\theta^k} R^k \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Подставляя (24) в (20) и используя уравнения (17), мы получаем касательные векторы $D_\alpha F$ в виде, заданном в теореме 1:

$$\begin{aligned} D_\alpha F &= \Phi^{-1} \left[-U_\alpha \left(\frac{D\Phi}{D\theta^k} R^k \right) + \left(\frac{DU_\alpha}{D\theta^k} R^k \right) + U_\alpha \left(\frac{D\Phi}{D\theta^k} R^k \right) \Phi \right] = \\ &= \Phi^{-1} \left(\frac{DU_\alpha}{D\theta^k} R^k \right) \Phi = \Phi^{-1} (\text{pr } \omega_R U_\alpha) \Phi = \Phi^{-1} A_\alpha([\theta], \lambda) \Phi. \end{aligned} \quad (25)$$

Таким образом, в предположении, что ω_R является общей симметрией УНК (3) и ЛСЗ (2) (см. приложение), существует двумерная поверхность с $\mathfrak{g}$ -значной функцией погружения, задаваемой выражением [8]

$$F = \Phi^{-1} (\text{pr } \omega_R \Phi). \quad (26)$$

Следовательно, формула погружения Фокаса–Гельфанда может быть применена в своем первоначальном виде.

Рассмотрим векторное поле η_Q в эволюционном виде, определенное на пространстве струй $M = [(\Phi, U)]$:

$$\eta_Q = Q^j [(\Phi, U)] \frac{\partial}{\partial \Phi^j} + \hat{Q}_\alpha^j [(\Phi, U)] \frac{\partial}{\partial U_\alpha^j}, \quad (27)$$

где $\Phi = e^{\Phi^j e_j} \in G$, $U_\alpha = U_\alpha^j e_j \in \mathfrak{g}$, $\hat{Q}_\alpha^j [(\Phi, U)] = \hat{Q}_\alpha^j [(\Phi, U)] e_j \in \mathfrak{g}$. Предположим, что η_Q является обобщенной симметрией ЛСЗ (2):

$$\text{pr } \eta_Q(D_\alpha \Phi - U_\alpha \Phi) = 0, \quad \text{если } D_\alpha \Phi - U_\alpha \Phi = 0, \quad \alpha = 1, 2. \quad (28)$$

Векторные поля ω_R и η_Q являются τ -связанными в том смысле, что для любой параметризации $\Phi([\theta], \lambda)$ и $U_\alpha([\theta], \lambda)$ в терминах пространства струй (N, λ) мы получаем отображение $\tau: N \rightarrow M$, которое считается диффеоморфизмом в M . Эта параметризация допустима тогда и только тогда, когда

$$\text{pr } d\tau(\omega_R)(D_\alpha \Phi - U_\alpha \Phi) = 0, \quad \text{если } \Omega[\theta] = 0. \quad (29)$$

Требование, что поле ω_R является τ -связанным с η_Q , означает, что продолжение ω_R должно быть векторным полем η_Q на отображении τ . Тогда $d\tau(\omega_R)$ является хорошо определенным векторным полем на M ,

$$d\tau(\omega_R) = \eta_Q|_\tau, \quad [\theta] \in N. \quad (30)$$

В координатном представлении это выражение принимает вид

$$d\tau(\omega_R) = R^k[\theta] \left(\frac{\partial \Phi^j}{\partial \theta^k} \frac{\partial}{\partial \Phi^j} + \frac{\partial U_\alpha^j}{\partial \theta^k} \frac{\partial}{\partial U_\alpha^j} \right). \quad (31)$$

