Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Куниба, Комбинаторные отображения
Янга–Бакстера, возникающие из уравнения тетраэдра,
ТМФ, 2016, том 189, номер 1, 84–100

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9037>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 15:24:36

© 2016 г.

А. Куниба*

КОМБИНАТОРНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ЯНГА–БАКСТЕРА, ВОЗНИКАЮЩИЕ ИЗ УРАВНЕНИЯ ТЕТРАЭДРА

Изучены полученные недавно из уравнения тетраэдра решения уравнения Янга–Бакстера в виде произведений матриц. Данные решения образуют семейство квантовых $\mathcal{R}$ -матриц обобщенных квантовых групп, являющихся интерполяциями между представлениями симметричного тензора $U_q(A_{n-1}^{(1)})$ и антисимметричного тензора $U_{-q^{-1}}(A_{n-1}^{(1)})$. Показано, что при $q = 0$ все они сводятся к отображениям Янга–Бакстера, которые называются комбинаторными $\mathcal{R}$ -матрицами. Последние описаны с помощью явного алгоритма.

Ключевые слова: уравнение тетраэдра, уравнение Янга–Бакстера, обобщенные квантовые группы, отображение Янга–Бакстера.

DOI: 10.4213/tmf9037

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнение тетраэдра [1] – это обобщение уравнения Янга–Бакстера [2], и оно является ключевым для проверки интегрируемости в трехмерном пространстве. Обычно его записывают в виде уравнения типа $\mathcal{R}\mathcal{R}\mathcal{R}\mathcal{R}$ или $\mathcal{R}\mathcal{L}\mathcal{L}\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{1,2,4}\mathcal{R}_{1,3,5}\mathcal{R}_{2,3,6}\mathcal{R}_{4,5,6} &= \mathcal{R}_{4,5,6}\mathcal{R}_{2,3,6}\mathcal{R}_{1,3,5}\mathcal{R}_{1,2,4}, \\ \mathcal{L}_{1,2,4}\mathcal{L}_{1,3,5}\mathcal{L}_{2,3,6}\mathcal{R}_{4,5,6} &= \mathcal{R}_{4,5,6}\mathcal{L}_{2,3,6}\mathcal{L}_{1,3,5}\mathcal{L}_{1,2,4}.\end{aligned}$$

Здесь $\mathcal{R} \in \text{End}(F^{\otimes 3})$ и $\mathcal{L} \in \text{End}(V \otimes V \otimes F)$ для некоторых векторных пространств F и V . Равенства, приведенные выше, справедливы соответственно для групп $\text{End}(F^{\otimes 6})$ и $\text{End}(V^{\otimes 3} \otimes F^{\otimes 3})$. Индексы указывают на компоненты, на которых $\mathcal{R}$ и $\mathcal{L}$ действуют нетривиальным образом. Решения $\mathcal{R}$ и $\mathcal{L}$ называются 3D- $\mathcal{R}$ - и 3D- $\mathcal{L}$ -матрицами соответственно.

Данная работа была выполнена при финансовой поддержке фонда Grants-in-Aid for Scientific Research (грант № 15K13429).

*University of Tokyo, Tokyo, Japan. E-mail: atsuo@gokutan.c.u-tokyo.ac.jp

Можно осуществить редукцию уравнения тетраэдра к уравнению Янга–Бакстера

$$S_{1,2}S_{1,3}S_{2,3} = S_{2,3}S_{1,3}S_{1,2},$$

если исключить пространства с номерами 4, 5, 6 надлежащим образом [3]. Подобные редукции и свойства соответствующих квантовых групп были изучены в недавних работах [4]–[6] Окадо, Сергеева и автора настоящей статьи для случая 3D- $\mathcal{R}$ - и 3D- $\mathcal{L}$ -матриц, возникающих при квантовании алгебры функций [7]. Этот случай соответствует выбору $V = \mathbb{C}^2$ и фоковского пространства $F = \bigoplus_{m \geq 0} \mathbb{C}|m\rangle$ для q -осциллятора.

В данной статье сначала приведены последние достижения статьи [6], относящиеся к редукции посредством вычисления следа. Данная редукция порождает 2^n решений $S(z)$ уравнения Янга–Бакстера на основе n -произведения решений $\mathcal{R}$ и $\mathcal{L}$. Любое $S(z)$ является рациональным по параметру q и (мультипликативному) спектральному параметру z . Симметрия решения $S(z)$ описывается *обобщенными квантовыми группами* [8], [9], включающими квантовые аффинные алгебры [10], [11] и супералгебры типа A .

В разделе 6 представлен новый результат – теорема 2. В ней показано, что при $q = 0$ любое решение $S(z)$ задает *комбинаторную $\mathcal{R}$ -матрицу*, которая является некоторой биекцией между конечными множествами, удовлетворяющей уравнению Янга–Бакстера. Она описана посредством явного комбинаторного алгоритма, обобщающего алгоритмы из работ [12], [13].

Понятие комбинаторной $\mathcal{R}$ -матрицы возникает в теории кристаллических базисов – теории квантовых групп при $q = 0$ [14]. Выбор значения $q = 0$ восходит к методу угловых трансфер-матриц Бакстера [2], [15], где оно соответствует нижнему пределу температур и выявляет удивительные комбинаторные свойства интегрируемых решеточных моделей Янга–Бакстера. $\mathcal{R}$ -матрица имеет множество приложений, в том числе в обобщенных полиномах Костки–Фулкса, фермионных формулах для характеров аффинных алгебр Ли, теории интегрируемых клеточных автоматов в одномерном пространстве и т. д. В качестве примера приведем работы [12], [16]–[20], а также ссылки в них. Комбинаторные $\mathcal{R}$ -матрицы представляют собой наиболее систематически изученные примеры теоретико-множественных решений уравнения Янга–Бакстера (отображений Янга–Бакстера) [21], [22], возникающих на основе теории представлений квантовых групп.

В настоящей статье 3D- $\mathcal{R}$ - и 3D- $\mathcal{L}$ -матрицы в основном используются как составляющие решения $S(z)$, стремящегося к комбинаторной $\mathcal{R}$ -матрице при $q = 0$. Тем не менее они и сами обладают интересными комбинаторными свойствами, как показано в статье [23] (см. формулу (2.4)) для 3D- $\mathcal{R}$ -матрицы. Действительно, их пределы (39) определяют отображения

$$\lim_{q \rightarrow 0} \mathcal{R}: \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} j + \max(i - k, 0) \\ \min(i, k) \\ j + \max(k - i, 0) \end{pmatrix}, \quad \lim_{q \rightarrow 0} \mathcal{L}: \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} j + \max(i - j - k, 0) \\ \min(i, k + j) \\ \max(k + j - i, 0) \end{pmatrix}$$

на множества $(\mathbb{Z}_{\geq 0})^3$ и $\{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}$ соответственно.

Уравнения тетраэдра в пределе нетривиальны и становятся *комбинаторными уравнениями тетраэдра*, т. е.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathcal{R}_{4,5,6} \blacktriangledown 261344 & \xrightarrow{\mathcal{R}_{2,3,6}} & 234341 & \xrightarrow{\mathcal{R}_{1,3,5}} & 432361 & \mathcal{R}_{1,2,4} & \\
 261435 & & & & & \blacktriangleup 432361, & \\
 \mathcal{R}_{1,2,4} \blacktriangleup 621835 & \xrightarrow{\mathcal{R}_{1,3,5}} & 423815 & \xrightarrow{\mathcal{R}_{2,3,6}} & 432816 & \mathcal{R}_{4,5,6} & \\
 & & & & & & \\
 \mathcal{R}_{4,5,6} \blacktriangledown 011344 & \xrightarrow{\mathcal{L}_{2,3,6}} & 011344 & \xrightarrow{\mathcal{L}_{1,3,5}} & 110354 & \mathcal{L}_{1,2,4} & \\
 011435 & & & & & \blacktriangleup 110354. & \\
 \mathcal{L}_{1,2,4} \blacktriangleup 101535 & \xrightarrow{\mathcal{L}_{1,3,5}} & 101535 & \xrightarrow{\mathcal{L}_{2,3,6}} & 110536 & \mathcal{R}_{4,5,6} &
 \end{array}$$

Эти уравнения лежат в основе локальных соотношений, задающих уравнение Янга–Бакстера для комбинаторной $\mathcal{R}$ -матрицы в следствии 1.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы напоминаем определения 3D- $\mathcal{R}$ - и 3D- $\mathcal{L}$ -матриц. В разделе 3 приведены уравнения тетраэдра типа $\mathcal{R}\mathcal{R}\mathcal{R}\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}\mathcal{L}\mathcal{L}\mathcal{L}$ вместе с обобщениями для случая n слоев. В разделе 4 построено семейство 2^n решений $S(z)$ уравнения Янга–Бакстера с применением редукции по следу. В разделе 5 рассмотрена симметрия обобщенной квантовой группы решений $S(z)$. Раздел 6 содержит основную теорему 2, в которой описано построение комбинаторных $\mathcal{R}$ -матриц на основе решений $S(z)$ при $q = 0$ посредством явного комбинаторного алгоритма.

