Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. М. Зупник, Фоновые гармонические суперполя в $N = 2$ супергравитации,
ТМФ, 1998, том 116, номер 2, 288–304

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf904>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 13:39:37

ФОНОВЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ СУПЕРПОЛЯ В $N = 2$ СУПЕРГРАВИТАЦИИ

Рассматривается модификация суперполевого гармонического формализма $D = 4$, $N = 2$ супергравитации с дополнительным условием ковариантности относительно фоновой суперсимметрии с центральным зарядом (В-ковариантность).

1. ВВЕДЕНИЕ

Взаимодействия физических полей расширенной $N = 2$, $D = 4$ супергравитации (SG_4^2), гравитона g_{mn} , гравитино $\psi_m^{\alpha i}$ и абелева калибровочного поля A_m впервые исследовались в рамках формализма, требующего учета уравнений движения для проверки локальной суперсимметрии [1, 2]. Проблема вспомогательных полей SG_4^2 была решена в работах [3, 4].

В этой работе будет рассматриваться только вариант эйнштейновской $N = 2$ супергравитации, который имеет 40 бозонных и 40 фермионных полевых компонент. Следует отметить, что компонентное тензорное исчисление SG_4^2 приводит к трудоемким вычислениям при построении взаимодействия с материальными супермультиплетами и анализе квантовых свойств теории. Поэтому наряду с компонентным анализом интенсивно развивались различные суперполевые подходы к изучению расширенной супергравитации [5–9].

Геометрический подход к суперполевному описанию SG_4^2 был предложен в методе гармонического суперпространства (HSS) [10]. Аналитические препотенциалы SG_4^2 возникают в разложении инвариантной гармонической производной Δ^{++} по операторам частных производных в HSS. В работе [11] было показано, что гармонические суперполевые связи нулевой размерности в SG_4^2 могут быть решены в специальных *плоских* координатах по аналогии с решением соответствующих гармонических связей неабелевой суперкалибровочной теории [12–14]. С использованием этого представления в работе [15] были решены все суперполевые связи минимальной SG_4^2 . Конформная $N = 2$ супергравитация и альтернативные варианты расширенной эйнштейновской супергравитации также исследовались в HSS [16].

*Объединенный институт ядерных исследований, Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Дубна, Московская область, Россия. E-mail: zupnik@thsun1.jinr.dubna.su

Эффективность суперполевых формулировок в суперсимметричных теориях во многом связана с упрощением квантовых расчетов. Следует подчеркнуть, что процедура гармонического квантования расширенной супергравитации кажется технически более сложной, чем квантование теории Янга–Миллса в HSS [12]. Прежде всего SG_4^2 имеет несколько аналитических препотенциалов, аналогичных одному матричному препотенциалу калибровочной теории. Кроме того, в работах [10, 15] рассматривалась калибровочная симметрия классического формализма расширенной супергравитации и не обсуждалась дополнительная фоновая суперсимметрия пертурбативного разложения действия SG_4^2 по степеням гравитационной константы κ . Из формализма квантования суперполевой $N = 1$ супергравитации [17, 18] мы знаем, что учет фоновой суперсимметрии очень важен при построении суперполевых правил Фейнмана.

Данная работа представляет собой продолжение исследования проблемы фоновой суперсимметрии в гармоническом формализме SG_4^2 , начатого в работе [19].

В разделе 2 обсуждается связь различных базисов дифференциальных операторов фонового HSS и показано, что в ковариантном базисе естественно возникают гравитационные суперполя, линейно зависящие от спинорных неаналитических координат θ^- (линейные гармонические суперполя). Аналитические препотенциалы голономного базиса [10] в этой трактовке представляют собой коэффициенты разложения фоновых линейных суперполей по координатам θ^- , поэтому они преобразуются нестандартно по отношению к фоновой суперсимметрии.

В разделе 3 исследуется условие аналитичности в SG_4^2 , гарантирующее сохранение фоновой суперсимметрии с центральным зарядом (В-ковариантность). Мы изучаем альтернативные возможности выбора независимых суперполевых переменных в гармоническом суперпространстве. В частности, обсуждается решение связей SG_4^2 в HSS, соответствующее выражению линейных гравитационных суперполей через общее гармоническое спинорное суперполе размерности $d = 5/2$. В специальной калибровке это решение выражается через не зависящий от гармоник спинорный препотенциал, который раньше рассматривался при описании линеаризованной супергравитации в обычном суперпространстве [9].

В-ковариантные решения связей SG_4^2 обсуждаются в разделах 4 и 5.

Раздел 6 посвящен рассмотрению квадратичных по векторному и скалярному суперполям членов действия SG_4^2 в гармоническом суперпространстве. Структура этих членов подобна структуре действия абелевой $N = 2$ калибровочной теории [19]. Отметим, что квадратичное действие обладает дополнительной глобальной симметрией. В-ковариантное разложение действия SG_4^2 по константе κ можно строить методом итераций с учетом калибровочной инвариантности.

В работе [15] нелинейное действие SG_4^2 имеет вид действия аналитического компенсатора, в котором нужно выделять явно зависящую от спинорных координат плоскую часть. Это представление позволяет доказать калибровочную инвариантность, однако оно не обладает явной В-ковариантностью.

В разделе 7 обсуждается альтернативный гармонический формализм линеаризованной SG_4^2 , в котором спинорные препотенциалы размерности $d = 3/2$ определяют дуальную инвариантную гармоническую производную Δ^{--} . В этом случае спинорная ком-

понента кручения с $d = -1/2$ тождественно равна нулю, а уравнения движения эквивалентны динамическому уравнению аналитичности (представление нулевой кривизны). Рассматриваемый в разделе 7 формализм построен по аналогии с дуальной формулировкой $N = 2$ теории Янга–Миллса [20]. Мы надеемся, что суперполевые методы помогут исследовать квантовую структуру $N = 2$ супергравитации.

В приложении приведены определения и обозначения основных производных плоского HSS и некоторые другие полезные формулы из работ [10, 12].

2. ПЛОСКОЕ ФОНОВОЕ ГАРМОНИЧЕСКОЕ СУПЕРПРОСТРАНСТВО

Суперполя с вещественным центральным зарядом удобно рассматривать в гармоническом суперпространстве $\text{HSS}(Z)$ [10] с координатами $u_i^\pm$ и

$$z_A^M = (x_A^5, x_A^m, \theta^{\mu+}, \bar{\theta}^{\dot{\mu}+}, \theta^{\mu-}, \bar{\theta}^{\dot{\mu}-}), \quad (2.1)$$

где $u_i^\pm$ – $SU(2)/U(1)$ -гармоники, x_A^5 – специальная координата, связанная с центральным зарядом Z , а $m, \mu, \dot{\mu}$ – векторные и спинорные индексы группы Лоренца $SL(2, C)$. Аналитическое подпространство $\text{ASS}(Z)$ определяется координатами

$$\zeta(Z) = (x_A^5, \zeta) = (x_A^{\hat{m}}, \theta^{\hat{\mu}+}), \quad (2.2)$$

где ζ – 4-мерные аналитические координаты и введены обозначения $\hat{m} = (5, m)$ и $\hat{\mu} = (\mu, \dot{\mu})$.

Введение пятой координаты связано с геометрической интерпретацией центрального заряда, причем зависимость суперполей от x_A^5 может быть только циклической

$$\frac{\partial}{\partial x_A^5} \Phi = iZ\Phi. \quad (2.3)$$

Калибровочная супергруппа расширенной супергравитации ΛSG_4^2 наиболее естественно определяется через преобразования аналитических координат z_A^M [10].

