Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Т. Филиппов, О решении динамических уравнений
в общих однородных изотропных космологиях со скаля-
роном, *ТМФ*, 2016, том 188, номер 1, 121–157

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9038>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 13:39:30

© 2016 г.

А. Т. Филиппов*

О РЕШЕНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ОБЩИХ ОДНОРОДНЫХ ИЗОТРОПНЫХ КОСМОЛОГИЯХ СО СКАЛЯРОНОМ

Рассматриваются динамические уравнения в произвольной калибровке, описывающие однородные изотропные космологии, взаимодействующие со скалярным полем ψ (скаляроном). Для плоских космологий ($k = 0$) исследуется калибровочно-независимое уравнение для дифференциала $\chi(\alpha) \equiv \psi'(\alpha)$ отображения метрики α в скалярное поле ψ , которое является основной математической характеристикой космологии и локально задает ее портрет в так называемой α -версии. В более привычной ψ -версии аналогичное уравнение $\bar{\chi}(\psi) \equiv \chi^{-1}(\alpha)$ для дифференциала обратного отображения решено в асимптотическом приближении для произвольных потенциалов $v(\psi)$. В плоском случае функции $\bar{\chi}(\psi)$ и $\chi^{-1}(\alpha)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям первого порядка, зависящим только от логарифмической производной потенциала, $v'(\psi)/v(\psi)$. Если известно аналитическое решение для одной из χ -функций, можно найти все характеристики космологической модели.

В α -версии полная динамическая система интегрируема в явном виде при $k \neq 0$ для произвольного потенциала $\bar{v}(\alpha) \equiv v[\psi(\alpha)]$, заменяющего $v(\psi)$. До вычисления одного из отображений, которые сами зависят от потенциалов, не удастся связать эти потенциалы каким-либо аналитическим соотношением. Тем не менее такие соотношения можно найти в асимптотических областях или с помощью теории возмущений. Если же задать вместо потенциала космологический портрет, то можно реконструировать соответствующий потенциал.

Основной предмет этой работы – математическая структура изотропных космологий. Кратко излагаются и основные приложения к более строгой трактовке моделей инфляции в рамках α -версии изотропной скалярной космологии. В частности, построено инфляционное пертурбативное разложение для χ . Если выполнены условия для возникновения инфляции, т.е. $v > 0$, $k = 0$, $\chi^2 < 6$ и $\chi(\alpha)$ удовлетворяет определенному граничному условию при $\alpha \rightarrow -\infty$, то разложение инвариантно относительно скейлинга потенциала, а его первые члены дают стандартные инфляционные параметры вместе с высшими поправками.

Ключевые слова: изотропная космология, скалярное поле, динамические системы, интегрируемые модели, калибровочная инвариантность, инфляционные модели.

DOI: 10.4213/tmf9038

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: Alexandre.Filippov@jinr.ru

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой статье в основном изучаются изотропные космологии фридмановского типа с одним эффективно массивным скалярным полем – скаляроном или инфлатоном (см., например, [1]–[3]). В первую очередь, имеются в виду модели, описывающие эволюцию Вселенной до Большого Взрыва в рамках общей теории относительности, дополненной неким скалярным полем, природа которого в данном контексте несущественна. Самые успешные модели такого типа были сформулированы в работах [4]–[9], где предложены различные модели инфляционной космологии¹⁾. Однако в настоящий момент некоторые альтернативные теории, по-видимому, не противостоят наблюдаемым данным и, следовательно, также представляют интерес (см., например, работы [13], [14], [17]–[19] и ссылки в них).

Нашей целью является подробное изложение математической структуры общих изотропных космологий²⁾ и изучение, в частности, калибровочно-независимых решений космологических динамических систем в α -, ψ - и τ -версиях. τ -Версия, обычно называемая стандартной версией, наиболее часто используется в работах по космологии. К сожалению, динамические уравнения достаточно сложны даже в случае нулевого параметра кривизны k , при котором они могут быть решены лишь для простейших потенциалов. По этой причине было создано (методом проб и ошибок) интуитивное приближение “медленного скатывания”, которое позволило построить модель так называемой хаотической инфляции, описывающую очень короткий, но важный промежуток времени в эволюции однородных изотропных космологий [7]. Такой подход к космологической эволюции достаточно нагляден и согласуется со всеми известными космологическими данными, но он не учитывает начальные условия и общую картину классических решений, не говоря о существующих альтернативах инфляции. В предшествующем поиске точных интегралов и приближений в неизотропных космологических и статических редукциях сферически-симметричного гравитационного поля, взаимодействующего со скалярными полями (см. [20]–[29]), была найдена другая формулировка подобных динамических систем, которая развивается в настоящей работе и применяется к общим изотропным космологиям, в том числе к инфляции.

Первым нетривиальным примером стала интегрируемая модель гравитации, взаимодействующей с безмассовым скаляроном, изученная в работе [20]. Главной идеей был поиск потенциалов, для которых существуют дополнительные интегралы. Тогда α -зависимость дилатонной функции β , которая является частью метрики более высокой размерности, может быть вычислена с помощью единственного интегрирования. В качестве простейшей модели можно привести (α, β) -портрет статического и космологического решений³⁾. Как и фазовый портрет обычной динамической сис-

¹⁾В дополнение к общей теории, изложенной в книгах [1]–[3], стоит ознакомиться с обзором главных идей в работе [10], а также с более поздними результатами в работах [11]–[16]. Наши обозначения см. в приложении А.

²⁾Здесь не предполагается, что параметр кривизны k равен нулю, и рассуждения не ограничиваются частным выбором системы отсчета (калибровки), но предполагается, что скалярон минимально взаимодействует с гравитационным полем, а потенциал $v(\psi)$ произволен. Неминимальные случаи могут быть изучены с помощью известных преобразований Вейля для метрики.

³⁾В этой модели эффективный потенциал включает в себя электромагнитный член. Когда взаимодействие со скаляроном минимально, результат может быть записан с помощью элементарных функций. Топологически корректная схема портрета, полученная в работе [20] (см. также [27]), может быть найдена в неопубликованном сообщении [30].

темы, он состоит из кривых, заполняющих некоторую область в плоскости (α, β) и имеющих несколько особенностей, похожих на узлы или седла. Кривые этого портрета получены аналитически, но в общем случае его следует считать объектом дифференциальной топологии.

Такой несколько искусственный подход “поиска ключей под фонарем” оказался полезным как в построении приближенных решений [21], так и в поиске новых интегралов движения [27]–[29]. Основной проблемой при изучении анизотропной космологии и общих статических моделей является наличие трех динамических уравнений, два из которых наложены на метрические функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ и одно – на скалярное поле $\psi(t)$, в то время как известен лишь один интеграл – обращение энергии в нуль. Симметрией потенциала иногда можно воспользоваться для получения еще одного интеграла, но третий канонически коммутирующий интеграл является редкостью, по крайней мере в системах, интересных с физической точки зрения.

Структура сферически-симметричной редукции, которая представляет из себя двумерную теорию поля, позволяет выделить некоторые интегрируемые классы моделей, если принять сильные упрощающие предположения относительно их потенциалов. Для некоторых мультиэкспоненциальных потенциалов и простейших (минимальных) взаимодействий скалярных и гравитационного полей существуют интегрируемые системы, связанные с двумерными теориями Лиувилля и Тоды–Лиувилля⁴⁾ (см. [20]–[25]). Для одномерной космологической редукции с одним скаляроном возможно существование большего количества интегрируемых моделей. Простой экспоненциальный потенциал и специальный потенциал с двумя экспоненциальными членами интегрируемы. Более интересные полиномиальные потенциалы считаются неинтегрируемыми и обычно изучаются при помощи приближений асимптотически или численными методами. До сих пор не известно окончательно, каким должен быть скаляронный потенциал в моделях ранней Вселенной. В “стандартной” модели хаотической инфляции часто встречается потенциал $v(\psi)$, пропорциональный ψ^2 , но вместо него могут использоваться и более сложные потенциалы. Строго говоря, модели ранней Вселенной, включающие наиболее удачные инфляционные модели, до сих пор не образуют законченную теорию и заслуживают более глубокого изучения, так же как и их альтернативы.

В качестве первого шага предлагается посмотреть на математическую структуру достаточно общих однородных изотропных космологий с новой точки зрения. Вторым шагом будет совместный анализ этой структуры и (неизотропных) статических и волновых секторов. Третьим шагом должно стать изучение взаимосвязей между ними в рамках двумерной теории сферической гравитации, взаимодействующей со скаляроном. Попытка частичного воплощения подобной программы предпринята в работах [22]–[27] в контексте мульти-лиувиллевых и тода-лиувиллевых интегрируемых моделей, где все три сектора решений были получены и классифицированы. Сложной частью, не освещенной в этих работах, остается изучение эволюции состояний при наличии малых возмущений. Здесь мы делаем лишь первый шаг – формулируем различные подходы для построения приближенных и точных решений общих динамических уравнений, в которых особое внимание уделяется точным соотношениям и решениям, не зависящим от потенциала $v(\psi)$.

⁴⁾Подобные интегрируемые модели были, в частности, получены в супергравитационных теориях (см., например, [31]–[35]). Чисто экспоненциальные потенциалы интересны с теоретической точки зрения, но редко встречаются в приложении к космологиям.

Главным инструментом является калибровочно-независимое χ -уравнение, которое впервые появилось в работе [36] для случая $k = 0$. Один из главных результатов настоящей статьи – это вычисление некоторых точных решений уравнения для $\bar{\chi}(\psi) \equiv \alpha'(\psi)$ и подробное изучение их асимптотического поведения для больших и малых ψ в пределах физически значимого класса потенциалов. Для доступа к более общей и полной картине нужно сначала ввести и рассмотреть динамические уравнения в произвольной линейной калибровке (c -калибровка), определенной самым простым выбором множителя Лагранжа e^γ в терминах физической изотропной метрики $e^{2\alpha}$, а именно $\gamma = -\alpha$. Другие возможности выбора калибровки легко уяснить с помощью интегрируемых моделей и частных решений, на которых также демонстрируется понятие космологических портретов, обобщающих фазовые портреты для гравитационной подсистемы и подсистемы скалярной материи, а также более общих систем, описанных в работах [20], [27].

Наиболее информативные портреты в космологии – это дифференцируемые отображения $\psi(\alpha)$ и $\alpha(\psi)$, которые могут быть получены путем интегрирования $\chi(\alpha) \equiv d\psi/d\alpha$ и $\bar{\chi}(\psi) \equiv d\alpha/d\psi$ соответственно. Замкнутые дифференциальные уравнения первого порядка для этих функций можно написать лишь при $k = 0$. Но даже в этом случае можно найти аналитическое решение уравнения для $\bar{\chi}(\psi)$ либо для некоторых интегрируемых потенциалов $v(\psi)$, либо в форме степенных рядов или асимптотических разложений. Напротив, в настоящей работе показано, что уравнение для $\chi^2(\alpha)$ может быть решено в явном аналитическом виде, если формально заменить $v(\psi)$ на $\bar{v}(\alpha) \equiv v[\psi(\alpha)]$, что приобретает смысл, если нам известна функция $\chi(\alpha) = \psi'(\alpha)$. Конечно, для этого надо сначала решить χ -уравнение, так что надо действовать иначе. Сначала выберем произвольный потенциал $\bar{v}(\alpha)$, найдем точное выражение для $\chi(\alpha)$, вычислим его интеграл $\psi(\alpha)$, построим обратное отображение $\alpha(\psi)$ и, наконец, найдем потенциал $v(\psi) \equiv \bar{v}[\alpha(\psi)]$. Это, конечно, не преобразование заданной функции $\bar{v}(\alpha)$ в единственную функцию $v[\psi(\alpha)]$ или наоборот. Более точно: в этой цепочке $\alpha(\psi)$ зависит от двух произвольных параметров интегрирования – один является начальным или граничным условием C_0 для $\chi(\alpha)$ (см. п. 4.3), а другой (ψ_0) возникает при интегрировании $\chi(\alpha) = \psi'(\alpha)$. В общем это выглядит как “привязывание” потенциала в одной версии к некоторому решению (“якорю”) в другой. Если оказывается, что константой ψ_0 можно пренебречь, то потенциал $v(\psi)$ существенно зависит лишь от одного произвольного параметра C_0 ⁵⁾. В нашей формулировке общей α -версии инфляционной космологии это действительно так. В п. 4.3 условие $C_0 = 0$ определяет единственное решение $\chi(\alpha)$, используя которое можно легко перейти от точного решения в α -версии к приближенному (пертурбативному) решению в ψ -версии, причем потенциалы $\bar{v}(\alpha)$ или $v(\psi)$ остаются произвольными!

Также обсуждается более радикальный подход, а именно: потенциалы, возможно, не являются основными источниками динамики в космологии. Вместо них можно использовать один из космологических портретов. С теоретической точки зрения лучшие кандидаты – это гравитационный фазовый портрет $\dot{\alpha}(\alpha)$ и скаляронный α -портрет $\dot{\psi}(\alpha)$.

⁵⁾См. простые примеры и точные решения в приложениях А–В и в основном тексте ниже.

2. ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

В данной статье рассматривается редукция двумерной теории до уравнений, описывающих изотропные космологии, и не рассматриваются другие одномерные редукции, изученные в предыдущих работах [20]–[25]. Процедура редукции и обозначения кратко описаны в приложении А. Заметим, что эффективный потенциал и уравнения можно напрямую получить с помощью сферически-симметричных уравнений Эйнштейна при использовании лагранжиана

$$\mathcal{L}^{(4)} = \sqrt{-g} [R^{(4)} - v(\psi) - (\nabla\psi)^2]. \quad (1)$$

2.1. Калибровки и калибровочная независимость. В предположении, что поле материи зависит только от времени t , и применяя процедуру редукции, получаем *эффективный космологический лагранжиан*

$$\mathcal{L}^{(2)} = e^{3\alpha-\gamma}(\dot{\psi}^2 - 6\dot{\alpha}^2) - e^{3\alpha+\gamma}v(\psi) - 6ke^{\alpha+\gamma}, \quad (2)$$

где теперь α, β, γ зависят от t и $\beta = \alpha$. Видно, что здесь e^γ является множителем Лагранжа, связанным с параметризационной инвариантностью лагранжиана. Ограничим класс возможных калибровок линейным условием $\gamma + c\alpha = 0$, где c является произвольной действительной константой.

Этот класс калибровок включает в себя: *стандартную (временную) калибровку* (S) $c = 0, \gamma = 0$; *гамильтонову калибровку* (H) $c = -3, \gamma = 3\alpha$; *калибровку светового конуса* (LC) $c = -1, \gamma = \alpha$. Запишем и попытаемся решить главные уравнения в общей линейной калибровке $\gamma = -c\alpha$:

$$\mathcal{L}_c = e^{(3+c)\alpha}(\dot{\psi}^2 - 6\dot{\alpha}^2) - e^{(3-c)\alpha}v(\psi) - 6ke^{(1-c)\alpha}. \quad (3)$$

Сначала проварьируем $\mathcal{L}_c$ в калибровочных параметрах γ и запишем *гамильтонову связь (условие нулевой энергии)*:

$$\mathcal{H}_c \equiv \eta^2 - 6\xi^2 + e^{-2c\alpha}v(\psi) + 6ke^{-2(1+c)\alpha} = 0, \quad \eta \equiv \dot{\psi}, \quad \xi \equiv \dot{\alpha}, \quad (4)$$

где представлены переменные, пропорциональные импульсам, η, ξ , которые более удобны, чем канонические импульсы $p_\psi = \partial_\eta \mathcal{L}_c$ и $p_\alpha = \partial_\xi \mathcal{L}_c$. Заметим, что канонический гамильтониан

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c^{\text{can}} &= e^{-(3+c)\alpha} \left\{ \frac{p_\psi^2}{4} + v(\psi)e^{6\alpha} - \frac{p_\alpha^2}{24} + 6ke^{4\alpha} \right\}, \\ p_\psi &= 2\eta e^{(3+c)\alpha}, \quad p_\alpha = 12\xi e^{(3+c)\alpha}, \end{aligned} \quad (5)$$

совпадает со связью $\mathcal{H}_c$ только в калибровке $c = -3$, и очевидно, что $\mathcal{H}_c^{\text{can}}$ нельзя представить в виде динамически независимых скалярной и гравитационной частей (в отличие от $\mathcal{H}_c$).

Уравнения первого порядка (эквивалентные каноническим уравнениям) получены с помощью варьирования лагранжиана (3) по ψ, α заменой $\dot{\psi}, \dot{\alpha}$ на η, ξ , и, наконец, используя связь (4):

$$\dot{\psi} = \eta, \quad \dot{\alpha} = \xi, \quad 2\dot{\eta} + 2(3+c)\eta\xi + e^{-2c\alpha}v'(\psi) = 0, \quad (6)$$

$$6\dot{\xi} + (3 + c)\eta^2 + ce^{-2c\alpha}v(\psi) + 6k(1 + c)e^{-2(1+c)\alpha} = 0. \quad (7)$$

Выражая член, пропорциональный v , в последнем уравнении и используя связь (4), получаем уравнение

$$2\dot{\xi} + \eta^2 + 2c\xi^2 + 2ke^{-2(1+c)\alpha} = 0, \quad (8)$$

которое не зависит от $v(\psi)$ в любой калибровке⁶⁾ и дает несколько интересных точных соотношений. Например, выбирая $c = k = 0$, ниже мы получим очень простое и полезное уравнение (21). Если $c, k \geq 0$, находим общее точное неравенство $\dot{\xi} \equiv \ddot{\alpha} \leq 0$. Точно так же из уравнения (6) в калибровке $c = -3$ находим $\dot{\eta} \equiv \ddot{\psi} \leq 0$ при $v'(\psi) \geq 0$. Из (8) можно получить и другие интересные неравенства и точные соотношения для различных значений c, k , не зависящие от $v(\psi)$. Более того, можно рассматривать уравнения (4), (8) как фундаментальную систему, полностью определяющую космологические решения. Очевидным применением является редукция всей системы до одного дифференциального уравнения на $\xi(\psi)$ в случае $k = 0$ (см. ниже (38)). Ниже также представлен намного менее очевидный подход, основанный на новой интерпретации уравнений (6)–(8) как уравнений для $\xi^2(\alpha), \eta^2(\alpha)$.