В настоящей работе предполагается, что q не является корнем из единицы, а также используются обозначения

$$(z; q)_m = \prod_{k=1}^m (1 - zq^{k-1}), \quad (q)_m = (q; q)_m, \quad \binom{m}{k}_q = \frac{(q)_m}{(q)_k (q)_{m-k}}.$$

2. 3D- $\mathcal{R}$ - И 3D- $\mathcal{L}$ -МАТРИЦЫ

Пусть $F = \bigoplus_{m \geq 0} \mathbb{C}|m\rangle$ – фоковское пространство, а $\mathbf{a}^\pm, \mathbf{k} \in \text{End}(F)$ – операторы на нем, называемые q -осцилляторами:

$$\mathbf{a}^+|m\rangle = |m+1\rangle, \quad \mathbf{a}^-|m\rangle = (1 - q^{2m})|m-1\rangle, \quad \mathbf{k}|m\rangle = q^m|m\rangle. \quad (1)$$

Они удовлетворяют соотношениям

$$\mathbf{k}\mathbf{a}^\pm = q^{\pm 1}\mathbf{a}^\pm\mathbf{k}, \quad \mathbf{a}^+\mathbf{a}^- = 1 - \mathbf{k}^2, \quad \mathbf{a}^-\mathbf{a}^+ = 1 - q^2\mathbf{k}^2. \quad (2)$$

Определим трехмерный $\mathcal{R}$ -оператор, или, для краткости, 3D- $\mathcal{R}$ -матрицу $\mathcal{R} \in \text{End}(F^{\otimes 3})$ посредством равенства

$$\mathcal{R}(|i\rangle \otimes |j\rangle \otimes |k\rangle) = \sum_{a,b,c \geq 0} \mathcal{R}_{i,j,k}^{a,b,c} |a\rangle \otimes |b\rangle \otimes |c\rangle, \quad (3)$$

в котором матричные элементы определяются одним из следующих выражений:

$$\mathcal{R}_{i,j,k}^{a,b,c} = \delta_{i+j}^{a+b} \delta_{j+k}^{b+c} \sum_{\lambda+\mu=b} (-1)^\lambda q^{i(c-j)+(k+1)\lambda+\mu(\mu-k)} \frac{(q^2)_{c+\mu}}{(q^2)_c} \binom{i}{\mu}_{q^2} \binom{j}{\lambda}_{q^2}, \quad (4)$$

$$\mathcal{R}_{i,j,k}^{a,b,c} = \delta_{i+j}^{a+b} \delta_{j+k}^{b+c} \sum_{\lambda+\mu=b} (-1)^\lambda q^{ik+b+\lambda(c-a)+\mu(\mu-i-k-1)} \binom{i}{\mu}_{q^2} \binom{\lambda+a}{a}_{q^2}, \quad (5)$$

$$\mathcal{R}_{i,j,k}^{a,b,c} = \delta_{i+j}^{a+b} \delta_{j+k}^{b+c} q^{ik+b} \oint \frac{du}{2\pi i u^{b+1}} \frac{(-q^{2+a+c}u; q^2)_\infty (-q^{-i-k}u; q^2)_\infty}{(-q^{a-c}u; q^2)_\infty (-q^{c-a}u; q^2)_\infty}, \quad (6)$$

где использовано обозначение $\delta_k^j = \delta_{j,k}$ для более компактной записи. Суммирование в (4) проводится по $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, удовлетворяющим условиям $\lambda + \mu = b$, $\mu \leq i$ и $\lambda \leq j$. Интеграл (6) вычисляется по контуру против часовой стрелки в окрестности точки $u = 0$ для получения коэффициента при u^b . Формула (4) была получена в теореме 2 в работе [23], формула (5) – в разделе 4 статьи [24], формула (6) – в статье [25]. Также 3D- $\mathcal{R}$ -матрицу можно записать как совокупность операторов по третьей компоненте. Например, из равенства (4) имеем

$$\mathcal{R}(|i\rangle \otimes |j\rangle \otimes |k\rangle) = \sum_{a,b \geq 0} |a\rangle \otimes |b\rangle \otimes \mathcal{R}_{i,j}^{a,b} |k\rangle, \quad \mathcal{R}_{i,j}^{a,b} \in \text{End}(F), \quad (7)$$

$$\mathcal{R}_{i,j}^{a,b} = \delta_{i+j}^{a+b} \sum_{\lambda+\mu=b} (-1)^\lambda q^{\lambda+\mu^2-ib} \binom{i}{\mu}_{q^2} \binom{j}{\lambda}_{q^2} (\mathbf{a}^-)^\mu (\mathbf{a}^+)^{j-\lambda} \mathbf{k}^{i+\lambda-\mu}, \quad (8)$$

где суммирование проводится при тех же условиях, что и в (4), что гарантирует неотрицательность степеней q -осцилляторов.

3D- $\mathcal{R}$ -матрица была впервые получена как сплетающий оператор¹⁾ на квантовом координатном кольце $A_q(sl_3)$ [7]. Позже она также была найдена из соображений квантовой геометрии в некоторой другой калибровке [3]. В работе [23] (см. уравнение (2.29)) показано, что это оказался один и тот же объект. Рекурсивные соотношения для $\mathcal{R}$ и полезные следствия из них приведены в приложении А в статье [5] и в разделе 4 в [24]. Отметим следующие свойства 3D- $\mathcal{R}$ -матрицы [23]:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}, \quad \mathcal{R}_{i,j,k}^{a,b,c} = \mathcal{R}_{k,j,i}^{c,b,a} \in q^\xi \mathbb{Z}[q^2], \quad \mathcal{R}_{i,j,k}^{a,b,c} = \frac{(q^2)_i (q^2)_j (q^2)_k}{(q^2)_a (q^2)_b (q^2)_c} \mathcal{R}_{a,b,c}^{i,j,k}, \quad (9)$$

где $\xi = 0, 1$ определено равенством $\xi \equiv (a-j)(c-j) \pmod{2}$.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим множество всех ненулевых матричных элементов $\mathcal{R}_{3,1,2}^{a,b,c}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{3,1,2}^{1,3,0} &= -q^2(1-q^4)(1-q^6), & \mathcal{R}_{3,1,2}^{2,2,1} &= (1+q^2)(1-q^6)(1-q^2-q^6), \\ \mathcal{R}_{3,1,2}^{1,3,0} &= q^6, & \mathcal{R}_{3,1,2}^{3,1,2} &= -q^2(-1-q^2+q^6+q^8+q^{10}). \end{aligned}$$

¹⁾Формула для него в работе [7], к сожалению, содержит опечатку. В приведенной в настоящей работе формуле (4) эта опечатка исправлена.

Видно, что предел $\lim_{q \rightarrow 0} \mathcal{R}_{3,1,2}^{a,b,c} = \delta_2^a \delta_2^b \delta_1^c$ соответствует выражению (39) при $\epsilon = 0$. Множество всех ненулевых элементов $\mathcal{R}_{3,1}^{a,b}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{3,1}^{1,3} &= (\mathbf{a}^-)^3 \mathbf{a}^+ - q^{-4}(1 + q^2 + q^4)(\mathbf{a}^-)^2 \mathbf{k}^2, & \mathcal{R}_{3,1}^{4,0} &= \mathbf{a}^+ \mathbf{k}^3, \\ \mathcal{R}_{3,1}^{3,1} &= q^{-2}(1 + q^2 + q^4) \mathbf{a}^- \mathbf{a}^+ \mathbf{k}^2 - q^{-2} \mathbf{k}^4, & \mathcal{R}_{3,1}^{0,4} &= -q^{-2}(\mathbf{a}^-)^3 \mathbf{k}, \\ \mathcal{R}_{3,1}^{2,2} &= q^{-4}(1 + q^2 + q^4)(q^2(\mathbf{a}^-)^2 \mathbf{a}^+ \mathbf{k} - \mathbf{a}^- \mathbf{k}^3). \end{aligned}$$

Некоторые из них использованы в примере 2.