Таким образом, требование, что векторные поля ω_R и η_Q являются τ -связанными (30), эквивалентно следующим соотношениям:

$$\omega_R = R^k[\theta] \frac{\partial}{\partial \theta^k} \quad \eta_Q|_\tau = R^k[\theta] \frac{\partial \Phi^j}{\partial \theta^k} \frac{\partial}{\partial \Phi^j} + R^k[\theta] \frac{\partial U_\alpha^j}{\partial \theta^k} \frac{\partial}{\partial U_\alpha^j}. \quad (32)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [1]. Пусть существуют два векторных поля η_Q и ω_R такие, что η_Q , определенное на пространстве струй $M = [(\Phi, U)]$, является обобщенной симметрией ЛСЗ $\Lambda([\theta], \lambda) = 0$, в то время как ω_R , определенное на пространстве струй $N = [\theta]$, является обобщенной симметрией интегрируемого дифференциального уравнения в частных производных $\Omega[\theta] = 0$. Если векторные поля ω_R и η_Q являются τ -связанными, то векторное поле ω_R является общей симметрией как для уравнения $\Omega[\theta] = 0$, так и для уравнения $\Lambda([\theta], \lambda) = 0$.

Доказательство следует из цепного правила и того факта, что

$$\sigma_R \equiv d\tau(\omega_R) = \eta_Q|_\tau, \quad [\theta] \in N. \quad (33)$$

А именно,

$$\begin{aligned} \text{pr } d\tau(\omega_R)(D_\alpha \Phi - U_\alpha \Phi) &= \text{pr } \sigma_R(D_\alpha \Phi - U_\alpha \Phi) \text{pr } \omega_R(D_\alpha \Phi - U_\alpha \Phi) = \\ &= \text{pr } \eta_Q(D_\alpha \Phi - U_\alpha \Phi)|_\tau = 0, \quad \text{если } \Omega[\theta] = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Таким образом, если векторные поля ω_R и η_Q являются τ -связанными, то существует симметрия уравнения $\Omega[\theta] = 0$, которая связана как группа с обобщенной симметрией ЛСЗ $\Lambda([\theta], \lambda) = 0$ и таким образом индуцирует бесконечно малую деформацию функции Φ . Тогда интегральная форма поверхности дается выражением (26), что согласуется с касательными векторами

$$D_\alpha F([\theta], \lambda) = \Phi^{-1}(\text{pr } \omega_R U_\alpha) \Phi, \quad \alpha = 1, 2. \quad (35)$$

Рассмотрим случай, когда векторное поле ω_R является симметрией ЛСЗ $\Omega[\theta] = 0$, но не симметрией ЛСЗ $\Lambda([\theta], \lambda) = 0$ (т. е. действие $\text{pr } d\tau(\omega_R)$ на ЛСЗ не равно нулю для всех решений Φ линейной спектральной задачи). Если касательные векторы (35) являются линейно независимыми, то существует $\mathfrak{g}$ -значная функция погружения F для двумерной поверхности. Однако интегральная форма поверхности не является формой, задаваемой выражениями (26), (35). Следовательно, погружение F не является погружением Фокаса–Гельфанда.

В общем случае, когда векторное поле ω_R является симметрией ЛСЗ $\Omega[\theta] = 0$, но не обязательно симметрией УНК $\Lambda([\theta], \lambda) = 0$, мы имеем следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если векторное поле ω_R является обобщенной симметрией ЛСЗ $\Omega[\theta] = 0$, а $\mathfrak{g}$ -значные матрицы

$$A_\alpha = \text{pr } \omega_R U_\alpha + (\text{pr } \omega_R (D_\alpha \Phi - U_\alpha \Phi)) \Phi^{-1}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (36)$$

являются линейно независимыми, то функция погружения F двумерной поверхности определяется формулой (с точностью до аддитивной $\mathfrak{g}$ -значной константы)

$$F([\theta], \lambda) = \Phi^{-1}(\operatorname{pr} \omega_R \Phi) \in \mathfrak{g}, \quad (37)$$

согласующейся с условием тангенциальности векторов

$$D_\alpha F = \Phi^{-1}\{(\operatorname{pr} \omega_R U_\alpha)\Phi + \operatorname{pr} \omega_R (D_\alpha \Phi - U_\alpha \Phi)\} = \Phi^{-1}(D_\alpha - U_\alpha)(\operatorname{pr} \omega_R \Phi). \quad (38)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (8) есть в точности уравнение совместности для условий (38) с матрицами A_α , заданными в (36), и, таким образом, функция погружения F существует и определяется выражением (37) с точностью до аддитивной $\mathfrak{g}$ -значной константы.

