Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Касати, Дисперсионные деформации гамильтоновой структуры уравнений Эйлера, *ТМФ*, 2016, том 188, номер 3, 386–396

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9042>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 17:24:26

© 2016 г.

М. Касати*

ДИСПЕРСИОННЫЕ ДЕФОРМАЦИИ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СТРУКТУРЫ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА

Уравнения Эйлера для двумерной жидкости можно представить в гамильтоновом виде, в котором скобка Пуассона является скобкой Ли–Пуассона, связанной с алгеброй Ли бездивергентных векторных полей. Для двумерной гидродинамики идеальных жидкостей предложен вывод скобок Пуассона с помощью редукции скобки, соответствующей полной алгебре векторных полей. С учетом результатов некоторых последних исследований деформаций скобок Ли–Пуассона векторных полей изучаются дисперсионные деформации скобок Пуассона уравнений Эйлера; показано, что вплоть до второго порядка эти деформации являются тривиальными.

Ключевые слова: уравнения Эйлера, скобка Пуассона, вертексная пуассонова алгебра.

DOI: 10.4213/tmf9042

1. ВВЕДЕНИЕ

Идея о том, что динамику жидкостей можно объяснить на языке бесконечномерных групп Ли, принадлежит Арнольду и восходит к 1960-м годам. В своей знаменитой статье [1] Арнольд доказал, что существует соответствие между движением идеальной жидкости и геодезическими правоинвариантной метрики, отвечающей кинетической энергии самой жидкости. Основная идея заключается в том, что конфигурационное пространство системы является группой Ли сохраняющих объем диффеоморфизмов области, занятой жидкостью; диффеоморфизмы должны сохранять объем в силу несжимаемости идеальной жидкости.

Работа частично поддержана Italian National Institute of High Mathematics, Group of Mathematical Physics Young Researcher (проект “Geometric and Analytic aspects of Integrable Systems”, 2014) и Italian Ministry of Universities and Researches (грант PRIN “Geometric and analytic theory of Hamiltonian systems in finite and infinite dimensions”, 2010–2011).

*Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati, Trieste, Italy.
E-mail: matteo.casati@sissa.it

В настоящей статье изучаются уравнения Эйлера для двумерной жидкости. Их можно представить в гамильтоновом виде, который по сути соответствует уравнению Гельмгольца для вихрей [2]. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \{H, \omega\}, \quad (1)$$

в котором ω – скалярная завихренность жидкости, H – функция Гамильтона, соответствующая кинетической энергии, а скобки Пуассона являются скобками Ли–Пуассона, ассоциированными с алгеброй бездивергентных векторных полей. Такая алгебра в точности совпадает с алгеброй сохраняющих объем диффеоморфизмов, введенной Арнольдом.

Мы показываем, как можно вывести скобку из более общей скобки Ли–Пуассона для векторных полей, введенной Новиковым [3] и соответствующей гамильтоновой структуре так называемого уравнения EPDiff (дифференциального уравнения Эйлера–Пуанкаре) [4]. Руководствуясь результатами наших исследований дисперсионных деформаций скобок Пуассона гидродинамического типа [5], мы изучаем аналогичные деформации пуассоновой структуры уравнения Эйлера. При нашем анализе мы пользуемся языком многомерных вертексных пуассоновых алгебр (ВПА), которые представляют весьма эффективный аппарат для проведения необходимых расчетов и в целом для изучения гамильтоновых уравнений в частных производных [6].

Хорошо известные уравнения Эйлера для двумерной идеальной жидкости имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

где $\mathbf{u} = (u, v)$ – скорость жидкости, p – давление и $\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x^2}$.

По теореме Гельмгольца о разложении векторных полей двумерная идеальная жидкость характеризуется только завихренностью

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u} = \partial_x v - \partial_y u. \quad (3)$$

Взяв ротор уравнения Эйлера, получаем так называемое уравнение Гельмгольца [7]

$$\omega_t + u \partial_x \omega + v \partial_y \omega = 0, \quad (4)$$

которое, по наблюдению Олвера, можно представить в гамильтоновом виде (1). Скобки Пуассона при этом записываются как

$$\{\omega(\mathbf{r}), \omega(\mathbf{r}')\} = \left(\partial_x \omega(\mathbf{r}) \frac{d}{dy} - \partial_y \omega(\mathbf{r}) \frac{d}{dx} \right) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (5)$$

где введены обозначения $\mathbf{r} = (x, y)$ и $\mathbf{r}' = (x', y')$.