Перейдем к рассмотрению 3D- $\mathcal{L}$ -матрицы [3]. Положим $V = \mathbb{C}v_0 \oplus \mathbb{C}v_1$ и определим трехмерный $\mathcal{L}$ -оператор (сокращенно, 3D- $\mathcal{L}$ -матрицу) $\mathcal{L} \in \text{End}(V^{\otimes 2} \otimes F)$ в виде, аналогичном равенству (7):

$$\mathcal{L}(v_\alpha \otimes v_\beta \otimes |m\rangle) = \sum_{\gamma, \delta} v_\gamma \otimes v_\delta \otimes \mathcal{L}_{\alpha, \beta}^{\gamma, \delta} |m\rangle, \quad (10)$$

где все элементы $\mathcal{L}_{\alpha, \beta}^{\gamma, \delta} \in \text{End}(F)$ равны нулю за исключением следующих шести случаев:

$$\mathcal{L}_{0,0}^{0,0} = \mathcal{L}_{1,1}^{1,1} = 1, \quad \mathcal{L}_{0,1}^{0,1} = -q\mathbf{k}, \quad \mathcal{L}_{1,0}^{1,0} = \mathbf{k}, \quad \mathcal{L}_{1,0}^{0,1} = \mathbf{a}^-, \quad \mathcal{L}_{0,1}^{1,0} = \mathbf{a}^+. \quad (11)$$

Таким образом, можно считать, что $\mathcal{L}$ определяет шестивершинную модель [2], веса Больцмана которой принимают значения в множестве q -осцилляторов. Также можно записать выражение (10) аналогично формуле (3) в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(v_\alpha \otimes v_\beta \otimes |m\rangle) &= \sum_{\gamma, \delta, j} \mathcal{L}_{\alpha, \beta, m}^{\gamma, \delta, j} v_\gamma \otimes v_\delta \otimes |j\rangle, \\ \mathcal{L}_{0,0,m}^{0,0,j} &= \mathcal{L}_{1,1,m}^{1,1,j} = \delta_m^j, & \mathcal{L}_{0,1,m}^{0,1,j} &= -\delta_m^j q^{m+1}, & \mathcal{L}_{1,0,m}^{1,0,j} &= \delta_m^j q^m, \\ \mathcal{L}_{1,0,m}^{0,1,j} &= \delta_{m-1}^j (1 - q^{2m}), & \mathcal{L}_{0,1,m}^{1,0,j} &= \delta_{m+1}^j. \end{aligned} \quad (12)$$

Прочие элементы $\mathcal{L}_{\alpha, \beta, m}^{\gamma, \delta, j}$ равны нулю.

Поставим в соответствие пространству F сплошную стрелку, пространству V – пунктирную стрелку и изобразим матричные элементы 3D- $\mathcal{R}$ - и 3D- $\mathcal{L}$ -матриц с помощью диаграмм

$$\mathcal{R}_{i,j,k}^{a,b,c} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & i & \\ & \uparrow & \\ c & \blacktriangleleft & k \\ & \uparrow & \\ & j & \end{array} & , & \begin{array}{ccc} & i & \\ & \cdots \uparrow & \\ c & \blacktriangleleft & k \\ & \cdots \uparrow & \\ & j & \end{array} \end{array} \quad \mathcal{L}_{i,j,k}^{a,b,c} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & i & \\ & \cdots \uparrow & \\ c & \blacktriangleleft & k \\ & \cdots \uparrow & \\ & j & \end{array} \end{array}.$$

Матрицы $\mathcal{R}$ и $\mathcal{L}$ мы изображаем с помощью таких же диаграмм, но без индексов.

3. УРАВНЕНИЕ ТЕТРАЭДРА

$\mathcal{R}$ -матрица удовлетворяет уравнению тетраэдра типа $\mathcal{RRR}$ [7]:

$$\mathcal{R}_{1,2,4} \mathcal{R}_{1,3,5} \mathcal{R}_{2,3,6} \mathcal{R}_{4,5,6} = \mathcal{R}_{4,5,6} \mathcal{R}_{2,3,6} \mathcal{R}_{1,3,5} \mathcal{R}_{1,2,4}, \quad (13)$$

которое является равенством на группе $End(F^{\otimes 6})$. Здесь элемент $\mathcal{R}_{i,j,k}$ действует как $\mathcal{R}$ -матрица на i -х, j -х, k -х компонентах слева в тензорном произведении $F^{\otimes 6}$ и как тождественное преобразование на прочих компонентах²⁾. Обозначая i -ю компоненту пространства F стрелкой с номером i , получаем, что (13) можно изобразить следующим образом:

$\mathcal{L}$ -матрица удовлетворяет уравнению тетраэдра типа $\mathcal{RLLL}$ [3]:

$$\mathcal{L}_{1,2,4}\mathcal{L}_{1,3,5}\mathcal{L}_{2,3,6}\mathcal{R}_{4,5,6} = \mathcal{R}_{4,5,6}\mathcal{L}_{2,3,6}\mathcal{L}_{1,3,5}\mathcal{L}_{1,2,4}, \quad (14)$$

которое является тождеством на группе $End(V^{\otimes 3} \otimes F^{\otimes 3})$. Здесь индексы присваиваются по тем же правилам, что и в уравнении (13). Обозначая i -ю компоненту V посредством пунктирной стрелки с номером i , получаем, что выражение (14) можно изобразить следующим образом:

Если рассматривать выражение (14) как уравнение относительно $\mathcal{R}$, то оно эквивалентно сплетающему соотношению для неприводимых представлений квантового координатного кольца $A_q(sl_3)$ (см. работу [7] и уравнение (2.15) в [23]) в том смысле, что они оба приводят к решению (4)–(6) с точностью до общей нормировки.

Можно объединить уравнения тетраэдра, сочетая произвольным образом уравнения типа (13) и (14), и получить n -слойное уравнение. Для описания этого процесса введем обозначение, объединяющее F , V и $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$:

$$W^{(\epsilon)} = \begin{cases} F, \\ V, \end{cases} \quad \mathcal{S}^{(\epsilon)} = \begin{cases} \mathcal{R}, \\ \mathcal{L}, \end{cases} \quad \mathcal{S}^{(\epsilon)}_{i,j}{}^{a,b} = \begin{cases} \mathcal{R}_{i,j}^{a,b}, \\ \mathcal{L}_{i,j}^{a,b}, \end{cases} \quad \mathcal{S}^{(\epsilon)}_{i,j,k}{}^{a,b,c} = \begin{cases} \mathcal{R}_{i,j,k}^{a,b,c}, \\ \mathcal{L}_{i,j,k}^{a,b,c}, \end{cases} \quad \begin{matrix} \epsilon = 0, \\ \epsilon = 1. \end{matrix} \quad (15)$$

Заметим, что

$$\mathcal{S}^{(\epsilon)}_{i,j,k}{}^{a,b,c} = 0 \quad \text{при} \quad (a+b, b+c) = (i+j, j+k). \quad (16)$$

²⁾ Данные индексы не следует путать с индексами матричных элементов $\mathcal{R}_{i,j,k}^{a,b,c}$.

Теперь (13) и (14) можно записать как уравнение

$$\mathcal{S}_{1,2,4}^{(\epsilon)} \mathcal{S}_{1,3,5}^{(\epsilon)} \mathcal{S}_{2,3,6}^{(\epsilon)} \mathcal{R}_{4,5,6} = \mathcal{R}_{4,5,6} \mathcal{S}_{2,3,6}^{(\epsilon)} \mathcal{S}_{1,3,5}^{(\epsilon)} \mathcal{S}_{1,2,4}^{(\epsilon)}, \quad \epsilon = 0, 1, \quad (17)$$

которая является равенством на группе $End(W^{(\epsilon)} \otimes W^{(\epsilon)} \otimes W^{(\epsilon)} \otimes F \otimes F \otimes F)$.

Пусть n – положительное целое число. Для произвольной последовательности $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \{0, 1\}^n$ положим

$$W = W^{(\epsilon_1)} \otimes \dots \otimes W^{(\epsilon_n)}. \quad (18)$$

Пусть $W^{\alpha_i}_{(\epsilon_i)}$, $W^{\beta_i}_{(\epsilon_i)}$, $W^{\gamma_i}_{(\epsilon_i)}$ – копии $W^{(\epsilon_i)}$, где α_i , β_i и γ_i , $i = 1, \dots, n$, – отличные друг от друга индексы. Заменяя номера пространств 1, 2, 3 на эти индексы в уравнении (17), получаем, что

$$\mathcal{S}_{\alpha_i, \beta_i, 4}^{(\epsilon_i)} \mathcal{S}_{\alpha_i, \gamma_i, 5}^{(\epsilon_i)} \mathcal{S}_{\beta_i, \gamma_i, 6}^{(\epsilon_i)} \mathcal{R}_{4,5,6} = \mathcal{R}_{4,5,6} \mathcal{S}_{\beta_i, \gamma_i, 6}^{(\epsilon_i)} \mathcal{S}_{\alpha_i, \gamma_i, 5}^{(\epsilon_i)} \mathcal{S}_{\alpha_i, \beta_i, 4}^{(\epsilon_i)}$$