3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА

Для применения метода построения солитонных поверхностей требуется наличие трех составляющих явного представления функции погружения F , а именно нам потребуются:

- 1) представление нулевой кривизны дифференциального уравнения $\Omega[\theta] = 0$;
- 2) обобщенная симметрия дифференциального уравнения $\Omega[\theta] = 0$;
- 3) решение Φ ЛСЗ $\Lambda([\theta], \lambda) = 0$.

Заметим, что первое условие должно выполняться всегда. Однако даже без двух других условий можно проводить некоторый анализ функции погружения F (заданной выражением (13)) в алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

1. Без решения Φ ЛСЗ (2) геометрия поверхности F может быть проанализирована с помощью невырожденной формы Киллинга на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ (в предположении, что $\mathfrak{g}$ является прямой суммой простых алгебр Ли). Функция погружения F интерпретируется как псевдориманово многообразие. Касательные векторы и нормальный вектор к поверхности задаются как

$$D_\alpha F = \Phi^{-1} A_\alpha \Phi \in \mathfrak{g}, \quad N = \frac{\Phi^{-1}[A_1, A_2]\Phi}{([A_1, A_2]^2/2)^{1/2}} \in \mathfrak{g}, \quad A_\alpha = \operatorname{pr} \omega_R U_\alpha, \quad (39)$$

где ω_R является общей симметрией УНК $\Omega[\theta] = 0$ и ЛСЗ $\Lambda([\theta], \lambda) = 0$.

Первая и вторая основные формы задаются с помощью выражений

$$I = \frac{\epsilon}{2} (\operatorname{tr}(A_1^2) d\xi_1^2 + 2\operatorname{tr}(A_1 A_2) d\xi_1 d\xi_2 + \operatorname{tr}(A_2^2) d\xi_2^2), \quad (40)$$

$$II = \frac{\epsilon}{2} \left\{ \operatorname{tr}[(D_1 A_1 + [A_1, U_1])N] d\xi_1^2 + 2\operatorname{tr}[(D_2 A_1 + [A_1, U_2])N] d\xi_1 d\xi_2 + \right. \\ \left. + \operatorname{tr}[(D_2 A_2 + [A_2, U_2])N] d\xi_2^2 \right\}, \quad (41)$$

где $\epsilon = \pm 1$.

2. Если мы имеем решение Φ ЛСЗ, но не обобщенную симметрию ω_R дифференциального уравнения в частных производных, то мы всегда можем рассматривать двумерную поверхность

$$F = \Phi^{-1}(\beta(\lambda) D_\lambda \Phi + S\Phi), \quad S \in \mathfrak{g}, \quad \Phi \in G, \quad (42)$$

определенную с помощью калибровочного преобразования и сдвига по λ в УНК, которой отвечают касательные векторы

$$D_\alpha F = \Phi^{-1}(\beta(\lambda)D_\lambda U_\alpha + D_\alpha S + [S, U_\alpha])\Phi. \quad (43)$$

4. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И СОЛИТОННЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Рассмотрим следующее автономное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для функции θ относительно независимой переменной x :

$$\Omega[\theta] = \theta_{xx} - \frac{1}{2}f'(\theta) = 0, \quad f'(\theta) = \frac{d}{d\theta}f(\theta), \quad (44)$$

для некоторой функции $f'(\theta)$. Уравнение (44) допускает первый интеграл

$$\theta_x - \epsilon[f(\theta)]^{1/2} = 0, \quad \epsilon = \pm 1, \quad (45)$$

и решения (45) удовлетворяют уравнению

$$\epsilon \int_{\theta_0}^{\theta} [f(s)]^{-1/2} ds = x - x_0. \quad (46)$$

Если $[f(\theta)]^{-1/2} = w(\theta, [P_n(\theta)]^{1/2})$, где w – рациональная функция своего аргумента, а $P_n(\theta)$ – полином третьей или четвертой степени, а функция θ , которая удовлетворяет (44), является обратной к эллиптической функции.

