Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. Бхои, У. Лаха, Фазы низкоэнергетического упругого $(\alpha-p)$ -рассеяния, связанные с суперсимметрией, *ТМФ*, 2017, том 190, номер 1, 78–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9036>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 17:26:01

© 2017 г.

Я. Бхои*, У. Лаха*

ФАЗЫ НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО УПРУТОГО $(\alpha-p)$ -РАССЕЯНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С СУПЕРСИММЕТРИЕЙ

Рассматривается модель эффективного потенциала, состоящая из электромагнитной и ядерной частей, как взаимодействие в основном состоянии для $(\alpha-p)$ -систем. Следующие несколько взаимодействий высших парциальных волн выводятся в рамках формализма суперсимметричной квантовой механики. Для вычисления фаз упругого $(\alpha-p)$ -рассеяния вплоть до энергии 12 МэВ применяется метод фазовых функций. Вполне строго учитывается эффект электромагнитного взаимодействия при расчете фазового сдвига. Получено хорошее согласие с экспериментальными данными посредством введения некоторых зависящих от энергии поправочных множителей в выражения для взаимодействий.

Ключевые слова: атомные и ядерные потенциалы Хюльтена, суперсимметрия и факторизация, метод фазовых функций, фазы упругого $(\alpha-p)$ -рассеяния.

DOI: 10.4213/tmf9036

1. ВВЕДЕНИЕ

Описание низкоэнергетического упругого рассеяния альфа-частицы на нуклоне с помощью двухчастичного потенциала является интересной проблемой, особенно важной в рамках кластерной модели ядра [1]–[5]. Системы альфа-частица–нуклон активно исследовались ранее [6]–[12], и для них получено большое количество данных по фазовым сдвигам.

Недавно (см. статью [13]) мы исследовали упругое рассеяние альфа-частицы на нуклоне в рамках простой модели потенциала, в которой электромагнитное взаимодействие учитывалось в ядерной части. Взаимодействие альфа-частица–протон ($(\alpha-p)$ -взаимодействие) является комбинацией кулоновского потенциала и короткодействующего взаимодействия. Цель представленной работы заключается в строгом учете кулоновского эффекта при вычислении фаз упругого рассеяния. Короткодействующий потенциал имеет ядерную природу, тогда как кулоновский потенциал связан с зарядами. Существенная особенность короткодействующего ядерного

*Department of Physics, National Institute of Technology, Jamshedpur, India.
E-mail: jskbhoi@gmail.com, ujjwal.laha@gmail.com

взаимодействия объясняется микроскопическими теориями ядерно-ядерных взаимодействий, такими как метод производящих координат (МПК) [14] или метод резонирующих групп (МРГ) [15]. В МПК [14] большое число упругих столкновений описывается с помощью феноменологического взаимодействия двух тел.

В настоящей статье рассматривается (α - p)-система в терминах простой модели потенциала, в которой ядерная часть описывается локальным ядерным потенциалом типа Хюльтена [16], а электромагнитная часть – его атомным аналогом. Из-за неоднозначностей, появляющихся при анализе фазовых сдвигов при энергиях, больших чем энергия неупругого порога, наше исследование ограничено областью энергий, меньших 15 МэВ. Мы решаем в данной статье простое уравнение Шредингера с ядерным и атомным взаимодействиями Хюльтена с помощью метода Фробениуса [17]. Так как потенциал Хюльтена можно применять только к s -волне, взаимодействия высших парциальных волн ($\ell = 1, 2$) выводятся в рамках формализма суперсимметричной квантовой механики (СКМ) [18]–[20]. Соответствующие фазовые сдвиги для s -, p - и d -волн вычислены с помощью разумного применения метода фазовых функций (МФФ) [21].

В разделе 2 решается уравнение Шредингера для s -волны с ядерным и атомным потенциалами Хюльтена, а затем выводятся взаимодействия высших парциальных волн в соответствии с формализмом СКМ. Раздел 3 посвящен демонстрации применения построенных взаимодействий при вычислении фазовых сдвигов упругого рассеяния для (α - p)-систем, и, наконец, в разделе 4 приведены некоторые заключительные замечания.