Уравнения (6)–(8) задают динамическую систему дифференциальных уравнений первого порядка, в то время как $\mathcal{H}_c(\eta, \psi; \xi, \alpha)$ является их первым интегралом, который равен нулю, как того требует параметризационная инвариантность. Обращение в нуль $\mathcal{H}_c$ является отдельным условием, если не учитывать происхождение уравнений (6)–(8) из вариаций лагранжиана (2). Стандартная космологическая формулировка использует S-калибровку и форму второго порядка для уравнения (6), дополненного уравнением (4). Так как в настоящей работе уравнения (4)–(7) используются в различных калибровках и с различными параметризациями динамических переменных, важно хорошо понимать связи между ними.

Если уравнения (6), (7) выполняются, $\mathcal{H}_c$ является их интегралом движения, т. е. $\dot{\mathcal{H}}_c = 0$ на их решениях. Также можно обнаружить, что на решениях уравнений (6) и (8) связь $\mathcal{H}_c$ удовлетворяет уравнению $\dot{\mathcal{H}}_c = -2c\xi\mathcal{H}_c$. Это означает, что их интеграл движения равен $e^{2c\alpha}\mathcal{H}_c \equiv \bar{\mathcal{H}}$, что совпадает со связью, если $c = 0$, а значит, $\mathcal{H}_0$ – интеграл в S-калибровке. Теперь предположим, что имеются решения уравнения (4) и одного из трех уравнений (6)–(8). Можно легко убедиться, что другие два уравнения выполняются на решениях выбранной пары.

2.1.1. Калибровочно-независимые уравнения и общие замечания. Перед тем как перейти к более конкретным задачам, перепишем все динамические уравнения в калибровочно-независимой форме, которая формально совпадает с S-калибровкой. Действительно, уравнения (4)–(8) легко преобразуются в c -инвариантную форму при введении калибровочно-инвариантных импульсных переменных $\bar{\eta}$ и $\bar{\xi}$ и параметра эволюции τ ,

$$d\tau \equiv e^{-c\alpha} dt, \quad \frac{d}{d\tau} \equiv e^{-c\alpha} \frac{d}{dt}, \quad \eta \equiv e^{-c\alpha} \bar{\eta}, \quad \xi \equiv e^{-c\alpha} \bar{\xi}, \quad (9)$$

⁶⁾ В S-калибровке $c = 0$ оно совпадает с уравнением (7).

в терминах которых основные динамические уравнения приобретают следующий калибровочно-независимый вид:

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \bar{\eta}, \quad 2 \frac{d\bar{\eta}}{d\tau} + 6\bar{\eta}\bar{\xi} + v'(\psi) = 0, \quad (10)$$

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = \bar{\xi}, \quad 2 \frac{d\bar{\xi}}{d\tau} + \bar{\eta}^2 + 2ke^{-2\alpha} = 0, \quad (11)$$

$$\bar{\mathcal{H}} \equiv e^{2c\alpha} \mathcal{H}_c = \bar{\eta}^2 - 6\bar{\xi}^2 + v(\psi) + 6ke^{-2\alpha} = 0. \quad (12)$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями (4), (6), (7) в калибровке $c = 0$, если опустить верхние подчеркивания и отождествить $d/d\tau$ с d/dt (т.е. с дифференцированием, обозначаемым точкой). В дальнейшем эта интерпретация уравнений (10)–(12) используется без пояснений, кроме случаев, где это может привести к неправильному толкованию.

Далее рассматриваются простейшие уравнения для сферически-симметричного гравитационного поля, взаимодействующего со скалярным полем. Хорошо известно, что упрощение определяется условием изотропности (см. (91) в приложении А), которое дает условие $\beta(t) = \alpha(t)$, являющееся в действительности дополнительным интегралом полных динамических уравнений. Для решения соответствующих уравнений (6), (7) нужен всего один дополнительный интеграл, который бы коммутировал с гамильтонианом. Например, если $v'(\psi) = 0$, видно, что в Н-калибровке η является константой, а уравнения движения можно решить в явном виде. В анизотропных космологиях существует дополнительное уравнение второго порядка на $\beta(t)$ и для решения уравнений движения нужен еще один интеграл, примеры приведены в работах [21], [27]–[29].

Стандартные подходы к космологиям обычно используют уравнения на функции, зависящие от времени, такие как (6), (7) или их представления второго порядка. К тому же в них обычно выбирают калибровку $c = 0$, не учитывая возможные калибровочные преобразования. Ниже рассматриваются общие калибровочно-неинвариантные уравнения с независимыми переменными ψ или α . Как было упомянуто в разделе 1, для получения решения рассматриваемой теории достаточно вычислить либо $\bar{\chi}(\psi) \equiv \alpha'(\psi)$, либо $\chi(\alpha) \equiv \psi'(\alpha)$. Показано, что для $k = 0$ можно найти дифференциальное уравнение первого порядка, выражающее $\bar{\chi}'(\psi)$ как полином третьего порядка по $\bar{\chi}$ с рациональными функциями от ψ в качестве коэффициентов, если, например, $v(\psi) = e^{g\alpha} R(\psi)$, где $R(\psi)$ – рациональная функция. Подобное уравнение для $\chi(\alpha)$ может быть полностью решено достаточно необычным методом, который был кратко изложен в разделе 1 и будет в явном виде описан ниже. Для сравнения этих двух подходов мы также рассматриваем некоторые точные и асимптотические решения уравнения для $\bar{\chi}$.

Перечислим характерные черты нашего подхода.

1. В отличие от стандартных методов, используются различные калибровки и версии динамических уравнений, в которых динамические переменные параметризованы не только калибровочно-зависимым параметром t , но также и инвариантными (“физическими”) параметрами ψ или α .

2. Помимо стандартных фазовых портретов $\eta(\psi)$ и $\xi(\alpha)$, изучаются “косые” портреты $\eta(\alpha)$ и $\xi(\psi)$.

3. Важнейшими с нашей точки зрения являются локально-эквивалентные инвариантные отображения (портреты) $\psi(\alpha)$ и $\alpha(\psi)$, наряду со своими дифференциалами (“эскизами”) $\chi(\alpha) = d\psi/d\alpha$ и $\bar{\chi} = d\alpha/d\psi$.

4. Поиск классических интегрируемых потенциалов второстепенен; вместо этого предлагается найти подход к построению точных и приближенных решений, описывающих портреты достаточно широкого класса космологий.

Чтобы проиллюстрировать перечисленные особенности, начнем с краткого описания известных интегрируемых примеров.

2.2. Простые примеры с необычной точки зрения. Используя различные формы уравнений и различные калибровки, можно легко выделить и найти решения для нескольких частных случаев. Самые очевидные интегрируемые случаи таковы: постоянный (“космологический”) потенциал $v = v_0 \equiv 2\Lambda$ и более сложный экспоненциальный потенциал $v = v_0 e^{g\psi}$. Оба эти потенциала важны для построения нашего подхода и будут рассмотрены с различных точек зрения. В первом случае последнее уравнение в (6) легко решается в любой калибровке: заметим, что $\dot{\eta}/\xi \equiv d\eta/d\alpha$, и находим $\eta = \eta_0 e^{-(3+c)\alpha}$. В Н-калибровке интеграл движения – это просто $\eta = \eta_0$; в LC-калибровке имеем интеграл $e^{2\alpha}\eta = \eta_0$, который отвечает хорошо известному интегралу движения $\varphi\dot{\psi} \equiv e^{2\beta}\eta = C_0$ неизотропных ($\beta \neq \alpha$) моделей космологий и статических состояний с ψ -независимым потенциалом⁷⁾. Теперь, имея в явном виде выражение для $\eta(\alpha)$, можно вычислить $\xi^2 \equiv \dot{\alpha}^2$ из уравнения (4) и, следовательно, найти $t_c = \int d\alpha/\dot{\alpha}(\alpha)$, где $\dot{\alpha}(\alpha)$ находим из уравнения (4):

$$6\dot{\alpha}^2 e^{2c\alpha} = v_0 + 6ke^{-2\alpha} + \eta_0^2 e^{-6\alpha}. \quad (13)$$

Это задает гравитационный фазовый портрет $\dot{\alpha}(\alpha)$ космологии с постоянным космологическим потенциалом. Для вычисления портрета $\psi(\alpha)$ легче всего воспользоваться Н-калибровкой: при $c = -3$ имеем $\psi = \eta_0(t - t_0)$, и, следовательно, для нахождения калибровочно-независимого портрета $\psi(\alpha)$ достаточно вычислить $t(\alpha)$ в той же калибровке. Общее выражение в явном виде для $t(\alpha)$ можно получить из (13), но ради простоты запишем окончательный результат для $k = 0$, $v_0 > 0$ (для $v_0 < 0$, $\text{sh}^2 \mapsto \text{ch}^2$):

$$\eta_0^2 e^{-6\alpha} = v_0 \text{sh}^2 \left[\sqrt{\frac{3}{2}} \eta_0 (t - t_0) \right] = v_0 \text{sh}^2 \left[\sqrt{\frac{3}{2}} (\psi - \psi_0) \right]. \quad (14)$$

Так же как и портреты простых интегрируемых гравитационных дилатонных моделей, которые упоминались в работах [20], [27], найденный портрет, в сущности, зависит от одного свободного безразмерного параметра интегрирования η_0^2/v_0 , но не имеет интересных особенностей, кроме стандартных: при $\alpha \rightarrow \pm\infty$, $\psi \rightarrow \infty$, $\psi \rightarrow \psi_0$.

Очевидно, что модель с постоянным космологическим потенциалом можно легко решить в любой калибровке. Поиск интегрируемых моделей для более сложных космологий можно упростить, используя различные калибровки. Хотя S-калибровка

⁷⁾Важным свойством данной интегрируемой модели дилатонной гравитации является то, что при $C_0 \neq 0$ у нее отсутствует горизонт, который снова появляется при $C_0 = 0$. Если потенциал зависит от дилатонного поля φ , он в общем случае неинтегрируем. Для интегрируемых потенциалов $v(\varphi)$ вычисляются двумерные портреты, т. е. системы кривых на плоскости ($h \equiv e^{2\beta}$; φ); они, в сущности, зависят от одного параметра C_0 и выглядят как фазовые портреты, см. [20], [27].

наиболее популярна среди космологов, Н- и ЛС-калибровки зачастую более удобны. ЛС-калибровка незаменима при изучении универсального описания статических и космологических моделей и напрямую связывает их с теориями более высоких размерностей (см., например, работы [20]–[22], [26]–[29] и приведенные в них ссылки). Н-калибровка широко используется в указанных работах при поиске интегралов и доказательстве интегрируемости различных моделей.

2.2.1. Решение уравнений с экспоненциальными потенциалами. Особенно интересным и простым примером использования Н-калибровки $c = -3$ можно назвать случай $k = 0$. Лагранжиан и уравнения движения второго порядка выглядят следующим образом:

$$\mathcal{L}_c = \dot{\psi}^2 - 6\dot{\alpha}^2 - e^{6\alpha}v(\psi), \quad 2\ddot{\psi} + e^{6\alpha}v'(\psi) = 0, \quad 2\ddot{\alpha} - e^{6\alpha}v(\psi) = 0. \quad (15)$$

При $v = v_0 e^{g\psi}$ существует очевидный интеграл движения $\dot{\psi} + g\dot{\alpha} = C_0$ и, как хорошо известно, такая система интегрируема. Для интегрирования в явном виде введем функцию $\varphi \equiv g\psi + 6\alpha$, которая удовлетворяет уравнению Лиувилля, имеющему интеграл $\dot{\varphi}^2 + 2\tilde{v}_0 e^\varphi = C_1^2$, где $\tilde{v}_0 \equiv v_0(g^2 - 6)/2$. Следовательно, полное решение для экспоненциального потенциала может быть записано как

$$\psi + g\alpha = C_0(t - t_0), \quad e^{-(g\psi + 6\alpha)} = \tilde{v}_0 C_1^{-2} \{1 + \varepsilon \operatorname{ch}[C_1(t - t_1)]\}, \quad \varepsilon \equiv \frac{\tilde{v}_0}{|\tilde{v}_0|}. \quad (16)$$

Исключая t , находим соотношение между α и ψ , неявно задающее портрет $\psi(\alpha)$:

$$e^{-(g\psi + 6\alpha)} = 2\tilde{v}_0 C_1^{-2} \operatorname{ch}^2 \left\{ \frac{C_1[\psi + g\alpha + C_0(t_0 - t_1)]}{2C_0} \right\}, \quad \varepsilon = +1. \quad (17)$$

Из (16) легче найти явные выражения для $\psi(t)$ и $\alpha(t)$. Вычисляя обратную функцию $\alpha(t)$, можно найти “явное” представление для $\psi(\alpha)$, но в этом простом случае “параметризованный портрет” ($\alpha(t)$, $\psi(t)$) более удобен для космологических приложений⁸⁾.

Более интересная и реалистичная модель, описываемая уравнениями (15), предложена в работе [29]. Напомним, что потенциал $v = v_1 e^{g_1 \psi} + v_2 e^{g_2 \psi}$ интегрируем при произвольных v_i и $g_1 g_2 = 6$. Действительно, при определении новых полей ψ_1 , ψ_2 с помощью псевдоортогонального преобразования

$$\sqrt{6}\alpha \equiv \hat{c}\psi_1 - \hat{s}\psi_2, \quad \psi \equiv -\hat{s}\psi_1 + \hat{c}\psi_2, \quad \hat{c} \equiv \operatorname{ch} \theta, \quad \hat{s} \equiv \operatorname{sh} \theta, \quad (18)$$

находим, что кинетический лагранжиан равен $-\dot{\psi}_1^2 + \dot{\psi}_2^2$, и при $g_1 = \sqrt{6} \operatorname{th} \theta$, $g_2 = 6/g_1$

$$6\alpha + g_i \psi = \tilde{g}_i \psi_i, \quad \tilde{g}_1 = \frac{\sqrt{6}}{\operatorname{ch} \theta}, \quad \tilde{g}_2 = \frac{\sqrt{6}}{\operatorname{sh} \theta}. \quad (19)$$

Лагранжиан в (15), таким образом, описывает две явно решаемые модели Лиувилля:

$$\mathcal{L}_c = -\dot{\psi}_1^2 + \dot{\psi}_2^2 + v_1 e^{\tilde{g}_1 \psi_1} + v_2 e^{\tilde{g}_2 \psi_2}. \quad (20)$$

Так как параметры v_1 , v_2 произвольны, $\tilde{g}_1 \tilde{g}_2 > 0$, и θ могут принимать как положительные, так и отрицательные значения, можно построить космологически интересные модели при выборе подходящих значений v_i и θ . В частности, потенциал $v(\psi)$

⁸⁾ Явное представление для $\psi(\alpha)$ и $\alpha(\psi)$ можно легко найти в асимптотической области $t \rightarrow \infty$.

может качественно напоминать возникающие в некоторых моделях инфляционные потенциалы при $v_1 = -v_2 > 0$ и подходящем выборе θ в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Формальное решение этой модели довольно простое: мы знаем $\psi_i(t)$ и поэтому легко найти $\alpha(t)$ и $\psi(t)$. Потом, исключая t , можно вычислить $\alpha(\psi)$ -портрет системы. Это звучит достаточно просто, однако на самом деле детальное вычисление очень громоздкое, потому что в общем случае ε_i и C_i , определяющие решения $\psi_i(t)$ (с помощью двух соотношений, похожих на второе уравнение в (16)), могут быть как положительными, так и отрицательными, а в вычислении замешаны обратные функции $t(\psi_i)$. Все эти “тонкости” весьма существенны в космологических приложениях. По этим причинам мы считаем, что данная “билиувиллева” модель заслуживает детального изучения, которое лежит вне тематики этой работы⁹⁾.

2.2.2. Замечания об отсутствии зависимости от потенциалов. Простые примеры, приведенные выше, показывают, что бывает полезно заменить временную переменную более “физической” переменной α . Также можно (и это будет сделано) использовать скалярную переменную ψ , но α играет особую роль, так как существует уравнение (8), которое не зависит от потенциала $v(\psi)$ ¹⁰⁾.

Это уравнение можно представить в очень компактной форме:

$$\frac{dz}{d\alpha} + \bar{\eta}^2 = 0, \quad z \equiv \bar{\xi}^2 - ke^{-2\alpha}, \quad \bar{\xi} \equiv \xi e^{c\alpha}, \quad \bar{\eta} \equiv \eta e^{c\alpha}, \quad (21)$$

где $-6z$ есть гравитационная часть калибровочно-инвариантной гамильтоновой связи, а $(\bar{\eta}^2 + v)$ – его скалярная часть. Решение уравнения (21) выражает $\bar{\xi}^2$ в терминах $\bar{\eta}^2$ ¹¹⁾,

$$\bar{\xi}^2(\alpha) = ke^{-2\alpha} + z(\alpha_+) + \int_{\alpha}^{\alpha_+} \bar{\eta}^2(\alpha), \quad (22)$$

где $z(\alpha_+)$ – произвольная константа, $-\infty < z(\alpha_+) < \infty$. Это нетривиальное представление гравитационной кинетической энергии $\dot{\alpha}^2$ в терминах скалярной кинетической энергии $\dot{\psi}^2$. Оно может быть полезно при анализе гравитационного фазового портрета $\dot{\alpha}(\alpha)$. В более общем случае идея использовать $\eta^2(\alpha)$ вместо потенциала $v'(\psi)$ выглядит достаточно плодотворной. Она напоминает стандартную замену p на $-q$ и будет более подробно обсуждаться ниже.

Вероятно, лучше считать заданными $\bar{\xi}(\alpha) \equiv \dot{\alpha}(\alpha)$ и вычислять $\bar{\eta}(\alpha) \equiv \dot{\psi}(\alpha)$ из уравнения (21). В космологическом дискурсе $\dot{\alpha}(\tau)$ называется *параметром* (функцией) Хаббла, ее зависимость от α более или менее понятна в простых космологических моделях, и с некоторыми допущениями ее можно сравнить с наблюдаемыми данными. О поведении функции Хаббла можно сделать разумные предположения в различных инфляционных моделях, моделях “отскока” и пр. С динамической точки зрения это фазовый портрет гравитационной подсистемы, которая представляет наибольший интерес при изучении событий, предшествующих Большому Взрыву.