Обыкновенное дифференциальное уравнение (44) допускает матричную ЛСЗ при $\Phi \in SL(2, \mathbb{R})$:

$$\Lambda([\theta], y, \lambda) = \begin{cases} D_x \Phi([\theta], y, \lambda) = U_1([\theta], \lambda) \Phi([\theta], y, \lambda), \\ D_y \Phi([\theta], y, \lambda) = U_2([\theta], \lambda) \Phi([\theta], y, \lambda), \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (47)$$

где

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + \theta_x \frac{\partial}{\partial \theta} + \theta_{xx} \frac{\partial}{\partial \theta_x}, \quad D_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad [D_x, D_y] = 0, \quad (48)$$

так как $\theta_y = 0$. Заметим, что мы ввели дополнительную переменную y в ЛСЗ (47) так, чтобы решение Φ зависело от y , а функции U_α от y не зависели. То есть $D_y U_\alpha([\theta], \lambda) = 0$, $\alpha = 1, 2$. Следовательно, УНК $\Omega[\theta] = 0$ принимает вид

$$\Omega[\theta] = D_y U_1 - D_x U_2 + [U_1, U_2] = D_x U_2 + [U_2, U_1] = 0. \quad (49)$$

Матричные функции $U_\alpha \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, удовлетворяющие уравнению (49), имеют вид [9]

$$U_1([\theta], \lambda) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{f'(\theta)}{\theta + \lambda} - \frac{f(\theta) - f(-\lambda)}{(\theta + \lambda)^2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (50)$$

$$U_2([\theta], \lambda) = \begin{pmatrix} \theta_x & -\frac{f(\theta) - f(-\lambda)}{\theta + \lambda} \\ \theta + \lambda & -\theta_x \end{pmatrix},$$

где $f(\cdot)$ – полином. Частное решение Φ ЛСЗ (47) с матрицами, задаваемыми выражениями (50), записывается как [1]

$$\Phi([\theta], y, \lambda) = \begin{pmatrix} 2D_x\psi_+ & 2D_x\psi_- \\ \psi_+ & \psi_- \end{pmatrix} \in sl(2, \mathbb{R}), \quad (51)$$

где функции

$$\psi_{\pm} = \frac{(\theta + \lambda)^{1/2}}{(2a)^{1/2}} \exp \left[\pm a \left(y + \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{ds}{2\epsilon(s + \lambda)[f(s)]^{1/2}} \right) \right], \quad a = [f(-\lambda)]^{1/2}, \quad \epsilon = \pm 1,$$

удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} D_x^2\psi_{\pm} - \frac{1}{4} \left(\frac{f'}{\theta - \lambda} - \frac{f - a^2}{(\theta + \lambda)^2} \right) \psi_{\pm} &= 0, \\ (D_x\psi_+)(D_x\psi_-) - \frac{f - a^2}{8a(\theta + \lambda)} &= 0. \end{aligned} \quad (52)$$

Уравнения (52) могут быть записаны в терминах функции θ и ее производных по x :

$$\begin{aligned} \theta_{xx} - \frac{\theta_x^2}{2(\theta + \lambda)} - \frac{f'}{2} + \frac{f - a^2}{2(\theta + \lambda)} + a \left(\frac{\theta_{xx}}{\epsilon\sqrt{f}} - \frac{\theta_x^2 f'}{2\epsilon f^{3/2}} \right) + \frac{a^2 \theta_x^2}{2f(\theta + \lambda)} &= 0, \\ \theta_x^2 - a^2 \frac{\theta_x^2}{f} - f + a^2 &= 0. \end{aligned} \quad (53)$$