2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ s -ВОЛНЫ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВЫСШИХ ПАРЦИАЛЬНЫХ ВОЛН

Для центра масс с энергией $E = k^2 + i\epsilon$ уравнение Шредингера для атомного и ядерного потенциалов Хюльтена записывается следующим образом:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - U_{\text{eff}}(r) \right) \varphi(k, r) = 0, \quad (1)$$

где

$$U_{\text{eff}}(r) = V_A(r) + V_N(r). \quad (2)$$

Атомный потенциал Хюльтена V_A и его ядерный аналог V_N имеют вид

$$V_A(r) = V_0 \frac{e^{-\delta r}}{1 - e^{-\delta r}}, \quad (3)$$

$$V_N(r) = V_1 \frac{e^{-\beta r}}{e^{-\alpha r} - e^{-\beta r}}, \quad (4)$$

где

$$V_1 = -(\beta^2 - \alpha^2). \quad (5)$$

Здесь волновое число α относится к интенсивности взаимодействия, β – обратная величина параметра пробега и δ – обратная величина радиуса экранирования. Используя преобразование

$$\varphi(k, r) = \frac{e^{ikr}}{\gamma} (1 - e^{-\gamma r}) F(k, r), \quad (6)$$

а также равенство $x = 1 - e^{-\gamma r}$ в уравнении (1), можно получить выражение

$$\begin{aligned} \left[x(1-x) \frac{d^2}{dx^2} + \left\{ 2 - \left(3 - \frac{2ik}{\gamma} \right) x \right\} \frac{d}{dx} + \frac{2ik}{\gamma} - 1 - \frac{V_1}{\gamma^2} \right] F(k, x) = \\ = \frac{V_0 x}{\gamma^2} \left[\frac{(1-x)^{\delta/\gamma-1}}{1 - (1-x)^{\delta/\gamma}} \right] F(k, x). \end{aligned} \quad (7)$$

Так как x меньше единицы, мы рассматриваем только член первого порядка по x в правой части формулы (7), и, таким образом, ее можно записать как

$$\begin{aligned} \left[x(1-x) \frac{d^2}{dx^2} + \left\{ 2 - \left(3 - \frac{2ik}{\gamma} \right) x \right\} \frac{d}{dx} + \frac{2ik}{\gamma} - 1 - \frac{V_1}{\gamma^2} \right] F(k, x) = \\ = \frac{V_0 x}{\gamma^2} \left[\frac{\gamma}{\delta} - 1 + \frac{\gamma}{\delta x} \right] F(k, x). \end{aligned} \quad (8)$$

Введенная величина γ определяется равенством

$$\gamma = \beta - \alpha. \quad (9)$$

Для уравнения (8) $x = 0$ и $x = 1$ являются регулярными сингулярными точками. Применяя метод Фробениуса [17] вблизи $x = 0$, получаем

$$F(k, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda}, \quad a_0 \neq 0. \quad (10)$$

Объединяя выражения (8) и (10) и решая определяющее уравнение, можно получить корни определяющего уравнения $\lambda = 0$ и $\lambda = -1$. Для корня $\lambda = 0$ рекуррентное соотношение дается выражением

$$a_{n+2} = \frac{(n+1)(n+3 - 2ik/\gamma) + Y}{(n+2)(n+3)} a_{n+1} + \frac{Z}{(n+2)(n+3)} a_n, \quad (11)$$

где

$$Y = 1 + \frac{V_1}{\gamma^2} - \frac{2ik}{\gamma} + \frac{V_0}{\delta\gamma} \quad (12)$$