⁹⁾ Более сложные экспоненциальные интегрируемые модели с одним и более скалярными полями можно найти в работах [22]–[25].

¹⁰⁾ Главная идея данной статьи заключается в том, что нужно рассмотреть космологический портрет $\psi(\alpha)$ или $\alpha(\psi)$ в терминах дополнительных переменных ψ , α . Таким образом, вполне естественно считать динамические переменные зависящими от одной из таких переменных, а не от эволюционного (временного) параметра. Кроме того, мы обсуждаем стандартные фазовые портреты $\xi(\alpha) \equiv \dot{\alpha}(\alpha)$, $\eta(\psi) \equiv \dot{\psi}(\psi)$, а также скрученные портреты $\eta(\alpha) \equiv \dot{\psi}(\alpha)$, $\xi(\psi) \equiv \dot{\alpha}(\psi)$.

¹¹⁾ Здесь и далее мы опускаем $d\alpha$, $d\psi$, dx , когда это возможно.

Мы не располагаем непосредственно наблюдаемой информацией об этой подсистеме, но тщательный анализ литературы, относящейся к инфляции и другим сценариям самых ранних космологий, может позволить выработать интуицию в отношении поведения $\dot{\alpha}(\alpha)$. В любом случае, знание одной из функций $\xi(\alpha)$ или $\eta(\alpha)$ позволило бы вычислить вторую функцию из уравнения (21), а потом вычислить из уравнения (4) и сам потенциал, зависящий от α . Чтобы “преобразовать” его в $v(\psi)$, следует найти $\chi(\alpha)$, как будет показано ниже.

Несмотря на то что скалярный потенциал достаточно удобен и полезен, о нем известно намного меньше, чем, например, о параметре Хаббла (не говоря уже о самом существовании скалярона). Таким образом, желание избежать использования $v(\psi)$ в качестве исходных данных в космологических моделях довольно естественно и может быть реализовано в рамках стандартной версии. Тогда естественным выбором теоретических исходных данных может стать скаляронный (инфлатонный) фазовый портрет $\dot{\psi}(\psi) \equiv \eta(\psi)$, который, в свою очередь, может быть получен из некоторого упрощающего анзаца, определяющего конкретную модель (в качестве примера см. получение потенциала в модели “быстрого скатывания” в работе [17]).

2.3. Уравнения для $\chi(\alpha)$, $\bar{\chi}(\psi)$ и их главные свойства. На время забудем о блестящих идеях, относящихся к изотропным космологиям, и попытаемся заново взглянуть на их математическую структуру. Первая попытка автора это сделать описана в работе [36] (см. также [37], [38]), где целью было понять космологии аффинного обобщения гравитации Эйнштейна. В работе [36] автор предложил (в несколько неудачных обозначениях) калибровочно-независимое уравнение (см. уравнение (33) в указанной работе) для функции $\chi \equiv d\psi/d\alpha$, рассматриваемой как функция от ψ . Позже мы вернемся к этому уравнению, а сначала введем обозначения и постараемся более детально описать наш план. Основная цель настоящей работы – вычисление аналитического портрета космологии в виде $\psi(\alpha)$ или $\alpha(\psi)$, поэтому наши основные объекты – $\chi(\alpha)$ и $\bar{\chi}(\alpha)$ ¹²:

$$\chi(\alpha) \equiv \frac{d\psi}{d\alpha} \equiv \frac{\dot{\psi}}{\dot{\alpha}} \equiv \frac{\eta}{\xi}, \quad \bar{\chi}(\psi) \equiv \frac{d\alpha}{d\psi} \equiv \frac{\dot{\alpha}}{\dot{\psi}} \equiv \frac{\xi}{\eta}, \quad \chi(\alpha)\bar{\chi}(\psi) = 1. \quad (23)$$

Очевидным образом последнее соотношение превращается в тождество при подстановке $\psi(\alpha)$ или $\alpha(\psi)$.

Чтобы получить уравнения для функций $\chi(\alpha)$ и $\bar{\chi}(\psi)$ из уравнений (6), (7), нужно использовать переход от независимой переменной τ к α или ψ и преобразования между α и ψ , которые можно легко произвести с помощью очевидных равенств (которые неявно применяются в п. 2.2):

$$\frac{d}{d\tau} = \dot{\alpha} \frac{d}{d\alpha} = \xi \frac{d}{d\alpha} = \dot{\psi} \frac{d}{d\psi} = \eta \frac{d}{d\psi}, \quad \frac{d}{d\psi} = \bar{\chi}(\psi) \frac{d}{d\alpha}, \quad \frac{d}{d\alpha} = \chi(\alpha) \frac{d}{d\psi}. \quad (24)$$

Используя приведенные выше уравнения, сначала получаем калибровочно-независимое соотношение

$$\frac{2}{\xi} \frac{d\chi}{d\tau} = \frac{\xi\dot{\eta} - \dot{\xi}\eta}{\xi^3} = (\chi^2 - 6)[\chi + l'(\psi)] + \frac{2k}{\xi^2} e^{-2\alpha} [\chi + 3l'(\psi)], \quad l'(\psi) \equiv \frac{v'(\psi)}{v(\psi)}, \quad (25)$$

¹²В настоящем подразделе используется стандартная калибровка $c = 0$ и опускаются черточки над ξ , η .

которое обобщает уравнение (33) из работы [36], но не является замкнутым дифференциальным уравнением для χ даже после замены ξdt на $d\alpha$ или $\bar{\chi} d\psi$. В первом случае обнаружим, что это соотношение совпадает с уравнением (33) из работы [36] при $k = 0$. Оно может быть формально записано как корректно определенное уравнение для $\chi^2(\alpha)$ при домножении на $\chi(\alpha)$ и применении последнего соотношения из (24), которое позволяет формально считать $l'(\psi)$ функцией от α . Таким образом, определяя $\chi(\alpha) dl/d\psi \equiv \bar{l}'(\alpha)$, получаем уравнение

$$\frac{d\chi^2}{d\alpha} = (\chi^2 - 6)(\chi^2 + \bar{l}'(\alpha)), \quad \chi \equiv \psi'(\alpha), \quad (26)$$

которое легко решить для любого $\bar{l}'(\alpha)$. Во втором случае имеем замкнутое уравнение Абеля для $\bar{\chi}(\psi)$, которое имеет решение лишь для немногих потенциалов,

$$2 \frac{d\bar{\chi}}{d\psi} = (6\bar{\chi}^2 - 1)(1 + \bar{\chi}l'(\psi)), \quad \bar{\chi} \equiv \alpha'(\psi). \quad (27)$$

Уравнение (26) может быть переписано как нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка для $\psi(\alpha)$, если вспомнить, что $\bar{l}'(\alpha) \equiv \chi(\alpha)l'(\psi)$, и поделить уравнение на χ . Точно так же уравнение (27) можно воспринимать как уравнение второго порядка для $\alpha(\psi)$, так как $l'(\psi) \equiv \bar{\chi}(\psi)\bar{l}'(\alpha)$. При любом преобразовании нужно предполагать, что $l(\psi)$ или $\bar{l}(\alpha)$ известны, поэтому первый случай предпочтителен. Мы не занимаемся изучением уравнений второго порядка и в дальнейшем сосредоточимся на уравнениях (26) и (27). Так как $v(\psi)$ – наиболее знакомый объект, начнем наше исследование с поиска решений уравнения (27).

Заметим, что уравнение (4) дает, помимо прочего, важные неравенства для χ , $\bar{\chi}$:

$$\begin{aligned} \chi^2 < 6, \quad 6\bar{\chi}^2 > 1 & \quad \text{при } v > 0, \quad k \geq 0, \\ \chi^2 > 6, \quad 6\bar{\chi}^2 < 1 & \quad \text{при } v < 0, \quad k \leq 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Эти ограничения на v и k часто используются в контексте космологии. Если они не соблюдены, поведение функций χ становится более сложным, поэтому мы их придерживаемся. При $\chi^2 \ll 6$, $6\bar{\chi}^2 \gg 1$ могут существовать инфляционные решения, которые обсуждаются в п. 4.3. Для отрицательных потенциалов существуют и альтернативные космологические сценарии, в том числе и сценарий горячего (“экспиротического”) сжатия, сопровождаемого “отскоком”.

При $k = 0$ уравнение для $\chi(\alpha)$ (или $\bar{\chi}(\psi)$) определяет портрет $\psi(\alpha)$ (или $\alpha(\psi)$), который может быть получен прямым интегрированием решения. Более того, зная одну из этих функций, можно фактически восстановить полное решение космологических уравнений. Это очевидно при $k = 0$, но возможно и обобщение на случай $k \neq 0$, при условии, что известно и χ при $k \neq 0$. Далее, подставляем в уравнение (21) $\bar{\eta}^2 \equiv \chi^2 \bar{\xi}^2$, получаем линейное уравнение для $\bar{\xi}^2$ и находим выражение для функции Хаббла через $\chi^2(\alpha)$:

$$\bar{\xi}^2(\alpha) = \exp \left[- \int \chi^2(\alpha) \right] \left\{ C_0 - 2k \int \exp \left[-2\alpha + \int \chi^2(\alpha) \right] \right\}. \quad (29)$$

Выполнив замену переменной интегрирования и не забывая, что $\chi^2(\alpha) d\alpha = \bar{\chi}^{-1}(\psi) d\psi$, $\alpha'(\psi) \equiv \bar{\chi}(\psi)$, можно переписать это выражение в ψ -версии:

$$\bar{\xi}^2(\psi) = \exp \left[- \int \bar{\chi}^{-1}(\psi) \right] \left\{ C_0 - 2k \int \exp \left[\int [\bar{\chi}^{-1}(\psi) - 2\bar{\chi}(\psi)] \right] \right\}. \quad (30)$$

При применении полученных формул нужно обращать особенное внимание на пределы интегрирования и константы, чтобы соблюдалась положительность ξ^2 . В качестве первого применения заметим, что при использовании (29), (30), (12) можно вычислить потенциалы $\bar{v}(\alpha)$ и $v(\psi)$ в терминах χ или $\bar{\chi}$:

$$\bar{v}(\alpha) = [6 - \chi^2(\alpha)]\bar{\xi}^2(\alpha) - 6ke^{-2\alpha} = [6 - \bar{\chi}^{-2}(\psi)]\xi^2(\psi) - 6ke^{-2\alpha(\psi)} = v(\psi). \quad (31)$$

Также заметим, что уравнение (30) может быть использовано в итерационных схемах с $\bar{\chi}(\psi)$ и ξ или η (см. п. 3.1).

Уравнения (29)–(31) демонстрируют (для произвольного k) самое важное свойство функций χ , $\bar{\chi}$: зная хотя бы одну из них, можно не только восстановить портрет (α, ψ) , но и все характеристики космологических решений $(\tau(\alpha), \tau(\psi), v(\psi), v[\psi(\alpha)])$, гравитационную и скаляронную энергии. Еще интереснее для приложений выражение $\chi^2(\alpha)$ в терминах функции Хаббла $H(\alpha) \equiv \bar{\xi}(\alpha)$. Оно может быть получено непосредственно из уравнения (21), которое также использовалось для вывода (29) (вспомним, что $d\alpha \equiv H d\tau$):

$$\chi^2 = -2 \left(\frac{d \ln H}{d\alpha} + \frac{ke^{-2\alpha}}{H^2} \right) = -\frac{2}{H^2} \left(\frac{dH}{d\tau} + ke^{-2\alpha} \right). \quad (32)$$

Эта простая “обратная” формула позволяет восстановить полное решение всех динамических уравнений и потенциала на интервале α или τ , в котором известно H .

Стоит подчеркнуть, что уравнения (25)–(27) обладают необычным свойством, а именно: зависят от логарифмической производной $l'(\psi) \equiv [\ln v(\psi)]'$, а не от самого потенциала. Это означает, что сравнительно небольшие деформации потенциала $v(\psi)$ могут привести к значительным изменениям χ -отображений. Например, если $v = \varepsilon + \psi^n$, $n > 1$, то для $\psi \rightarrow 0$ потенциал $l'(\psi)$ исчезает при $\varepsilon \neq 0$ и сингулярен при $\varepsilon = 0$. С другой стороны, потенциалы ψ^n дают очень похожие χ -отображения, так как $l' = n/\psi$. При стандартном подходе значение $n = 2$ является наиболее предпочтительным выбором, так как дает в S-калибровке линейное уравнение для ψ , которое, тем не менее, зависит также и от $\dot{\alpha} \equiv \xi$ и не является замкнутым уравнением на ψ , так как $\ddot{\alpha} \neq 0$. Заметим также, что инфляционные потенциалы Хиггса могут образовывать особенности при $\psi \rightarrow \psi_0 \neq 0$ типа $l' \sim 1/(\psi - \psi_0)$, с которыми, впрочем, можно работать тем же способом, что и с особенностями $\sim n/\psi$ при $\psi \rightarrow 0$.

Более общей проблемой является вопрос о космологиях с нетривиальными неинтегрируемыми потенциалами и $k \neq 0$. Очевидно, что в таком случае χ -уравнения (25) не проще, чем полная система (4)–(8). Тем не менее, опираясь на понимание структуры решений простых интегрируемых космологий, можно предложить другой подход к уравнениям с $k = 0$ для $\chi(\alpha)$, который позволяет найти простые аналитические решения для α -потенциала $\bar{v}(\alpha) \equiv v[\psi(\alpha)]$. Здесь сначала $\psi(\alpha)$ является неизвестной функцией, которую можно вычислить лишь после решения $\chi(\alpha)$ -уравнения, зависящего от $\bar{v}(\alpha)$, т. е. $\psi(\alpha) = \int d\alpha \chi(\alpha)$.

Действительно, предположим, что нам удалось вычислить решение $\chi(\alpha)$, соответствующее потенциалу $\bar{v}(\alpha)$, и мы хотим найти потенциал $v(\psi)$, используя определение $\bar{l}'(\alpha)$,

$$\bar{l}'(\alpha) = \frac{d \ln \bar{v}(\alpha)}{d\alpha} = \frac{d\psi}{d\alpha} \frac{d \ln v(\psi)}{d\psi} = \chi(\alpha) l'(\psi). \quad (33)$$

Зная $\chi(\alpha)$ и, соответственно, $\psi(\alpha)$, можно вычислить обратную функцию $\alpha(\psi)$. Заменяя в (33) α на $\alpha(\psi)$, находим, что $l'(\psi) = \bar{l}'[\alpha(\psi)]/\chi[\alpha(\psi)]$, и вычисляем $v(\psi)$ с точностью до умножения на константу. На первый взгляд, выражение $\bar{v}(\alpha) \equiv v[\psi(\alpha)]$ решает эту проблему, но остается еще одна константа, которая нумерует кривые $\psi(\alpha)$, соответствующие физически различным решениям. Это указывает на то, что решения, соответствующие одному и тому же ψ -потенциалу, могут отвечать однопараметрическому семейству α -потенциалов, и наоборот. Можно лучше понять эту связь при дальнейшем изучении интегрируемых примеров из п. 2.2 и приложения В, а также специальных решений, которые рассматриваются в приложении Б.

2.3.1. Интерлюдия: что такое решение. Перед тем как заняться поиском приближенных и точных решений динамических уравнений, необходимо сформулировать, что следует называть решением задачи. В смысле Лиувилля это означает, что полное решение $(\alpha(t), \psi(t))$ формально может быть выражено с помощью интегралов и производных потенциала с точностью до обращения функций (в лучшем случае можно найти в явном виде выражения для $(t(\alpha), t(\psi))$, для $\alpha(\psi)$ или для $\psi(\alpha)$). Если очень повезет, можно найти полный фазовый портрет решения, например зависимость $\dot{\alpha}$ от α (или $\dot{\psi}$ от ψ) с вычислимым асимптотическим поведением вблизи особенностей. Это возможно в нескольких ситуациях. Чаше всего можно найти дифференциальное уравнение для одной функции, например $\bar{\chi}(\psi)$, которое выражает ее первую производную $\bar{\chi}'(\psi)$ как рациональную функцию от $\bar{\chi}$ и ψ .

Важным с космологической точки зрения примером являются хорошо изученные уравнения типа Эмдена–Фаулера (см., например, [39]–[41], [29]). Чтобы показать их связь с космологическими моделями, рассмотрим уравнение (10) для $\psi(\tau)$, полученное в калибровке $c = 0$, которое обычно записывается как

$$\ddot{\psi} + 3\dot{\alpha}\dot{\psi} + \frac{v'(\psi)}{2} = 0, \quad \dot{\psi} = \eta, \quad \dot{\alpha} = \xi. \quad (34)$$

Если предположить, что $\dot{\alpha}$ – константа, $\dot{\alpha} = \xi_0$ и $v = a\psi^2 - b\psi^p$, где p – рациональное число, получаем уравнение Эмдена–Фаулера. В действительности в рамках космологии, описанной уравнениями (10)–(12), единственная возможность получить нетривиальные решения уравнения (34) с не зависящей от t функцией Хаббла $\dot{\alpha} \equiv \xi_0$ – выбрать $k < 0$ и $v = v_0 + a\psi^2$, при которых уравнение становится линейным¹³. Обобщенное уравнение Эмдена–Фаулера обычно записывается в форме нелинейного уравнения первого порядка, например уравнение $\eta'(\psi) + 3\xi_0 + v'(\psi)/2\eta = 0$, которое задает фазовый портрет уравнения (34). Оно не может быть аналитически решено даже для простых рациональных потенциалов. Тем не менее не вполне корректно называть его неинтегрируемым. Действительно, поведение решений для рациональных p было подробно изучено, в том числе была получена их точная асимптотика. Недавно в работах [42], [43] были получены некоторые важные результаты в области классической интегрируемости.

Этот пример показывает, почему общее уравнение, например $z'(x) = R(x, z)$ с простой рациональной функцией $R(x, z)$, можно понимать как по существу интегрируемое. Во-первых, топологический портрет решений может быть построен, если известны нули и полюсы функции R , снаружи которых решения локально аналитичны. Во-вторых, согласно теореме Харди [44], [45] возможное асимптотическое поведение действительных непрерывных решений – это либо $z \sim ax^b e^{P(x)}$,

¹³См. уравнения (103)–(105) в приложении В, где также рассмотрены примеры потенциалов, для которых система (10)–(12) с $\xi = C_0$ или $\dot{\eta} = C_0$ имеет решения.