для каждого $i = 1, \dots, n$. Таким образом, для любого i можно подействовать оператором $\mathcal{R}_{4,5,6}$ на $\mathcal{S}_{\alpha_i, \beta_i, 4}^{(\epsilon_i)} \mathcal{S}_{\alpha_i, \gamma_i, 5}^{(\epsilon_i)} \mathcal{S}_{\beta_i, \gamma_i, 6}^{(\epsilon_i)}$ слева и получить произведение $\mathcal{S}_{\beta_i, \gamma_i, 6}^{(\epsilon_i)} \mathcal{S}_{\alpha_i, \gamma_i, 5}^{(\epsilon_i)} \mathcal{S}_{\alpha_i, \beta_i, 4}^{(\epsilon_i)}$, записанное в обратном порядке. Повторив эту процедуру n раз, получаем соотношение

$$\begin{aligned} & (\mathcal{S}_{\alpha_1, \beta_1, 4}^{(\epsilon_1)} \mathcal{S}_{\alpha_1, \gamma_1, 5}^{(\epsilon_1)} \mathcal{S}_{\beta_1, \gamma_1, 6}^{(\epsilon_1)}) \dots (\mathcal{S}_{\alpha_n, \beta_n, 4}^{(\epsilon_n)} \mathcal{S}_{\alpha_n, \gamma_n, 5}^{(\epsilon_n)} \mathcal{S}_{\beta_n, \gamma_n, 6}^{(\epsilon_n)}) \mathcal{R}_{4,5,6} = \\ & = \mathcal{R}_{4,5,6} (\mathcal{S}_{\beta_1, \gamma_1, 6}^{(\epsilon_1)} \mathcal{S}_{\alpha_1, \gamma_1, 5}^{(\epsilon_1)} \mathcal{S}_{\alpha_1, \beta_1, 4}^{(\epsilon_1)}) \dots (\mathcal{S}_{\beta_n, \gamma_n, 6}^{(\epsilon_n)} \mathcal{S}_{\alpha_n, \gamma_n, 5}^{(\epsilon_n)} \mathcal{S}_{\alpha_n, \beta_n, 4}^{(\epsilon_n)}). \end{aligned} \quad (19)$$

Это уравнение является равенством на группе $End(\tilde{W}^{\alpha} \otimes \tilde{W}^{\beta} \otimes \tilde{W}^{\gamma} \otimes \overset{4}{F} \otimes \overset{5}{F} \otimes \overset{6}{F})$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – набор индексов, $\tilde{W}^{\alpha} = W^{\alpha_1}_{(\epsilon_1)} \otimes \dots \otimes W^{\alpha_n}_{(\epsilon_n)}$. Смысл пространств $\tilde{W}^{\beta}$ и $\tilde{W}^{\gamma}$ одинаков – это просто копии W в уравнении (18). Соотношение (19) можно изобразить следующим образом:

Здесь штриховые стрелки могут быть либо сплошными, либо пунктирными в зависимости от того, равен ли соответствующий индекс ϵ_i нулю или единице. Вершины на i -м слое $\mathcal{S}^{(\epsilon_i)}$ также понимаются как $\mathcal{R}$ - или $\mathcal{L}$ -матрицы соответственно.

4. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЯНГА–БАКСТЕРА

Можно провести редукцию уравнения (19) к уравнению Янга–Бакстера, используя спектральные параметры. В настоящей статье рассмотрена только редукция с применением следа. Редукция с применением граничных векторов рассмотрена в работах [4], [6].

Определим $\mathbf{h} \in \text{End}(F)$ как $\mathbf{h}|m\rangle = m|m\rangle$. В силу равенства (16) для параметров x и y выполняется условие $[x^{\mathbf{h}_4+\mathbf{h}_5}y^{\mathbf{h}_5+\mathbf{h}_6}, \mathcal{R}_{4,5,6}] = 0$, где индексы определяют пространства, на которых операторы действуют нетривиально. Умножим $\mathcal{R}_{4,5,6}^{-1}x^{\mathbf{h}_4+\mathbf{h}_5}y^{\mathbf{h}_5+\mathbf{h}_6} = x^{\mathbf{h}_4+\mathbf{h}_5}y^{\mathbf{h}_5+\mathbf{h}_6}\mathcal{R}_{4,5,6}^{-1}$ слева на (19) и вычислим след по пространству $F^{\otimes 3}$, соответствующему индексам 4, 5, 6. В результате получается уравнение Янга–Бакстера

$$S_{\alpha,\beta}(x)S_{\alpha,\gamma}(xy)S_{\beta,\gamma}(y) = S_{\beta,\gamma}(y)S_{\alpha,\gamma}(xy)S_{\alpha,\beta}(x) \in \text{End}(\tilde{\mathcal{W}}^{\alpha} \otimes \tilde{\mathcal{W}}^{\beta} \otimes \tilde{\mathcal{W}}^{\gamma}) \quad (20)$$

для матрицы $S_{\alpha,\beta}(z) \in \text{End}(\tilde{\mathcal{W}}^{\alpha} \otimes \tilde{\mathcal{W}}^{\beta})$, построенной как

$$S_{\alpha,\beta}(z) = \text{Tr}_3(z^{\mathbf{h}_3} \mathcal{S}_{\alpha_1,\beta_1,3}^{(\epsilon_1)} \dots \mathcal{S}_{\alpha_n,\beta_n,3}^{(\epsilon_n)}), \quad (21)$$

где индекс 3 обозначает копию пространства F . Для того чтобы описать матричные элементы $S_{\alpha,\beta}(z)$, запишем базис уравнения (18) как

$$\mathcal{W} = \bigoplus_{m_1, \dots, m_n} \mathbb{C}|m_1, \dots, m_n\rangle, \quad |m_1, \dots, m_n\rangle = |m_1\rangle^{(\epsilon_1)} \otimes \dots \otimes |m_n\rangle^{(\epsilon_n)}, \quad (22)$$

$$|m\rangle^{(0)} = |m\rangle \in F \quad (m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}), \quad |m\rangle^{(1)} = v_m \in V, \quad m \in \{0, 1\}. \quad (23)$$

Значения, принимаемые индексами m_i , лежат в множестве $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ или $\{0, 1\}$ в зависимости от того, равен ли ϵ_i нулю или единице, как в выражении (23). Запишем это условие упрощенно как $0 \leq m_i \leq 1/\epsilon_i$. Введем сокращение $|\mathbf{m}\rangle = |m_1, \dots, m_n\rangle$ для $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n)$ и запишем выражение (22) в виде $\mathcal{W} = \bigoplus_{\mathbf{m}} \mathbb{C}|\mathbf{m}\rangle$. Положим $|\mathbf{m}| = m_1 + \dots + m_n$.

Пусть $S(z) \in \text{End}(\mathcal{W} \otimes \mathcal{W})$ – решение (21) уравнения Янга–Бакстера, где не имеющие особого значения индексы α, β опущены³⁾. Тем не менее напомним, что $S(z)$ зависит от выбора последовательности $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \{0, 1\}^n$. Запишем его действие следующим образом:

$$S(z)(|\mathbf{i}\rangle \otimes |\mathbf{j}\rangle) = \sum_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} S(z)_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}^{\mathbf{a}, \mathbf{b}} |\mathbf{a}\rangle \otimes |\mathbf{b}\rangle. \quad (24)$$

Тогда матричные элементы даются выражениями

$$S(z)_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}^{\mathbf{a}, \mathbf{b}} = \text{Tr}_F(z^{\mathbf{h}} \mathcal{S}_{i_1, j_1}^{(\epsilon_1) a_1, b_1} \dots \mathcal{S}_{i_n, j_n}^{(\epsilon_n) a_n, b_n}) = \quad (25)$$

$$= \sum_{c_0, \dots, c_{n-1}} z^{c_0} \mathcal{S}_{i_1, j_1, c_1}^{(\epsilon_1) a_1, b_1, c_0} \mathcal{S}_{i_2, j_2, c_2}^{(\epsilon_2) a_2, b_2, c_1} \dots \mathcal{S}_{i_n, j_n, c_0}^{(\epsilon_n) a_n, b_n, c_{n-1}}. \quad (26)$$

Операторы в (25) определяются с помощью формул (8), (11) и (15). Из (16) следует, что

$$S(z)_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}^{\mathbf{a}, \mathbf{b}} = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} \quad \text{и} \quad |\mathbf{a}| = |\mathbf{i}|, \quad |\mathbf{b}| = |\mathbf{j}|. \quad (27)$$

При таких $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$, используя (16), можно свести суммы по $c_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ в выражении (26) к единственной сумме. Последнее свойство (27) подразумевает разложение в прямую сумму:

$$S(z) = \bigoplus_{l, m \geq 0} S_{l, m}(z), \quad S_{l, m}(z) \in \text{End}(\mathcal{W}_l \otimes \mathcal{W}_m), \quad \mathcal{W}_l = \bigoplus_{\mathbf{m}, |\mathbf{m}|=l} \mathbb{C}|\mathbf{m}\rangle \subset \mathcal{W}, \quad (28)$$

³⁾ Индексы $\alpha, \beta, \dots$, введенные в уравнении (20), не используются далее в настоящей статье; не следует путать их с индексами $S_{l, m}(z)$ в (28).