Чтобы вывести уравнение (4) из (1), вспомним, что поле скоростей двумерной жидкости можно однозначно задать с помощью функции потока ψ – скалярного аналога векторного потенциала для соленоидального поля (или соленоидальной компоненты в терминах разложения Гельмгольца). По определению

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (6)$$

Следовательно, гамильтониан H можно представить в виде

$$H = \frac{1}{2} \int |\mathbf{u}(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} = \frac{1}{2} \int (\psi_x^2(\mathbf{r}) + \psi_y^2(\mathbf{r})) d\mathbf{r} = -\frac{1}{2} \int \omega(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (7)$$

где последнее выражение получено после интегрирования по частям. Подставляя в это выражение решение уравнения Пуассона $\nabla^2\psi = -\omega$, справедливость которого легко проверить, имеем

$$H = \frac{1}{2} \iint \omega(\mathbf{r}') \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \omega(\mathbf{r}) d\mathbf{r} d\mathbf{r}'; \quad (8)$$

таким образом, находим вариационную производную гамильтониана H по ω в окончательном виде:

$$\frac{\delta H}{\delta \omega(\mathbf{s})} = \psi(\mathbf{s}). \quad (9)$$

Вычисление скобки Пуассона в правой части уравнения (1) проводится по обычной общей формуле

$$\{F, G\} = \iint \frac{\delta F}{\delta \omega(\mathbf{r})} \{\omega(\mathbf{r}), \omega(\mathbf{r}')\} \frac{\delta G}{\delta \omega(\mathbf{r}')} d\mathbf{r} d\mathbf{r}', \quad (10)$$

которая при $F = H$ и $G = \omega(\mathbf{r}')$ дает $\{H, \omega\} = -u\omega_x - v\omega_y$.

2. СКОБКА ЛИ–ПУАССОНА

Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли. Рассмотрим ее дуальное пространство $\mathfrak{g}^*$. Можно ввести линейную скобку Пуассона между функциями $F, G \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, которая называется *скобкой Ли–Пуассона*. Дифференциал де Рама функций на $\mathfrak{g}^*$, который в общем случае мы будем обозначать как $dF(\alpha)$ (для $\alpha \in \mathfrak{g}^*$), является линейным отображением $T_\alpha \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$. Поскольку касательное расслоение векторного пространства совпадает с базисным пространством, дифференциал можно рассматривать как линейное отображение $\mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$, следовательно, как элемент из $\mathfrak{g}^{**}$ и, следовательно, как элемент из $\mathfrak{g}$. Имеем

$$\{F, G\}(\alpha) := \langle \alpha, [dF, dG] \rangle, \quad (11)$$

где $[dF, dG]$ – скобка Ли алгебры $\mathfrak{g}$, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – спаривание алгебры с ее дуальной.

Чтобы получить для скобки Ли–Пуассона (11) выражение в координатах, выберем базис $\{x^i\}_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}}$ алгебры $\mathfrak{g}$. В этой системе координат введем структурные константы по формуле $c_k^{ij} x^k := [x^i, x^j]_k x^k$. Выберем базис алгебры $\mathfrak{g}$ в качестве системы координат ее дуального пространства $\mathfrak{g}^*$ и как следствие получим хорошо известную формулу

$$\{x^i, x^j\} = c_k^{ij} x^k. \quad (12)$$

Конкретный вид скобок зависит от рассматриваемой алгебры Ли и, в частности, от того, является ли она конечно- или бесконечномерной.