либо $z \sim ax^b(\ln z)^{1/n}$, где n – целое число, $P(x)$ – многочлен. В-третьих, в простых случаях можно получить приближенное асимптотическое поведение решений в плоскости (x, z) , в том числе в особых точках.

К сожалению, в космологии нужна более подробная информация о решениях. Например, инфляционное поведение, по всей видимости, задается некоторыми тонкими свойствами потенциала, возможно, в комплексных плоскостях ψ или α . Более того, решение обсуждаемой здесь модели является только первым шагом при поиске наблюдаемых эффектов. Таким образом, исследования классических аналитически интегрируемых однородных космологических моделей со скаляроном весьма востребовано. Некоторые важные результаты, относящиеся к интегрируемости в статических и космологических моделях, приведены в работах [20]–[29].

3. ДИНАМИКА В ψ -ВЕРСИИ

В этом разделе изучаются уравнения ψ -версии, которые важны ввиду того, что потенциал $v(\psi)$ может зачастую определяться некоторой теоретико-полевой моделью, в которой он имеет определенный физический смысл: массовый член скалярона, потенциал Хиггса, один из многих потенциалов, полученных при редукциях супергравитации (см. работы [31]–[35] и ссылки в них). Более широкий круг потенциалов рассматривается в связи с инфляцией в цитированных нами работах. Весьма необычные механизмы происхождения скалярона и его потенциала, связанные с аффинным обобщением гравитационной теории Эйнштейна, рассмотрены в работах [36]–[38].

3.1. Основные космологические уравнения. Мы в основном изучаем свойства функций $\bar{\chi}(\psi)$, удовлетворяющих уравнению (27) при $k = 0$. Общие решения этого уравнения можно получить в явном виде лишь для частных потенциалов $v(\psi)$. Простые примеры с экспоненциальными или биэкспоненциальными потенциалами были приведены выше в рамках t -версии при использовании интегрируемой в явном виде модели (15)–(20) (см. также приложение Б). Также возможно их решение и в ψ -версии, но решение будет более трудоемким, поэтому приведено лишь решение $\bar{\chi}(\psi)$ для простого экспоненциального потенциала. Более сложная модель, допускающая решение в явном виде, рассмотрена в приложении В. Для более общих потенциалов $v(\psi)$ получены асимптотические приближения при $\psi \rightarrow \infty$ и $\psi \rightarrow 0$. Для малых ψ также построено разложение в степенной ряд.

Уравнения движения в ψ -версии следуют из (6), (7), а связь не меняется:

$$\frac{d\alpha}{d\psi} = \frac{\xi}{\eta}, \quad 2 \frac{d\eta}{d\psi} + 2(3+c)\xi + \frac{e^{-2c\alpha}}{\eta} v'(\psi) = 0, \quad (35)$$

$$6 \frac{d\xi}{d\psi} + (3+c)\eta + c \frac{e^{-2c\alpha}}{\eta} v(\psi) + (1+c)6k \frac{e^{-2(1+c)\alpha}}{\eta} = 0. \quad (36)$$

Калибровочно-независимые уравнения для $\bar{\xi} = \xi e^{c\alpha}$, $\bar{\eta} = \eta e^{c\alpha}$, вытекающие из (10), (11), имеют вид

$$2\bar{\eta}'(\psi) + 6\bar{\xi} + v'(\psi)\bar{\eta}^{-1} = 0, \quad 2\bar{\xi}'(\psi) + \bar{\eta} + 2ke^{-2\alpha}\bar{\eta}^{-1} = 0. \quad (37)$$

Калибровочно-независимое условие связи задано в (12).

При $k = 0$ связь и уравнения (37) дают замкнутое уравнение для $\bar{\xi}(\psi)$:

$$4(\bar{\xi}'(\psi))^2 - 6\bar{\xi}^2(\psi) + v(\psi) = 0. \quad (38)$$

Если знать $\bar{\xi}(\psi)$, можно найти полное решение для космологий при $k = 0$. Действительно, $\alpha'(\psi) = \bar{\chi}(\psi) \equiv \bar{\xi}/\bar{\eta} = -\bar{\xi}/2\bar{\xi}'$, $\dot{\psi} \equiv \bar{\eta}(\psi) = -2\bar{\xi}'(\psi)$, и, следовательно,

$$\alpha(\psi) = - \int \frac{\bar{\xi}(\psi) d\psi}{\sqrt{6\bar{\xi}^2 - v(\psi)}}, \quad \tau - \tau_0 = - \int \frac{d\psi}{\sqrt{6\bar{\xi}^2 - v(\psi)}}. \quad (39)$$

Уравнение (38) по сути эквивалентно уравнению (27) для $\bar{\chi}(\psi)$ и, на первый взгляд, не содержит новой информации о рассматриваемой задаче. Тем не менее оно заслуживает независимого изучения, так как вместо логарифмической производной содержит сам потенциал. Оно может быть легко решено разложением по степеням ψ . Для упрощения обозначений примем $x = \sqrt{3/2}\psi$, $w \equiv \sqrt{6}\bar{\xi}$, $v(\psi) \equiv \tilde{v}(x)$ и запишем уравнение и разложения для v и w :

$$(w'(x))^2 - w^2(x) + \tilde{v}(x) = 0, \quad \tilde{v}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n x^n, \quad w = \sum_{n=0}^{\infty} w_n x^n. \quad (40)$$

Рекуррентные соотношения для w_n нельзя решить в общем случае, и они весьма сложны даже в случае простых потенциалов, например для $\tilde{v} = v_0 + v_1 x + v_2 x^2$. Первые коэффициенты для таких потенциалов равны

$$w_1 = \sqrt{w_0^2 - v_0}, \quad w_2 = 4w_1^{-1}(2w_0 w_1 - v_1), \quad 6w_3 = w_1^{-1}(w_1^2 - v_2).$$

Видно, что такое разложение весьма неудобно, а также становится ясно, что уравнение (38) не подходит для использования на первом шаге в изучении даже простейших космологий. Перспективы такого изучения при больших x еще хуже. В п. 3.2 показано, что $\bar{\chi}$ -уравнения удобнее и получено неплохое приближение при $x \rightarrow \infty$. Помня об этом, попробуем связать между собой $w(x)$ и $z(x) \equiv \sqrt{6}\bar{\chi}(\psi)$:

$$z(x) = w(x)[w^2 - v(\psi)]^{-1/2}, \quad w^2(x) = \frac{\tilde{v}(x)z^2(x)}{z^2 - 1}. \quad (41)$$

Первое уравнение в (41) удобно на первом шаге итераций. В этой связи стоит упомянуть две самые очевидные идеи. Выбирая в качестве нулевого приближения физически обоснованное $w_0(x)$, найдем нулевое приближение для z : $z_0(x) = [1 - \tilde{v}(x)/w_0^2(x)]^{-1/2}$. Далее, применяя (30), получаем первое приближение $w_1(x) = \exp[-2 \int z_0^{-1}(x)]$ и, значит, z_1 , и т. д. Такая процедура отлично подходит для случая $v < 0$, так как z_n корректно определено и $|z_n| < 1$.

Также упомянем иную процедуру, которая выглядит более сложной, но применима для положительных потенциалов. Она заключается в том, чтобы выразить нулевое приближение $z(x)$ в терминах подходящего фазового портрета скалярона $\eta_0(\psi) \equiv \tilde{\eta}_0(x)$. Действительно, в таком случае связь определяет нулевое приближение $z_0(x)$ как $z_0^2(x) = 1 + \tilde{v}(x)\tilde{\eta}_0^{-2}(x)$, а итерации задаются индуктивными соотношениями

$$w_n(x) = \exp \left[-2 \int z_{n-1}^{-1}(x) \right], \quad \tilde{\eta}_n^2(x) = \frac{w_n^2(x)}{z_{n-1}^2(x)}$$

$$z_n^2(x) = 1 + \frac{\tilde{v}(x)}{\tilde{\eta}_n^2(x)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Преимущество таких итераций, применимых в инфляционных сценариях, состоит в том, что $\eta(\psi)$ описывает фазовый портрет инфлатона, важный при изучении инфляции.

3.2. Точные и асимптотические решения $\bar{\chi}(\psi)$ -уравнения. Вернемся к уравнению (27), которое напоминает обобщенное уравнение Эмдена–Фаулера для широкого класса потенциалов и проще, чем (38). Точные решения можно найти для некоторых потенциалов, а для достаточно общих потенциалов уравнение можно решить асимптотически при $\psi \rightarrow \infty$ и $\psi \rightarrow 0$. Перепишем его, определив “потенциал” $u(x)$ и используя вышеупомянутые обозначения для $\bar{\chi}$ и ψ :

$$\frac{dz}{dx} = (z^2 - 1)[zu(x) + 1], \quad u(x) \equiv \frac{d \ln \sqrt{v}}{dx}, \quad z = \sqrt{6}\bar{\chi}, \quad x = \sqrt{\frac{3}{2}}\psi. \quad (42)$$

3.2.1. *Решения с $v(\psi) = v_0 e^{2g\psi}$.* Предположив, что $u(x) = g \equiv \tilde{g}^{-1} \neq 0, \pm 1$, можно получить решение в форме

$$2(\tilde{g}^{-1} - \tilde{g})(x - x_0) = \ln(|z + 1|^{1+\tilde{g}}|z - 1|^{1-\tilde{g}}|z + \tilde{g}|^{-2}).$$

Легко найти приближения для $z(x)$ с экспоненциальной точностью при больших z или при z , приближающихся к ± 1 или $-\tilde{g}$. Их можно сравнить с соответствующим поведением $\bar{\chi}(\psi)$ или $\chi(\alpha)$, которое может быть получено для точных решений, заданных уравнениями (16), (17). Такое построение использует дополнительный интеграл $\eta + g\xi = C_0$, найденный в гамильтоновой калибровке $c = -3$. Оно задает инвариантное соотношение между $\bar{\eta} \equiv \eta e^{-3\alpha}$ и $\bar{\chi}(\psi)$. Тогда интеграл и связь (4),

$$1 + g\bar{\chi} = C_0 \bar{\eta} e^{-3\alpha}, \quad 6\bar{\chi}(\psi)^2 = 1 + \tilde{v}_0 C_0^{-2} (1 + g\bar{\chi})^2 e^{g\psi + 6\alpha}, \quad (43)$$

вместе с соотношением (17) задают полное калибровочно-независимое решение модели с экспоненциальным потенциалом. Можно также вычислить $\chi(\alpha)$, найти зависимость χ и $\bar{\chi}$ от t и, таким образом, на данном примере изучить связь между всеми тремя версиями. Такое сравнение версий также возможно для моделей с биэкспоненциальным потенциалом (18)–(20) и (94)–(100) (см. приложение Б). Для общих потенциалов мы построим ниже точные решения в α -версии, в то время как в ψ -версии имеем лишь асимптотические решения, к которым мы теперь обратимся.

3.2.2. *Важные преобразования $\bar{\chi}(\psi)$ и свойства $v'(\psi)/v(\psi)$.* Удобный подход к изучению асимптотики $z(x)$ заключается в введении преобразования

$$z(x) = -\frac{1 - \varepsilon e^{-2y}}{1 + \varepsilon e^{-2y}} = -\operatorname{th}^\varepsilon y(x), \quad \varepsilon = \operatorname{sgn}(1 - z^2) = \operatorname{sgn}(-v). \quad (44)$$

В результате уравнение (42) принимает более простой вид и позволяет осуществить качественный анализ решений и найти асимптотику:

$$\frac{dy}{dx} = 1 - u(x) \operatorname{th}^\varepsilon(y), \quad u(x) = \frac{\tilde{v}'(x)}{2\tilde{v}(x)} \equiv \tilde{l}'(x), \quad \tilde{v}(x) \equiv v(\psi). \quad (45)$$

Это уравнение не доставляет трудностей при исследовании, если логарифмическая производная потенциала обладает нужными свойствами. Космологи часто предполагают, что $\tilde{v}(x)$ – многочлен, не меняющий знак и обращающийся в нуль при $x = 0$, как $\tilde{v}(x) \sim x^2$. Поведение соответствующей функции $u(x)$ в бесконечности достаточно простое. Действительно, рассмотрим полиномиальный потенциал $\tilde{v}(x) = P_N(x)$. Тогда на бесконечности $u(x) = (N/2x)[1 + O(x^{-m})]$, где целое число m удовлетворяет условию $1 \leq m \leq N$. При $u(x) = e^{2gx} P_N(x) \bar{P}_N^{-1}(x)$ асимптотическое поведение имеет вид $u(x) = g + (N - \bar{N})(2x)^{-1} + O(x^{-2})$.

Для классификации поведения $u(x)$ при $x \rightarrow 0$ предположим, что $\tilde{v}(x)$ может быть представлен как сходящийся степенной ряд $P_\infty(x) = \sum v_k x^k$. При $v_0 \neq 0$ легко показать, что

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m x^m = \frac{1}{2v_0} (n+1) v_{n+1} x^n \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{u}_m x^m \right], \quad \bar{u}_1 = \frac{(n+2)v_{n+2}}{(n+1)v_{n+1}}, \quad (46)$$

для $n \geq 0$ и при $v_k = 0$ для $1 \leq k \leq n$. Если $v_0 = 0$, то для $n \geq 0$ и при $v_k = 0$ для $1 \leq k \leq n$ получим универсальное поведение при $x \rightarrow 0$:

$$u(x) = \frac{u_s}{x} + \sum_{m=0}^{\infty} u_m x^m = \frac{1}{2x} (n+1) \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{u}_m x^m \right], \quad \bar{u}_1 = \frac{v_{n+2}}{(n+1)v_{n+1}}. \quad (47)$$

Вторая формула наиболее общая. Она также применима для сингулярных потенциалов $\tilde{v}(x)$, имеющих члены $\sim x^{-n}$. Самое простое поведение $u(x)$ имеют чисто экспоненциальные и чисто степенные потенциалы e^{2gx} и x^n . Такие схемы асимптотического поведения потенциала $u(x)$ встречаются в космологических моделях, и в этой статье кратко рассматриваются основные свойства решений для больших и малых значений x , при этом имеются в виду инфляция и другие сценарии.

Некоторые потенциалы $u(x)$, используемые в инфляционных моделях (см. последние обзоры [14], [15]), на первый взгляд, имеют другой вид, однако на самом деле принадлежат вышеупомянутой классификации. Например, потенциал, полученный в работе [46] для исходной модели Старобинского, равен $v_0(1 - e^{-g\psi})^2$, что асимптотически дает $l'(\psi) \simeq -2v_0 g e^{-g\psi}$ и $l'(\psi) \simeq -2v_0/\psi$ для малых ψ ¹⁴. То же верно и для более общих потенциалов $v_0 \operatorname{th}^{2n}(g\psi)$, рассмотренных в работе [15]. Схожие потенциалы упоминаются в связи с моделями “сжатия–отскока” (см., например, работы [47], [48]). Типичный потенциал похож на следующее обобщение биекспонент:

$$v(\psi) = v_0(e^{g_0\psi} + v_1 e^{g_1\psi})^m, \quad (48)$$

где целое число m и действительное число v_0 положительны (инфляционная модель) или отрицательны (экспиротическая модель), $v_1 > 0$ при $m < 0$, а g_i может быть как положительным, так и отрицательным, в отличие от нашей модели (20).

3.2.3. Поведение $\bar{\chi}(\psi)$ при больших ψ . Сначала рассмотрим случай $y \rightarrow \pm\infty$, $z^2 \rightarrow 1$. Учитывая, что при приближении к бесконечности $\operatorname{th}^\varepsilon(y) \rightarrow \pm 1$, и предполагая, что $\tilde{v}(x) = \sum v_n x^n$ при больших x является многочленом степени N (или,

¹⁴В п. 4.3 показано, что нельзя рассматривать инфляцию в области $\psi \gg 1$, где существуют асимптотические разложения в ψ -версии. Причина кроется в том, что в инфляционной области величина $|z(x)|$ должна быть велика, тогда как в действительности она асимптотически близка к единице. В этом случае надо использовать α -версию.

в более общем случае, $e^{gx}\tilde{v}(x)$), легко получить главные члены асимптотики:

$$y = x \mp \ln \sqrt{|\tilde{v}(x)|} + c_0 + O(e^{-2|y|}), \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad (49)$$

где c_0 – константа интегрирования, а зависимость от ε скрыта в экспоненциальной поправке, которая будет вычислена ниже. Эта асимптотика демонстрирует, что для полиномиальных потенциалов $y \sim x$ и что можно получить главные члены асимптотических разложений y и z при $x \rightarrow +\infty$:

$$\sqrt{6} \frac{d\alpha}{d\psi} = \sqrt{6}\tilde{\chi}(\psi) \equiv z(x) = -\operatorname{th}^\varepsilon[x - \ln \sqrt{|\tilde{v}(x)|} + c_0] + O(e^{-4x}). \quad (50)$$

Используя полученное равенство и приближения более высокого порядка, находим соответствующие *асимптотические разложения портрета* $\alpha(\psi)$ и $\psi(\alpha)$. В простейшем приближении находим

$$\sqrt{6} \frac{d\alpha}{d\psi} = -[1 - 2e^{-2(x+c_0)}\tilde{v}(x) + \dots] \equiv -[1 - 2C_0v(\psi)e^{-\sqrt{6}\psi} + \dots], \quad (51)$$

где C_0 – произвольная константа, связанная с c_0 . С помощью интегрирования можно получить асимптотический портрет $\alpha(\psi)$. Выбрав часто используемый “космологический” потенциал $v(\psi) = v_0\psi^2$, находим

$$\sqrt{6}\alpha(\psi) = \psi_0 - \psi + \bar{C}_0[1 - (3\psi^2 + \sqrt{6}\psi + 1)e^{-\sqrt{6}\psi} + \dots],$$

где ψ_0 – константа интегрирования, откуда находим и асимптотику $\psi(\alpha)$.