и

$$Z = \frac{V_0}{\gamma^2} \left(\frac{\gamma}{\delta} - 1 \right). \quad (13)$$

Коэффициенты имеют вид

$$a_1 = \frac{Y a_0}{2}, \quad (14)$$

$$a_2 = \left[\frac{(3 - 2ik/\gamma + Y)Y}{12} + \frac{Z}{6} \right] a_0, \quad (15)$$

$$a_3 = \left[\frac{8 - 4ik/\gamma + Y}{12} \left(\frac{(3 - 2ik/\gamma + Y)Y}{12} + \frac{Z}{6} \right) + \frac{Y^2 Z}{48} \right] a_0, \quad (16)$$

$$a_4 = \left[\frac{15 - 6ik/\gamma + Y}{20} \left[\frac{8 - 4ik/\gamma + Y}{12} \left(\frac{(3 - 2ik/\gamma + Y)Y}{12} + \frac{Z}{6} \right) + \frac{Y^2 Z}{48} \right] + Z \left(\frac{(3 - 2ik/\gamma + Y)Y}{12} + \frac{Z}{6} \right) \right] a_0. \quad (17)$$

Комбинирование выражений (6), (10) и (14)–(17), перестановка членов и некоторые алгебраические манипуляции приводят к формуле

$$\begin{aligned} \varphi(k, r) = & \frac{e^{ikr}}{\gamma} (1 - e^{-\gamma r}) \left[a_0 {}_2F_1(a, b; c; 1 - e^{-\gamma r}) + \frac{V_0 a_0}{2\delta\gamma} (1 - e^{-\gamma r}) \left(1 + \frac{1 - e^{-\gamma r}}{3} \right) + \right. \\ & + \frac{V_0 a_0}{2\delta\gamma} f_2(a, b; c; 1 - e^{-\gamma r}) (ab + (a+1)(b+1)) + \frac{V_0 a_0}{6\gamma} \left(\frac{\gamma}{\delta} - 1 \right) (1 - e^{-\gamma r})^2 + \\ & + \frac{V_0 a_0}{\delta\gamma} \left(\frac{ab(a+1)(b+1)}{2 \cdot 3!} + \frac{2(a+2)(b+2) + 3(ab)^2}{12} \right) \times \\ & \left. \times f_3(a, b; c; 1 - e^{-\gamma r}) + \dots \right], \end{aligned} \quad (18)$$

в которой

$$a_0 = 1, \quad (19)$$

$$a = 1 - \frac{ik}{\gamma} + \frac{i}{\gamma} (k^2 + V_1)^{1/2}, \quad (20)$$

$$b = 1 - \frac{ik}{\gamma} - \frac{i}{\gamma} (k^2 + V_1)^{1/2} \quad (21)$$

и

$$c = 2. \quad (22)$$

Здесь ${}_2F_1(\cdot)$ есть гауссова гипергеометрическая функция, а $f_\sigma(\cdot)$ – частное решение неоднородного гауссова гипергеометрического уравнения [22]

$$f_\sigma(a, b; c; z) = \frac{z^\sigma}{\sigma(\sigma + c - 1)} {}_3F_2(1, \sigma + a, \sigma + b; \sigma + 1, \sigma + c; z). \quad (23)$$

В формализме СКМ потенциал высших парциальных волн $V_p(r)$, следующий после потенциала, связанного с основным состоянием $U_{\text{eff}}(r)$, записывается как

$$V_p(r) = U_{\text{eff}}(r) - \frac{d^2}{dr^2} (\ln \varphi^{(0)}(k, r)), \quad (24)$$

где

$$\varphi^{(0)}(k, r) = r \left[e^{w_1 \gamma r/2} + \frac{V_0 r}{2\delta} \left(1 + \frac{\gamma r}{3} \right) \right], \quad w_1 = 1 + \frac{V_1}{\gamma^2}. \quad (25)$$

Комбинирование равенств (24) и (25) дает искомое выражение для потенциала p -волны:

$$V_p(r) = U_{\text{eff}}(r) + \frac{1}{r^2} - \frac{\frac{w_1^2 \gamma^2}{4} e^{w_1 \gamma r/2} + \frac{V_0 \gamma}{3\delta}}{e^{w_1 \gamma r/2} + \frac{V_0 r}{2\delta} \left(1 + \frac{\gamma r}{3} \right)} - \left(\frac{\frac{w_1 \gamma}{2} e^{w_1 \gamma r/2} + \frac{V_0}{2\delta} \left(1 + \frac{2\gamma r}{3} \right)}{e^{w_1 \gamma r/2} + \frac{V_0 r}{2\delta} \left(1 + \frac{\gamma r}{3} \right)} \right)^2. \quad (26)$$