Рассмотрим алгебру Ли векторных полей на двумерной области D . Чтобы избежать технических трудностей, предположим, что $D \equiv \mathbb{R}^2$ и что поля являются

быстроубывающими функциями от $\mathbf{r}$. В координатах $\{x^i\}_{i=1}^2$ векторное поле на D можно записать как $X(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^2 X^i(\mathbf{r}) \partial_i$; компоненты коммутатора имеют вид

$$[X, Y]^i(\mathbf{r}) = \sum X^j(\mathbf{r}) \partial_j Y^i(\mathbf{r}) - Y^j(\mathbf{r}) \partial_j X^i(\mathbf{r}).$$

Это означает, что структурные функции алгебры Ли векторных полей $\mathcal{X}$ должны иметь вид

$$C_{jk}^i(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') = \delta_j^i \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}) \partial_k \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'') - \delta_k^i \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \partial_j \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}').$$

Координатами на $\mathcal{X}^*$ является набор функций $p_i(\mathbf{r})$ таких, что интеграл

$$\int_D p_i(\mathbf{r}) v^i(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

при замене переменных ведет себя, как скаляр (здесь $v^i(\mathbf{r})$ – компоненты векторного поля). Это означает, что $p_i(\mathbf{r})$ – плотности 1-форм. Скобка Ли–Пуассона линейна по координатам и определяется структурными функциями:

$$\{p_j(\mathbf{r}'), p_k(\mathbf{r}'')\} = \int_D C_{jk}^i(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') p_i(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (13)$$

Тогда скобка Пуассона выражается через плотность как

$$\{p_i(\mathbf{r}), p_j(\mathbf{r}')\} = \left(p_i(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial x^j} + p_j(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial p_i(\mathbf{r})}{\partial x^j} \right) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (14)$$

Такое построение было предложено Новиковым [3].

Скобка Пуассона (14) представляет гамильтонову структуру уравнения EPDiff, связанную с гомеоморфизмами группы n -мерного многообразия. Уравнение EPDiff имеет важные приложения в динамике жидкостей (оно обобщает уравнение Камас-Холма) и даже в компьютерной визуализации и формировании изображений [4]. Уравнение EPDiff в покомпонентном представлении записывается как

$$\frac{\partial m_i}{\partial t} + u^j \frac{\partial x^j}{\partial m_i} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i} m_j + \frac{\partial u^j}{\partial x^j} m_i = 0, \quad (15)$$

где u^i – компоненты поля скоростей, а m_i – это моменты, сопряженные по отношению к гамильтониану

$$H = \frac{1}{2} \int \mathbf{u} \cdot \mathbf{m} = \frac{1}{2} \int \eta^{ij} m_i m_j.$$

Здесь η^{ij} обозначает метрику, обратную метрике на D . Используя пуассонову структуру (14) и заменяя p_i на m_i , можно непосредственно проверить, что уравнение

$$\frac{\partial m_i}{\partial t} = \{m_i, H\}$$

эквивалентно уравнению (15).

Проведем редукцию структуры Пуассона от $\mathcal{X}^*$ к $\mathcal{X}'^*$, где $\mathcal{X}'$ обозначает алгебру Ли бездивергентных векторных полей. Редуцируем структурные функции полей в $\mathcal{X}$

и используем их для определения редуцированной скобки Ли–Пуассона. Как уже отмечалось, в двумерном случае компоненты векторных полей можно представить через скалярную функцию потока: более компактная версия уравнения (6) имеет вид $X^i = \epsilon^{ij} \partial_j \psi$, где ϵ – двумерный символ Леви-Чивиты.

В бесконечномерном случае коммутатор двух векторных полей имеет вид

$$[X, Y]^i(\mathbf{r}) = \int_D C_{jk}^i(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}') X^j(\mathbf{r}') Y^k(\mathbf{r}'') d\mathbf{r}' d\mathbf{r}''.$$

Обозначив через ϕ функцию потока векторного поля X , а через ψ – функцию потока поля Y , перепишем интеграл как

$$[X, Y]^i(\mathbf{r}) = \int_D \tilde{C}^i(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}') \phi(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}'') d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'', \quad (16)$$

где

$$\tilde{C}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \epsilon^{il} \epsilon^{jm} \frac{\partial}{\partial x^l} \frac{\partial}{\partial y^m} C_{ij}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}). \quad (17)$$