Отметим, что такой подход к асимптотическому поведению на бесконечности в действительности использует итерации с нулевым приближением, заданным в (49). Чтобы найти следующее приближение, запишем точное уравнение

$$y(x) = y_0 + \int_x^\infty u(x)[1 - \operatorname{th}^\varepsilon y(x)] = y_0 + c_0 - 2 \int_x^\infty dx u(x)e^{-2y}(1 + \varepsilon e^{-2y})^{-1}, \quad (52)$$

где $u(x) = \tilde{l}'(x)$, а $y_0(x) \equiv x - \tilde{l}(x)$ – нулевое приближение. Заменив y на y_0 в правой части равенства, получаем первое приближение y_1 , в котором можно разложить подынтегральное выражение по степеням e^{-2y_0} и найти первую экспоненциально малую поправку y_0 , также не зависящую от ε :

$$y_1(x) = x - \tilde{l}(x) + c_0 - 2 \int_x^\infty \tilde{l}'(x)e^{2\tilde{l}(x)-2x} + O(e^{-4y_0}). \quad (53)$$

Учитывая приведенное выше определение $\tilde{l}(x) = \ln \sqrt{\tilde{v}(x)}$, находим, что в данном приближении

$$y_1 = x - \sqrt{\ln \tilde{v}} + c_0 - \int_x^\infty \frac{d\tilde{v}}{dx} e^{-2x} = \sqrt{\frac{3}{2}}\psi - \sqrt{\ln v} + c_0 - \int_\psi^\infty \frac{dv}{d\psi} e^{-\sqrt{6}\psi}, \quad (54)$$

где интеграл может быть выражен элементарными и специальными функциями для широкого класса потенциалов. Новое приближение $\sqrt{6}\psi = \operatorname{th}^\varepsilon y_1$ значительно сильнее, чем (50), и при необходимости может быть усилено.

3.2.4. *Поведение $\bar{\chi}(\psi)$ при малых ψ .* Поведение $z(x)$ и $y(x)$ вблизи $x = 0$ значительно сложнее, так как $u(x)$ при $x \rightarrow 0$ может обращаться в нуль, а также быть константой или бесконечностью. Более того, при $\varepsilon = -1$ решения $y(x)$ не должны стремиться к нулю при $x \rightarrow 0$, если $u(x)$ имеет особенность или равняется константе в $x = 0$. По этой причине рассмотрим сначала случай $\varepsilon = +1$. При регулярном положительном потенциале, исчезающем при $x \rightarrow 0$, легко получить универсальное приближение, которое можно использовать при последовательных итерациях¹⁵⁾:

$$y_0(x) = [\tilde{v}(x)]^{-1/2} \int_0^x [\tilde{v}(x)]^{1/2} + \dots, \quad y_0^2 \ll 1, \quad (55)$$

$$y'_0 = 1 - u(x)y_0.$$

Это решение не зависит от произвольных параметров. Оно может быть огибающей или сепаратрисой (если у него нет общих точек с другими решениями).

Вместо использования итераций можно напрямую построить разложение в степенной ряд. Тем не менее для качественного анализа решений для реалистических потенциалов линеаризация, использованная при получении (55), может оказаться более полезной. Важным примером является независимое от параметров решение для потенциалов (47). При $u_s \neq 0$ решение (45) с $\varepsilon = +1$ должно обращаться в нуль при $x \rightarrow 0$. Разложив в ряд $y(x) = \sum_{n=1} a_n x^n$, находим, что все a_n при $n > 1$, можно выразить через a_1 :

$$y(x) = \frac{x}{1+u_s} \left[1 - \frac{xu_0}{2+u_s} - \frac{x^2}{3+u_s} \left(u_1 - \frac{u_0^2}{2+u_s} - \frac{u_s}{3(1+u_s)^2} \right) + O(x^3) \right]. \quad (56)$$

В этой формуле приведены только три коэффициента a_i , причем третье слагаемое в a_3 является вкладом y^3 . Это разложение, включая более высокие порядки, применимо при любых параметрах. В частности, если все $u_n = 0$ и $u_s = \sigma$ вещественно, оно задает $y(x)$ для чисто степенного потенциала $v = x^{2\sigma}$. Первые два члена в (56) согласуются с соответствующим уравнением (55), и оба метода могут быть обобщены для получения однопараметрического семейства решений вблизи $x = 0$. Они основаны на разделении $y(x)$ на “большую” и “малую” части, $y \equiv y_0(x) + y_p(x)$, так что y_p может быть либо разложено в степенной ряд, как в (56), либо удовлетворять решаемому (например, линейному) дифференциальному уравнению, подобному тому, которое определяет y_0 в (55).

При получении решения (55) мы положили $y_0 = 0$ и затем нашли единственное малое решение y_1 для произвольного потенциала $u(x)$. Если потенциал u регулярен, $u_s = 0$, то можно построить общее решение $y(x) = y_0(x) + y_1(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$, выбирая $y_0 = a_0$ и применяя теорему о сложении к $\text{th}(a_0 + y_1)$. В таком случае либо для $y(x)$ используется линейное приближение y_1 , либо $y(x)$ напрямую разлагается в степенной ряд по x . Запишем сначала общее разложение для $\text{th}^\varepsilon(y_0 + y_1)$ по степеням y_1 , используя обозначения $t_0 \equiv \text{th } y_0$ и $t_1 \equiv \text{th } y_1$:

$$\text{th}^\varepsilon y(x) = \text{th}^\varepsilon(y_0 + y_1) = t_0^\varepsilon + (1 - t_0^{2\varepsilon})t_1(1 + t_1 t_0^\varepsilon)^{-1}. \quad (57)$$

Полагая $y_0 = a_0$ и используя приближение $t_1 = y_1 + O(y_1^3)$, можно легко найти линейное уравнение для y_1 , решения которого обобщают (55). Другая возможность –

¹⁵⁾ Это особое решение линеаризованного уравнения (45), общее решение описано ниже.

использовать (57) для вычисления разложения по степеням x . При произвольном a_0 и $a_1 = (1 - u_0 t_0)$ находим, что

$$y(x) = a_0 + a_1 x - \frac{1}{2}[u_1 t_0 + u_0 c_0^{-2} a_1] x^2 - \frac{1}{3}\{u_2 t_0 + c_0^{-2}[u_1 a_1 + u_0(a_2 - t_0 a_1^2)]\} x^3 - O(x^4), \quad (58)$$

где $t_0 \equiv \text{th } a_0$, $c_0 \equiv \text{ch } a_0$, а a_2 – коэффициент разложения при x^2 . Выражение для $z(x)$ можно получить с помощью той же формулы (57). Иногда, в зависимости от конкретных значений параметра, оно может быть использовано для продолжения $z(x)$ на асимптотические области. Оно также полезно при сравнении поведения $z(x)$ при малых x для различных потенциалов. Заметим, что это решение можно легко адаптировать для случая $\varepsilon = -1$.

Элементарная формула (57) очень полезна для получения различных приближений. Например, в качестве y_0 можно взять асимптотическое приближение (49) и найти y_1 , решая линейное уравнение, полученное из (45) путем линеаризации $\text{th}^\varepsilon(y_0 + y_1)$ по y_1 . Уравнение (57) позволяет вычислить $z(x) = -\text{th}^\varepsilon(y_0 + y_1)$. Это уравнение может найти интересные приложения к изучению поведения $z(x)$ при малых x , особенно для сингулярных потенциалов u и в случае $\varepsilon = -1$, когда поведение решений вблизи точки $x = 0$ устроено сложнее.

В действительности для устранения особенности u_s/x нужно взять $y_0 = a \ln x + a_0$, где $a = u_s$. Потом, предположив, что $y_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, $a_0 \equiv \ln \bar{a}$, т.е. $y_0 = \ln(\bar{a} x^a)$, применяем формулу (57) для решения уравнения (45) при обоих знаках ε , и немедленно получаем

$$\text{th}^\varepsilon(y_0 + y_1) = -(1 + \varepsilon \bar{a}^2 x^{2a})^{-2} [1 - \bar{a}^4 x^{4a} - 4\varepsilon \bar{a}^2 x^{2a}(y_1 + O(y_1^2))]. \quad (59)$$

Теперь можно либо разложить $y_1(x)$ в степенной ряд и решить несколько рекуррентных соотношений, либо решить линеаризованное уравнение. Мы лишь проиллюстрируем первый способ и выпишем несколько членов разложения для простейшего сингулярного потенциала $u(x) = u_s/x$:

$$y(x) = \ln(\bar{a} x^2) + x - \varepsilon \bar{a}^2 \left(1 + \frac{4x}{3}\right) x^2 + \dots \quad (60)$$

В начале текущего пункта было приведено лишь одно аналитически решаемое уравнение, на котором можно опробовать рассмотренные приближенные методы. Еще более простой пример, допускающий решение в явном виде в рамках ψ -версии, предложен в приложении В. На этих примерах можно более детально проверить точность полученного выше приближенного решения. В этом разделе кратко описаны результаты наших исследований общей ψ -версии. Это позволяет найти асимптотически точные портреты (α, ψ) в основных космологических моделях. Более точные результаты можно получить, если сосредоточиться на конкретной инфляционной или экпиротической модели, не противоречащей наблюдаемым данным. Решение этой задачи потребовало бы применения существенно иных средств и превышает пространственно-временные возможности автора. Однако в следующем разделе будут найдены точные решения, которые позволят построить очень простую картину инфляции. Более того, это поможет лучше понимать и эффективнее получать решения $y(x)$. Также отметим, что общие α -решения можно использовать при анализе некоторых экпиротических сценариев.

4. ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ В α -ВЕРСИИ

Здесь предложен необычный общий подход к построению космологических решений. Он подсказан простыми примерами соотношений между решениями в α -версии и ψ -версии (см. (13), (22), (103)–(108)). Тесная математическая связь между этими двумя версиями задана функциями $\bar{\chi}(\psi)$ и $\chi(\alpha)$, введенными и изученными выше. Далее выводится точное аналитическое решение уравнения (26) для $\chi^2(\alpha)$ при произвольном $\bar{l}(\alpha)$. Затем мы строим точные аналитические решения всех динамических уравнений и формулируем общий подход к явлению инфляции, который сравниваем со стандартным подходом.

4.1. Точные решения $\chi^2(\alpha)$ -уравнения при $k = 0$. Начнем с решения уравнения при $k = 0$, так как для решения общего уравнения

$$\frac{d\chi^2}{d\alpha} = (\chi^2 - 6)(\chi^2 + \bar{l}(\alpha)) + \frac{2k}{\xi^2(\alpha)} e^{-2(1+c)\alpha} (\chi^2 + 3\bar{l}(\alpha)) \quad (61)$$

необходимо знать $\xi^2(\alpha)$. При $k = 0$ общее решение очевидно таково:

$$\chi^2(\alpha) = 6 - e^{6\alpha} \bar{v}(\alpha) \left[C_0 + \int e^{6\alpha} \bar{v}(\alpha) \right]^{-1}, \quad k = 0, \quad (62)$$

где C_0 – произвольная константа. Это можно проверить, подставив $\chi^2(\alpha)$ в уравнение (26), принимая во внимание, что $\bar{l}(\alpha) \equiv \ln \bar{v}(\alpha)$. Основная проблема при решении – определить условия положительности правой части выражения (62). Обсудим это на частном примере экспоненциального α -потенциала, $\bar{v}(\alpha) = v_0 e^{g\alpha}$, когда правая часть

$$\chi^2(\alpha) = 6 - (g + 6)[1 + C_1 e^{-(6+g)\alpha}]^{-1}, \quad C_1 \equiv C_0(g + 6)v_0^{-1}, \quad (63)$$

положительна при всех $\alpha \in \mathbb{R}$, если и только если $C_1 > 0$, $g < 0$ ($g \neq -6$). В противном случае несложно отыскать решения, которые будут отрицательными на некоторых интервалах из $-\infty < \alpha < +\infty$.

Для упрощения обсуждения таких решений перепишем χ^2 в форме¹⁶⁾

$$\chi^2 = -g(\tau - C_2)(\tau + C_1)^{-1}, \quad C_2 = \frac{6C_1}{g}, \quad \bar{g} \equiv g + 6 > 0, \quad \tau \equiv e^{\bar{g}\alpha}. \quad (64)$$

Тогда становится ясно, что при $C_1 > 0$, $g > 0$ у числителя есть нуль в $\tau = C_2$ и он становится отрицательным при $\tau > C_2$, где $\alpha > \alpha_0 \equiv \bar{g}^{-1} \ln C_2$. Это означает, что α_0 является точкой ветвления в комплексной α -плоскости и что существует второй лист римановой поверхности аналитической функции $\chi(\alpha) \equiv \sqrt{\chi^2(\alpha)}$, имеющей “физический” разрез $-\infty < \alpha \leq \alpha_0$ при $\chi(\alpha_0) = 0$; на верхнем крае разреза функция $\chi(\alpha)$ положительна, а на нижнем крае отрицательна. Для того чтобы найти $\psi(\alpha)$, необходимо проинтегрировать $\chi(\alpha)$ вдоль разреза; α_0 является экстремумом $\psi(\alpha)$.

Особенности $\chi(\alpha)$, соответствующие нулям знаменателя, сильнее, так как в них $\chi^2(\alpha) \rightarrow \infty$, но они также интегрируемы. Самый простой подобный случай – это

¹⁶⁾Основные свойства χ^2 определяются знаками g и C_1 , с учетом ограничения (28) на знак функции $\chi^2 - 6$.

$C_1 < 0$, $g > 0$, когда функция $\chi^2 < 0$ при $\tau > |C_1|$ и бесконечна в точке $\tau = |C_1| \equiv e^{\bar{g}\alpha_1}$, где $\chi^2 \sim \bar{g}(\alpha_1 - \alpha)^{-1}$. Такое же поведение имеет частное точное решение, которое можно получить из выражения (63) в пределе $\bar{g} \equiv (6 + g) \rightarrow 0$: выбирая $|C_1| = 1 + \bar{g}\alpha_0$, находим, что предел равен $\chi^2(\alpha) = 6 + (\alpha_0 - \alpha)^{-1}$ (это решение также можно найти из (26) для $k = 0$, $\bar{l}'(\alpha) = -6$).

Конфигурация с бóльшим числом особенностей возникает в случае $C_1 < 0$, $g < 0$. Тогда “положительный носитель” решения (64) (где $\chi^2 > 0$) состоит из двух интервалов: $0 < \tau < \min(|C_1|, |C_2|)$; $\tau > \max(|C_1|, |C_2|)$. Нетрудно понять, что существует принципиальная разница между решениями с разным количеством точек ветвления, которая также определяется их характером (сингулярный или регулярный). Мы показали, что существуют четыре типа решений: R (точки ветвления отсутствуют), 1R (регулярная точка ветвления), 1S (сингулярная точка ветвления), 2SR (сингулярная и регулярная точки ветвления). Носители решений 1S и 1R не содержат достаточно больших значений α , и, следовательно, для них метрика имеет конечную верхнюю грань. Их можно называть *гравитационно регулярными решениями*. Все прочие решения не обладают этим свойством.

Теперь мы можем вычислить $\psi(\alpha)$ интегрированием $\psi'(\alpha) \equiv \chi(\alpha)$ вдоль “физических” траекторий на комплексной α -плоскости и, следовательно, найти портреты космологий с простым экспоненциальным потенциалом при $k = 0$. Схожие соображения можно использовать при анализе решений для прочих потенциалов, например для $\bar{v}(\alpha) = e^{g\alpha} P_n(\alpha)$. Такой класс достаточно широк, чтобы описывать различные сценарии, в том числе инфляцию, “сжатие–отскок” и пр.

4.2. Точные решения $\eta^2(\alpha)$, $\xi^2(\alpha)$, $\chi^2(\alpha)$ для произвольных $\bar{v}(\alpha)$, k . Далее показано, что уравнения (6)–(8) можно преобразовать в линейные уравнения для функций $\eta^2(\alpha)$, $\xi^2(\alpha)$, которые интегрируются при произвольно заданном потенциале $\bar{v}(\alpha)$ и произвольном параметре кривизны k . Удобнее рассматривать уравнения (6) и (8), которые преобразуются в α -версию с использованием (24). Таким образом, получаем два линейных дифференциальных уравнения, которые имеют решения для любого заданного $\bar{v}(\alpha)$:

$$\frac{d\eta^2}{d\alpha} + 2(3 + c)\eta^2 + e^{-2c\alpha}\bar{v}'(\alpha) = 0, \quad \frac{d\xi^2}{d\alpha} + 2c\xi^2 + \eta^2 + 2ke^{-2(1+c)\alpha} = 0. \quad (65)$$

Теперь, введя новые положительные функции $y(\alpha) = e^{2c\alpha}\eta^2$ и $x(\alpha) = e^{2c\alpha}\xi^2$, находим для $y(\alpha)$ и $x(\alpha)$ простые калибровочно-независимые уравнения и связь:

$$y'(\alpha) + 6y(\alpha) + \bar{v}'(\alpha) = 0, \quad x'(\alpha) + y(\alpha) + 2ke^{-2\alpha} = 0, \quad (66)$$

$$y(\alpha) - 6x(\alpha) + \bar{v}(\alpha) + 6ke^{-2\alpha} = 0. \quad (67)$$

Вспоминая об уравнении (62), запишем решение первого уравнения (66) в форме

$$y(\alpha) = 6e^{-6\alpha}I(\alpha) - \bar{v}(\alpha), \quad I(\alpha) \equiv \left[C_0 + \int_{\alpha_-}^{\alpha} e^{6\alpha}\bar{v}(\alpha) \right], \quad (68)$$

где C_0 и $\alpha_- \geq -\infty$ – действительные числа. Теперь находим $x(\alpha)$ из условия (67):

$$x(\alpha) = e^{-6\alpha}I(\alpha) + ke^{-2\alpha}. \quad (69)$$

Это можно найти и из (66), но тогда дополнительная произвольная константа фиксируется условием (67), так что интегралы $I(\alpha)$ в (68) и (69) совпадают. Теперь можно найти (калибровочно зависимый) фазовый портрет космологии в α -версии,

$$\xi = \dot{\alpha} = e^{-c\alpha} \sqrt{x(\alpha)} = e^{-(1+c)\alpha} [e^{-4\alpha} I(\alpha) + k]^{1/2}, \quad (70)$$

что позволяет вычислить $t(\alpha)$ с помощью единственного интегрирования вдоль “физических” разрезов. В качестве упражнения можно попытаться получить в явном виде выражения для $\alpha(t)$ для потенциалов $v = e^{g\alpha} P_n(\alpha)$.