Уравнения (53) должны быть справедливы при всех значениях a . Отсюда следует, что

$$\theta_{xx} - \frac{1}{2}f'(\theta) = 0, \quad \theta_x^2 - f(\theta) = 0. \quad (54)$$

В свою очередь, из уравнений (54) следует, что симметрия УНК $\Omega[\theta] = 0$ является общей симметрией ЛСЗ (47) тогда и только тогда, когда она является обобщенной симметрией выражения (54). Обобщенные симметрии уравнения (44) определяются бесконечно малой деформацией УНК (49), задаваемой выражением (8) с A_{α} из формулы (17), где матрицы U_{α} заданы в (50). Обобщенное векторное поле ω_R , записанное в виде эволюционного представления, и его расширение принимают вид (6). Тогда условие (8) приводит к следующему ограничению на функцию $R[\theta]$:

$$\text{pr } \omega_R \left(\theta_{xx} - \frac{1}{2}f'(\theta) \right) = D_x^2 R - \frac{1}{2}f''(\theta)R = 0, \quad \text{если } \theta_{xx} - \frac{1}{2}f'(\theta) = 0. \quad (55)$$

Два частных решения определяющего уравнения (55) имеют следующий вид:

$$\omega_{R^1} = R^1[\theta]\partial_{\theta}, \quad R^1[\theta] = \theta_x; \quad (56.1)$$

$$\omega_{R^2} = R^2[\theta]\partial_{\theta}, \quad R^2[\theta] = \theta_x \int_{\theta_0}^{\theta} [f(s)]^{-3/2} ds. \quad (56.2)$$

Легко проверить, что ω_{R^1} является общей симметрией как для ЛСЗ (47), так и для УНК (49):

$$\begin{aligned} \text{pr } \omega_{R^1} \left(\theta_{xx} - \frac{1}{2}f'(\theta) \right) &= 0, & \text{если } \theta_{xx} - \frac{1}{2}f'(\theta) &= 0, \\ \text{pr } \omega_{R^1} (\theta_x^2 - f) &= 0, & \text{если } \theta_x^2 - f &= 0. \end{aligned}$$

Согласно предложению 1 существует двумерная поверхность, которая определяется функцией погружения

$$F^{R^1}([\theta], y, \lambda) = \Phi^{-1} D_x \Phi \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \quad (57)$$

с линейно независимыми векторами

$$D_x F^{R^1} = \Phi^{-1} (D_x U_1) \Phi, \quad D_y F^{R^1} = \Phi^{-1} (D_x U_2) \Phi. \quad (58)$$

Во втором случае векторное поле ω_{R^2} является симметрией УНК (49), но не симметрией ЛСЗ (47):

$$\begin{aligned} \operatorname{pr} \omega_{R^2} \left(\theta_{xx} - \frac{1}{2} f'(\theta) \right) &= 0, & \text{если } \theta_{xx} - \frac{1}{2} f'(\theta) &= 0, \\ \operatorname{pr} \omega_{R^2} (\theta_x^2 - f) &\neq 0, & \text{если } \theta_x^2 - f &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что интегральная форма поверхности, связанной с симметрией ω_{R^2} , не является формой Фокаса–Гельфанда. Согласно предложению 2 функция погружения двумерной поверхности принимает вид

$$F^{R^2}([\theta], y, \lambda) = \Phi^{-1} (\operatorname{pr} \omega_{R^2} \Phi) \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}), \quad (59)$$

что отвечает линейно независимым касательным векторам

$$\begin{aligned} D_x F^{R^2} &= \Phi^{-1} \{ (\operatorname{pr} \omega_{R^2} U_1) + \operatorname{pr} \omega_{R^2} (D_x \Phi - U_1 \Phi) \}, \\ D_y F^{R^2} &= \Phi^{-1} \{ (\operatorname{pr} \omega_{R^2} U_2) + \operatorname{pr} \omega_{R^2} (D_y \Phi - U_2 \Phi) \}, \end{aligned} \quad (60)$$