Коммутатор двух бездивергентных векторных полей является бездивергентным вектором, следовательно, для новой функции потока должно выполняться соотношение $[X, Y]^k = \epsilon^{kn} \partial_n \chi$. После некоторых преобразований получим структурную функцию $\mathcal{C}$ полей $\mathcal{X}'$ удовлетворяющую условию $\chi(\mathbf{z}) = \int \mathcal{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \phi(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{y})$:

$$\mathcal{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \epsilon^{lm} \frac{\partial}{\partial z^m} \delta(\mathbf{z} - \mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial z^l} \delta(\mathbf{z} - \mathbf{y}). \quad (18)$$

Чтобы ввести скобку Ли–Пуассона, нужно найти сопряженный импульс функции потока. Из выражения (7) для гамильтониана видно, что вихревое поле ω играет именно эту роль. Можно прийти к выводу, что скобка Ли–Пуассона на $\mathcal{X}^*$ имеет вид, аналогичный (5):

$$\begin{aligned} \{\omega(\mathbf{x}), \omega(\mathbf{y})\} &= \int_D \epsilon^{lm} \frac{\partial}{\partial z^m} \delta(\mathbf{z} - \mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial z^l} \delta(\mathbf{z} - \mathbf{y}) \omega(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = \\ &= \left(\frac{\partial \omega(\mathbf{x})}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^2} - \frac{\partial \omega(\mathbf{x})}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x^1} \right) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (19)$$

3. ВЕРТЕКСНЫЕ ПУАССОНОВЫ АЛГЕБРЫ И ДИСПЕРСИОННЫЕ ДЕФОРМАЦИИ СКАЛЯРНЫХ СКОБОК ПУАССОНА

Язык ВПА считается весьма эффективным инструментом для изучения эволюционных гамильтоновых уравнений в частных производных [6]. В частности, он предоставляет полностью алгебраический формализм, позволяющий провести исследование гамильтоновых структур, их симметрий, интегрируемости и пр. В этом разделе мы сначала кратко описываем обозначения, связанные с многомерной ВПА, один из примеров которой связан с уравнением (5). Затем мы обсуждаем дисперсионные деформации скобок, полученные с помощью непосредственных вычислений.

3.1. Многомерная ВПА. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ полиномов от производных, порожденную завихренностью ω и ее производными. Положим $\partial_{x^1}\omega = \omega_1$, $\partial_{x^2}\omega = \omega_2$ и аналогично для производных высших порядков. Кроме того, степень полинома определим как порядок джетовых переменных. Для $f, g \in \mathcal{A}$ мы имеем следующие равенства: $\deg(fg) = \deg f + \deg g$, $\deg \omega = 0$, $\deg \omega_I = \deg \partial^I \omega = |I|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. D -мерная ПВА – это дифференциальная алгебра $(\mathcal{A}, \{\partial_i\}_{i=1}^D)$, наделенная D коммутирующими производными и билинейной операцией

$$\{\cdot \lambda \cdot\}: \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}[\lambda_1, \dots, \lambda_D] \otimes \mathcal{A},$$

которая называется λ -скобкой и обладает следующим набором свойств:

- 1) $\{\partial_i f \lambda g\} = -\lambda_i \{f \lambda g\}$,
- 2) $\{f \lambda \partial_i g\} = (\partial_i + \lambda_i) \{f \lambda g\}$,
- 3) $\{f \lambda g h\} = \{f \lambda g\} h + \{f \lambda h\} g$,
- 4) $\{f g \lambda h\} = \{f \lambda + \partial h\} g + \{g \lambda + \partial h\} f$,
- 5) $\{g \lambda f\} = -\{f - \lambda - \partial g\}$ (кососимметричность ВПА),
- 6) $\{f \lambda \{g \mu h\}\} - \{g \mu \{f \lambda h\}\} = \{\{f \lambda g\} \lambda + \mu h\}$ (тождество Якоби).