Основные инфинитезимальные параметры калибровочных преобразований не зависят от $x_A^5, \theta^-, \bar{\theta}^-$, т.е.

$$\delta x_A^{\hat{m}} = \lambda^{\hat{m}}(\zeta, u) \quad (2.4)$$

$$\delta \theta^{\hat{\mu}+} = \lambda^{\hat{\mu}+}(\zeta, u). \quad (2.5)$$

Гармоники в ΛSG_4^2 не преобразуются, а преобразования спинорных координат с зарядом -1 зависят от всех координат $\text{HSS}(Z)$, кроме x_A^5 :

$$\delta \theta^{\hat{\mu}-} = \lambda^{\hat{\mu}-}(x_A^m, \theta^\pm, \bar{\theta}^\pm, u). \quad (2.6)$$

Локальное калибровочное преобразование общего скалярного суперполя $\Phi(z_A, u)$ в ΛSG_4^2

$$\hat{\delta} \Phi = -\Lambda \Phi \quad (2.7)$$

определяется оператором преобразования Λ , который включает аналитический оператор λ :

$$\Lambda = \lambda + \lambda^{\hat{\mu}-} \partial_{\hat{\mu}}^+, \quad \lambda = \lambda^{\hat{m}} \partial_{\hat{m}}^A + \lambda^{\hat{\mu}+} \partial_{\hat{\mu}}^-. \quad (2.8)$$

Калибровочные преобразования суперполей сохраняют грассманову аналитичность и условие цикличности (2.3), т.е.

$$[\partial_{\hat{\mu}}^+, \lambda] = 0, \quad [\partial_{\hat{\mu}}^+, \Lambda] = (\partial_{\hat{\mu}}^+ \lambda^{\hat{\nu}-}) \partial_{\hat{\nu}}^+, \quad [\partial_5, \Lambda] = 0. \quad (2.9)$$

Локальные калибровочные преобразования аналитических материальных суперполей имеют вид $\hat{\delta}\omega = -\lambda\omega$.

В уравнении (2.8) дифференциальный оператор Λ представлен в голономном базисе, т.е. в виде разложения по частным производным ∂_M^A . Гравитационные препотенциалы SG_4^2 также были определены в голономном базисе ∂_M^A как коэффициенты разложения Λ -инвариантного оператора гармонической производной

$$\Delta^{++} = \partial^{++} + H^{\hat{m}++} \partial_{\hat{m}}^A + H^{\hat{\mu}(+3)} \partial_{\hat{\mu}}^- + H^{\hat{\mu}+} \partial_{\hat{\mu}}^+. \quad (2.10)$$

Полные калибровочные вариации этих препотенциалов имеют вид

$$\delta_{\lambda} H^{\hat{m}++} = \Delta^{++} \lambda^{\hat{m}}, \quad \delta_{\lambda} H^{\hat{\mu}(\pm 1+2)} = \Delta^{++} \lambda^{\hat{\mu}\pm}. \quad (2.11)$$

Коммутатор двух полных вариаций вычисляется особенно просто в силу инвариантности оператора Δ^{++} ,

$$[\delta_2, \delta_1] H^{M++} = \Delta^{++} \lambda^M(1, 2), \quad (2.12)$$

$$\lambda^{\widehat{M}}(1, 2) = \lambda_2 \lambda_1^{\widehat{M}} - \lambda_1 \lambda_2^{\widehat{M}}, \quad (2.13)$$

$$\lambda^{\hat{\mu}-}(1, 2) = \lambda_2 \lambda_1^{\hat{\mu}-} - \lambda_1 \lambda_2^{\hat{\mu}-}, \quad (2.14)$$

где $\widehat{M} = (\hat{m}, \hat{\mu})$ и использованы дифференциальные операторы Λ и λ (2.8).

Мы будем использовать следующую калибровку для неаналитических калибровочных функций [10]:

$$\Delta^{++} \lambda^{\hat{\mu}-} = \lambda^{\hat{\mu}+}. \quad (2.15)$$

В этой калибровке легко построить матрицу индуцированных касательных преобразований, ковариантно не зависящую от гармонических переменных $\Delta^{++} \partial_{\hat{\mu}}^+ \lambda^{\hat{\nu}-} = 0$.

Условие (2.15) соответствует следующей калибровке неаналитического спинорного препотенциала:

$$H^{\hat{\mu}+} = \theta^{\hat{\mu}+}. \quad (2.16)$$

В работе [10] выделяется плоский предел гравитационных суперполей и обсуждается возможность разложения по гравитационной константе κ относительно этого предела. Мы будем рассматривать $\text{HSS}(Z)$ как фоновое классическое суперпространство $N = 2$ супергравитации. Фоновую суперсимметрию с вещественным центральным зарядом мы будем обозначать символом $\text{B}_4^2(Z)$, а фоновые суперполя называть В-суперполями. Гравитационные и материальные суперполя, а также взаимодействие в любом

порядке по гравитационной константе в этом подходе должны быть ковариантны по отношению к $B_4^2(Z)$.

Следует подчеркнуть, что голономный базис $HSS(Z)$ нековариантен относительно $B_4^2(Z)$, а соответствующие препотенциалы $H^{\hat{m}++}$ (2.10) нельзя считать В-суперполями.

В работе [11] использовались вещественные координаты в $HSS(Z)$

$$z^M = (x^5, x^m, \theta_i^\mu, \bar{\theta}^{i\dot{\mu}}) \quad (2.17)$$

и рассматривалось В-ковариантное разложение инвариантного аналитического оператора

$$\Delta^{++} = \partial^{++} + G^{++}, \quad [D_\alpha^+, G^{++}] = 0, \quad G^{++} = \hat{h}^{M++} \partial_M \equiv h^{M++} \partial_M^A. \quad (2.18)$$

Это разложение полезно для получения итерационного решения гармонических уравнений SG_4^2 , однако в нем также используются нековариантные по отношению к $B_4^2(Z)$ голономные базисы ∂_M и ∂_M^A . Калибровочные преобразования препотенциалов h^{M++} и $\hat{h}^{M++}$ легко получаются из преобразований (2.11) с помощью соотношений

$$\hat{h}^{m++} = h^{m++} = H^{m++} + 2i\theta^+ \sigma^m \bar{\theta}^+, \quad h^{\hat{\mu}(+3)} = H^{\hat{\mu}(+3)}, \quad h^{\hat{\mu}+} = 0, \quad (2.19)$$

$$\hat{h}^{5++} = h^{5++} = H^{5++} + i(\bar{\theta}^+)^2 - i(\theta^+)^2, \quad \hat{h}^{\hat{\mu}k++} = u^{k-} h^{\hat{\mu}(+3)}. \quad (2.20)$$

Отметим, что эти препотенциалы имеют размерность $d = 1$ и $1/2$, они не содержат плоских частей и пропорциональны константе κ .

Компонентный состав аналитических препотенциалов удобно изучать в физической WZ-калибровке [10]

$$h_{WZ}^{m++} = \kappa [-2i\theta^+ \sigma^a \bar{\theta}^+ h_a^m(x_A) + (\bar{\theta}^+)^2 \theta^{\alpha+} u_k^- \psi_\alpha^{mk}(x_A) + (\theta^+)^2 \bar{\theta}^{\dot{\alpha}+} u_k^- \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}^{mk}(x_A) + (\theta^+)^2 (\bar{\theta}^+)^2 u^{k-} u^l V_{(kl)}^m(x_A)], \quad (2.21)$$

$$h_{WZ}^{5++} = \kappa [i\theta^+ \sigma^a \bar{\theta}^+ A_a(x_A) + (\bar{\theta}^+)^2 \theta^{\alpha+} u_k^- \rho_\alpha^k(x_A) + (\theta^+)^2 \bar{\theta}^{\dot{\alpha}+} u_k^- \bar{\rho}_{\dot{\alpha}}^k(x_A) + (\theta^+)^2 (\bar{\theta}^+)^2 u_k^- u_l S^{(kl)}(x_A)], \quad (2.22)$$

$$h_{WZ}^{\mu(+3)} = \kappa \left\{ (\theta^+)^2 \bar{\theta}_\alpha^+ [B^{\mu\dot{\alpha}}(x_A) + iC^{\mu\dot{\alpha}}(x_A)] + (\bar{\theta}^+)^2 \theta_\alpha^+ [\varepsilon^{\mu\alpha}(M + iN)(x_A) + T^{(\mu\alpha)}(x_A)] + (\theta^+)^2 (\bar{\theta}^+)^2 u_k^- \xi^{\mu k}(x_A) \right\}. \quad (2.23)$$

В этой калибровке h_a^m , ψ_α^{mk} и A_a — физические поля, а остальные компоненты играют роль вспомогательных полей.

В приложении рассматриваются два базиса В-ковариантных дифференциальных операторов: 1) $D = (\partial^{++}, \partial^{--}, D_M)$ в координатах $u_i^\pm, z^M$ и 2) $D^A = (D^{++}, D^{--}, D_M^A)$ в координатах (2.1). Соответствующие этим базисам разложения оператора G^{++} и других объектов дифференциальной геометрии автоматически будут ковариантны по отношению к фоновой суперсимметрии.