где суммирование проводится по $0 \leq l, m \leq n$ при $\epsilon_1 = \dots = \epsilon_n = 1$ и по $l, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ в противном случае. Формулу (25) можно изобразить следующим образом:

$$S(z)_{i,j}^{a,b} = \text{Tr}_F \left(\begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{---} i_1 \text{---} \\ \text{---} i_2 \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} i_n \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} a_1 \text{---} \\ \text{---} a_2 \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} a_n \text{---} \end{array} \end{array} \right).$$

Здесь штриховые стрелки являются либо сплошными, либо пунктирными в зависимости от того, какие значения принимает ϵ_i на соответствующем участке: ноль или единица. Таким образом, решение $S(z)$ (25) строится как произведение матриц в терминах 3D- $\mathcal{R}$ - и 3D- $\mathcal{L}$ -матриц, а также вспомогательного пространства F .

ПРИМЕР 2. Пусть $n = 3$ и $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = (1, 0, 1)$. Тогда

$$\begin{aligned} S(z)(|031\rangle \otimes |110\rangle) &= S_{031,110}^{031,110}(z)|031\rangle \otimes |110\rangle + S_{031,110}^{040,101}(z)|040\rangle \otimes |101\rangle + \\ &+ S_{031,110}^{121,020}(z)|121\rangle \otimes |020\rangle + S_{031,110}^{130,011}(z)|130\rangle \otimes |011\rangle, \end{aligned}$$

где матричные элементы записываются как

$$\begin{aligned} S_{031,110}^{031,110}(z) &= \text{Tr}(z^{\mathbf{h}} \mathcal{L}_{0,1}^{0,1} \mathcal{R}_{3,1}^{3,1} \mathcal{L}_{1,0}^{1,0}), & S_{031,110}^{040,101}(z) &= \text{Tr}(z^{\mathbf{h}} \mathcal{L}_{0,1}^{0,1} \mathcal{R}_{3,1}^{4,0} \mathcal{L}_{1,0}^{0,1}), \\ S_{031,110}^{121,020}(z) &= \text{Tr}(z^{\mathbf{h}} \mathcal{L}_{0,1}^{1,0} \mathcal{R}_{3,1}^{2,2} \mathcal{L}_{1,0}^{1,0}), & S_{031,110}^{130,011}(z) &= \text{Tr}(z^{\mathbf{h}} \mathcal{L}_{0,1}^{1,0} \mathcal{R}_{3,1}^{3,1} \mathcal{L}_{1,0}^{0,1}). \end{aligned}$$

Используя формулы (11) для $\mathcal{L}_{i,j}^{a,b}$ и формулы из примера 1 для $\mathcal{R}_{i,j}^{a,b}$, вычислим матричный элемент

$$\begin{aligned} S_{031,110}^{040,101}(z) &= \text{Tr}(z^{\mathbf{h}} (-q\mathbf{k}) \mathbf{a}^+ \mathbf{k}^3 \mathbf{a}^-) = -q^{-2} \text{Tr}(\mathbf{k}^4 z^{\mathbf{h}} \mathbf{a}^+ \mathbf{a}^-) = \\ &= -q^{-2} \sum_{m \geq 0} (q^4 z)^m (1 - q^{2m}) = \frac{-q^2(1 - q^2)z}{(1 - q^4 z)(1 - q^6 z)}. \end{aligned}$$

Аналогичные вычисления приводят к выражениям

$$\begin{aligned} S_{031,110}^{031,110}(z) &= \frac{q^3(q^2 - z)}{(1 - q^4 z)(1 - q^6 z)}, & S_{031,110}^{121,020}(z) &= \frac{-q^2(1 - q^6)(q^2 - z)z}{(1 - q^2 z)(1 - q^4 z)(1 - q^6 z)}, \\ S_{031,110}^{130,011}(z) &= \frac{-(1 - q^2)z(q^4 - z - q^2 z + q^8 z)}{(1 - q^2 z)(1 - q^4 z)(1 - q^6 z)}. \end{aligned}$$

Обычно $S(z)_{i,j}^{a,b}$ является рациональной функцией от параметров q и z .

ПРИМЕР 3. При $0 \leq a, b, i, j \leq 1$ матричные элементы $\mathcal{R}_{i,j}^{a,b}$ (8) и $\mathcal{L}_{i,j}^{a,b}$ (11) совпадают, за исключением случая $\mathcal{R}_{1,1}^{1,1} = \mathbf{a}^- \mathbf{a}^+ - \mathbf{k}^2$ и $\mathcal{L}_{1,1}^{1,1} = 1$. Это приводит к тому,

ТАБЛИЦА 1

$(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4)$	$(0, 1, 0, 1)$	$(0, 1, 0, 0)$	$(0, 0, 0, 1)$
$S_{0121, 1101}^{1111, 0111}(z)$	$\frac{(1-q^4)z}{(1-qz)(1-q^3z)}$	$\frac{(1-q^4)z(1-q^2-q^4+q^3z)}{(1-qz)(1-q^3z)(1-q^5z)}$	$-\frac{q(1-q^4)z(q-z-q^2z+q^4z)}{(1-qz)(1-q^3z)(1-q^5z)}$

что $S(z)_{i,j}^{a,b}$ при $(a_\alpha, b_\alpha, i_\alpha, j_\alpha) = (1, 1, 1, 1)$ зависит от значения $\epsilon_\alpha = 0, 1$. В табл. 1 приведены примеры значений $S(z)_{i,j}^{a,b}$. Случай $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4) = (0, 0, 0, 0)$ опущен, так как соответствующее выражение имеет слишком громоздкий вид.

5. СИММЕТРИЯ ОБОБЩЕННОЙ КВАНТОВОЙ ГРУППЫ

Построенное в предыдущем разделе решение $S(z)$ обладает симметрией обобщенной квантовой группы. Напомним, что $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \{0, 1\}^n$ является произвольной последовательностью. Положим

$$q_i = (-1)^{\epsilon_i} q^{1-2\epsilon_i}, \quad D_{i,j} = \prod_{k \in \{i, i+1\} \cap \{j, j+1\}} (q_k)^{2\delta_{i,j}-1}, \quad i, j \in \mathbb{Z}_n. \quad (29)$$

Введем $\mathbb{C}(q)$ -алгебру $\mathcal{U}_A = \mathcal{U}_A(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$, порожденную элементами $e_i, f_i, k_i^{\pm 1}$, $i \in \mathbb{Z}_n$, которые удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} k_i k_i^{-1} &= k_i^{-1} k_i = 1, & [k_i, k_j] &= 0, \\ k_i e_j &= D_{i,j} e_j k_i, & k_i f_j &= D_{i,j}^{-1} f_j k_i, & [e_i, f_j] &= \delta_{i,j} \frac{k_i - k_i^{-1}}{q - q^{-1}}. \end{aligned} \quad (30)$$

Снабдим ее структурой алгебры Хопфа с коумножением Δ , коединицей ε и обратным элементом $\mathcal{S}$:

$$\begin{aligned} \Delta k_i^{\pm 1} &= k_i^{\pm 1} \otimes k_i^{\pm 1}, & \Delta e_i &= 1 \otimes e_i + e_i \otimes k_i, & \Delta f_i &= f_i \otimes 1 + k_i^{-1} \otimes f_i, \\ \varepsilon(k_i) &= 1, & \varepsilon(e_i) &= \varepsilon(f_i) = 0, & \mathcal{S}(k_i^{\pm 1}) &= k_i^{\mp 1}, & \mathcal{S}(e_i) &= -e_i k_i^{-1}, & \mathcal{S}(f_i) &= -k_i f_i. \end{aligned} \quad (31)$$

С учетом соотношений Серра однородные случаи $\epsilon_1 = \dots = \epsilon_n$ отождествляются с квантовой аффинной алгеброй [10], [11] как

$$\mathcal{U}_A(0, \dots, 0) = U_q(A_{n-1}^{(1)}), \quad \mathcal{U}_A(1, \dots, 1) = U_{-q^{-1}}(A_{n-1}^{(1)}). \quad (32)$$

В общем случае алгебра $\mathcal{U}_A(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ является примером обобщенных квантовых групп [8], [9], в числе которых – аффинная квантовая супералгебра $sl_q(\kappa, n - \kappa)$ (подробности см. в п. 3.3 в статье [6]).