Мы ввели обозначение мультииндекса $\lambda^I = \lambda_1^{i_1} \lambda_2^{i_2} \dots \lambda_D^{i_D}$ для $I = (i_1, i_2, \dots, i_D)$. Если $\{f \lambda h\} = \sum_I B(f, h)_I \lambda^I$, то члены в правой части свойства 4 принимают вид

$$\{f \lambda + \partial h\} g = \sum_I B(f, h)_I (\lambda + \partial)^I g = \sum_I B(f, h)_I (\lambda_1 + \partial_1)^{i_1} \dots (\lambda_D + \partial_D)^{i_D} g.$$

Аналогично, свойство кососимметричности в явном виде записывается как

$$\sum_I B(g, f)_I \lambda^I = - \sum_I (-\lambda - \partial)^I B(f, g)_I.$$

Расширим градуировку алгебры $\mathcal{A}$ до $\mathbb{R}[\lambda] \otimes \mathcal{A}$, положив $\deg \lambda^I = |I|$. Набор аксиом для ВПА преобразуется в практическую формулу, определяющую скобку между двумя элементами алгебры $\mathcal{A}$, выраженную через скобку между генераторами u^i :

$$\{f \lambda g\} = \sum_{\substack{i, j=1, \dots, N, \\ L, M \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^D}} \frac{\partial g}{\partial u_M^j} (\lambda + \partial)^M \{u_{\lambda + \partial}^i u^j\} (-\lambda - \partial)^L \frac{\partial f}{\partial u_L^i}. \quad (20)$$

Связь между представлением ВПА и формальным вариационным исчислением задается изоморфизмом между ВПА и скобкой Пуассона на пространстве локальных функционалов [5]. В частности, для данной λ -скобки ВПА мы имеем

$$\left\{ \int f, \int g \right\} = \int \{f \lambda g\} |_{\lambda=0}. \quad (21)$$

По заданной скобке Пуассона в пространстве $\mathcal{A}$ локальных плотностей,

$$\{u^\alpha(x), u^\beta(y)\} = \sum_I B_I^{\alpha\beta}(u(x); u_L(x)) \partial^I \delta(x - y),$$

мы можем определить λ -скобку

$$\{u_{\lambda}^{\alpha} u^{\beta}\} = \sum_I B_S^{\beta\alpha}(u; u_L) \lambda^S. \quad (22)$$

Кроме того, эволюционные гамильтоновы уравнения в частных производных вида $u_t = \{\int h, u\}$ отображаются в $u_t = \{h_{\lambda} u\}|_{\lambda=0}$.

В нашем случае $D = 2$, и дифференциальная алгебра $\mathcal{A}$ порождается завихренностью. Скобка Пуассона (5) переводится с помощью формулы (22) в λ -скобку

$$\{\omega_{\lambda} \omega\} = \omega_1 \lambda_2 - \omega_2 \lambda_1. \quad (23)$$

Одно из основных преимуществ формализма ВПА по сравнению со стандартным подходом состоит в том, что можно легко применить простую формулу (20) для выполнения вычислений в явном виде. В следующем пункте мы изучаем деформации скобки (23) с точностью до второго порядка.

3.2. Деформации скобки. На пространстве $\mathcal{A}$ введем преобразования

$$\omega \mapsto \tilde{\omega} = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k F_k(\omega; \omega_I), \quad (24)$$

где F_k – однородный дифференциальный полином порядка k и

$$\frac{\partial F_0(\omega)}{\partial \omega} \neq 0.$$

Преобразования (24) образуют группу, называемую *группой Миуры* [8]. Ее можно рассматривать как группу локальных диффеоморфизмов на пространстве $\mathcal{A}$. Преобразование координат ω нулевого порядка поднимается до джетовых переменных ω_I более высокого порядка. Важный подкласс преобразований Миуры, играющий центральную роль в теории деформаций, образуют так называемые *деформации Миуры второго рода* [9], для которых $F_0 = \omega$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Инфинитезимальная *совместная деформация* n -го порядка заданной λ -скобки $\{\cdot, \cdot\}_0$ есть скобка

$$\{\cdot, \cdot\} = \{\cdot, \cdot\}_0 + \epsilon \{\cdot, \cdot\}^{\sim}, \quad (25)$$

для которой свойства 5 и 6 ВПА выполняются с точностью до ϵ^n .