Любой дифференциальный оператор второго порядка вида

$$H_n = -\frac{d^2}{dx^2} + V_n(x) \quad (27)$$

можно разложить на множители в терминах следующих двух дифференциальных операторов первого порядка

$$O_n^\pm(x) = \pm \frac{d}{dx} + \frac{d}{dx} \ln \varphi_n^{(0)}(x). \quad (28)$$

Здесь

$$V_n(x) = V_{n-1}(x) - \frac{d^2}{dx^2} \ln \varphi_{n-1}^{(0)}(x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (29)$$

и $O_n^\pm(x)$ представляют собой понижающий и повышающий операторы. Соотношения (28), (29), справедливы не только для дискретных энергетических собственных значений H_n , но также и для непрерывной части спектра. Для положительных энергетических состояний волновые функции удовлетворяют равенствам

$$\varphi_n(x) = O_{n-1}^{(-)} \varphi_{n-1}(x). \quad (30)$$

В силу выражений (25) и (28) повышающий оператор $O^{(-)}(r)$ приводит к формуле

$$O^{(-)}(r) = -\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} + ik + \frac{\frac{w_1\gamma}{2}e^{w_1\gamma r/2} + \frac{V_0}{2\delta}\left(1 + \frac{2\gamma r}{3}\right)}{e^{w_1\gamma r/2} + \frac{V_0 r}{2\delta}\left(1 + \frac{\gamma r}{3}\right)}. \quad (31)$$

Объединяя (18), (30) и (31), получаем решение, связанное с p -волной, для потенциала $V_p(r)$:

$$\varphi^p(k, r) = \frac{e^{ikr}}{\gamma} (1 - e^{-\gamma r}) \left[\frac{1}{r} - \frac{\gamma e^{-\gamma r}}{1 - e^{-\gamma r}} - \frac{d}{dr} + \frac{\frac{w_1\gamma}{2}e^{w_1\gamma r/2} + \frac{V_0 r}{2\delta}\left(1 + \frac{2\gamma r}{3}\right)}{e^{w_1\gamma r/2} + \frac{V_0 r}{2\delta}\left(1 + \frac{\gamma r}{3}\right)} \right] R_1(r), \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} R_1(r) = & {}_2F_1(a, b; c; 1 - e^{-\gamma r}) + \frac{V_0}{2\delta\gamma} l(1 - e^{-\gamma r}) \left[1 + \frac{1 - e^{-\gamma r}}{3} \right] + \\ & + \frac{V_0}{2\delta\gamma} [ab + (a+1)(b+1)] f_2(a, b; c; 1 - e^{-\gamma r}) + \frac{V_0}{6\gamma^2} \left(\frac{\gamma}{\delta} - 1 \right) (1 - e^{-\gamma r})^2 + \\ & + \frac{V_0}{\delta\gamma} \left[\frac{ab(a+1)(b+1)}{2 \cdot 3!} + \frac{2(a+2)(b+2) + 3(ab)^2}{12} \right] f_3(a, b; c; 1 - e^{-\gamma r}) + \dots \end{aligned} \quad (33)$$

Поведение функции $\varphi^p(k, r)$ вблизи нуля (обозначенной $\varphi^{p(0)}(r)$, так как явная зависимость от энергии отсутствует) является существенным при построении потенциала d -волны. При $r \rightarrow 0$ выражение (32) выглядит следующим образом:

$$\varphi^{p(0)}(r) = \varphi_1^{(0)}(r) + \varphi_2^{(0)}(r) + \varphi_3^{(0)}(r), \quad (34)$$