Определим теперь гравитационные В-суперполя G^{M++} в базисе D_M^A :

$$\Delta^{++} = D^{++} + G^{\hat{m}++} \partial_{\hat{m}}^A - G^{\hat{\mu}(+3)} D_{\hat{\mu}}^-. \quad (2.24)$$

Выразим суперполя $G^{\hat{m}++}$ через аналитические препотенциалы голономного базиса:

$$G^{m++} = h^{m++} + 2i\theta^- \sigma^m \bar{h}^{(+3)} + 2ih^{(+3)} \sigma^m \bar{\theta}^-, \quad (2.25)$$

$$G^{5++} = h^{5++} - 2i(\theta^- h^{(+3)}) + 2i(\bar{\theta}^- \bar{h}^{(+3)}), \quad (2.26)$$

$$G^{\hat{\mu}(+3)} = h^{\hat{\mu}(+3)}. \quad (2.27)$$

По определению В-суперполя имеют тривиальные полные фоновые вариации $\delta_B G^{M++} = 0$, а В-преобразования аналитических препотенциалов имеют нековариантную форму

$$\delta_B h^{m++} = 2i(\sigma^m)_{\mu\dot{\nu}} (\bar{\varepsilon}^{k\dot{\nu}} h^{\mu(+3)} - \varepsilon^{k\mu} \bar{h}^{\dot{\nu}(+3)}) u_k^-, \quad (2.28)$$

$$\delta_B h^{5++} = 2i(\varepsilon^{k\mu} h_{\mu}^{(+3)} + \bar{\varepsilon}^{k\dot{\nu}} \bar{h}_{\dot{\nu}}^{(+3)}) u_k^-, \quad \delta_B h^{\hat{\mu}(+3)} = 0. \quad (2.29)$$

Операторное условие аналитичности $[D_{\hat{\mu}}^+, G^{++}] = 0$ эквивалентно следующим соотношениям для гравитационных суперполей:

$$D_{\hat{\mu}}^+ G^{\hat{\nu}(+3)} = 0, \quad D_{\hat{\mu}}^+ G^{5++} = -2iG_{\hat{\mu}}^{(+3)}, \quad (2.30)$$

$$D_{\alpha}^+ G^{m++} = 2i(\sigma^m)_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{G}^{\dot{\alpha}(+3)} = -(\sigma^m)_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{D}^{\dot{\alpha}+} G^{5++}, \quad (2.31)$$

$$\bar{D}_{\alpha}^+ G^{m++} = -2i(\sigma^m)_{\alpha\dot{\alpha}} G^{\dot{\alpha}(+3)} = (\sigma^m)_{\alpha\dot{\alpha}} D^{\alpha+} G^{5++}. \quad (2.32)$$

В ковариантных базисах будет рассматриваться следующее разложение оператора преобразования Λ :

$$\Lambda = \Lambda^M D_M^A = \hat{\Lambda}^M D_M, \quad (2.33)$$

$$\Lambda^m = \hat{\Lambda}^m = \lambda^m + 2i\theta^- \sigma^m \bar{\lambda}^+ + 2i\lambda^+ \sigma^m \bar{\theta}^-, \quad (2.34)$$

$$\Lambda^5 = \hat{\Lambda}^5 = \lambda^5 - 2i(\theta^- \lambda^+) + 2i(\bar{\theta}^- \bar{\lambda}^+), \quad \Lambda^{\hat{\mu}\pm} = \lambda^{\hat{\mu}\pm}, \quad (2.35)$$

$$\hat{\Lambda}_k^{\mu} = \lambda^{\mu+} u_k^- - \lambda^{\mu-} u_k^+. \quad (2.36)$$

Очевидно, что эти В-суперполевые параметры удовлетворяют уравнениям связи, аналогичным (2.30)–(2.32), в частности, параметры $\Lambda^{\hat{m}}$ линейны по $\theta^{\hat{\mu}-}$.

Следует подчеркнуть, что учет фоновой суперсимметрии в формализме $N = 1$ супергравитации также приводит к появлению линейных векторных суперполевых параметров, которые содержат геометрические киральные параметры в нулевом и первом порядках разложения по $\bar{\theta}$ [18].

Преобразования дифференциальных операторов ковариантного базиса имеют следующий вид:

$$\delta D^{\pm\pm} = [\Lambda, D^{\pm\pm}] = -(D^{\pm\pm} \Lambda^M) D_M^A, \quad \delta D_M^A = [\Lambda, D_M^A] \equiv -\Lambda_M^N D_N^A, \quad (2.37)$$

$$\Lambda_5^N = 0, \quad \Lambda_m^n = \partial_m^A \Lambda^n, \quad \Lambda_m^5 = \partial_m^A \Lambda^5, \quad \Lambda_{\hat{\mu}}^{\hat{\nu}+} = D_{\hat{\mu}}^- \lambda^{\hat{\nu}+}, \quad (2.38)$$

$$\Lambda_{\mu}^{m-} = D_{\mu}^- \Lambda^m - 2i(\sigma^m)_{\mu\dot{\nu}} \bar{\lambda}^{\dot{\nu}-}, \quad \Lambda_{\mu}^{5-} = D_{\mu}^- \Lambda^5 + 2i\lambda_{\mu}^-. \quad (2.39)$$

Оператор Δ^{++} инвариантен по определению, и это позволяет вывести закон преобразования оператора G^{++} в ΛSG_4^2 ,

$$\delta G^{++} = -\delta D^{++} = [D^{++}, \Lambda]. \quad (2.40)$$

Полные вариации ковариантных гравитационных суперполей имеют следующий вид:

$$\delta G^{m++} = \Delta^{++} \Lambda^m + 2i(\sigma^m)_{\mu\dot{\nu}}(G^{\mu(+3)} \bar{\lambda}^{\dot{\nu}-} - \bar{G}^{\dot{\nu}(+3)} \lambda^{\mu-}), \quad (2.41)$$

$$\delta G^{5++} = \Delta^{++} \Lambda^5 - 2iG^{\mu(+3)} \lambda_{\mu}^{-} - 2i\bar{G}^{\dot{\mu}(+3)} \bar{\lambda}_{\dot{\mu}}^{-}. \quad (2.42)$$

Соответствующие локальные калибровочные преобразования $\hat{\delta} G^{M++} = \delta G^{M++} - \Lambda G^{M++}$ имеют вид

$$\hat{\delta} G^{M++} = (D^{++} + G^{++}) \Lambda^M - \lambda G^{M++} \equiv R_N^{M++}(G) \Lambda^N, \quad (2.43)$$

где определены компоненты локального генератора преобразования $R_N^{M++}(G)$. Очевидно, что эти преобразования согласованы со связями (2.30)–(2.32).

Локальная вариация оператора G^{++} определяется преобразованиями $\hat{\delta} G^{M++}$:

$$\hat{\delta} G^{++} = [(D^{++} + G^{++}), \lambda], \quad (2.44)$$

т.к. операторы D_M^A не изменяются при локальных преобразованиях. Это соотношение полезно при вычислении линейных скобочных параметров в коммутаторе преобразований (2.43)

$$\Lambda^{\hat{m}}(1, 2) = \lambda_2 \Lambda_1^{\hat{m}} - \lambda_1 \Lambda_2^{\hat{m}}, \quad \lambda = \Lambda^n \partial_n - \lambda^{\dot{\nu}+} D_{\dot{\nu}}^{-}. \quad (2.45)$$

Соотношения (2.45) построены по аналогии с формулой (2.13) для аналитических параметров.

В калибровке (2.15) функции $\lambda^{\dot{\mu}-}$ представляют собой ряд по степеням суперполей G :

$$\lambda^{\dot{\mu}-}(z, u) = \int \frac{du_1 du_2}{(u^+ u_1^+)} \left[\lambda^{\dot{\mu}+}(z, u_1) - \frac{G^{++}(z, u_1) \lambda^{\dot{\mu}+}(z, u_2)}{(u_1^+ u_2^+)} \right] + O(G^2). \quad (2.46)$$

Отметим, что локальная вариация гравитационных суперполей (в отличие от полной вариации $\delta G^{\hat{m}++}$ и оператора Λ) не содержит $\lambda^{\dot{\mu}-}$. Поэтому в теории возмущений оператор $R_N^{M++}(G)$ разбивается на сумму членов нулевого и первого порядков по гравитационной константе (суперполя G линейны по κ).

3. АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ СУПЕРПОЛЕЙ

Напомним, что нелинейные суперполевые связи SG_4^2 в гармоническом представлении сводятся к условиям аналитичности препотенциалов H^{M++} или к эквивалентным линейным связям (2.30)–(2.32) для гравитационных фоновых суперполей. Рассмотрим ковариантное представление для $G^{\hat{m}++}$ [19]

$$G^{m++}(\Psi) = (\sigma^m)_{\alpha\dot{\beta}} \left[(D^+)^2 \bar{D}^{\dot{\beta}+} \Psi^{\alpha-} - (\bar{D}^+)^2 D^{\alpha+} \bar{\Psi}^{\dot{\beta}-} \right], \quad (3.1)$$

$$G^{5++}(\Psi) = (\bar{D}^+)^2 D_{\alpha}^+ \Psi^{\alpha-} + (D^+)^2 \bar{D}_{\dot{\alpha}}^+ \bar{\Psi}^{\dot{\alpha}-}, \quad (3.2)$$

которое позволяет решить связи и выразить все геометрические величины через неограниченные спинорные суперполя $\Psi_{\alpha}^-(z, u)$ и $\bar{\Psi}_{\dot{\alpha}}^-(z, u)$ размерности $d = 5/2$. В специальной калибровке спинорные препотенциалы линейны по u_k^- и пропорциональны обычному супер полю $\Psi_k^{\alpha}(z)$, аналогичному калибровочному супер полю линейризованной SG_4^2 [9].

Решение связей для суперполевых параметров $\Lambda^{\hat{m}}$ (2.34), (2.35) также выражается через неограниченные спинорные параметры $K_{\alpha}^{(-3)}(z, u)$:

$$\Lambda^m(K) = (\sigma^m)_{\alpha\dot{\beta}} \left[(D^+)^2 \bar{D}^{\dot{\beta}+} K^{\alpha(-3)} - (\bar{D}^+)^2 D^{\alpha+} \bar{K}^{\dot{\beta}(-3)} \right], \quad (3.3)$$

$$\Lambda^5(K) = (\bar{D}^+)^2 D_{\alpha}^+ K^{\alpha(-3)} + (D^+)^2 \bar{D}_{\dot{\alpha}}^+ \bar{K}^{\dot{\alpha}(-3)}, \quad (3.4)$$

$$\lambda_{\alpha}^+(K) = \frac{i}{4} (D^+)^2 (\bar{D}^+)^2 K_{\alpha}^{(-3)}, \quad \lambda(K) = \Lambda^m(K) \partial_m^A - \lambda^{\hat{\mu}+}(K) D_{\hat{\mu}}^-. \quad (3.5)$$

В локальных преобразованиях суперполей Ψ_{α}^- наряду с фермионными параметрами $K_{\alpha}^{(-3)}$ появляются также дополнительные бозонные параметры преобразований

$$\delta \Psi_{\alpha}^- = [D^{++} + G^{++}(\Psi)] K_{\alpha}^{(-3)} - \lambda(K) \Psi_{\alpha}^- + D_{\alpha}^+ B^{--} + D^{\beta+} B_{(\alpha\beta)}^{--} + \bar{D}^{\dot{\beta}+} B_{\alpha\dot{\beta}}^{--}, \quad (3.6)$$

где B^{--} и $B_{\alpha\dot{\beta}}^{--}$ – вещественные параметры, а $B_{(\alpha\beta)}^{--}$ симметричны по спинорным индексам. Нетрудно показать, что эти преобразования порождают локальные преобразования (2.43) для $G^{\hat{m}++}(\Psi)$, зависящие только от фермионных параметров.

Дополнительные преобразования коммутируют между собой, а скобочные параметры нетривиальных коммутаторов имеют следующий вид:

$$K_{\alpha}^{(-3)}(1, 2) = \lambda(K_2) K_{\alpha 1}^{(-3)} - \lambda(K_1) K_{\alpha 2}^{(-3)}, \quad (3.7)$$

$$B_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{--}(1, 2) = \lambda(K_2) B_{\hat{\mu}\hat{\nu} 1}^{--} - \lambda(K_1) B_{\hat{\mu}\hat{\nu} 2}^{--}. \quad (3.8)$$

При выводе этих соотношений использовалась формула (2.44).

По аналогии с представлением (2.25), (2.26) рассмотрим теперь В-ковариантное не-локальное представление решения связей SG_4^2 (2.30)–(2.32), которое полезно при анализе линейризованной супергравитации,

$$G^{m++} = g^{m++} + 2i(\sigma^m)_{\mu\dot{\nu}} [\Theta^{\mu-} \bar{h}^{\dot{\nu}+3} - \bar{\Theta}^{\dot{\nu}-} h^{\mu+3}], \quad (3.9)$$

$$G^{5++} = g^{5++} - 2i\Theta^{\mu-} h_{\mu}^{+3} - 2i\bar{\Theta}^{\dot{\mu}-} \bar{h}_{\dot{\mu}}^{+3}, \quad (3.10)$$

где введены операторы

$$\Theta^{\mu-} = \frac{i}{2\Box} \partial^{\mu\nu} \overline{D}_{\nu}^{-}, \quad \overline{\Theta}^{\dot{\mu}-} = -\frac{i}{2\Box} \partial^{\nu\dot{\mu}} D_{\nu}^{-}. \quad (3.11)$$

Очевидно, что можно восстановить локальность представления при переходе к переменным $g_{\dot{\mu}}^{(+3)} = \Box^{-1} h_{\dot{\mu}}^{(+3)}$ размерности 3/2, однако при этом меняется размерность соответствующих компонентных полей.

Нетрудно установить соотношения между вспомогательными В-суперполями g и локальными препотенциалами h :

$$g^{m++} = h^{m++} - \frac{1}{\Box} (\sigma^m)_{\mu\nu} (\partial^{\mu\dot{\rho}} \bar{\partial}_{\dot{\rho}}^{-} \bar{h}^{\nu(+3)} + \partial^{\rho\nu} \partial_{\rho}^{-} h^{\mu(+3)}), \quad (3.12)$$

$$g^{5++} = h^{5++} + \frac{1}{\Box} (\partial^{\mu\dot{\rho}} \bar{\partial}_{\dot{\rho}}^{-} h_{\mu}^{(+3)} - \partial^{\rho\dot{\mu}} \partial_{\rho}^{-} \bar{h}_{\dot{\mu}}^{(+3)}). \quad (3.13)$$

В силу нелокальности этих соотношений нужно быть осторожным при изучении связи между полевыми компонентами этих суперполевых представлений. В различных трактовках калибровочной симметрии компоненты суперполей g^{M++} могут отличаться от стандартного набора компонент суперполей h^{M++} (2.21)–(2.23).

Рассмотрим аддитивные калибровочные преобразования суперполей $g^{\hat{m}++}$, индуцированные линейаризованными преобразованиями $h^{\hat{m}++}$:

$$\delta_0 g^{m++} = D^{++} l^m = D^{++} \left[\lambda^m - \frac{1}{\Box} (\sigma^m)_{\mu\nu} (\partial^{\mu\dot{\rho}} \bar{\partial}_{\dot{\rho}}^{-} \bar{\lambda}^{\nu+} + \partial^{\rho\nu} \partial_{\rho}^{-} \lambda^{\mu+}) \right], \quad (3.14)$$

$$\delta_0 g^{5++} = D^{++} l^5 = D^{++} \left[\lambda^5 - \frac{1}{\Box} (\partial^{\mu\dot{\rho}} \bar{\partial}_{\dot{\rho}}^{-} \lambda_{\mu}^{+} - \partial^{\rho\dot{\mu}} \partial_{\rho}^{-} \bar{\lambda}_{\dot{\mu}}^{+}) \right]. \quad (3.15)$$

В этом случае преобразования нелокальны и компоненты $g^{\hat{m}++}$ представляют собой нелокальные комбинации стандартных компонент. Если же считать $g^{\hat{m}++}$ и параметры $l^{\hat{m}}$ независимыми аналитическими суперполями, то состав вспомогательных компонент может существенно измениться. Подобный вариант мы здесь развивать не будем.

4. РЕШЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ СВЯЗЕЙ SG_4^2

Решение основного условия грассмановой аналитичности в гармоническом подходе позволяет построить все основные геометрические величины SG_4^2 : супертетраду, связность, а также тензоры кручения и кривизны.

В гармоническом формализме SG_4^2 наряду с базисным оператором (2.24) вводится также второй инвариантный гармонический оператор

$$\Delta^{--} = D^{--} + G^{--}, \quad G^{--} = h^{M--} \partial_M^A = G^{M--} D_M^A, \quad (4.1)$$

где рассмотрены соответствующие коэффициенты разложения в различных базисах. В-суперполя $G^{\hat{m}--}$, $G^{\dot{\mu}-}$ и $G^{\dot{\mu}(-3)}$ играют важную роль в геометрии супергравитации. Они могут быть выражены через базисные суперполя $G^{\hat{m}++}$ с помощью теории возмущений.

Калибровочные преобразования В-суперполей G^{M--} определяются из условия инвариантности оператора Δ^{--} :

$$\delta G^{m--} = \Delta^{--} \Lambda^m + 2i(\sigma^m)_{\mu\dot{\nu}} (G^{\mu-} \bar{\lambda}^{\dot{\nu}-} - \bar{G}^{\dot{\nu}-} \lambda^{\mu-}), \quad (4.2)$$

$$\delta G^{5--} = \Delta^{--} \Lambda^5 - 2iG^{\mu-} \lambda_{\mu}^- - 2i\bar{G}^{\dot{\mu}-} \bar{\lambda}_{\dot{\mu}}^-, \quad (4.3)$$

$$\delta G^{\hat{\mu}-} = \Delta^{--} \lambda^{\hat{\mu}+} - \lambda^{\hat{\mu}-}, \quad \delta G^{\hat{\mu}(-3)} = \Delta^{--} \lambda^{\hat{\mu}-}. \quad (4.4)$$

Фундаментальной связью гармонического формализма SG_4^2 является коммутационное соотношение между инвариантными гармоническими производными [10, 11]

$$[\Delta^{++}, \Delta^{--}] = [(D^{++} + G^{++}), (D^{--} + G^{--})] = D^0. \quad (4.5)$$

Это гармоническое уравнение имеет явное итерационное решение [11]

$$G^{--} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int du_1 \dots du_n \frac{G^{++}(z, u_1) \dots G^{++}(z, u_n)}{(u^+ u_1^+) \dots (u_n^+ u^+)}. \quad (4.6)$$

Решение для функций h^{M--} имеет аналогичную структуру во всех порядках теории возмущений.

В-ковариантные уравнения для коэффициентов разложения этого оператора имеют следующий вид:

$$D^{++} G^{m--} - D^{--} G^{m++} + G^{++} G^{m--} - G^{--} G^{m++} + \\ + 2i(\sigma^m)_{\mu\dot{\nu}} (G^{\mu(+3)} \bar{G}^{\dot{\nu}(-3)} + G^{\mu(-3)} \bar{G}^{\dot{\nu}(+3)}) = 0, \quad (4.7)$$

$$D^{++} G^{5--} - D^{--} G^{5++} + G^{++} G^{5--} - G^{--} G^{5++} - \\ - 2iG^{\mu(+3)} G_{\mu}^{(-3)} + 2i\bar{G}^{\dot{\mu}(+3)} \bar{G}_{\dot{\mu}}^{(-3)} = 0, \quad (4.8)$$

$$D^{++} G^{\hat{\mu}-} - D^{--} G^{\hat{\mu}(+3)} + G^{++} G^{\hat{\mu}-} - G^{--} G^{\hat{\mu}(+3)} = 0, \quad (4.9)$$

$$G^{\hat{\mu}-} = (D^{++} + G^{++}) G^{\hat{\mu}(-3)}. \quad (4.10)$$

Эти уравнения легко решаются по теории возмущений. Например, в первых двух порядках имеем соответственно

$$G_{(1)}^{\hat{m}--}(z, u) = \int \frac{du_1}{(u^+ u_1^+)^2} G^{\hat{m}++}(z, u_1), \quad (4.11)$$

$$G_{(1)}^{\hat{\mu}(-2\pm 1)}(z, u) = \int \frac{du_1 (u^{\pm} u_1^{\mp})}{(u^+ u_1^+)^2} G^{\hat{\mu}(+3)}(z, u_1), \quad (4.12)$$

$$G_{(2)}^{m--}(z, u) = \int \frac{du_1 du_2}{(u^+ u_1^+)(u_1^+ u_2^+)(u_2^+ u^+)} \{G^{++}(z, u_1) G^{m++}(z, u_2) + \\ + 2i(u_1^- u_2^-)(\sigma^m)_{\mu\dot{\nu}} G^{\mu(+3)}(z, u_1) \bar{G}^{\dot{\nu}(+3)}(z, u_2)\}, \quad (4.13)$$

$$G_{(2)}^{5--}(z, u) = \int \frac{du_1 du_2}{(u^+ u_1^+)(u_1^+ u_2^+)(u_2^+ u^+)} \{G^{++}(z, u_1) G^{5++}(z, u_2) - \\ - i(u_1^- u_2^-) [G^{\mu(+3)}(z, u_1) G_{\mu}^{(+3)}(z, u_2) - \bar{G}_{\dot{\mu}}^{(+3)}(z, u_1) \bar{G}^{\dot{\mu}(+3)}(z, u_2)]\}, \quad (4.14)$$

где рассматриваются гармонические обобщенные функции $(u_1^{k\pm} u_{k2}^{\pm})$ и $(u_1^{k+} u_{k2}^+)^{-n}$ [12].

В нелокальном представлении (3.9), (3.10) имеет смысл рассматривать только решение в первом порядке:

$$G_{(1)}^{m--} = g_{(1)}^{m--} + 2i(\sigma^m)_{\mu\dot{\nu}} \left[\Theta^{\mu-} \bar{h}_{(1)}^{\dot{\nu}-} - \bar{\Theta}^{\dot{\nu}-} h_{(1)}^{\mu-} - \Theta^{\mu+} \bar{h}_{(1)}^{\dot{\nu}(-3)} + \bar{\Theta}^{\dot{\nu}+} h_{(1)}^{\mu(-3)} \right], \quad (4.15)$$

$$G_{(1)}^{5--} = g_{(1)}^{5--} + 2i \left[\Theta_{\mu}^{-} h_{(1)}^{\mu-} + \bar{\Theta}_{\dot{\mu}}^{-} \bar{h}_{(1)}^{\dot{\mu}-} - \Theta_{\mu}^{+} h_{(1)}^{\mu(-3)} - \bar{\Theta}_{\dot{\mu}}^{+} \bar{h}_{(1)}^{\dot{\mu}(-3)} \right], \quad (4.16)$$

где

$$\Theta^{\mu+} = \frac{i}{2\Box} \partial^{\mu\dot{\nu}} D_{\dot{\nu}}^{+},$$

а также определены величины $g_{(1)}^{\hat{m}-}$ и $h_{(1)}^{\dot{\mu}(-2\pm 1)}$, которые выражаются через соответствующие препотенциалы по аналогии с (4.11), (4.12).

5. СУПЕРПОЛЕВЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ, СУПЕРТЕТРАДЫ И СВЯЗНОСТИ

Дифференциальная геометрия SG_4^2 рассматривалась в голономном базисе [15]. Мы будем исследовать в В-ковариантном базисе фоновую суперсимметрию основных геометрических объектов. По аналогии с формализмом $D = 4$, $N = 1$ конформной супергравитации [21] в HSS можно ввести так называемый *почти ковариантный* базис дифференциальных операторов E_B , который помогает определить В-суперполевые блоки, необходимые для построения супертетрады связностей теории. Начальная ступень этой конструкции связана со спинорным оператором

$$E_{\bar{\alpha}}^{-} \equiv [D_{\bar{\alpha}}^{+}, \Delta^{--}] = -D_{\bar{\alpha}}^{-} + [D_{\bar{\alpha}}^{+}, G^{--}]. \quad (5.1)$$

Определим также векторный и скалярные операторы

$$E_a = -\frac{i}{4}(\bar{\sigma}_a)^{\dot{\beta}\alpha} \{D_{\alpha}^{+}, E_{\dot{\beta}}^{-}\} = \partial_a + \frac{i}{4}(\bar{\sigma}_a)^{\dot{\beta}\alpha} \{D_{\alpha}^{+}, [G^{--}, \bar{D}_{\dot{\beta}}^{+}]\}, \quad (5.2)$$

$$E_5 = \frac{i}{2} \{D^{\alpha+}, E_{\bar{\alpha}}^{-}\} = \partial_5 - \frac{i}{2} \{D^{\alpha+}, [G^{--}, D_{\alpha}^{+}]\}, \quad (5.3)$$

$$\bar{E}_5 = \frac{i}{2} \{\bar{D}^{\dot{\alpha}+}, E_{\bar{\alpha}}^{-}\}. \quad (5.4)$$

По построению компоненты базиса E_B удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} [\Delta^{++}, E_{\bar{\alpha}}^{-}] &= D_{\bar{\alpha}}^{+}, & [\Delta^{--}, E_{\bar{\alpha}}^{-}] &= 0, \\ [\Delta^{\pm\pm}, E_a] &= [\Delta^{\pm\pm}, E_5] = [\Delta^{\pm\pm}, \bar{E}_5] = 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Разложение почти ковариантных операторов определяет матричные элементы супертетрады $E_B = G_B^M D_M^A$. Соответствующая плотность $E = \text{Ber } G_B^M$ имеет правильный закон преобразования

$$\delta E = (\partial_m \Lambda^m + D_{\dot{\mu}}^{-} \lambda^{\dot{\mu}+} - D_{\dot{\mu}}^{+} \lambda^{\dot{\mu}-}) E. \quad (5.6)$$

Отметим, что плотность E в этой теории определяется однозначно и не зависит от выбора базиса, однако мы предпочитаем использовать ее выражение через В-суперполя.

По построению эта величина В-ковариантна и не зависит от скалярного суперполя G^{5++} . В линейном приближении

$$E_{(1)} = D_{\dot{\mu}}^+ G_{(1)}^{\dot{\mu}-} - \frac{i}{4} D^{\alpha+} \overline{D}^{\dot{\beta}+} G_{\alpha\dot{\beta}(1)}^{--}. \quad (5.7)$$

Члены высших порядков в E вычисляются непосредственно из разложений супертетрады или с помощью уравнения

$$[D^{++} + G^{++} - \partial_m^A G^{m++} - D_{\dot{\mu}}^- G^{\dot{\mu}(+3)}] E = 0. \quad (5.8)$$

Калибровочно-ковариантный $SL(2, C)$ -базис в гармоническом суперпространстве SG_4^2 построен в работе [15]. Вместо плоского оператора D_{α}^+ в этом базисе определяется $SL(2, C)$ -ковариантный спинорный оператор

$$\Delta_{\alpha}^+ \equiv u_i^+ \Delta_{\alpha}^i = D_{\alpha}^+ + F_{\alpha}^{\dot{\mu}} \overline{D}_{\dot{\mu}}^+, \quad (5.9)$$

где введена матрица

$$F_{\alpha}^{\dot{\mu}} = \Delta_{\alpha}^+ \bar{\psi}^{\dot{\mu}-} = D_{\alpha}^+ \bar{\psi}^{\dot{\nu}-} (1 - \overline{D}^+ \bar{\psi}^-)^{-1\dot{\mu}}_{\dot{\nu}}, \quad (5.10)$$

которая выражается через функцию перехода $\bar{\psi}^{\dot{\mu}-}$ в так называемый гибридный базис.

Мы рассмотрим только линейные по κ члены в матрице (5.10)

$$F_{\alpha\dot{\mu}(1)} = u_k^+ D_{\alpha}^+ \overline{G}_{\dot{\mu}(1)}^{k--} + \frac{i}{8} (\sigma_n)_{\alpha\dot{\mu}} (D^+)^2 G_{(1)}^{n--} = D_{\alpha}^+ \bar{\psi}_{\dot{\mu}(1)}^-. \quad (5.11)$$

В $SL(2, C)$ -базисе определена также функция F , которая содержит препотенциал G^{5++} [15]. В линейном приближении

$$F_{(1)} = -\frac{1}{2} D_{\mu}^+ G_{(1)}^{\mu-} - \frac{i}{8} (D^+)^2 G_{(1)}^{5--}, \quad (5.12)$$

$$\hat{\delta}_{(0)} F_{(1)} = \frac{1}{2} D_{\mu}^+ \lambda^{\mu-}. \quad (5.13)$$

Функции F , $\overline{F}$, $F_{\alpha}^{\dot{\mu}}$ и $\overline{F}_{\dot{\alpha}}^{\mu}$ входят в определение компонент суперполевого связности.

6. В-СУПЕРПОЛЕВОЕ ДЕЙСТВИЕ SG_4^2

В гармоническом формализме SG_4^2 можно рассматривать итерационное построение В-ковариантного действия $S^{\text{cl}} = \sum S_{(n)}^{\text{cl}}$, которое начинается с квадратичного действия линеаризованной теории $S_{(2)}^{\text{cl}}$, а члены более высокого порядка по суперполям G должны восстанавливаться с помощью калибровочной симметрии

$$\hat{\delta}_{(1)} S_{(n)}^{\text{cl}} + \hat{\delta}_{(0)} S_{(n+1)}^{\text{cl}} = 0. \quad (6.1)$$

Линеаризованное гармоническое действие построено в работе [19] и имеет вид

$$S_{(2)}^{\text{cl}} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{12}z du \left[G^{5++} G_{(1)}^{5--} + \frac{1}{2} G^{m++} G_{m(1)}^{--} \right], \quad (6.2)$$

где использована формула (4.11). Это выражение представляет собой квадратичную форму, в которой каждое слагаемое похоже на действие абелева калибровочного суперполя V^{++} в полном гармоническом суперпространстве. Следует отметить, что эта квадратичная форма обладает дополнительной $SO(3, 2)$ -симметрией, по отношению к которой компоненты 5-вектора $G^{\hat{m}++}$ имеют нестандартную нормировку.

С использованием WZ-калибровки (2.21)–(2.23) нетрудно проверить, что это действие эквивалентно компонентному действию линеаризованной SG_4^2 . Особенно просто это проверяется для квадратичных членов по вспомогательным компонентам, при этом соответствующие члены в $G_{(1)}^{\hat{m}--}$ в координатах z_A^M вычисляются с помощью соотношений типа

$$D^{--}[(\theta^+)^2 \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} u_k^-] = D^{++} \left[(\theta^+ \theta^-) \bar{\theta}^{\dot{\alpha}-} u_k^- + \frac{1}{2} (\theta^-)^2 \bar{\theta}^{\dot{\alpha}+} u_k^- - \frac{1}{2} (\theta^-)^2 \bar{\theta}^{\dot{\alpha}-} u_k^+ \right], \quad (6.3)$$

$$D^{--}[(\theta^+)^2 \theta^{\alpha-} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}+}] = -D^{++}[(\theta^-)^2 \theta^{\alpha+} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}-}]. \quad (6.4)$$

Полезно рассмотреть и эквивалентное аналитическое представление

$$S_{(2)}^{\text{cl}} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d\zeta^{(-4)} du \left[G^{5++} T_{(1)}^{5++} + \frac{1}{2} G^{m++} T_{m(1)}^{++} + G^{\hat{\mu}(+3)} T_{\hat{\mu}(1)}^+ \right], \quad (6.5)$$

где введены линеаризованные компоненты кручения, которые легко выразить через спинорные производные гармонических суперполей $G_{(1)}^{\hat{m}--}$ при сравнении различных интегральных представлений $S_{(2)}$ и использовании формул (П.1) приложения:

$$T_{\mu(1)}^+ = -\frac{i}{4} (\bar{D}^+)^2 D_{\mu}^+ G_{(1)}^{5--} - \frac{i}{8} (D^+)^2 \bar{D}^{\dot{\nu}+} G_{\mu\dot{\nu}(1)}^{--}, \quad (6.6)$$

$$D_{\nu}^+ T_{\mu(1)}^+ = -2i\varepsilon_{\nu\mu} T_{(1)}^{5++}, \quad \bar{D}_{\dot{\nu}}^+ T_{\mu(1)}^+ = -iT_{\mu\dot{\nu}(1)}^{++}. \quad (6.7)$$

Отметим, что линеаризованные компоненты кручения удовлетворяют условиям

$$D^{++} T_{\hat{\mu}(1)}^+ = 0, \quad D_{\hat{\alpha}}^+ D_{\hat{\beta}}^+ T_{\hat{\mu}(1)}^+ = 0. \quad (6.8)$$

Действие $S_{(2)}$ инвариантно относительно линеаризованных преобразований $\hat{\delta}_{(0)} G_{\hat{m}}^{++} = D^{++} \Lambda_{\hat{m}}$.