где действие $\operatorname{pr} \omega_{R^2}$ на ЛСЗ (47) (с матричными функциями U_α , заданными в (50)) не обращается в нуль для всех решений Φ ЛСЗ:

$$\begin{aligned} \operatorname{pr} \omega_{R^2} (D_x \Phi - U_1 \Phi) &= \frac{\theta_x}{2(\theta + \lambda)^{3/2} f(\theta)^{1/2}} \begin{pmatrix} -\psi_+ - \psi_- & a^{-1}(\psi_+ - \psi_-) \\ 0 & \psi_+ + \psi_- \end{pmatrix}, \\ \operatorname{pr} \omega_{R^2} (D_y \Phi - U_2 \Phi) &= \frac{\theta_x}{(\theta + \lambda)^{1/2} f(\theta)^{1/2}} \begin{pmatrix} -\psi_+ - \psi_- & a^{-1}(\psi_+ - \psi_-) \\ 0 & \psi_+ + \psi_- \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (61)$$

В обоих случаях можно найти явные выражения для погружений (57) и (59), но они весьма громоздки, поэтому мы их здесь опускаем.

5. $\mathbb{C}P^{N-1}$ -СИГМА-МОДЕЛЬ И СОЛИТОННЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Рассмотрим $\mathbb{C}P^{N-1}$ -модель в терминах эрмитова проектора P ранга 1:

$$\begin{aligned} [\partial_+ \partial_- P, P] &= \emptyset, & \partial_\pm &= \frac{1}{2} (\partial_1 \pm i \partial_2), \\ P^2 &= P^\dagger = P, & \operatorname{tr} P &= 1, & \partial_1 &= \partial_{\xi_1}, \partial_2 = \partial_{\xi_2}. \end{aligned} \quad (62)$$

Мы считаем, что эта модель определена на римановой сфере $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ и что ее функционал действия конечен [10]. Существуют повышающий и понижающий операторы решений системы (62), и любое решение можно записать как повышающий

оператор, действующий на голоморфное решение [11]:

$$\Pi_{\pm}(P) = \begin{cases} \frac{(\partial_{\pm}P)P(\partial_{\mp}P)}{\text{tr}(\partial_{\pm}PP\partial_{\mp}P)}, & (\partial_{\pm}P)P \neq \emptyset, \\ \emptyset, & (\partial_{\pm}P)P = \emptyset, \end{cases}$$

$$\Pi_{-}^{k+1}(P) = 0 \quad \text{для некоторых } k \in \mathbb{Z}^{+}.$$

ЛСЗ записывается как [12]

$$\partial_{\pm}\Phi = U_{\pm}\Phi, \quad U_{\pm} = \frac{2}{1 \pm \lambda}[\partial_{\pm}P, P] \in \mathfrak{su}(N) \quad (63)$$

(знак плюс выбирается при $\alpha = 1$, минус – при $\alpha = 2$); ее решение $\Phi = \Phi([P], \lambda)$ переходит в $\mathbb{I}_N$ при $\lambda \rightarrow \infty$ [10], [12]:

$$\Phi_k = \mathbb{I}_N + \frac{4\lambda}{(1-\lambda)^2} \sum_{j=0}^{k-1} \Pi_{-}^j P - \frac{2}{1-\lambda} P_k \in SU(N), \quad \lambda = it, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (64)$$

где $\mathbb{I}_N$ – единичная $(N \times N)$ -матрица. Для простоты в этом разделе мы не пишем индекс k у каждого из N проекторов P_k . Мы выражаем модель в терминах элементов алгебры $\mathfrak{su}(N)$ вместо P :

$$\theta \equiv i \left(P - \frac{1}{N} \mathbb{I}_N \right) \in \mathfrak{su}(N) \quad (65)$$