Полученные решения также дают точное выражение для $\chi^2(\alpha)$ в случае $k \neq 0$:

$$\chi^2(\alpha) \equiv \frac{y(\alpha)}{x(\alpha)} = [6e^{-6\alpha} I(\alpha) - \bar{v}(\alpha)] [e^{-6\alpha} I(\alpha) + ke^{-2\alpha}]^{-1}, \quad (71)$$

которое, конечно, совпадает с (62) при $k = 0$. Несложно проверить, что (71) удовлетворяет полному дифференциальному уравнению (26), если принять во внимание (66), (67). Более того, если подставить в уравнение (26) выражение для $\xi^2 = e^{-2c\alpha} x(\alpha)$ из (69), получим корректно определенное уравнение для $\chi^2(\alpha)$, но значительно проще использовать точные решения. В любом случае подход к анализу особенностей и носителя самого общего решения по сути тот же, что и выше, – сначала идет поиск нулей числителя и знаменателя, а затем поиск разрезов, по краям которых необходимо интегрировать $\chi(\alpha) \equiv \psi'(\alpha)$, чтобы найти $\psi(\alpha)$. По сути, результат позволяет установить связь между двумя версиями. На практике это не такая простая задача, которая требует тщательного исследования.

В настоящий момент наилучшей стратегией представляется следующая: сравнить физические результаты для интересных классов потенциалов в новой версии с теми, которые получены для известных потенциалов в стандартной ψ -версии. Более фундаментальным подходом могла бы стать попытка найти напрямую в новой версии потенциалы, описывающие физически интересные эффекты, например инфляцию. Как было показано выше, такой подход можно значительно усилить использованием дополнительных структур, например различных портретов, подсказываемых как теоретической интуицией, так и анализом данных наблюдений. Использование полной математической структуры, описанной выше, всех калибровок, версий и портретов – многообещающий общий подход к изотропной космологии, который будет полезен и при исследовании эффектов анизотропии и кривизны.

4.2.1. О замене потенциалов кинетическими энергиями. Обычно предполагается, что динамические функции ξ , η могут быть выражены в терминах скалярного потенциала $v(\psi)$, который неизвестен и обычно выбран так, чтобы иметь ряд естественных свойств, обеспечивающих инфляцию или другие космологические сценарии. Некоторые полагают, что потенциал может быть так или иначе получен в будущей теории суперструн или же в современной теории супергравитации. Наша α -версия подсказывает иной подход к поиску потенциала – сначала “угадать” кинетическую “энергию” скалярона $y(\alpha)$, а затем вычислить $\bar{v}(\alpha)$ и $\xi(\alpha)$ как простые функционалы от $y(\alpha)$. Для получения точного выражения просто проинтегрируем соотношения (66) (забывая, что это дифференциальные уравнения для $x(\alpha)$, $y(\alpha)$) и найдем

$$\bar{v}(\alpha) = -y(\alpha) + 6J(\alpha), \quad x(\alpha) = ke^{-2\alpha} + J(\alpha), \quad J(\alpha) \equiv C_1 + \int_{\alpha}^{\alpha_+} y(\alpha). \quad (72)$$

Здесь $J(\alpha)$ определено так же, как $I(\alpha)$, введенное в (68), и с той же целью – упростить проверку условий положительности и вычисление асимптотик $y(\alpha)$, $x(\alpha)$, $\bar{v}(\alpha)$. Отметим, что выражение для фундаментальной функции $\chi(\alpha)$ в терминах $y(\alpha)$ выглядит просто и имеет ясный физический смысл:

$$\chi^2(\alpha) = y[ke^{-2\alpha} + J(\alpha)]^{-1} = -L'(\alpha)[ke^{-L(\alpha)-2\alpha} + 1]^{-1}, \quad L(\alpha) \equiv \ln J(\alpha). \quad (73)$$

Оно показывает глубокую связь между кинетической энергией скалярона и метрикой и позволяет восстановить все космологические портреты. Например, портрет $\dot{\alpha}(\alpha)$ в явном виде задан в (72), а портрет $\psi(\alpha) = \int \chi(\alpha)$ можно получить из (73) (для произвольного k). Если есть возможность вычислить обратную функцию $\alpha(\psi)$, то также можно найти $\dot{\psi}(\psi)$ и $v(\psi) \equiv \bar{v}[\alpha(\psi)]$.

Последнее замечание касается связи данного построения и инфляционных моделей. Создатели самого понятия инфляции с течением времени поняли, что непохожие потенциалы могут давать сходные инфляционные сценарии. В ранних моделях Линде основная задача была в том, чтобы найти потенциалы, задающие инфляционные “движения” инфлатона. Основной составляющей теории были особые движения, а потенциал был инструментом для описания модели на языке стандартной теории поля. Может быть, выражение потенциала в терминах кинетической энергии скалярона, зависящей от метрики, способно дать иную математически корректную реализацию этих идей.

Другая возможность заключается в том, чтобы, не считая космологический потенциал первичным понятием, принять за основу динамические характеристики Вселенной – параметр Хаббла $H(\alpha) \equiv x(\alpha)$ и функцию $\chi(\alpha)$, определенную уравнением (32). Это потребует некоторых усилий и времени, но может дать новое понимание структуры космологических моделей. Такой подход можно было бы назвать “конструктивной” космологией, имея в виду, что математическая структура классической изотропной космологии – это инструмент, позволяющий преобразовывать портреты или потенциалы в определенные космологические сценарии, которые можно сравнивать с реальными данными наблюдений. На первый взгляд, эта идея может показаться непривлекательной, но попытки восстановления потенциала $v(\psi)$ по наблюдаемым данным уже предпринимались. В частности, в процессе написания этой статьи я узнал о работе [49], где $v(\psi)$ приближенно определяется по наблюдаемым данным с помощью уравнения для функции Хаббла в α -версии.

4.3. Свежий взгляд на инфляцию. Инфляционная теория возмущений.

Стандартный подход к инфляционным моделям не противоречит последним наблюдаемым данным даже при использовании различных потенциалов и рассмотрении неминимального взаимодействия инфлатона с гравитацией. Тем не менее теория неполна, так как она описывает короткий период классического расширения и возникновения квантовых флуктуаций на классическом фоне. В настоящее время существует несколько альтернативных моделей, качественно объясняющих основные свойства очень ранней Вселенной и дающих предсказания, отличающиеся от предсказаний инфляционных моделей¹⁷⁾. Наша цель в этом разделе состоит, в частности, в том, чтобы применить наш анализ общих свойств космологических решений

¹⁷⁾ Например, в работе [47] обсуждаются некоторые квантовые эффекты в несколько модернизированной версии модели “сжатия–отскока” Вселенной. Обзор различных альтернативных моделей на классическом уровне можно найти в работе [48].

и, в особенности, точных решений в α -версии к выявлению классических начальных (граничных) условий, согласующихся с условиями возникновения инфляции, рассматриваемыми ниже. Решение этой задачи с помощью функции $\chi(\alpha)$ оказывается удивительно простым, а саму функцию в инфляционной области (где $\chi(\alpha) < 1$ и не зависит от произвольных параметров) неожиданно удается выразить через потенциал $v(\psi)$ с помощью простой теории возмущений.

Начнем со стандартных условий для инфляции и измеримых параметров. На нашем языке очевидным *необходимым условием инфляции* является условие $\bar{\chi}(\psi) \gg 1$ на малом интервале ψ , или, эквивалентно, $2\hat{\epsilon} \equiv \chi^2(\alpha) \ll 1$ на соответствующем большом интервале ($\alpha_i < \alpha < \alpha_f$), где $\alpha_f - \alpha_i = N_e \sim 50$ – так называемое количество e -фолдингов (см., например, [3], [15]). Используя уравнения (11) и (66) при $k = 0$ получаем точные соотношения¹⁸⁾

$$-\frac{2\dot{\xi}}{\xi^2} \equiv -\frac{x'(\alpha)}{x(\alpha)} = \frac{y(\alpha)}{x(\alpha)} \equiv \chi^2(\alpha) \equiv 2\hat{\epsilon} \equiv \frac{1}{\bar{\chi}^2(\psi)}. \quad (74)$$

Далее мы считаем $\hat{\epsilon}$ функцией одной из трех переменных (τ, α, ψ) , которая должна быть мала, $\hat{\epsilon} \ll 1$, и близка к постоянной на соответствующих инфляционных интервалах (τ_i, τ_f) , (α_i, α_f) , (ψ_i, ψ_f) . При соблюдении данных условий эта функция называется первым инфляционным параметром и обычно обозначается простым ϵ . Применяя точное ограничение (67), получаем

$$\hat{r} \equiv \frac{\dot{\psi}^2}{v(\psi)} \equiv \frac{y(\alpha)}{\bar{v}(\alpha)} = \frac{\hat{\epsilon}}{3} \left(1 - \frac{\hat{\epsilon}}{3}\right)^{-1} \simeq \frac{\hat{\epsilon}}{3}, \quad (75)$$

где последнее приближение (важное в стандартных рассматриваниях) выполнено, если $\hat{\epsilon} \ll 3$ ($\chi^2 \ll 6$)¹⁹⁾. Приближение может быть получено лишь для положительных потенциалов, и положительность необходима, как минимум, в инфляционной области. При $\chi^2 \geq 1$ инфляция останавливается, а при $\chi^2 \rightarrow 6$ кинетическая энергия скалярона превышает потенциальную. При $v > 0$ все решения должны удовлетворять условию $\chi^2 \equiv 1/\bar{\chi}^2 < 6$; они могут быть лишь асимптотически близки к предельной кривой $\chi = \pm\sqrt{6}$ ($\bar{\chi} = \pm 1/\sqrt{6}$). Вблизи этих аттракторов параметр $\hat{r}$ становится бесконечным и потенциальной энергией скалярона можно пренебречь. Как показано в разделе 3, такое поведение $\bar{\chi}$ возможно для больших и малых ψ . Напротив, условие $|\bar{\chi}| \gg 1$ в общем случае сложнее удовлетворить в ψ -версии. Оно требует $\varepsilon = -1$ в (44) и возможно при достаточно малых ψ , так как член $\sqrt{6}\bar{\chi}(\psi) \equiv z(x) = \text{cth } y(x)$ достаточно велик лишь при малых y . Здесь мы не занимаемся изучением этой области в рамках ψ -версии, которая зависит от неизвестных конкретных потенциалов и исходных условий, а описываем более простой и точный подход к инфляции.

Начав с не зависящего от модели определения инфляции, заданного условиями (74), (75), покажем, что α -версия дает детальное представление инфляционной

¹⁸⁾Стандартные инфляционные модели предполагают, что $k = 0$, и в настоящем разделе это условие также выполняется.

¹⁹⁾Ввиду наличия множителей $(1/6)^n$, которые особенно проявляются ниже в уравнении (77), инфляционные условия могут быть несколько ослаблены, например $\hat{\epsilon} \leq 1/2$. Точные ограничения зависят от потенциала.

космологии. При стандартном подходе к инфляции космологи используют дополнительный параметр $\hat{\eta}$, определенный как

$$-2\frac{\dot{\eta}}{\eta\xi} \equiv -\frac{y'(\alpha)}{y(\alpha)} \equiv 2(\hat{\eta} - \hat{\epsilon}), \quad \hat{\eta} = \chi^2(\alpha) - \frac{\chi'(\alpha)}{\chi(\alpha)} \equiv \frac{1 + \bar{\chi}'(\psi)}{\bar{\chi}^2(\psi)}, \quad (76)$$

где вторая формула дает точное выражение для $\hat{\eta}$ в терминах χ или $\bar{\chi}$. Инфляционные параметры можно выразить через $\bar{v}(\alpha)$ с использованием формул (66)–(69), и их можно разложить по производным $\bar{v}^{(n)}(\alpha)$, применяя простую формулу:

$$\begin{aligned} 6x(\alpha) &\equiv 6e^{-6\alpha}I(\alpha) = \\ &= C_0e^{-6\alpha} + \sum_{n=0}^N (-6)^{-n}\bar{v}^{(n)}(\alpha) + (-6)^{-(N+1)}e^{-6\alpha} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{6\alpha}\bar{v}^{(n+1)}(\alpha), \end{aligned} \quad (77)$$

где C_0 – произвольная константа интегрирования, определяющая единственное решение $[x(\alpha; C_0), y(\alpha; C_0)]$, где $y(\alpha)$ задано посредством (66). Нижний предел интегрирования выбран в предположении, что эффективный “потенциал” $e^{-6\alpha}\bar{v}(\alpha)$ обращается в нуль в “квантовом” пределе $\alpha \rightarrow -\infty$. Очень важное свойство этого решения для хаотической инфляции заключается в том, что отношение первого члена к оставшемуся разложению экспоненциально мало, если потенциал растет медленнее, чем $e^{(6-\epsilon)\alpha}$, при $\alpha \rightarrow +\infty$. Это означает, что в “классической” области $\alpha > \alpha_i \gg 1$ можно приближенно использовать решение с $C_0 = 0$. Пренебрегая этим членом в приближенных решениях $[x(\alpha), y(\alpha)]$, находим

$$\hat{r}(\alpha) \equiv \frac{y(\alpha)}{\bar{v}(\alpha)} = 6\frac{x(\alpha)}{\bar{v}(\alpha)} - 1 = \frac{\chi^2}{6} \left(1 - \frac{\chi^2}{6}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\bar{v}^{(n)}(\alpha)}{6^n \bar{v}(\alpha)}. \quad (78)$$

Свойства этого ряда определяются потенциалом $\bar{v}(\alpha)$. В принципе, их можно найти с помощью точного аналитического решения (68), (71)²⁰⁾. Предположим, что этот ряд определяет регулярную функцию χ^2 , которая мала в некотором интервале $1 < \alpha_i < \alpha < \alpha_f$, и что нам достаточно найти для вычисления поправок к инфляционным параметрам лишь несколько первых членов. В этом смысле разложение (78) можно считать несколько необычным рядом теории возмущений. Чтобы связать его с обычными инфляционными понятиями, мы просто переведем соотношение (78) на язык ψ -версии с помощью следующей пертурбативной конструкции для χ .

Первое приближение определяется первым членом в сумме (78):

$$\chi^2 \cong -\frac{\bar{v}'(\alpha)}{\bar{v}(\alpha)} \equiv -\bar{l}'(\alpha) \equiv -\chi l'(\psi) \equiv -\chi \frac{v'(\psi)}{v(\psi)}, \quad \chi \cong \chi_1 = -l'(\psi), \quad \hat{\eta}_1 \cong \frac{v''(\psi)}{v(\psi)}, \quad (79)$$

где $\hat{\eta}_1$ находим из (76) заменой χ на χ_1 и, в том же приближении, $2\hat{\epsilon} \cong \chi_1^2 = (l')^2$. Отброшенные члены с $n \geq 2$ можно вычислять рекуррентно – в результате получим их выражения в виде сумм мономов $\prod_{i=1}^n (\bar{l}^{(i)})^{k_i}$, где $\sum k_i = n$. Для доказательства достаточно воспользоваться соотношениями

$$\frac{\bar{v}^{(n+1)}}{\bar{v}(\alpha)} = \frac{d}{d\alpha} \frac{\bar{v}^n(\alpha)}{\bar{v}(\alpha)} + \bar{l}'(\alpha) \frac{\bar{v}^n(\alpha)}{\bar{v}(\alpha)}, \quad \frac{\bar{v}'(\alpha)}{\bar{v}(\alpha)} = \bar{l}'(\alpha), \quad \frac{\bar{v}''}{\bar{v}} = \bar{l}'' + (\bar{l}')^2, \quad \dots \quad (80)$$

²⁰⁾ Чтобы не думать о сходимости, допустим, что мы имеем дело с полиномиальными потенциалами $\bar{v}(\alpha)$ (не имеющими нулей на рассматриваемом интервале), так что число членов ряда конечно.

и аналогичными выражениями для $v^{(n)}(\psi)/v(\psi)$ в терминах $l^{(n)}(\psi) \equiv l^{(n)}$. Подчеркнем, что такие “логарифмические” представления для χ^2 и χ (инвариантные относительно v -скейлинга, т.е. $v \mapsto c_0 v$) строго выполнены лишь для решений с $C_0 = 0$ ²¹⁾ (см. (77)). Мы получаем строгий v -скейлинг в том и только в том случае, когда $C_0 = k = 0$. Это самое общее определение инфляционной χ -функции.

Найдем теперь несколько первых членов разложения χ , дающих поправки к стандартным инфляционным параметрам. Определяя $d_\alpha \equiv d/d\alpha$, $d_\psi \equiv d/d\psi$ и вспоминая, что $d_\alpha \equiv \chi d_\psi$, выразим операторы d_α^n в виде полиномов по d_ψ и χ :

$$d_\alpha^2 = \chi[\chi d_\psi^2 + (d_\psi \chi) d_\psi], \quad d_\alpha^3 = \chi[\chi^2 d_\psi^3 + 3\chi(d_\psi \chi) d_\psi^2 + d_\psi(\chi d_\psi \chi) d_\psi], \quad \dots, \quad (81)$$

$$d_\alpha^n = \chi D_n,$$

где оператор χD_n вычисляется рекуррентно. Этот оператор однороден и имеет один и тот же порядок по обоим переменным d_ψ и χ . Отсюда следует, что n -й член пертурбативного разложения (78) имеет порядок $2n$ по переменной d_ψ , которая сама имеет первый порядок²²⁾ (см. (79)). Подставляя эти операторы в выражение для χ^2 , определяемое уравнением (78), после деления на χ находим точное соотношение

$$\chi = -l'(\psi) \left(1 - \frac{\chi^2}{6} \right) \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{D_n * v(\psi)}{(-6)^{n-1} v l'} \right], \quad \frac{D_2 * v}{v l'(\psi)} = \frac{\chi}{l'} [l'' + (l')^2] + (d_\psi \chi). \quad (82)$$

Здесь $D_n * v(\psi)$ обозначает действие дифференциального оператора D_n на $v(\psi)$, что проиллюстрировано на примере оператора D_2 (заметим, что $\chi/l' = -1 + O(\chi_1^2)$, откуда видно, что малые множители в знаменателях сокращаются). Совсем легко вычислить второе приближение χ_2 , для чего достаточно заменить в (82) χ на χ_1 и отбросить члены порядка $n \geq 3$:

$$\chi_2 = -l'(\psi) \left[1 - \frac{1}{6} (l')^2 \right] \left\{ 1 + \frac{1}{6} [2l'' + (l')^2] \right\} = -l'(\psi) \left[1 + \frac{1}{3} l'' + O(\chi_1^4) \right]. \quad (83)$$

Для вычисления членов третьего порядка подставим в (82) χ_2 вместо χ и сохраним в сумме все члены до третьего порядка включительно. Мы оставляем это простое упражнение заинтересованному читателю.