Используя представление (3.1), (3.2) для суперполей $G^{\hat{m}++}(\Psi)$ в действии (6.2), мы можем получить линеаризованное уравнение движения SG_4^2 варьированием по спинорному препотенциалу $\Psi^{\mu-}$:

$$T_{\mu(1)}^+(\Psi) = 0. \quad (6.9)$$

В нелокальном суперполевым представлении (3.9), (3.10) можно построить инвариант линеаризованных преобразований для аналитического В-суперполя g^{5++}

$$\int \frac{d^{12}z du_1 du_2}{(u_1^+ u_2^+)^2} g^{5++}(u_1) g^{5++}(u_2) \quad (6.10)$$

и аналогичный независимый инвариант для g^{m++} . По отношению к локальным линеаризованным преобразованиям в исходных суперполевых переменных существует только один локальный инвариант нужной размерности (6.2).

С помощью калибровочного спинорного суперполя можно также построить нелокальный инвариант

$$\int \frac{d^{12}z du_1 du_2}{\square(u_1^+ u_2^+)^3} h^{\mu(+3)} \left[\partial_{\mu\nu} - \frac{i}{2} (u_1^+ u_2^+) D_{\mu 1}^- \bar{D}_{\nu 2}^- \right] \bar{h}^{\nu(+3)}. \quad (6.11)$$

Нелокальные инварианты могут использоваться в квантовом эффективном действии этой теории.

Отметим, что возможно также применение альтернативного подхода, в котором фоновое суперпространство связано с плоской суперсимметрией без центрального заряда B_4^2 (B')

$$\Delta^{++} = D_4^{++} + G^{m++} \partial_m^A + H^{5++} \partial_5^A - G^{\hat{\mu}(+3)} (D_4^-)_{\hat{\mu}}, \quad (6.12)$$

где введены B' -ковариантные гармонические и спинорные производные D_4^{++} и D_4^- , которые не содержат производной ∂_5^A . Преобразования суперполей G^{m++} и $G^{\hat{\mu}(+3)}$ одинаковы в разных фоновых базисах, тогда как аналитический компенсатор преобразуется ковариантно только по отношению к суперсимметрии B' , а его В-преобразования содержат неоднородные члены, зависящие от θ . Отметим, что в калибровочной теории с центральными зарядами связь различных гармонических суперполевых представлений и фоновых базисов обсуждалась в работах [13, 22, 23].

Нелинейное действие SG_4^2 в работе [15] построено как калибровочно-инвариантное действие аналитического компенсатора (6.12)

$$S(H^5) = \int d^{12}z du E^{-1} H^{5++} H^{5--},$$

которое по определению обладает независимой B' -инвариантностью. Использование в этой формуле выражения $H^{5\pm\pm}$ через В-суперполя $G^{\hat{m}++}$ приводит к появлению членов, явно содержащих спинорные координаты. В частности, квадратичное действие содержит несколько подобных слагаемых. Можно, по-видимому, построить разложение этого нелинейного действия по суперполям G и проследить за перестройкой фоновой суперсимметрии. Однако мы предпочитаем простые итерационные построения с явной В-ковариантностью.

7. О РАЗВИТИИ ГАРМОНИЧЕСКОГО ФОРМАЛИЗМА SG_4^2

Наше исследование может использоваться для суперполевого квантования $N = 2$ супергравитации в плоском фоновом суперпространстве по аналогии с суперполевым формализмом квантования $N = 1$ супергравитации [17, 18]. Для решения этой задачи наиболее перспективным кажется использование представления гравитационных суперполей через спинорное гармоническое суперполе $\Psi_{\alpha}^{-}(z, u)$. Более интересной и трудной задачей является исследование непертурбативной квантовой структуры теории с учетом результатов, которые могут быть получены по теории возмущений с помощью суперполевых методов и дуальных преобразований, пока недостаточно изученных в супергравитации. Мы обсудим одну из возможностей дуального описания $N = 2$ супергравитации в гармоническом подходе с помощью альтернативных суперполевых переменных.

В нелинейной SG_4^2 -теории суперполевые связи сводятся в стандартном HSS-формализме к кинематическому линейному условию аналитичности, а нелинейные уравнения движения для суперполей G^{M++} представляют собой дополнительные динамические ограничения на компоненты кручения.

По аналогии с дуальной формулировкой $N = 2$ суперсимметричной калибровочной теории [20] мы можем рассмотреть дуальный гармонический формализм линеаризованной SG_4^2 , в котором сначала решается уравнение для спинорной компоненты кручения размерности $d = -1/2$, а затем возникает динамическое условие аналитичности. В дуальном подходе базисным оператором считается $\Delta^{--} = D^{--} + G^{--}$, а линеаризованное уравнение движения стандартного формализма с аналитическим оператором G^{++} превращается в разрешимую линейную связь $T_{\mu(1)}^{+} = 0$ на дуальные суперполя G^{M--} . Решение этой связи выражается через новые неаналитические спинорные препотенциалы $A^{\dot{\mu}(-3)}$ размерности $3/2$:

$$\begin{aligned} G^{5--}(A) &= D_{\mu}^{+} A^{\mu(-3)} + \bar{D}_{\dot{\mu}}^{+} \bar{A}^{\dot{\mu}(-3)}, \\ G_{\mu\nu}^{--}(A) &= \bar{D}_{\dot{\nu}}^{+} A_{\mu}^{(-3)} - D_{\mu}^{+} \bar{A}_{\dot{\nu}}^{(-3)}, \\ T_{\mu(1)}^{+}(A) &\sim (\bar{D}^{+})^2 D_{\mu}^{+} G^{5--}(A) + \frac{1}{2} (D^{+})^2 \bar{D}^{\dot{\nu}+} G_{\mu\nu}^{--}(A) \equiv 0. \end{aligned}$$

Оператор G^{++} в этом формализме вычисляется с помощью уравнения (4.5) и вне массовой поверхности не удовлетворяет условию аналитичности. Дуальным уравнением движения становится динамическое условие нулевой кривизны

$$[D_{\dot{\alpha}}^{+}, \Delta^{++}] = 0,$$

которое эквивалентно линеаризованным уравнениям первого порядка для физических полей SG_4^2 и исчезновению всех вспомогательных компонент.

Уравнения дуального формализма SG_4^2 для препотенциалов $A_{\dot{\mu}}^{(-3)}$ эквивалентны стандартным уравнениям для линейных суперполей G , однако немассовые структуры в альтернативных формулировках существенно различаются. В частности, дуальный формализм имеет бесконечное число вспомогательных компонент гравитационного супермультиплета, которые исчезают только на массовой поверхности.

Автор признателен Е. А. Иванову за интересные обсуждения.

Работа частично поддержана грантом РФФИ-96-02-17634, грантом РФФИ-DFG-96-02-00180, грантами INTAS-93-127-ext и INTAS-96-0308, а также грантом Узбекского фонда фундаментальных исследований № 11/97.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь мы рассмотрим некоторые применяемые в работе определения и соотношения, связанные с плоским гармоническим суперпространством [10]. Гармонические производные ∂^{++} , ∂^{--} и ∂^0 удовлетворяют соотношениям алгебры Ли $SU(2)$ и определяются своим действием на гармониках:

$$\begin{aligned} [\partial^{++}, \partial^{--}] &= \partial^0, & [\partial^0, \partial^{\pm\pm}] &= \pm 2\partial^{\pm\pm}, \\ \partial^{++} u_i^+ &= 0, & \partial^{++} u_i^- &= u_i^+, & \partial^0 u_i^\pm &= \pm u_i^\pm, \\ \partial^{--} u_i^- &= 0, & \partial^{--} u_i^+ &= u_i^-. \end{aligned}$$

Голономный базис во множестве дифференциальных операторов ∂^A содержит частные производные по координатам z_A^M (2.1):

$$\partial^A = (\partial^{++}, \partial^{--}, \partial_m^A, \partial_5^A, \partial_\mu^-, \bar{\partial}_\mu^-, \partial_\mu^+, \bar{\partial}_\mu^+).$$

Голономный базис в плоских вещественных координатах z^M содержит операторы $\partial/\partial z^M$.