Деформация образована однородными членами,

$$\{\cdot, \cdot\}^{\sim} = \sum_{k=0}^n \epsilon^k \{\cdot, \cdot\}_{k+1}, \quad (26)$$

так что скобка $\{\cdot, \cdot\}$ становится однородной после присваивания степени -1 формальному параметру ϵ . Поскольку степень недеформированной скобки (23) равна 2, мы имеем $\deg \{\cdot, \cdot\}_k = k + 2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Говорят, что деформация λ -скобки (23) является *тривиальной*, если существует такой элемент ϕ группы Миуры, что

$$\{\phi(\omega)\lambda\phi(\omega)\}_0 = \phi(\{\omega\lambda\omega\}) + O(\epsilon^{n+2}).$$

Определение 2 влечет, что ϕ должен быть элементом второго рода.

ТЕОРЕМА 1. Скобка Пуассона двумерного уравнения Эйлера (5) не допускает нетривиальных инфинитезимальных деформаций вплоть до второго порядка.

Доказательство данной теоремы, составляющей основной результат настоящей статьи, получается путем непосредственного вычисления деформаций соответствующей λ -скобки (23). Деформация первого порядка скобки (23) является однородной λ -скобкой третьей степени. Ее общая форма, зависящая от 36 параметров, такова:

$$\begin{aligned} \{\omega\lambda\omega\} = & A^{abc}(\omega)\lambda_a\lambda_b\lambda_c + B^{ab,c}(\omega)\lambda_a\lambda_b\omega_c + C^{a,bc}(\omega)\lambda_a\omega_b\omega_c + D^{a,bc}(\omega)\lambda_a\omega_{bc} + \\ & + E^{abc}(\omega)\omega_{abc} + F^{a,bc}(\omega)\omega_a\omega_{bc} + G^{abc}(\omega)\omega_a\omega_b\omega_c. \end{aligned} \quad (27)$$

Запятые в индексах введены просто для учета различных свойств симметрии, которые отвечают симметрии всего выражения. Например, из полной симметричности произведения $\lambda_a\lambda_b\lambda_c$ по индексам (a, b, c) следует, что коэффициент A^{abc} должен быть полностью симметричен по своим верхним индексам. Налагая свойство кососимметричности на скобку (27), найдем, что на A -, C - и D -параметры ограничений нет, тогда как остальные должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} B^{ab,c} &= \frac{3}{2}(A^{abc})', \\ E^{abc} &= \frac{1}{12}(2D^{a,bc} + 2D^{b,ca} + 2D^{c,ab} - 3(A^{abc})'), \\ F^{a,bc} &= \frac{1}{4}(2C^{b,ca} + 2C^{c,ab} + 2(D^{a,bc})' - 3(A^{abc})''), \\ G^{abc} &= \frac{1}{12}(2C^{a,bc'} + 2(C^{b,ca})' + 2(C^{c,ab})' - 3(A^{abc})'''). \end{aligned}$$

Тождество Якоби для ВПА порождает систему линейных алгебраических и дифференциальных уравнений на оставшиеся 16 параметров. Эта система получается, если рассмотреть свойство 6 в определении 1 в первом порядке по ϵ . В результате мы получаем дифференциальный полином пятого порядка по λ , μ и джетовым переменным ω_I . Коэффициенты перед каждым из слагаемых в уравнении

$$\begin{aligned} \{\omega\lambda\{\omega_\mu\omega\}\}_1 - \{\omega_\mu\{\omega\lambda\omega\}\}_1 - \{\{\omega\lambda\omega\}_1\lambda_\mu\omega\}_0 + \\ + \{\omega\lambda\{\omega_\mu\omega\}\}_0 - \{\omega_\mu\{\omega\lambda\omega\}\}_0 - \{\{\omega\lambda\omega\}_0\lambda_\mu\omega\}_1 = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

порождают переопределенную систему уравнений. Однако в этом случае достаточно положить равными нулю коэффициенты перед членами $\lambda^4\mu$, $\lambda^3\mu\partial\omega$ и $\lambda^2\mu(\partial\omega)^2$, откуда следует равенство нулю всех A -, C - и D -коэффициентов. Это означает, что не существует деформаций первого порядка скобки (23). Для скалярных скобок это верно всегда.