Для пространства $\mathcal{W}_l$ (28) и параметра x отображение

$$\pi_x^{(l)}: \mathcal{U}_A(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \rightarrow \text{End}(\mathcal{W}_l)$$

является неприводимым конечномерным представлением⁴⁾:

$$\begin{aligned} e_i |\mathbf{m}\rangle &= x^{\delta_{i,0}} [m_i] |\mathbf{m} - \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{i+1}\rangle, \\ f_i |\mathbf{m}\rangle &= x^{-\delta_{i,0}} [m_{i+1}] |\mathbf{m} + \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_{i+1}\rangle, \\ k_i |\mathbf{m}\rangle &= (q_i)^{-m_i} (q_{i+1})^{m_{i+1}} |\mathbf{m}\rangle, \end{aligned} \quad (33)$$

⁴⁾ Обозначим образ $\pi_x^{(l)}(g)$ через g для упрощения.

где $[m] = (q^m - q^{-m})/(q - q^{-1})$ и $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^n$. Векторы

$$|\mathbf{m}'\rangle = |m'_1, \dots, m'_n\rangle$$

в правой части (33) следует считать равными нулю, если только не выполняется неравенство $0 \leq m'_i \leq 1/\epsilon_i$ для всех $1 \leq i \leq n$. В однородном случае представление $\pi_x^{(l)}$ эквивалентно

- 1) представлению степени l симметричного тензора $U_q(A_{n-1}^{(1)})$ при $\epsilon_1 = \dots = \epsilon_n = 0$,
- 2) представлению степени l антисимметричного тензора $U_{-q^{-1}}(A_{n-1}^{(1)})$ при условии $\epsilon_1 = \dots = \epsilon_n = 1$.

Пусть Δ' – обратное к Δ в (31) коумножение (т.е. левая и правая компонента меняются местами).

ТЕОРЕМА 1 [6]. При любых $l, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ имеет место следующее соотношение коммутативности:

$$\Delta'(g)S_{l,m}(z) = S_{l,m}(z)\Delta(g), \quad g \in \mathcal{U}_A(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n),$$

где $\Delta(g)$ и $\Delta'(g)$ означают соответственно представления тензорных произведений $(\pi_x^{(l)} \otimes \pi_y^{(m)})\Delta(g)$ и $(\pi_x^{(l)} \otimes \pi_y^{(m)})\Delta'(g)$ (33) при $z = x/y$.

Если $\mathcal{W}_l \otimes \mathcal{W}_m$ неприводимо, то теорема 1 характеризует решение $S_{l,m}(z)$ с точностью до константы. Таким образом, $S_{l,m}(z)$ отождествляется в духе работы [11] с квантовой $\mathcal{R}$ -матрицей, связанной с $\mathcal{U}_A(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ -модулем $\mathcal{W}_l \otimes \mathcal{W}_m$. Хотя мы ожидаем, что $\mathcal{W}_l \otimes \mathcal{W}_m$ неприводимо при произвольных $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$, до сих пор это предположение было строго доказано лишь для $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$, имеющих вид $(1^\kappa, 0^{n-\kappa})$ при $0 \leq \kappa \leq n$ [6]. Семейство решений $S_{l,m}(z)$ (25) является интерполяцией между квантовыми $\mathcal{R}$ -матрицами в двух предельных случаях: представлениях симметричного тензора $U_q(A_{n-1}^{(1)})$ при $\kappa = 0$ и представлениях антисимметричного тензора $U_{-q^{-1}}(A_{n-1}^{(1)})$ при $\kappa = n$. В предложении 2.1 в [6] также было показано, что решения $S_{l,m}(z)$, соответствующие последовательностям $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ и $(\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_n)$, связаны между собой преобразованием подбоя, если эти две последовательности совпадают с точностью до перестановки. Таким образом, можно утверждать, что все $S_{l,m}(z)$ (25) эквивалентны квантовым $\mathcal{R}$ -матрицам некоторой обобщенной квантовой группы.

6. КОМБИНАТОРНЫЕ $\mathcal{R}$ -МАТРИЦЫ

В данном разделе изучены решения $S_{l,m}(z)$ (28) при $q = 0$. Пусть последовательность $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \{0, 1\}^n$ произвольна. Введем кристалл

$$B_l = \left\{ \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n \mid |\mathbf{a}| = l, 0 \leq a_i \leq \frac{1}{\epsilon_i}, 1 \leq i \leq n \right\}, \quad (34)$$

который является конечным множеством элементов, определяющих базисные элементы $\mathcal{W}_l$ (28). Поставим в соответствие элементу $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in B_l$ столбец высоты n , содержащий a_i точек в i -й ячейке сверху ($1 \leq i \leq n$), как в диаграммах ниже. Назовем точки в i -й ячейке бозонными, если $\epsilon_i = 0$, и фермионными, если $\epsilon_i = 1$.

Таким образом, столбец содержит всего l точек, среди которых $\epsilon_1 a_1 + \dots + \epsilon_n a_n$ фермионных точек, а остальные бозонные.

Определим отображение

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{l,m}: B_l \otimes B_m \rightarrow B_m \otimes B_l$$

и функцию

$$H = H_{l,m}: B_l \otimes B_m \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

с помощью комбинаторного алгоритма, в котором $\otimes$ понимается как прямое произведение множеств. Таким образом, мы хотим для выбранной пары столбцов $\mathbf{i} \otimes \mathbf{j} \in B_l \otimes B_m$ определить правые части равенств

$$\mathcal{R}(\mathbf{i} \otimes \mathbf{j}) = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} \in B_m \otimes B_l, \quad H(\mathbf{i} \otimes \mathbf{j}) = w \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \quad (35)$$

При $l \geq m$ это можно сделать с помощью алгоритма (i)–(iii), приведенного ниже.

(i) Выберем точку, например d , в столбце $\mathbf{j}$ и соединим ее с точкой d' в столбце $\mathbf{i}$, чтобы они образовали пару. Если d – бозонная (фермионная) точка, то d' должна быть самой нижней среди точек, которые расположены строго выше (не выше), чем d . Если такой точки нет, будем считать, что d' – нижняя точка в столбце $\mathbf{i}$. Такую пару точек назовем *скрученной* (winding). Линию, соединяющую пару точек, назовем *H-линией*.

(ii) Будем повторять шаг 1) для точек, не имеющих пары, до тех пор, пока каждая точка в $\mathbf{j}$ не окажется соединена с точкой в $\mathbf{i}$.

(iii) Передвинем $l - m$ не имеющих пары в столбце $\mathbf{i}$ точек горизонтально в столбец $\mathbf{j}$. Полученный столбец определяет результат произведения $\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$. Число w – это число скрученности (количество скрученных пар).

Выше (см. диаграммы 1)–3)) приведен пример для $n = 5$, $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_5) = (0, 1, 0, 1, 0)$, $B_l \otimes B_m = B_8 \otimes B_4$, и для него верны равенства

$$\mathcal{R}(01313 \otimes 10210) = 01012 \otimes 10511, \quad H(01313 \otimes 10210) = 2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Справедливы следующие утверждения.

1. В шагах (i) и (iii) *H-линии* зависят от последовательности выбора точек из столбца $\mathbf{j}$. Тем не менее результат произведения $\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$ и число w не зависят от последовательности выбора.

2. H -линии при скручивании естественным образом интерпретируются как *перидически* восходящие вдоль столбца.

3. Условие бозонности или фермионности точек в (i) относится к d , но не к d' .

4. При $l = m$ действие $\mathcal{R}$ -матрицы тривиально в том смысле, что $\mathcal{R}(\mathbf{i} \otimes \mathbf{j}) = \mathbf{i} \otimes \mathbf{j}$, но функция H действует по-прежнему нетривиально.

5. Данный алгоритм также задает число c_t H -линий, проходящих через границу между t -й и $(t + 1)$ -й компонентами столбца $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ при $t \in \mathbb{Z}_n$. Число скручивания $c_0 = c_n$. Например, в диаграмме (ii), приведенной выше, видно, что числа скручивания $(c_1, \dots, c_5) = (1, 2, 0, 0, 2)$. Они удовлетворяют кусочно-линейным соотношениям

$$\begin{array}{cc} \text{случай } \epsilon_t = 0 & \text{случай } \epsilon_t = 1 \\ \left\{ \begin{array}{l} a_t = j_t + (i_t - c_t)_+, \\ b_t = \min(i_t, c_t), \\ c_{t-1} = j_t + (c_t - i_t)_+, \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} a_t = j_t + (i_t - j_t - c_t)_+, \\ b_t = \min(i_t, c_t + j_t), \\ c_{t-1} = (j_t + c_t - i_t)_+, \end{array} \right. \end{array} \quad (36)$$

где $t \in \mathbb{Z}_n$ и $(x)_+ = \max(x, 0)$. При данных $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ можно считать последние строки в формуле (36) замкнутой системой кусочно-линейных уравнений относительно $c_1, \dots, c_n = c_0$, решение которой определяет $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ посредством первой и второй строк. Вопрос о единственности решения этой системы поднят в доказательстве теоремы 2.

При $l < m$ алгоритм (i)–(iii) следует заменить на следующий.