где

$$\varphi_1^{(0)}(r) = \gamma r T_1(r), \quad T_1(r) = e^{w_1\gamma r/2} + \frac{V_0 r}{2\delta} \left(1 + \frac{\gamma r}{3} \right), \quad \varphi_2^{(0)}(r) = r T_1'(r),$$

$$T_1'(r) = \frac{w_1\gamma}{2}e^{w_1\gamma r/2} + \frac{V_0}{2\delta}\left(1 + \frac{2r\gamma}{3}\right), \quad \varphi_3^{(0)}(r) = -re^{-\gamma r}T_2(r),$$

$$T_2(r) = \frac{w_1\gamma}{2}e^{w_2\gamma r/3} + \frac{V_0\gamma r}{4\delta} - \frac{V_0r}{3}, \quad w_2 = 4 + \frac{V_1}{\gamma^2}.$$

Используя формулы (29) и (34), приходим к потенциалу для d -волны:

$$V_d(r) = V_p(r) - \frac{\varphi_1^{(0)'}(r) + \varphi_2^{(0)'}(r) + \varphi_3^{(0)'}(r)}{\varphi_1^{(0)}(r) + \varphi_2^{(0)}(r) + \varphi_3^{(0)}(r)} + \left(\frac{\varphi_1^{(0)'}(r) + \varphi_2^{(0)'}(r) + \varphi_3^{(0)'}(r)}{\varphi_1^{(0)}(r) + \varphi_2^{(0)}(r) + \varphi_3^{(0)}(r)} \right)^2, \quad (35)$$

где

$$\varphi_1^{(0)'}(r) = \gamma T_1(r) + r\gamma T_1'(r), \quad \varphi_1^{(0)''}(r) = 2\gamma T_1'(r) + r\gamma T_1''(r),$$

$$T_1''(r) = \frac{w_1^2\gamma^2}{4}e^{w_1\gamma r/2} + \frac{V_0\gamma}{3\delta}, \quad \varphi_2^{(0)'}(r) = T_1'(r) + rT_1''(r),$$

$$\varphi_2^{(0)''}(r) = 2T_1''(r) + T_1'''(r), \quad T_1'''(r) = \frac{w_1^3\gamma^3}{8}e^{w_1\gamma r/2},$$

$$\varphi_3^{(0)'}(r) = e^{-\gamma r} \left[(\gamma r - 1)T_2(r) - rT_2'(r) \right],$$

$$T_2'(r) = \frac{w_1w_2\gamma^2}{6}e^{w_2\gamma r/3} + \frac{V_0\gamma}{4\delta} - \frac{V_0}{3},$$

$$\varphi_3^{(0)''}(r) = e^{-\gamma r} \left[\gamma(2 - r\gamma)T_2(r) + 2(\gamma r - 1)T_2'(r) - rT_2''(r) \right],$$

$$T_2''(r) = \frac{w_1w_2^2\gamma^3}{18}e^{w_2\gamma r/3}.$$

3. МЕТОД ФАЗОВЫХ ФУНКЦИЙ И ФАЗОВЫЕ СДВИГИ УПРУГОГО (α - p)-РАССЕЯНИЯ

Можно легко вычислить фазовые сдвиги рассеяния для взаимодействий, заданных выражениями (2), (26) и (35), с помощью применения фазового уравнения [21]

$$\delta_\ell'(k, r) = -k^{-1}V(r)[\hat{j}_\ell(kr) \cos \delta_\ell(k, r) - \hat{\eta}_\ell(kr) \sin \delta_\ell(k, r)]^2. \quad (36)$$

Используя значения параметров $\beta = 1.2 \text{ фм}^{-1}$, $\alpha = 0.578 \text{ фм}^{-1}$, $V_0/\delta = 1/18.12908 \text{ фм}^{-1}$ и $1/\delta = 20 \text{ фм}$, мы вычислили фазовые сдвиги упругого (α - p)-рассеяния для s -, p - и d -состояний парциальных волн вплоть до энергии $E_{\text{Lab}} = 12 \text{ МэВ}$. Эти фазовые сдвиги показаны на рис. 1 и 2. Глядя на рис. 1, можно заметить, что поведение вычисленного фазового сдвига для s -волны согласуется со стандартными данными [23], но его численные значения немного ниже, а для p -волны вычисленные фазовые сдвиги хорошо согласуются со стандартными данными вплоть до энергии $E_{\text{Lab}} = 3.5 \text{ МэВ}$, вне этой области они различаются в пределах 10° . Фазовые сдвиги для d -волны, показанные на рис. 2, также отличаются от стандартного результата [23] в пределах 1.5° .