$B_4^2(Z)$ -ковариантные гармонические производные имеют вид

$$\begin{aligned} D^{++} &= \partial^{++} - 2i\theta^{\mu+}\bar{\theta}^{\nu+}\partial_{\mu\nu}^A + i[(\theta^+)^2 - (\bar{\theta}^+)^2]\partial_5^A + \theta^{\mu+}\partial_\mu^+ + \bar{\theta}^{\dot{\mu}+}\bar{\partial}_\mu^+, \\ D^{--} &= \partial^{--} - 2i\theta^{\mu-}\bar{\theta}^{\nu-}\partial_{\mu\nu}^A + i[(\theta^-)^2 - (\bar{\theta}^-)^2]\partial_5^A + \theta^{\mu-}\partial_\mu^- + \bar{\theta}^{\dot{\mu}-}\bar{\partial}_\mu^-, \end{aligned}$$

где $(\theta^\pm)^2 = \theta^{\alpha\pm}\theta_\alpha^\pm$ и $(\bar{\theta}^\pm)^2 = \bar{\theta}_{\dot{\beta}}^\pm\bar{\theta}^{\dot{\beta}\pm}$.

Приведем также известные выражения для В-ковариантных спинорных производных:

$$\begin{aligned} D_\mu^- &= -\frac{\partial}{\partial\theta^{\mu+}} + 2i\bar{\theta}^{\nu-}\partial_{\mu\nu}^A - 2i\theta_\mu^-\partial_5^A, \\ \bar{D}_{\dot{\nu}}^- &= -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\nu}+}} - 2i\theta^{\mu-}\partial_{\mu\dot{\nu}}^A - 2i\bar{\theta}_{\dot{\nu}}^-\partial_5^A, \\ D_\mu^+ &= \frac{\partial}{\partial\theta^{\mu+}} \equiv \partial_\mu^+, & \bar{D}_{\dot{\mu}}^+ &= \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\mu}+}} \equiv \bar{\partial}_\mu^+. \end{aligned}$$

Эти операторы представляют собой компоненты В-ковариантного базиса

$$D^A = (D^{++}, D^{--}, \partial_m^A, \partial_5^A, -D_\mu^-, D_\mu^+).$$

Альтернативный В-ковариантный базис не зависит от гармоник

$$D_M = (\partial_m, \partial_5, D_\mu^k), \quad [D_M, D^{\pm\pm}] = 0$$

и содержит ковариантные спинорные производные в координатах z^M

$$D_\mu^k = \partial_\mu^k + i\bar{\theta}^{k\dot{\nu}}\partial_{\mu\dot{\nu}} - i\theta_\mu^k\partial_5, \quad \bar{D}_{\dot{\mu}}^k = \bar{\partial}_{\dot{\mu}}^k - i\theta^{\nu k}\partial_{\nu\dot{\mu}} - i\bar{\theta}_{\dot{\mu}}^k\partial_5.$$

Мы используем следующие сокращенные обозначения скалярных элементов алгебры спинорных производных:

$$(D^\pm)^2 = D^{\alpha\pm}D_\alpha^\pm, \quad (\bar{D}^\pm)^2 = \bar{D}_{\dot{\beta}}^\pm\bar{D}^{\dot{\beta}\pm},$$

$$(D^\pm)^4 = \frac{1}{16}(D^\pm)^2(\bar{D}^\pm)^2, \quad (D)^4 = \frac{1}{16}(D^+)^2(D^-)^2.$$

Эти элементы входят в определение мер интегрирования по полному плоскому суперпространству и аналитической меры:

$$d^{12}z_A = d^4x_A (D^-)^4(D^+)^4, \quad d^{12}z = d^4x (D)^4(\bar{D})^4, \quad d\zeta^{(-4)} = d^4x (D^-)^4. \quad (\text{П.1})$$

Список литературы

- [1] *S. Ferrara, P. van Nieuwenhuizen.* Phys. Rev. Lett. 1976. V. 37. № 25. P. 1669.
- [2] *S. Ferrara, J. Sherk, B. Zumino.* Phys. Lett. B. 1977. V. 66. № 1. P. 35; Nucl. Phys. B. 1977. V. 121. № 3. P. 393.
- [3] *E. S. Fradkin, M. A. Vasiliev.* Lett. Nuovo Cimento. 1979. V. 25. № 3. P. 79; Phys. Lett. B. 1979. V. 85. № 1. P. 47.
- [4] *B. de Wit, J. W. van Holten, A. van Proeyen.* Nucl. Phys. B. 1979. V. 155. № 2. P. 530; 1980. V. 167. № 1–2. P. 186; 1981. V. 184. № 1. P. 77.
- [5] *P. Breitenlohner, M. Sohnius.* Nucl. Phys. B. 1980. V. 165. № 2. P. 483.
- [6] *K. S. Stelle, P. C. West.* Phys. Lett. B. 1980. V. 90. № 4. P. 393.
- [7] *L. Castellani, P. van Nieuwenhuizen, S. J. Gates.* Phys. Rev. D. 1980. V. 22. P. 2364.
- [8] *E. Sokatchev.* Phys. Lett. B. 1981. V. 100. № 6. P. 466.
- [9] *S. J. Gates, W. Siegel.* Nucl. Phys. B. 1982. V. 195. № 1. P. 39.
- [10] *A. Galperin, E. Ivanov, S. Kalitzin, V. Ogievetsky, E. Sokatchev.* Class. Quantum Gravit. 1984. V. 1. № 4. P. 469.
- [11] *Б. М. Зупник.* Решение суперполевых связей шестимерных суперсимметричных теорий в гармоническом суперпространстве. В кн.: Теоретико-групповые методы в физике. Т. 2. М.: Наука, 1986. С. 52.
- [12] *A. Galperin, E. Ivanov, V. Ogievetsky, E. Sokatchev.* Class. Quantum Gravit. 1985. V. 2. № 5. P. 601.
- [13] *Б. М. Зупник.* ЯФ. 1986. Т. 44. № 3. С. 794.
- [14] *Б. М. Зупник.* ТМФ. 1986. Т. 69. № 2. С. 207; Phys. Lett. B. 1987. V. 183. P. 175.
- [15] *A. Galperin, Ahn Ky Nguen, E. Sokatchev.* Class. Quantum Gravit. 1987. V. 4. № 5. P. 1235.
- [16] *A. Galperin, E. Ivanov, V. Ogievetsky, E. Sokatchev.* Class. Quantum Gravit. 1987. V. 4. № 5. P. 1255.
- [17] *S. J. Gates, M. T. Grisaru, M. Roček, W. Siegel.* Superspace or one thousand and one lessons in supersymmetry. Massachusetts: Benjamin Cummings, 1983.
- [18] *Б. М. Зупник, Д. Г. Пак.* ЯФ. 1985. Т. 42. С. 710.
- [19] *Б. М. Зупник, L. V. Tolstonog.* The linearized supergravity in the harmonic superspace. Preprint PTI-152-91-FVE. Tashkent: Physical Technical Institute, 1991.
- [20] *Б. М. Зупник.* Phys. Lett. B. 1996. V. 375. P. 170; *Б. М. Зупник.* ЯФ. 1996. Т. 59. С. 2284.
- [21] *Б. М. Зупник.* ЯФ. 1982. Т. 36. С. 779.
- [22] *I. L. Buchbinder, E. I. Buchbinder, E. A. Ivanov, S. M. Kuzenko, B. A. Ovrut.* Phys. Lett. B. 1997. V. 412. P. 309.
- [23] *E. A. Ivanov, S. V. Ketov, B. M. Zupnik.* Nucl. Phys. B. 1998. V. 509. № 1. P. 53.

Поступила в редакцию 30.III.98 г.