Проиллюстрируем эти результаты простыми примерами поправок к инфляционным параметрам, получаемых из приближения (83) для χ и $\bar{\chi} = 1/\chi$. Поправка к $\hat{\epsilon}_1$ есть $\hat{\epsilon}_2 = \hat{\epsilon}_1 [1 + 2l''/3]$; для простейших потенциалов $v = v_0 \psi^{2N}$ в этом приближении $\hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}_1 [1 - 2\hat{\epsilon}_1/3N + O(\hat{\epsilon}_1^2)]$, где $\hat{\epsilon}_1 = \chi_1^2/2 = 2N^2/\psi^2$ и $|2\hat{\epsilon}_1/3N|$ предполагаются достаточно малыми. Нетрудно найти в этом приближении $\hat{\eta}_2$: из (76), (79) и (80) следует, что $\hat{\eta}_1 = l'' + (l')^2$, и, таким образом, получаем из (83)

$$\hat{\eta}_2 = \chi_2^2 - d_\psi \chi_2 = \hat{\eta}_1 + \frac{1}{3} [2l^{(2)} \hat{\eta}_1 + l^{(1)} l^{(3)} - (l^{(2)})^2]. \quad (84)$$

Для простого потенциала $v = v_0 \psi^{2N}$ находим

$$\hat{\eta}_1 = 2N(2N-1)\psi^{-2}, \quad \hat{\eta}_2 = \hat{\eta}_1 \left\{ 1 - \hat{\eta}_1 \frac{4N-3}{3(2N-1)^2} \right\}$$

²¹⁾Общее решение содержит не удовлетворяющие условию скейлинга нелогарифмические члены $C_0 e^{-6\alpha/\bar{v}(\alpha)}$ (см. (78)).

²²⁾Космологические параметры $\hat{\epsilon}$ и $\hat{\eta}$ имеют второй порядок по d_ψ , тогда как естественным фундаментальным параметром нашей теории возмущений должна быть функция $\chi_1 \equiv -l'$.

и $\hat{\eta}_2 = \hat{\eta}_1(1 - \hat{\eta}_1/3)$ при $N = 1$. В приближении $\chi \cong \chi_2$ число e -фолдингов равно

$$N_e = \int_{\psi_i}^{\psi_f} d\psi \bar{\chi}(\psi) = \int_{\psi_f}^{\psi_i} \frac{d\psi}{l'(\psi)} \left[1 - \frac{1}{3}l'' + O(\chi^4) \right] = N_e^{(0)} + \frac{1}{3} \ln[l'(\psi)]_i^f, \quad (85)$$

где первый член есть стандартный результат, а для $v = v_0\psi^{2N}$ второе приближение дает $N_e = [\psi^2/4N + \ln \psi/3]_i^f$.

Наконец, с помощью (82) можно аппроксимировать уравнение (42) в инфляционной области $z^2 \gg 1$,

$$\frac{dz}{dx} = (z^2 - 1)[zu(x) + 1] = (z^2 - 1)[u'(x) + \dots]$$

(см. (42)). Вспоминая (44), (45) и полагая $z(x) = -\text{cth } y$ (так как $\varepsilon = -1$), находим

$$\frac{dy}{dx} = 1 - u(x) \text{cth } y = u'(x) + \dots, \quad z \cong \text{cth } \frac{\chi_1}{2} = -\text{cth } u(x),$$

где константа интегрирования выбрана так, чтобы $z \rightarrow \infty$ при $u \rightarrow 0$. Разумеется, это не дает нам ничего нового: возвращаясь к переменным χ и ψ , мы просто воспроизводим наше приближение первого порядка $\chi \cong -\sqrt{6} \text{th}(l'/\sqrt{6}) \cong -l'(\psi)$. Однако это дает нам некоторое указание на возможность вычисления ряда теории возмущений для инфляционного решения непосредственно в ψ -версии (например, для специальных решений типа (55) или (56)). Простой и поучительный пример – асимптотическое разложение функции $y(x)$ по степеням $1/x \sim u(x) \sim l'$ для потенциала $v = v_0x^{2N}$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_{2n+1} x^{-(2n+1)}, \quad y_1 = N, \quad y_3 = \frac{1}{3}N^3 - N^2, \quad \dots, \quad (86)$$

которое действительно напоминает разложение инфляционной теории возмущений. Вероятно, такой же подход можно применить к потенциалам, для которых $u(x)$ можно разложить в ряд по степеням $1/x$. Подобные асимптотические разложения можно было бы использовать в качестве приближений для $y(x)$ вблизи особенностей $u(x) \sim 1/(x - x_i)$, порождаемых нулями потенциалов хиггсовского типа. Для инфляционных потенциалов, зависящих от степеней e^{-gx} , для которых $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n e^{-ngx}$, можно аналогично использовать разложения $y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n e^{-ngx}$.

Отметим, что члены первого порядка наших приближений к точному инфляционному α -решению воспроизводят существенно приближенные формулы, используемые в инфляционных моделях, тогда как найденные нами члены высших порядков дают к ним существенные поправки. Также подчеркнем, что все три инфляционных параметра можно выразить через единственную фундаментальную функцию $\chi^2 = 2\hat{\varepsilon}$, описывающую все свойства модели. Второй параметр $\hat{\eta}$ может быть выражен через χ^2 с помощью (76), и он должен быть мал, если малы χ и $d_\psi \chi$. Параметр N_e также зависит от χ и его можно представить в виде интеграла от функции $\bar{\chi} \equiv \chi^{-1}$ по инфляционному ψ -интервалу. Хотя в реальных наблюдениях измеряют не функцию χ , а некоторые средние значения $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\eta}$, эти измерения дают достаточно важную информацию о физике космологических моделей и в определенной степени

позволяют судить о существовании инфляции в ранней Вселенной и о возможности применения описанной простой модели.

Наконец, заметим, что α -версия предоставляет неожиданно простой и “гладкий” переход от квантовой области $\alpha < 0$ к классической, где $\alpha \gg 1$. Такая картина выглядит удивительно простой и логичной, несмотря на очевидную необходимость ее более серьезной разработки. Не менее увлекательной могла бы стать попытка описания перехода из классической области в квантовую с использованием таких же простых идей и методов, какие столь удивительно эффективны в классической динамической космологии.

5. КРАТКИЙ ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ

Кратко перечислим основные результаты и проблемы, оставленные на будущее.

1. Динамические уравнения космологии сформулированы в различных калибровках и версиях, а соотношения между ними проиллюстрированы на простых точных решениях, а также с помощью интегрируемых моделей.

2. Важнейшие свойства калибровочно-независимых χ -уравнений (26), (27), описывающих основные портреты (α, ψ) изотропных космологий, установлены в α - и ψ -версиях.

3. Уравнения (29), (30) позволяют получить полное решение, если известны функции $\chi(\alpha)$ или $\bar{\chi}(\psi)$. Принимая во внимание выражения (31), можно также найти $\bar{v}(\alpha)$ или $v(\psi)$.

4. Мы рассмотрели различные способы описания космологий без использования потенциалов. Самый естественный способ – сначала получить $\chi^2(\alpha)$, используя (32) с заданной функцией Хаббла $\xi^2(\alpha)$.

5. Несмотря на то что χ -уравнения зависят лишь от $v'(\psi)/v(\psi)$ и потому не зависят от знака $v(\psi) = \bar{v}(\alpha)$, этот знак является ключевым для глобальных свойств решений. Из (28), (44), (75) следует, что решения на интервалах, где $v(\psi) > 0$, изолированы от решений на интервалах, где $v(\psi) < 0$, и эти решения должны изучаться раздельно.

6. В основном мы рассматривали потенциалы, не меняющие знак, и детально изучали модели с положительными потенциалами, для которых инфляционные сценарии естественны. Однако мы также обсуждали решения и их разложения вблизи точек ψ_0 , где $v(\psi_0) = 0$ и $v'(\psi)/v(\psi)$ ведет себя как $(\psi - \psi_0)^{-1} \rightarrow \pm\infty$. В ψ -версии это весьма неприятно, так как $\chi^2 - 6$ может изменить знак вместе с потенциалом. Однако в α -версии проблема отсутствует, как видно из выражения (62) для $\chi^2(\alpha)$.

7. По-видимому, самые важные результаты представлены в разделе 4, где было найдено точное решение всех уравнений для произвольных $\bar{v}(\alpha)$ и k и получены их разложения в ряд теории возмущений в инфляционной области. Необходимое условие инфляции есть $\chi^2(\alpha) < 6$ ($6\bar{\chi}^2(\psi) > 1$). Чтобы рассчитать с помощью функции $\chi(\alpha)$ стандартный инфляционный сценарий, мы предполагаем, что кривизна пространства равна нулю, $k = 0$. Затем фиксируем произвольную константу интегрирования $C_0 = 0$, чем обеспечивается сохранение инвариантности инфляционного решения χ относительно v -скейлинга, и находим его разложение из уравнения (82). В результате можно получить представление χ в виде суммы, n -й член которой

имеет общий вид

$$-l'(\psi) \sum_{\{k\}} c_n(k_1, \dots, k_{2n}) \prod_{i=1}^{2n} [l^{(i)}(\psi)]^{k_i}, \quad \text{где} \quad \sum_i i k_i = 2n, \quad k_i \geq 0.$$

Явный вид каждого члена этой инфляционной теории возмущений можно получать рекуррентно, последовательными алгебраическими итерациями. Это позволяет находить высшие поправки к инфляционным параметрам $\hat{\epsilon}$, $\hat{\eta}$, N_e .

8. При $v(\psi) < 0$ и, следовательно, $\chi^2(\alpha) > 6$, $6\bar{\chi}^2(\psi) < 1$ также удобно использовать разложения функции $\bar{\chi}(\psi)$, когда она мала или близка к $1/6$. В последнем случае было получено асимптотическое приближение (54) при $\psi \rightarrow \infty$, действительное для широкого класса потенциалов $v(\psi)$. Следует упомянуть интересный однопараметрический класс решений (59), (60), который существует при $v'(\psi)/v(\psi) \sim 1/\psi$, и особое решение (56), которое, возможно, является сепаратрисой.

Глобальная картина решений с такими свойствами и визуализация портретов (α, ψ) конкретных решений представляет большой интерес для сценариев типа “сжатие–отскок” и заслуживает серьезного исследования. Это относится и к недостаточно изученной структуре общих решений в случае инфляции, хотя может показаться, что она значительно проще.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Об общих изотропных космологиях

Достаточно общая сферическая редукция эйнштейновской гравитации, взаимодействующей со скалярным полем ψ , которая дает все возможные сферически-симметричные космологии, описана в работах [23], [36]. Следуя изложенной в них процедуре, получаем эффективный двумерный лагранжиан, описывающий сферические статические состояния, космологии и волны. Отправная точка такого подхода – двумерная метрика сферически-симметричного пространства-времени

$$ds_4^2 = e^{2\alpha} dr^2 + e^{2\beta} d\Omega^2(\theta, \phi) - e^{2\gamma} dt^2 + 2e^{2\delta} dr dt, \quad (87)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ зависят от t, r , а $d\Omega^2(\theta, \phi)$ является метрикой на двумерной сфере $S^{(2)}$. Тогда двумерная редукция четырехмерной гравитации со скалярным полем ψ описывается лагранжианом (здесь штрих обозначает производную по r , а точка – производную по t , отбрасывание последнего члена в (87) обсуждается ниже)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(2)} = & e^{\alpha+2\beta-\gamma} (\dot{\psi}^2 - 2\dot{\beta}^2 - 4\dot{\beta}\dot{\alpha}) - \\ & - e^{-\alpha+2\beta+\gamma} (\psi'^2 - 2\beta'^2 - 4\beta'\gamma') - e^{\alpha+2\beta+\gamma} V(\psi) + 2\bar{k}e^{\alpha+\gamma}, \end{aligned} \quad (88)$$

где $\bar{k} = 0, \pm 1$ – стандартный параметр кривизны, который обращается в нуль на плоских космологиях. Такой лагранжиан получен из полного четырехмерного лагранжиана опусканием членов, соответствующих полному производным (члены, отвечающие производным по времени, можно получить заменами $\partial_r \leftrightarrow i\partial_t$ и $\alpha \leftrightarrow \gamma$):

$$\Delta\mathcal{L}^{(2)} = -2[(e^\gamma)'e^{2\beta-\alpha} + (e^{2\beta})'e^{\gamma-\alpha}]'.$$

Также напомним, что лагранжиан (88) задает калибровочную теорию с двумя связями: полная энергия и импульс обращаются в нуль в соответствии с уравнениями движения, полученными варьированием по всем переменным. Происхождение

связей объясняется независимостью лагранжиана от производных $\dot{\alpha}$ и $\dot{\gamma}'$. Следовательно, $e^{\alpha(t)}$ и $e^{\gamma(r)}$ становятся множителями Лагранжа в одномерной статической и космологической редукциях соответственно. Более строгий подход заключается в применении гамильтоновой формулировки Арновитта–Дезера–Мизнера [50]. Вариации лагранжиана (88) задают все уравнения движения²³⁾, кроме одной связи,

$$-\dot{\beta}' - \dot{\beta}\beta' + \dot{\alpha}\beta' + \dot{\beta}\gamma' = \frac{1}{2}\dot{\psi}\psi', \quad (89)$$

которую надо получить до отбрасывания δ -члена (в пределе $\delta \rightarrow -\infty$). Все прочие уравнения движения можно найти с помощью эффективного лагранжиана (88).

Различие между статическими и космологическими решениями заключается в зависимости полей “материи” ψ от пространственно-временных координат. Назовем *статическим* решение, для которого $\psi = \psi(r)$. Если $\psi = \psi(t)$, назовем решение *космологическим*. Также существуют *волновые* решения, для которых α , β , γ и ψ зависят от линейных комбинаций t и r , но в этой статье такой случай не рассматривается. И для статических, и для космологических решений гравитационные переменные в общем случае зависят от t и r . Это важно при вложении решения в теорию более высокой размерности, но в данной статье мы не вспоминаем о зависимости космологических решений от пространственной координаты.

Для получения одномерных уравнений применим дальнейшую редукцию, разделив переменные t и r . Очевидно, что для разделения переменных r и t в метрике достаточно потребовать, чтобы

$$\alpha = \alpha_0(t) + \alpha_1(r), \quad \beta = \beta_0(t) + \beta_1(r), \quad \gamma = \gamma_0(t) + \gamma_1(r). \quad (90)$$

Подставляя эти выражения в уравнения движения, найдем уравнения на гравитационные (и материальные) переменные, решения которых определяют возможные конфигурации. Более детальное описание приведено в [23], где дан полный список статических и космологических сферически-симметричных решений. Наивная космологическая редукция (предполагающая, что все поля не зависят от r) не дает стандартной космологии Вселенной Фридмана с одним скаляром. Как было показано в [23] (см. также более раннюю работу [20]), одна из возможных систем условий разделения переменных в уравнениях Эйнштейна или в лагранжиане следующая:

$$\dot{\alpha} = \dot{\beta}, \quad \gamma' = 0, \quad \beta_1'' + \bar{k}e^{-2\beta_1} = 0, \quad 2\beta_1'' + 3\beta_1'^2 - \bar{k}e^{-2\beta_1} = 3k, \quad (91)$$

где первые два условия следуют из уравнения (89). Постоянная k в уравнениях для β_1 пропорциональна 3-кривизне пространства-времени, а третье уравнение в (91) является условием изотропности. Любая однородная изотропная космология должна удовлетворять всем четырем условиям²⁴⁾. И однородность, и условия изотропности следуют из одного уравнения

$$\beta_1'^2 - \bar{k}e^{-2\beta_1} = k, \quad (92)$$

²³⁾Уравнения движения – стандартные уравнения Эйнштейна в сферических координатах. Не обязательно пользоваться лагранжианами, чтобы выполнить дальнейшее разделение переменных. Тем не менее введение эффективных лагранжианов и гамильтонианов очень удобно даже в рамках классической теории и становится незаменимым при квантовании (см., например, [51]).

²⁴⁾Заметим, что здесь были опущены не имеющие значения постоянные множители, а также было принято условие $\alpha_1 = \gamma_1 = 0$.

которое легко может быть решено для всех значений параметров. Используя уравнения (91), (92), получим стандартный эффективный лагранжиан (2). Легко убедиться, что при наивной редукции условия изотропности в (91) соблюдены лишь при $\bar{k} = 0$, а первое условие не следует из (89). Таким образом, наивная редукция в общем случае приводит к однородным неизотропным космологиям.

При $\bar{k} = k = 0$ можно показать, что в этой произвольной наивной космологии существует класс “изотропных” решений, удовлетворяющих условию $\dot{\sigma}(t) \equiv \dot{\alpha}(t) - \dot{\beta}(t) = \text{const}$. Проще всего это продемонстрировать в гамильтоновой калибровке $\gamma = \alpha + 2\beta$, в которой уравнения имеют вид

$$\ddot{\sigma} \equiv \ddot{\alpha} - \ddot{\beta} = ke^{2(\alpha+\beta)}, \quad 2\ddot{\alpha} = e^{2\alpha+4\beta}v(\psi) \quad 2\ddot{\psi} = -e^{2\alpha+4\beta}v'(\psi). \quad (93)$$

При $k = 0$ существует интеграл движения $\dot{\sigma} = C_0$, а следовательно, $\beta = \alpha - C_0 t$. Решения, принадлежащие классу с $C_0 = 0$, изотропны. Более того, если потенциал экспоненциальный, т. е. $v'(\psi) = gv(\psi)$, то появляется еще один интеграл $\dot{\psi} + g\dot{\alpha} = C_1$ и модель становится интегрируемой. Тогда уравнение на $\alpha(t)$ можно легко свести к уравнению Лиувилля и решить в явном виде. Результат можно представить в калибровочно-независимой форме $\psi = f(\alpha)$ ²⁵.