Рис. 1. Фазовые сдвиги (s - и p -состояния) для $(\alpha-p)$ -систем. Рис. 2. Фазовые сдвиги (d -состояние) для $(\alpha-p)$ -систем.

Для получения лучшего согласия с экспериментальными данными мы ввели некоторые зависящие от энергии поправочные множители в выражения для взаимодействий:

$$\begin{aligned} V_C(k, r) &= 1.25(k^2 - 0.401)e^{-\beta\omega r}, & \omega &= 0.52 \quad (\text{для } s\text{-волны}), \\ V_C(k, r) &= -1.25(k^2 - 0.079)e^{-\beta\omega r}, & \omega &= 0.04 \quad (\text{для } p\text{-волны}) \end{aligned}$$

и

$$V_C(k, r) = 1.25(k^2 - 0.772)e^{-\beta\omega r}, \quad \omega = 0.62 \quad (\text{для } d\text{-волны}).$$

Фазовые сдвиги, вычисленные на основе выражений для потенциалов с этими поправками, обозначены как $\delta_C^{1/2+}$, $\delta_C^{1/2-}$ и $\delta_C^{5/2+}$ соответственно. Они также приведены на рис. 1 и 2. С помощью данных поправок мы достигли хорошего согласия со стандартными данными [23].

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье исследуется низкоэнергетическое упругое (α - p)-рассеяние с помощью совокупности простых потенциалов. Взаимодействия высших парциальных волн были выведены с применением формализма СКМ [18]–[20] на основе предположения о потенциале, связанном с основным состоянием. Мы использовали одночленный ядерный потенциал Хюльтена в качестве ядерной части взаимодействия и атомный потенциал Хюльтена для электромагнитной части. В отличие от использованного ранее подхода к проблеме [13], в котором электромагнитное взаимодействие было добавлено к ядерной части, здесь мы аккуратно учли электромагнитное взаимодействие при расчете фаз упругого (α - p)-рассеяния. Полученные результаты для фазовых сдвигов оказались лучше, чем результаты работы [13], даже без введения поправочных множителей в выражения для взаимодействий. При использовании дополнительных зависящих от энергии поправок в выражениях для соответствующих потенциалов мы получили отличное согласие с экспериментом.

Недавно Эрали и Байе [12] применили для расчета фазовых сдвигов упругого рассеяния в системах альфа-частица–нуклон метод корреляционных унитарных операторов, который дал хорошее согласие с экспериментальными результатами при использовании некоторых поправок. Зависящие от энергии множители $V_C(k, r)$ позволяют описывать эффекты нецентральной части короткодействующего взаимодействия. Таким образом, мы считаем, что рассматриваемый в настоящей статье метод может стать удобной отправной точкой для работы с другими системами сталкивающихся частиц, включая заряженные частицы, в рамках СКМ и МФФ.

Список литературы

- [1] T. A. Tombrello, G. C. Phillips, “A two-body cluster model of the nucleus”, *Nucl. Phys.*, **20** (1960), 648–662.
- [2] A. N. Mitra, V. S. Bhasin, B. S. Bhakar, “A ‘potential’ for low energy α - N interaction”, *Nucl. Phys.*, **38** (1962), 316–321.
- [3] E. van der Spuy, “The interaction of neutron and alpha-particle”, *Nucl. Phys.*, **1**:8 (1956), 381–414.
- [4] H. Kanada, S. Naagata, S. Otsuki, Y. Sumi, “On nucleon- He^4 interaction and nuclear forces”, *Prog. Theor. Phys.*, **30**:4 (1963), 475–493.
- [5] P. E. Hodgson, “The scattering of nucleons by alpha-particles”, *Adv. Phys.*, **7**:25 (1958), 1–39.
- [6] C. L. Critchfield, D. C. Dodder, “Phase shifts in proton-alpha-scattering”, *Phys. Rev.*, **76**:5 (1949), 602–605.
- [7] J. L. Gammel, R. M. Thaler, “Phase shifts for p - α scattering and polarization in p - α scattering for proton laboratory energies from 0 to 40 Mev”, *Phys. Rev.*, **109**:6 (1958), 2041–2047.
- [8] L. Brown, W. Haeberli, W. Trächslin, “Phase shifts and polarization in proton-alpha scattering from 0.9 to 3.2 MeV”, *Nucl. Phys. A*, **90**:2 (1967), 339–352.