с алгебраическим ограничением

$$\theta^2 = -i \frac{2-N}{N} \theta + \frac{1-N}{N^2} \mathbb{I}_N \iff P^2 = P. \quad (66)$$

Уравнения Эйлера–Лагранжа принимают вид

$$\Omega^j[\theta] = [(\partial_1^2 + \partial_2^2)\theta, \theta]^j = 0, \quad j = 1, \dots, N^2 - 1, \quad (67)$$

где $[\cdot]^j$ – коэффициенты j -го базисного элемента e_j алгебры $\mathfrak{su}(N)$. Матрицы потенциала U_{α} , выраженные в терминах θ , суть

$$U_1 = \frac{-2}{1-\lambda^2} ([\partial_1\theta, \theta] - i\lambda[\partial_2\theta, \theta]) \in \mathfrak{su}(N),$$

$$U_2 = \frac{-2}{1-\lambda^2} (i\lambda[\partial_1\theta, \theta] + [\partial_2\theta, \theta]) \in \mathfrak{su}(N), \quad \lambda = it, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (68)$$

Записывая функцию Φ в терминах θ , мы получаем

$$\Phi([\theta], \lambda) = \mathbb{I}_N + \frac{4\lambda}{(1-\lambda)^2} \sum_{j=0}^N \Pi_{-}^j \left(\frac{1}{N} \mathbb{I}_N - i\theta \right) - \frac{2}{1-\lambda} \left(\frac{1}{N} \mathbb{I}_N - i\theta \right) \in SU(N). \quad (69)$$

Для любых функций f и g одной переменной уравнения Эйлера–Лагранжа (68) и их ЛСЗ (63) (с матрицами потенциала (69)) допускают конформные симметрии

$$\omega_{c_i} = [f(\xi_i)\theta_1^j + g(\xi_i)\theta_2^j] \frac{\partial}{\partial \theta^j}, \quad i = 1, 2. \quad (70)$$

Векторные поля ω_{C_i} τ -связаны с полями

$$\eta_{C_i} = (\partial_i \Phi^j) \frac{\partial}{\partial \Phi^j} + (\partial_i U_\alpha^j) \frac{\partial}{\partial U_\alpha^j}, \quad i = 1, 2, \quad (71)$$

которые являются конформными симметриями ЛСЗ (63). Интегральная форма двумерной поверхности дается с помощью формулы Фокаса–Гельфанда

$$F = \frac{\Phi^{-1}}{1 - \lambda^2} \{f(\xi_1)([\partial_1 \theta, \theta] - i\lambda[\partial_2 \theta, \theta]) + g(\xi_2)(i\lambda[\partial_1 \theta, \theta] + [\partial_2 \theta, \theta])\} \Phi \in \mathfrak{su}(N). \quad (72)$$

6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Подведем итог и сформулируем результаты, полученные в этой работе.

1. Мы применили методику Фокаса–Гельфанда для построения солитонных поверхностей, связанных с обыкновенными дифференциальными уравнениями и дифференциальными уравнениями в частных производных, допускающими представление Лакса.

2. Мы показали, как определить общие симметрии двумерных интегрируемых систем и их ЛСЗ так, чтобы была применима формула Фокаса–Гельфанда для погружения двумерных поверхностей.

3. Мы показали, что существование общих симметрий является необходимым и достаточным условием существования функции погружения в виде, данном формулой Фокаса–Гельфанда (26), с касательными векторами, задаваемыми выражением (35), где векторное поле ω_R является общей симметрией как УНК $\Omega[\theta] = 0$, так и ЛСЗ $\Lambda([\theta], \lambda) = 0$.