(i') Выберем точку, например d , в столбце $\mathbf{i}$ и соединим ее с точкой d' в $\mathbf{j}$, чтобы образовать пару. Если d – бозонная (фермионная), то d' должна располагаться выше всех среди точек, лежащих строго ниже (не ниже) d . Если такой точки нет, выберем точку d' в $\mathbf{j}$, расположенную выше всех. Данную пару назовем скрученной.

(ii') Повторим шаг (i') для всех точек, не имеющих пары, до тех пор, пока все точки $\mathbf{i}$ не будут иметь пару среди точек в $\mathbf{j}$.

(iii') Передвинем $m - l$ точек без пары в $\mathbf{j}$ в горизонтальном направлении в столбец $\mathbf{i}$. Полученный столбец определяет результат произведения $\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$. Число w является числом скрученности.

Аналог замечания 1 применим и к алгоритму (i')–(iii'). Можно убедиться, что $\mathcal{R}_{l,m} \mathcal{R}_{m,l} = \text{id}_{B_m \otimes B_l}$. Таким образом, $\mathcal{R}$ является *биекцией*. По определению равенство $H_{l,m}(\mathbf{i} \otimes \mathbf{j}) = H_{m,l}(\mathbf{b} \otimes \mathbf{a})$ выполняется, когда $\mathcal{R}_{l,m}(\mathbf{i} \otimes \mathbf{j}) = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$, или, что то же самое, $\mathcal{R}_{m,l}(\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}) = \mathbf{i} \otimes \mathbf{j}$.

Биективное отображение $\mathcal{R}$ и функция H называются (классической частью) *комбинаторной $\mathcal{R}$ -матрицей* ($\mathcal{R}$ -матрицы) и *энергией* (энергии) соответственно. При $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$, имеющих вид $(0^r, 1^{n-r})$, они были впервые рассмотрены в работе [12] при $r = 0$ и $r = n$ в рамках теории кристаллических базисов [14] для $U_q(\mathfrak{sl}_n)$, а позднее – для общего случая произвольных r в статье [13] на основе реализации $U_q(\mathfrak{gl}(r, n - r))$ -кристаллов в статье [26]. Заметим, что приведенный выше алгоритм в случае $r = 0$, т. е. при $\epsilon_i = 1$, совпадает с правилом 3.10 работы [12], если поменять местами слова “выше” и “ниже”. Мы полагаем, что это происходит из-за второго равенства в (32), в котором происходит замена условия $q = 0$ на условие $q = \infty$ в двух упомянутых статьях.

Определим матричный элемент комбинаторной $\mathcal{R}$ -матрицы следующим образом:

$$\mathcal{R}_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}^{\mathbf{a}, \mathbf{b}} = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathcal{R}(\mathbf{i} \otimes \mathbf{j}) = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (37)$$

Сформулируем теперь наш основной результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $S_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}^{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(z)$ является матричным элементом, определяемым равенством (25) или (26), решения $S(z) = S_{l,m}(z)$ (28). Положим $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{l,m}$ и $H = H_{l,m}$. Тогда выполняется следующее равенство:

$$(1-z)^{\delta_{l,m}} \lim_{q \rightarrow 0} q^{-(m-l)_+} S_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}^{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(z) = z^{H(\mathbf{i} \otimes \mathbf{j})} \mathcal{R}_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}^{\mathbf{a}, \mathbf{b}}. \quad (38)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $\check{S}_{l,m}(z) = P S_{l,m}(z)$, где $P(u \otimes v) = v \otimes u$, можно доказать обратное соотношение $\check{S}_{l,m}(z) \check{S}_{m,l}(z^{-1}) = \rho(z) \text{id}_{\mathcal{W}_m \otimes \mathcal{W}_l}$ со скалярной функцией $\rho(z)$, заданной в явном виде, используя результаты работы [6]. Это сокращает доказательство для случая $l \geq m$, который мы рассматриваем далее. Из соотношения (2.32) в [23], формул (12) и (15) имеем равенство (см. также пример 1)

$$\lim_{q \rightarrow 0} \mathcal{S}_{i,j,k}^{(\epsilon) a,b,c} = \begin{cases} \lim_{q \rightarrow 0} \mathcal{R}_{i,j,k}^{a,b,c} = \delta_{j+(i-k)_+}^a \delta_{\min(i,k)}^b \delta_{j+(k-i)_+}^c, & \epsilon = 0, \\ \lim_{q \rightarrow 0} \mathcal{L}_{i,j,k}^{a,b,c} = \delta_{j+(i-j-k)_+}^a \delta_{\min(i,k+j)}^b \delta_{(j+k-i)_+}^c, & \epsilon = 1. \end{cases} \quad (39)$$

Также для величины $\mathcal{S}_{i,j,k}^{(\epsilon) a,b,c}$ выполняется условие (16). Она не равна нулю только тогда, когда справедливы соотношения (36) при замене

$$(\epsilon, a, b, c, i, j, k) \rightarrow (\epsilon_t, a_t, b_t, c_{t-1}, i_t, j_t, c_t).$$

Таким образом, замена (39) на (26) приводит к равенству

$$\lim_{q \rightarrow 0} S_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}^{\mathbf{a}', \mathbf{b}'}(z) = \sum_{c_n \geq 0} \delta_{\mathbf{a}(c_n)}^{\mathbf{a}'} \delta_{\mathbf{b}(c_n)}^{\mathbf{b}'} \delta_{c_0(c_n)}^{c_n} z^{c_n}, \quad (40)$$

где $\mathbf{a}(c_n) = (a_1, \dots, a_n)$, $\mathbf{b}(c_n) = (b_1, \dots, b_n)$ и $c_0(c_n) = c_0$ определяются на основе значений c_n и $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ однозначно с помощью выражений (36) без участия ограничения $c_0 = c_n$. Причиной появления множителя $\delta_{c_0(c_n)}^{c_n}$ является “периодическое условие на границе”, появляющееся из-за операции взятия следа в равенстве (25). Таким образом, доказательство теоремы сводится к доказательству существования и единственности решения уравнения $c_0(c_n) = c_0$ относительно c_n .

Предположим сначала, что $l > m$. Тогда существует единственное целое число $w \geq 0$ такое, что $w = c_0(w)$. Действительно, w определяется равенством $w = c_0(0)$. Чтобы убедиться в этом, заметим, что $c_0(s+1) = c_0(s)$ или $c_0(s+1) = c_0(s) + 1$ для любого s , так как $(x+1)_+ = (x)_+$ или $(x+1)_+ = (x)_+ + 1$. Пусть r – наименьшее неотрицательное целое число такое, что $c_0(r) = w$ и $c_0(r+1) = w+1$. В силу (36) это справедливо при $\epsilon_t = 0$ либо при $\epsilon_t = 1$ только тогда, когда $c_{t-1} = c_t + j_t - i_t$ для всех $1 \leq t \leq n$. Тогда из равенства $w = c_0(r)$ следует, что

$$w = r + |\mathbf{j}| - |\mathbf{i}| = r + m - l < r.$$

Таким образом, единственность решения уравнения $w = c_0(w)$ очевидна из графа, изображенного ниже:

Теперь в равенстве (40) остается единственный член: $\lim_{q \rightarrow 0} S_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}^{\mathbf{a}', \mathbf{b}'}(z) = \delta_{\mathbf{a}(w)}^{\mathbf{a}'} \delta_{\mathbf{b}(w)}^{\mathbf{b}'} z^w$, в котором w – единственное решение уравнения $w = c_0(w)$. Его значение равно энергии $H(\mathbf{i} \otimes \mathbf{j})$ в силу п. 5 замечания 1, которое также приводит к тому, что

$$\mathcal{R}(\mathbf{i} \otimes \mathbf{j}) = \mathbf{b}(w) \otimes \mathbf{a}(w).$$

Таким образом, равенство (38) выполняется.

Рассмотрим теперь случай $l = m$. Опять имеем, что справедливо равенство (40) при выполнении условий (36). Суммирование первой строки (36) по $1 \leq t \leq n$ приводит к равенству $|\mathbf{a}| = |\mathbf{j}| + f$ при $f \geq 0$. В силу соотношения $|\mathbf{a}| = l = m = |\mathbf{j}|$ должно выполняться равенство $f = 0$, откуда следует равенство $\mathbf{b}(c_n) \otimes \mathbf{a}(c_n) = \mathbf{i} \otimes \mathbf{j}$. Так же, как решения уравнения $c_n = c_0(c_n)$, последний аргумент показывает, что оно верно для *всех* $c_n \geq w = c_0(0) = H(\mathbf{i} \otimes \mathbf{j})$. Таким образом, правая часть (40) превращается в $\delta_{\mathbf{j}}^{\mathbf{a}'} \delta_{\mathbf{i}}^{\mathbf{b}'} \sum_{c_n \geq H(\mathbf{i} \otimes \mathbf{j})} z^{c_n}$ согласно равенству (38).