Эта простая модель связи между изотропными и анизотропными космологиями, конечно, нереалистична. Могут ли некоторые анизотропные космологии иметь актуальные с физической точки зрения изотропные пределы – это интересный вопрос, который здесь не рассмотрен. При наличии скалярного поля эволюция к изотропному состоянию представляется возможной, но надо найти соответствующие решения полной системы из трех уравнений, описанной в работе [36]. Эта задача требует отдельного изучения.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Интегрируемый пример уравнения для $\bar{\chi}(\psi)$

Здесь найден потенциал, для которого можно точно решить уравнения (64) при $k = 0$, и получено соответствующее решение, структура которого похожа на структуру общего α -решения. Сначала найдем частное решение $z_a(x)$ уравнения (42), предположив, что $u(x)z_a(x) = a - 1$, где число a будет определено позднее, а z_a удовлетворяет уравнению $z'_a = a(z_a^2 - 1)$. Очевидно, что $z_a = -\text{cth}^\varepsilon(ax)$, где $\varepsilon = \pm 1$, и, следовательно, $u(x) = (1 - a)\text{th}^\varepsilon(a\bar{x})$, где $\bar{x} \equiv x - x_0$. Далее считая, что $x_0 = 0$, находим соответствующий потенциал $\tilde{v}(x)$ (вспомним (42) и (45)),

$$\tilde{v}(x) = v_0 \left(\frac{|e^{ax} + \varepsilon e^{-ax}|}{2} \right)^{2(1-a)/a}, \quad \varepsilon = \pm 1. \quad (94)$$

Между прочим, $u(x) \equiv \tilde{v}'(x)/(2\tilde{v}(x))$ удовлетворяет простому уравнению

$$u'(x) = a(a - 1)^{-1}[u^2 - (a - 1)^2]. \quad (95)$$

Теперь попробуем найти общее решение с помощью замены

$$z = y + z_a = y + \frac{a - 1}{u} = y - \text{cth}^\varepsilon(ax). \quad (96)$$

²⁵Используя два интеграла, обнаруживаем уравнение на α вида $\ddot{\alpha} = e^{a(t)+bt}$. Обозначив $a+bt \equiv x(t)$, получаем уравнение Лиувилля $\ddot{x} = e^x$. Это позволяет найти $t(\alpha)$ и избавиться от t во втором интеграле.

Следовательно, $y(x)$ удовлетворяет уравнению Абеля

$$y' = uy^3 + (a + 2uz_a)y^2 + (2az_a + uz_a^2 - u)y, \quad (97)$$

которое можно проинтегрировать в явном виде, если $a + 2uz_a = 0$; это возможно при $a = 2/3$. Тогда

$$y' = uy^3 - \left(u + \frac{1}{3u}\right)y, \quad \frac{1}{3u} = \operatorname{cth}^\varepsilon \frac{2x}{3} \quad (98)$$

и $w \equiv y^{-2}$ удовлетворяет линейному уравнению:

$$w'(x) = 2\left(u + \frac{1}{3u}\right)w - 2u. \quad (99)$$

Запишем общее решение для $\varepsilon = -1$, регулярное при $x = 0$ ($a = 2/3$),

$$w(x) = \operatorname{ch}^2(ax)[\operatorname{ch}(2ax) + C_0 \operatorname{sh}(2ax)], \quad z(x) = (w(x))^{-1/2} + \operatorname{th}(ax). \quad (100)$$

Решение для $\varepsilon = +1$ регулярно при выборе отрицательного знака у корня (100) для устранения особенности $z_a = 1/3u(x)$ (см. (94)). Функция $w(x)$ положительна для всех x при $C_0^2 < 1$ и равна $\operatorname{ch}^2(2x/3)e^{\pm 4x/3}$ при $C_0 = \pm 1$. Как и в случае общего решения, в α -картине имеем проблему положительности, и также возникает второй лист при $C_0 < -1$. В любом случае, интегрируя $z(x)$, получаем в явном виде выражение для $\alpha(\psi)$, которое может быть обращено для получения $\psi(\alpha)$. Наконец, $\psi(\alpha)$ и $\bar{v}(\alpha) = v[\psi(\alpha)]$ неявно зависят от двух параметров C_0 и ψ_0 .

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Сравнение $v(\psi)$ и $\bar{v}(\alpha)$ в простых решениях

Рассмотрим важные примеры получения потенциала v как в α -картине, так и в ψ -картине. Более детально рассмотрим задачу поиска потенциалов, для которых существуют простые решения уравнений (10)–(12) (где мы опустим верхние подчеркивания и обозначим производные по τ точками):

$$2\dot{\xi} + \eta^2 + 2ke^{-2\alpha} = 0, \quad 2\dot{\eta} + 6\eta\xi + v'(\psi) = 0, \quad (101)$$

$$v(\psi) = 6\xi^2 - \eta^2 - 6ke^{-2\alpha}. \quad (102)$$

Самые простые и интересные с физической точки зрения решения строятся при одном из двух предположений: 1) $\dot{\xi} = C_0$; 2) $\dot{\eta} = C_0$. Ключевой идеей является решение не зависящего от потенциала уравнения, получение $\chi(\alpha)$ или $\bar{\chi}(\psi)$, задающих $\alpha(\psi)$, и использование связи (102) для вычисления $v(\psi)$. Преследуется двойная цель: сначала попытаться изучить весьма нетривиальную связь между стандартной и α -версией, а далее найти простейшие “двойственные” потенциалы $v(\psi)$ и $\bar{v}(\alpha)$. Результат таких простых, практически тривиальных соображений выглядит довольно неожиданно, особенно в случае неисчезающего члена кривизны $ke^{-2\alpha}$.

Детально рассмотрим только первый случай. При $C_0 = 0$ легко найти

$$\dot{\alpha}(\tau) \equiv \xi = \xi_0, \quad \alpha(\tau) = \xi_0(\tau - \tau_0), \quad \eta = k_0 e^{-\alpha(\tau)} \quad (k_0^2 \equiv -2k). \quad (103)$$

Отображение $\chi(\alpha)$ и соответствующее $\psi(\alpha)$ в этом случае очень простые²⁶⁾,

$$\chi(\alpha) = \frac{d\psi}{d\alpha} = \frac{\eta}{\xi} = \frac{k_0}{\xi_0} e^{-\alpha}, \quad \tilde{\psi} \equiv (\psi - \psi_0) = \int \chi(\alpha) = -\frac{k_0}{\xi_0} e^{-\alpha}, \quad \bar{\chi}(\psi) = -\frac{1}{\tilde{\psi}}. \quad (104)$$

Соответственно, потенциалы в α - и в ψ -версиях также простые:

$$\bar{v}(\alpha) = 6\xi_0^2 + 2k_0^2 e^{-2\alpha} = \bar{v}[\alpha(\psi)] = 6\xi_0^2 + 2\xi_0^2(\psi - \psi_0)^2 = v(\psi). \quad (105)$$

Нетрудно убедиться, что все динамические уравнения выполнены во всех версиях. Подчеркнем также, что два произвольных параметра имеют разный смысл: ξ_0 есть физическая константа Хаббла, тогда как ψ_0 не имеет определенного физического смысла, так как поле ψ определено с точностью до сдвига.

Случай $\dot{\xi} = C_0 \equiv -\eta_0^2/2$ аналогичен предыдущему, поэтому опустим подробности:

$$\begin{aligned} \eta^2 &= \eta_0^2 + k_0^2 e^{-2\alpha}, & \xi &= C_0(\tau - \tau_0), \\ \alpha &= \frac{C_0(\tau - \tau_0)^2}{2} + \alpha_0, & \xi &= -\eta_0 \sqrt{\alpha_0 - \alpha}. \end{aligned} \quad (106)$$

Теперь легко получить портрет и простое выражение для его предела при $k_0 \rightarrow 0$:

$$\tilde{\psi} = \int \chi(\alpha) = \int d\alpha (1 + k_0^2 \eta_0^{-2} e^{-2\alpha})^{1/2} (\alpha_0 - \alpha)^{-1/2} \rightarrow 2\sqrt{\alpha_0 - \alpha}. \quad (107)$$

С помощью этого выражения находим потенциалы $v(\psi)$ и $\bar{v}(\alpha)$ и запишем предел при $k_0 \rightarrow 0$ для последнего:

$$\bar{v}(\alpha) = 6\eta_0^2(\alpha_0 - \alpha) - \eta_0^2 + 2k_0^2 e^{-2\alpha} = \bar{v}[\alpha(\psi)] \rightarrow \frac{3}{2}\eta_0^2(\psi - \psi_0)^2 - \eta_0^2. \quad (108)$$

Заметим, что в пределе получается такой же потенциал $\sim \psi^2$, как и в случае $\dot{\xi} = 0$, и то же самое верно для случая $\dot{\eta} = 0$. Выражения (107), (108) с $k_0 \neq 0$ и похожие выражения для случая $\dot{\eta} = C_0 \neq 0$ определяют более сложные потенциалы, которые требуют отдельного обсуждения.

Было бы интересно изучить прочие потенциалы, задающие интересные с физической точки зрения решения и, в то же время, аналитически доступные в α -картине. Такой подход выглядит целесообразным и заслуживающим тщательной проработки, однако он потребует намного более глубокого понимания аналитической структуры и смысла функции $\psi(\alpha)$, а также и α -версии в целом, что принуждает нас отложить эту задачу для будущих исследований. В разделе 4 эта задача решена в рамках инфляционной теории и теории возмущений. В качестве следующего шага стоило бы изучить с этой точки зрения все рассмотренные в этой работе точные решения.

Благодарности. Автор благодарит Ю. Г. Пальперн за неизменную поддержку. Также автор признателен А. Старобинскому за плодотворные обсуждения.

²⁶⁾В действительности найдена только часть полного портрета, отвечающего данному решению. Как показано выше, можно восстановить полный портрет для любого потенциала $\bar{v}(\alpha)$ в α -картине, однако даже в этом простом примере неизвестен портрет для соответствующего потенциала $v(\psi)$.

Список литературы

- [1] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge Univ. Press, New York, 2005.
- [2] S. Weinberg, *Cosmology*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2008.
- [3] D. S. Gorbunov, V. A. Rubakov, *Introduction to the Theory of the Early Universe: Cosmological Perturbations and Inflationary Theory*, World Sci., Singapore, 2010.
- [4] A. A. Starobinsky, *Phys. Lett. B*, **91**:1 (1980), 99–102.
- [5] В. Ф. Муханов, Г. В. Чибисов, *Письма в ЖЭТФ*, **33**:10 (1981), 549–553.
- [6] A. H. Guth, *Phys. Rev. D*, **23**:2 (1981), 347–356.
- [7] A. D. Linde, *Phys. Lett. B*, **129**:3–4 (1983), 177–181.
- [8] А. А. Старобинский, *Письма в Астрон. журн.*, **9**:10 (1983), 579–584.
- [9] L. A. Kofman, A. D. Linde, A. A. Starobinsky, *Phys. Lett. B*, **157**:5–6 (1985), 361–367.
- [10] A. D. Linde, *Particle Physics and Inflationary Cosmology*, Harwood Acad. Publ., Chur, 1990, arXiv: hep-th/0503203.
- [11] A. Linde, *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, **163** (2006), 295–322, arXiv: hep-th/0503195.
- [12] R. Kallosh, “Inflation in string theory”, *Inflationary Cosmology*, Lecture Notes in Physics, **738**, eds. M. Lemoine, J. Martin, P. Peter, Springer, Berlin, 2008, 119–156, arXiv: hep-th/0702059.
- [13] V. Mukhanov, *Eur. Phys. J. C*, **73**:7 (2013), 1–6, arXiv: 1303.3925.
- [14] J. Martin, K. Ringeval, V. Vennin, *Phys. Dark Univ.*, **5–6** (2014), 75–235, arXiv: 1303.3787.
- [15] A. Linde, *Inflationary cosmology after Planck 2013*, arXiv: 1402.0526.
- [16] J. Martin, *The observational status of cosmic inflation after Planck*, arXiv: 1502.05733.
- [17] Y. Motohashi, A. A. Starobinsky, J. Yokoyama, *J. Cosm. Astropart. Phys.*, **09** (2015), 018, arXiv: 1411.5021.
- [18] M. Libanov, V. Rubakov, *Phys. Rev. D*, **91**:10 (2015), 103515, 11 pp., arXiv: 1502.05897.
- [19] B. Boisseau, H. Giacomini, D. Polarski, A. A. Starobinsky, *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, **7** (2015), 002, 10 pp., arXiv: 1504.07927.
- [20] A. T. Filippov, *Modern Phys. Lett. A*, **11**:21 (1996), 1691–1704.
- [21] A. T. Filippov, D. Maison, *Class. Quant. Grav.*, **20**:9 (2003), 1779–1786.
- [22] А. Т. Филиппов, *ТМФ*, **146**:1 (2006), 115–131.
- [23] А. Т. Филиппов, *Some unusual dimensional reductions of gravity: geometric potentials, separation of variables, and static – cosmological duality*, arXiv: hep-th/0605276; “Many faces of dimensional reduction”, *Gribov Memorial Volume. Quarks, Hadrons, and Strong Interactions*, Proceedings of the Memorial Workshop Devoted to the 75th Birthday of V. N. Gribov (Budapest, Hungary, May 22–24, 2005), eds. Yu. L. Dokshitzer, P. Levai, J. Nyiri, World. Sci., Singapore, 2006, 510–521.
- [24] В. де Альфаро, А. Т. Филиппов, *ТМФ*, **153**:3 (2007), 422–452.
- [25] В. де Альфаро, А. Т. Филиппов, *ТМФ*, **162**:1 (2010), 41–68.
- [26] A. T. Filippov, *General Properties and some solutions of generalized Einstein–Eddington affine gravity I*, arXiv: 1112.3023.
- [27] А. Т. Филиппов, *ТМФ*, **177**:2 (2013), 323–352, arXiv: 1302.6372.
- [28] E. A. Davydov, A. T. Filippov, *Gravit. Cosmol.*, **19**:4 (2013), 209–218, arXiv: 1302.6969.
- [29] A. T. Filippov, *Phys. Part. Nucl. Lett.*, **11**:7 (2014), 844–853.
- [30] A. T. Filippov, “Many faces of scalaron coupled to gravity”, Program of the EU-Italy-Russia@Dubna Round Table (Dubna, 3–5 March, 2014) (unpublished, transparencies available at <http://theor.jinr.ru>).
- [31] J. E. Lidsey, D. Wands, E. J. Copeland, *Phys. Rep.*, **337**:4–5 (2000), 343–492, arXiv: hep-th/9909061.

- [32] M. Kawasaki, M. Yamaguchi, T. Yanagida, *Phys. Rev. Lett.*, **85**:17 (2000), 3572–3575, arXiv: hep-ph/0004243.
- [33] S. Ferrara, R. Kallosh, A. Linde, M. Porrati, *Phys. Rev. D*, **88**:8 (2013), 085038, 12 pp., arXiv: 1307.7696.
- [34] R. Kallosh, *Planck 2013 and superconformal symmetry*, arXiv: 1402.0527.
- [35] R. Kallosh, A. Linde, *Comptes Rendus Physique*, **16**:10 (2015), 914–927, arXiv: 1503.06785.
- [36] A. T. Filippov, *On Einstein–Weyl unified model of dark energy and dark matter*, arXiv: 0812.2616.
- [37] А. Т. Филиппов, *ТМФ*, **163**:3 (2010), 430–448.
- [38] А. Т. Филиппов, “Affine generalizations of gravity in the light of modern cosmology”, *Проблемы современной теоретической и математической физики. Калибровочные теории и суперструны*, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Андрея Алексеевича Славнова, Тр. МИАН, **272**, МАИК, М., 2011, 117–128.
- [39] A. S. Eddington, *The Internal Constitution of Stars*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1926.
- [40] R. H. Fowler, *Quart. J. Math.*, **os-2**:1 (1931), 259–288.
- [41] R. Bellman, *Stability Theory of Differential Equations*, McGraw-Hill, New York, 1953.
- [42] L. M. Berkovich, “The generalized Emden–Fowler equation”, *Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics* (Kyiv, Ukraine, July 7–13, 1997), **1**, eds. M. Shkil, A. Nikitin, V. Boyko, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 1997, 155–163.
- [43] K. S. Govinder, P. G. L. Leach, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **14**:3 (2007), 443–461.
- [44] G. H. Hardy, *Proc. London Math. Soc. Ser. 2*, **s2-10**:1 (1912), 451–468.
- [45] R. H. Fowler, *Pros. London Math. Soc. Ser. 2*, **s2-13**:1 (1914), 341–371.
- [46] B. Whitt, *Phys. Lett. B*, **145**:3–4 (1984), 176–178.
- [47] J.-L. Lehnars, *Phys. Rev. D*, **91**:8 (2015), 083525, 18 pp., arXiv: 1502.00629.
- [48] D. Battefeld, P. Peter, *Phys. Rep.*, **571** (2015), 1–66, arXiv: 1406.2790.
- [49] A. A. Starobinsky, *Письма в ЖЭТФ*, **68**:10 (1998), 721–726, arXiv: astro-ph/9810431; *Gravit. Cosmol.*, **4**, Suppl. (1998), 88–99, arXiv: astro-ph/9811360.
- [50] R. Arnowitt, S. Deser, C. W. Misner, “The dynamics of general relativity”, *Gravitation: An introduction to Current Research*, ed. L. Witten, Wiley, New York, 1962, arXiv: gr-qc/0405109.
- [51] M. Cavaglià, V. de Alfaro, A. T. Filippov, *Internat. J. Modern Phys. D*, **4**:5 (1995), 661–672, arXiv: gr-qc/9411070; **10**:5 (1995), 611–633.

Поступила в редакцию 9.09.2015,
после доработки 21.10.2015