Деформация второго порядка скобки имеет степень 4. В принципе она зависит от 92 параметров, но после наложения свойства кососимметричности остаются

36 свободных коэффициентов. Общее свойство скалярных скобок состоит в том, что значимыми коэффициентами являются только те, на которые умножается нечетное число параметров λ . Это означает, что в скобке

$$\begin{aligned}\{\omega\lambda\omega\} = & A^{abc,d}(\omega)\lambda_a\lambda_b\lambda_c\omega_d + B^{ab,cd}(\omega)\lambda_a\lambda_b\omega_c\omega_d + C^{ab,cd}(\omega)\lambda_a\lambda_b\omega_{cd} + \\ & + D^{a,bcd}(\omega)\lambda_a\omega_{bcd} + E^{a,b,cd}(\omega)\lambda_a\omega_b\omega_{cd} + F^{a,bcd}(\omega)\lambda_a\omega_b\omega_c\omega_d + \\ & + G^{abcd}(\omega)\omega_{abcd} + H^{a,bcd}(\omega)\omega_a\omega_{bcd} + I^{ab,cd}(\omega)\omega_a\omega_b\omega_{cd} + \\ & + J^{ab,c}(\omega)\omega_{ab}\omega_{cd} + H^{abcd}\omega_a\omega_b\omega_c\omega_d\end{aligned}\quad (29)$$

независимы только A -, D -, E - и F -коэффициенты, а остальные всегда выражаются через них. Кроме того, отметим отсутствие слагаемых с λ^4 , поскольку не существует кососимметричный скалярный дифференциальный оператор с четным главным порядком.

Огромное множество уравнений, получающихся при наложении условия совместности (28), состоит из алгебраических и дифференциальных уравнений. В частности, их можно алгебраически решить для большинства из свободных 36 параметров, в результате останутся 6 произвольных параметров. После замены координат

$$\begin{aligned}C^{a,bcd} &\mapsto C^{a,bcd} - (A^{abc,d})'' - (A^{abd,c})'' - (A^{acd,b})'', \\ D^{a,b,cd} &\mapsto D^{a,b,cd} - 3(A^{abc,d})' - 3(A^{abd,c})' - 3(A^{acd,b})', \\ E^{a,bcd} &\mapsto E^{a,bcd} - A^{abc,d} - A^{abd,c} - A^{acd,b}\end{aligned}$$

этим параметрами будут $A^{112,1}$, $A^{122,1}$, $A^{222,1}$, $E^{1,112}$, $E^{1,122}$ и $E^{1,222}$.

Теперь рассмотрим тривиальные деформации скобки (23). Выберем те из них, для которых преобразование Миуры имеет второй порядок, в результате деформированная скобка имеет четвертую степень – ту же, что и скобка, с которой мы работаем. Такое преобразование имеет вид

$$\omega \mapsto f^{ab}(\omega)\omega_a\omega_b + g^{ab}(\omega)\omega_{ab} \quad (30)$$

и зависит от шести параметров f и g . Сравним форму шести свободных параметров для совместной деформации общего положения с формой параметров, полученных для обычной тривиальной деформации, которая, вообще говоря, тоже зависит от шести параметров. Соотношения, полученные в данном случае, можно рассматривать как неоднородную систему алгебраических и дифференциальных уравнений относительно f и g следующего явного вида:

$$\begin{aligned}f^{11} &= -3A^{112,1}, & 2f^{12} &= -3A^{122,1}, & f^{22} &= -A^{222,2}, \\ g^{11} - 2(f^{11})' &= 2E^{1,112}, & g^{12} - 2(f^{12})' &= E^{1,122}, & 2g^{22} + (f^{22})' &= -2E^{1,222}.\end{aligned}$$

Эта система имеет решение при любых значениях параметров A и E в том и только том случае, когда все совместные деформации скобки, которые параметризованы этими шестью параметрами, можно получить из преобразования Миуры координат, т. е. тогда и только тогда, когда не существует нетривиальных совместных деформаций скобки (23). Вид системы подсказывает, что ее всегда можно решить, поскольку из первого набора уравнений можно просто найти f -функции, а потом подставить их производные во второй набор уравнений и найти g -функции. Эти рассуждения завершают доказательство теоремы.