4. Мы установили явное выражение, которое позволяет различать случаи, когда возможна или невозможна интерпретация солитонных поверхностей с помощью формулы (26) с касательными векторами, задаваемыми выражением (38), где векторное поле ω_R является обобщенной симметрией УНК $\Omega[\theta] = 0$, но не обязательно симметрией ЛСЗ $\Lambda([\theta], \lambda) = 0$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Общие симметрии

1. Пусть L_1 – максимальная конечномерная подалгебра точечных симметрий Ли, связанная с нелинейными дифференциальными уравнениями $\Omega[\theta] = 0$.

2. Пусть L_2 – максимальная конечномерная подалгебра точечных симметрий Ли линейной системы, связанной с нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных.

3. Пусть π является проектором, который действует на совокупность векторных полей $\{\omega_1, \dots, \omega_s\}$ (их оболочка образует множество L_2) так, что

$$\pi(\omega_k) = \omega_k \rho, \quad \rho = x^i \partial_{x^i} + \theta^k \partial_{\theta^k}, \quad k = 1, \dots, s,$$

где w – дифференциальный оператор по всем независимым и зависимым переменным со свойством

$$\pi^n(\omega_k) = \pi(\omega_k), \quad n \in \mathbb{Z}^+, \quad k = 1, \dots, s.$$

4. Общие симметрии нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и ЛСЗ являются векторными полями ω_k , оболочка которых образует множество $L_3 = L_1 \cap \pi(L_2) \neq \emptyset$. При этом множество L_3 не обязательно является алгеброй.

Если продолжение одного из векторных полей ω_k из L_3 , действующих на ЛСЗ, должно обратиться в нуль для всех волновых функций Φ , то интегральная форма двумерной поверхности в алгебре Ли дается формулой погружения Фокаса–Гельфанда

$$F = \Phi^{-1}[\beta(\lambda)D_\lambda\Phi + S\Phi + \text{pr } \omega_R\Phi] \in \mathfrak{g}, \quad (\text{П.1})$$

когда касательные векторы $D_\alpha F = \Phi^{-1}A_\alpha\Phi$ линейно независимы с матричными функциями

$$A_\alpha = \beta(\lambda)D_\lambda U_\alpha + (D_\alpha S + [S, U_\alpha]) + \text{pr } \omega_R U_\alpha \in \mathfrak{g}, \quad (\text{П.2})$$

где векторное поле ω_R является общей симметрией как УНК $\Omega[\theta] = 0$, так и ЛСЗ $\Lambda([\theta], \lambda) = 0$.

Список литературы

- [1] A. M. Grundland, S. Post, D. Riglioni, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **47**:1 (2014), 015201, 14 pp.
- [2] A. S. Fokas, I. M. Gel'fand, F. Finkel, Q. M. Liu, *Selecta Math. (N. S.)*, **6**:4 (2000), 347–375.
- [3] A. S. Fokas, I. M. Gelfand, *Commun. Math. Phys.*, **177**:1 (1996), 203–220.
- [4] A. Sym, *Lett. Nuovo Cimento* (2), **33**:12 (1982), 394–400.
- [5] J. Cieřliński, *J. Math. Phys.*, **38**:8 (1997), 4255–4272.
- [6] A. Doliwa, A. Sym, “Constant mean curvature surfaces in E^3 as an example of soliton surfaces”, *Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems* (Baia Verde, Italy, 19–29 June, 1991), eds. M. Boiti, L. Martina, F. Pempinelli, World Sci., Singapore, 1992, 111–117.
- [7] П. Олвер, *Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям*, Мир, М., 1989.
- [8] A. M. Grundland, S. Post, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44**:16 (2011), 165203, 31 pp.
- [9] A. M. Grundland, S. Post, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **45**:1 (2012), 015204, 20 pp.
- [10] A. Din, W. J. Zakrzewski, *Nucl. Phys. B*, **174**:2–3 (1980), 397–406.
- [11] P. P. Goldstein, A. M. Grundland, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **43**:26 (2010), 265206, 18 pp.
- [12] В. Е. Захаров, А. В. Михайлов, *ЖЭТФ*, **74**:6 (1978), 1953–1973.