ПРИМЕР 4. Переходя к пределу $q \rightarrow 0$ в примере 2, получаем, что

$$\lim_{q \rightarrow 0} S(z)(|031\rangle \otimes |110\rangle) = z^2 |130\rangle \otimes |011\rangle$$

для $S(z) = S_{4,2}(z)$. Данный случай соответствует комбинаторной $\mathcal{R}$ -матрице и энергии H , для которых верно следующее⁵⁾:

$$\mathcal{R}(031 \otimes 110) = 011 \otimes 130, \quad H(031 \otimes 110) = 2.$$

ПРИМЕР 5. Рассмотрим еще один пример, когда выполняется равенство (38). Последняя строка в табл. 2 следует из примера 3.

Таблица 2

$(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4)$	(0,1,0,1)	(0,1,0,0)	(0,0,0,1)
$R(0121 \otimes 1101)$	0111 $\otimes$ 1111	0111 $\otimes$ 1111	0021 $\otimes$ 1201
$H(0121 \otimes 1101)$	1	1	2
$\lim_{q \rightarrow 0} S_{0121, 1101}^{1111, 0111}(z)$	z	z	0

Опишем являющееся следствием (20) уравнение Янга–Бакстера, которому удовлетворяет комбинаторная $\mathcal{R}$ -матрица. Для того чтобы корректно использовать спектральный параметр, введем *аффинный* кристалл

$$\text{Aff}(B_l) = \{\mathbf{a}[d] \mid \mathbf{a} \in B_l, d \in \mathbb{Z}\}.$$

⁵⁾Причина выбора последовательности умножения $011 \otimes 130$, а не $130 \otimes 011$ заключается в обратном порядке $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в определениях (24) и (37).

Это позволяет объединить классические части комбинаторной $\mathcal{R}$ -матрицы и энергии H в (35) в (полную) комбинаторную $\mathcal{R}$ -матрицу

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{l,m}: \text{Aff}(B_l) \otimes \text{Aff}(B_m) \rightarrow \text{Aff}(B_m) \otimes \text{Aff}(B_l)$$

следующим образом:

$$\mathcal{R}(\mathbf{i}[d] \otimes \mathbf{j}[e]) = \mathbf{b}[e - H(\mathbf{i} \otimes \mathbf{j})] \otimes \mathbf{a}[d + H(\mathbf{i} \otimes \mathbf{j})],$$

где $\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$ определяется как $\mathbf{b} \otimes \mathbf{a} = \mathcal{R}(\mathbf{i} \otimes \mathbf{j})$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Комбинаторная $\mathcal{R}$ -матрица, удовлетворяющая уравнению Янга–Бакстера

$$(\mathcal{R}_{l,m} \otimes 1)(1 \otimes \mathcal{R}_{k,m})(\mathcal{R}_{k,l} \otimes 1) = (1 \otimes \mathcal{R}_{k,l})(\mathcal{R}_{k,m} \otimes 1)(1 \otimes \mathcal{R}_{l,m}),$$

есть отображение $\text{Aff}(B_k) \otimes \text{Aff}(B_l) \otimes \text{Aff}(B_m) \rightarrow \text{Aff}(B_m) \otimes \text{Aff}(B_l) \otimes \text{Aff}(B_k)$.

ПРИМЕР 6. Пусть $n = 4$ и $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4) = (1, 0, 1, 0)$. Применим обе части следствия 1 к элементу из пространства $\text{Aff}(B_4) \otimes \text{Aff}(B_2) \otimes \text{Aff}(B_1)$ в нижней строке:

$$\begin{array}{ccccc}
 0010[f] & 0011[e-1] & 1201[d+1] & 0010[f] & 0011[e-1] & 1201[d+1] \\
 \downarrow & \downarrow & \uparrow & \uparrow & \downarrow & \downarrow \\
 0011[e-1] & 0010[f] & 1201[d+1] & 0010[f] & 0211[d] & 1001[e] \\
 \uparrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \uparrow \\
 0011[e-1] & 1210[d+1] & 0001[f] & 0211[d] & 0010[f] & 1001[e] \\
 \downarrow & \downarrow & \uparrow & \uparrow & \downarrow & \downarrow \\
 0211[d] & 1010[e] & 0001[f] & 0211[d] & 1010[e] & 0001[f]
 \end{array}$$

В верхней строке правая и левая части диаграммы совпадают, что подтверждает справедливость уравнения Янга–Бакстера.

Благодарности. Автор благодарит Б. Г. Конопельченко, Р. Витоло и организаторов конференции “Физика и математика нелинейных явлений” (PMNP-2015) за гостеприимство. Автор также благодарен М. Окадо и С. Сергееву за сотрудничество в предыдущих работах.

Список литературы

- [1] А. Б. Замоладчиков, *ЖЭТФ*, **79**:2 (1980), 641–664.
- [2] R. J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, Dover, Mineola, NY, 2007.
- [3] V. V. Bazhanov, S. M. Sergeev, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **39**:13 (2013), 3295–3310.
- [4] A. Kuniba, S. Sergeev, *Commun. Math. Phys.*, **324**:3 (2013), 695–713.
- [5] A. Kuniba, M. Okado, *Commun. Math. Phys.*, **334**:3 (2013), 1219–1244.
- [6] A. Kuniba, M. Okado, S. Sergeev, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **48**:30 (2013), 304001, 38 pp.
- [7] M. M. Kapranov, V. A. Voevodsky, “2-categories and Zamolodchikov tetrahedron equations”, *Algebraic Groups and Their Generalizations: Quantum and Infinite-Dimensional Methods* (Pennsylvania State University, University Park, PA, USA, July 6–26, 1991), Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, **56**, eds. W. J. Haboush, B. J. Parshall, AMS, Providence, RI, 1994, 177–259.

- [8] I. Heckenberger, *J. Algebra*, **323**:8 (2010), 2130–2182.
- [9] I. Heckenberger, H. Yamane, *Rev. Unión Mat. Argentina*, **51**:2 (2010), 107–146.
- [10] V. G. Drinfel’d, “Quantum groups”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (ICM)* (Berkeley, CA, August 3–11, 1986), ed. A. M. Gleason, AMS, Providence, RI, 1987, 798–820.
- [11] M. Jimbo, *Lett. Math. Phys.*, **10**:1 (1985), 63–69.
- [12] A. Nakayashiki, Y. Yamada, *Selecta Math. (N. S.)*, **3**:4 (1997), 547–599.
- [13] K. Hikami, R. Inoue, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **33**:22 (2000), 4081–4094.
- [14] M. Kashiwara, *Duke Math. J.*, **63**:2 (1991), 465–516.
- [15] E. Date, M. Jimbo, A. Kuniba, T. Miwa, M. Okado, *Lett. Math. Phys.*, **17**:1 (1989), 69–77.
- [16] S.-J. Kang, M. Kashiwara, K. C. Misra, T. Miwa, T. Nakashima, A. Nakayashiki, *Internat. J. Modern Phys. A*, **7**, suppl. 1A (1992), 449–484.
- [17] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi, Y. Yamada, “Remarks on fermionic formula”, *Recent Developments in Quantum Affine Algebras and Related Topics* (North Carolina State University, Raleigh, NC, USA, May 21–24, 1998), *Contemporary Mathematics*, **248**, eds. N. Jing, K. C. Misra, AMS, Providence, RI, 1999, 243–291.
- [18] M. Okado, “ $X = M$ conjecture”, *Combinatorial Aspect of Integrable Systems* (RIMS, Kyoto, Japan, July 26–30, 2004), *Mathematical Society of Japan Memoirs*, **17**, eds. A. Kuniba, M. Okado, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2007, 43–73.
- [19] R. Inoue, A. Kuniba, T. Takagi, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **45**:7 (2012), 073001, 64 pp.
- [20] A. Kuniba, *Bethe Ansatz and Combinatorics*, Asakura, Tokyo, 2011 (in Japanese).
- [21] V. G. Drinfeld, “On some unsolved problems in quantum group theory”, *Quantum Groups* (Euler International Mathematical Institute, Leningrad, 1990), *Lecture Notes in Mathematics*, **1510**, ed. P. P. Kulish, Springer, Berlin, 1992, 1–8.
- [22] A. Veselov, “Yang–Baxter maps: Dynamical point of view”, *Combinatorial Aspect of Integrable Systems* (RIMS, Kyoto, Japan, July 26–30, 2004), *Mathematical Society of Japan Memoirs*, **17**, eds. A. Kuniba, M. Okado, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2007, 145–167.
- [23] A. Kuniba, M. Okado, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **45**:46 (2012), 465206, 27 pp.
- [24] A. Kuniba, S. Maruyama, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **48**:13 (2015), 135204, 19 pp.
- [25] S. M. Sergeev, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **42**:29 (2009), 295206, 19 pp.
- [26] G. Benkart, S.-J. Kang, M. Kashiwara, *J. Amer. Math. Soc.*, **13** (2000), 295–331.