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В представленной работе мы сосредоточили свое внимание на двух аспектах гамильтоновой структуры уравнений Эйлера и Гельмгольца для двумерной жидкости. Мы выписали в явном виде скобки Пуассона как редукции скобок Ли–Пуассона к скобкам для бездивергентных векторных полей. Скобки Ли–Пуассона связаны с полной алгеброй векторных полей, которые характеризуют условие идеальности жидкости.

Кроме того, мы установили тривиальность деформаций первого и второго порядков полученной скобки. Хорошо известно и доказано несколькими авторами [10], [11], [8], что все деформации одномерных скобок Пуассона гидродинамического типа тривиальны. На языке ВПА это означает, что результат остается справедливым для однородных цепочек первой степени и для дифференциальной алгебры, наделенной одной производной ∂ , т. е. для полей, зависящих от одной пространственной переменной.

В двумерном случае мы доказали, что деформации первого порядка тривиальны [5], но для деформаций высших порядков это не так [12]. Совсем недавно было доказано, что пуассонова когомология многомерных скалярных скобок чрезвычайно велика [13], следовательно, существует множество деформаций таких структур. Скобка (23) находится на пересечении вышеупомянутых случаев. Это двумерная скалярная скобка, она определена для скалярных полей, зависящих от двух переменных, но это скобка не гидродинамического типа, поскольку ее степень равна двум. Тем не менее она возникает при редукции гидродинамического типа скобки Ли–Пуассона алгебры Ли, которая двумерна и имеет две компоненты: генераторами алгебры являются два поля $p_1(x, y)$ и $p_2(x, y)$. В статье [11] доказано, что деформации первого порядка скобки Пуассона (14) тривиальны, а деформации второго порядка покрывают двумерное пространство.

Поиск деформации высшего порядка для скобки (23) требует намного больших вычислительных затрат. Возможно, что вывод о тривиальности деформаций нечетного порядка всегда справедлив, что соотносится с предварительным результатом относительно деформаций третьего порядка. Заслуживает дальнейших исследований более общий метод расчета размерности когомологических групп скобки типа метода, изложенного в работе [12], которого, возможно, будет достаточно для доказательства тривиальности всех деформаций.

Благодарности. Автор выражает благодарность организаторам конференции “Физика и математика нелинейных явлений” (PMNP-2015) за возможность представить эту работу и замечательную научную атмосферу, созданную в Галлиполи.

Список литературы

- [1] V. I. Arnold, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **16**:1 (1996), 319–361.
- [2] P. J. Olver, *J. Math. Anal. Appl.*, **89**:1 (1982), 233–250.
- [3] С. П. Новиков, *УМН*, **37(227)**:5 (1982), 3–49.
- [4] D. D. Holm, J. E. Marsden, “Momentum maps and measure-valued solutions (peakons, filaments, and sheets) for the EPDiff equation”, *The Breadth of Symplectic and Poisson Geometry*, Progress in Mathematics, **232**, Birkhäuser, Boston, MA, 2005, 203–235.
- [5] M. Casati, *Commun. Math. Phys.*, **335**:2 (2015), 851–894.
- [6] A. Barakat, A. De Sole, V. G. Kac, *Japan J. Math.*, **4**:2 (2009), 141–252.

- [7] Г. Ламб, *Гидродинамика*, ОНТИ, М., 1947.
- [8] B. A. Dubrovin, Y. Zhang, *Normal forms of hierarchies of integrable PDEs, Frobenius manifolds and Gromov–Witten invariants*, [arXiv: math/0108160](#).
- [9] S.-Q. Liu, Y. Zhang, *Adv. Math.*, **227**:1 (2011), 73–130.
- [10] E. Getzler, *Duke Math. J.*, **111**:3 (2002), 535–560.
- [11] L. Degiovanni, F. Magri, V. Sciacca, *Commun. Math. Phys.*, **253**:1 (2005), 1–24.
- [12] M. Casati, *Multidimensional Poisson vertex algebras and the Poisson cohomology of Hamiltonian structures of hydrodynamic type*, PhD thesis, Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati di Trieste, Trieste, 2015.
- [13] G. Carlet, M. Casati, S. Shadrin, *Poisson cohomology of scalar multidimensional Dubrovin–Novikov brackets*, [arXiv: 1512.05744](#).