- [9] A. Houdayer, N. E. Davison, S. A. Elbakr, A. M. Sourkes, W. T. H. van Oers, A. D. Bacher, “Cross-section measurements and phase shift analysis of p - ^4He elastic scattering in the energy range 20–55 MeV”, *Phys. Rev. C*, **18**:5 (1978), 1985–2000.
- [10] J. Berger, J. Duflo, L. Goldzahl, F. Plouin, J. Oostens, M. Van Den Bossche, L. Vu Hai, G. Bizard, C. Le Brun, F. L. Fabbri, P. Picozza, L. Satta, “Measurement of medium energy alpha–proton elastic scattering beyond the first minimum region”, *Phys. Rev. Lett.*, **37**:18 (1976), 1195–1197; Erratum **37**:24 (1976), 1651.
- [11] L. G. Votta, P. G. Roos, N. S. Chant, R. Woody, “Elastic proton scattering from ^3He and ^4He and the $^4\text{He}(p, d)^3\text{He}$ reaction at 85 MeV”, *Phys. Rev. C*, **10**:2 (1974), 520–528.
- [12] J. Dohet-Eraly, D. Baye, “Microscopic cluster model of $\alpha + n$, $\alpha + p$, $\alpha + ^3\text{He}$, and $\alpha + \alpha$ elastic scattering from a realistic effective nuclear interaction”, *Phys. Rev. C*, **84**:1 (2011), 014604, 13 pp.
- [13] U. Laha, J. Bhoi, “Higher partial-wave potentials from supersymmetry-inspired factorization and nucleon–nucleus elastic scattering”, *Phys. Rev. C*, **91**:3 (2015), 034614, 6 pp.
- [14] D. L. Hill, J. A. Wheeler, “Nuclear constitution and the interpretation of fission phenomena”, *Phys. Rev.*, **89**:5 (1953), 1102–1145.
- [15] K. Wildermuth, W. McClure, *Cluster Representation of Nuclei*, Springer Tracts in Modern Physics, **41**, Springer, Berlin, 1966.
- [16] J. Bhoi, U. Laha, “Hamiltonian hierarchy and $n - p$ scattering”, *J. Phys. G*, **40**:4 (2013), 045107.
- [17] G. B. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, New York, 1985.
- [18] E. Witten, “Dynamical breaking of supersymmetry”, *Nucl. Phys. B*, **188** (1981), 513–554.
- [19] C. V. Sukumar, “Supersymmetry, factorisation of the Schrödinger equation and a Hamiltonian hierarchy”, *J. Phys. A*, **18**:2 (1985), L57–L61.
- [20] U. Laha, C. Bhattacharyya, K. Roy, B. Talukdar, *Phys. Rev. C*, **38**:1 (1988), 558–560.
- [21] F. Calogero, *Variable Phase Approach to Potential Scattering*, Acad. Press, New York, 1967.
- [22] A. W. Bebister, *Transcendental Functions Satisfying Nonhomogeneous Linear Differential Equations*, MacMillan, New York, 1967.
- [23] G. R. Satchler, L. W. Owen, A. J. Elwyn, G. L. Morgan, R. L. Walter, “An optical model for the scattering of nucleons from ^4He at energies below 20 MeV”, *Nucl. Phys. A*, **112** (1968), 1–31.

Поступила в редакцию 7.09.2015,
после доработки 7.11.2015