Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Баран, И. С. Красильщик, О. И. Морозов, П. Войчак,
Накрытия и нелокальные симметрии уравнений, инте-
грируемых по Лаксу, *ТМФ*, 2016, том 188, номер 3, 361–
385

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9044>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 16:57:03

© 2016 г.

Х. Баран*, И. С. Краси́льщик†,
О. И. Морозов‡, П. Войчак*

НАКРЫТИЯ И НЕЛОКАЛЬНЫЕ СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЙ, ИНТЕГРИРУЕМЫХ ПО ЛАКСУ

Рассматривается трехмерное уравнение $\text{rdDym } u_{ty} = u_x u_{xy} - u_y u_{xx}$. С использованием известного представления Лакса с неустраняемым параметром и связанных с этим представлением двух иерархий нелокальных законов сохранения описаны алгебры Ли нелокальных симметрий в соответствующих накрытиях.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения в частных производных, трехмерное уравнение rdDym , нелокальные симметрии, операторы рекурсии.

DOI: 10.4213/tmf9044

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнение rdDym (r -е бездисперсионное уравнение Дима), обозначаемое в дальнейшем через $\mathcal{E}$ (см. [1]–[3]), – один из примеров трехмерных нелинейных интегрируемых уравнений. Под интегрируемостью здесь понимается существование пары Лакса с неустраняемым параметром. Такие уравнения изучались весьма активно (см., например, [4], [5]). В частности, в наших недавних работах [6], [7] мы дали полное описание двумерных редукций уравнений подобного рода и исследовали интегрируемость полученных в результате редукции уравнений.

Используя известную пару Лакса с неустраняемым параметром, мы строим для трехмерного уравнения rdDym две бесконечные иерархии двухкомпонентных нелокальных законов сохранения, соответствующие неотрицательным и неположительным степеням спектрального параметра. Этим иерархиям соответствуют два накрытия; эти накрытия абелевы и бесконечномерны в смысле работы [8], [9]. Мы

Работа И. С. Краси́льщика была частично поддержана грантом “Simons – IUM fellowship”. Работа О. И. Морозова была поддержана Polish Ministry of Science and Higher Education.

*Mathematical Institute, Silesian University in Opava, Opava, Czech Republic.
E-mail: Hunek.Baran@math.shu.cz, Petr.Vojcak@math.shu.cz

†Независимый московский университет, Москва, Россия. E-mail: josephkra@gmail.com

‡Faculty of Applied Mathematics, AGH University of Science and Technology, Kraków, Poland. E-mail: morozov@agh.edu.pl

называем эти накрытия *положительным* и *отрицательным* и обозначаем их через $\tilde{\mathcal{E}}^+$ и $\tilde{\mathcal{E}}^-$ соответственно. Основной результат работы – полное описание алгебр Ли нелокальных симметрий в этих накрытиях.

Само уравнение $\mathcal{E}$ допускает бесконечномерную алгебру Ли локальных симметрий, параметризованных тремя произвольными функциями от t и одной, зависящей от y , а также одну “изолированную” масштабную симметрию (которая позволяет приписать всем рассматриваемым полиномиальным объектам веса; см. ниже табл. 1). Мы показали, что все эти симметрии поднимаются как в положительное, так и в отрицательное накрытия. Однако в дополнение к поднятиям локальных симметрий в обоих случаях возникают новые, чисто нелокальные симметрии.

В накрытии $\tilde{\mathcal{E}}^+$ из масштабной симметрии возникает новая серия, изоморфная неположительной части $\mathfrak{W}^-$ алгебры Витта, в то время как симметрии, содержащие функции переменной y , оказываются частью алгебры петель $\mathcal{L}[y]$, коэффициенты которых также зависят от y ; при этом алгебра $\mathfrak{W}^-$ естественным образом действует на $\mathcal{L}[y]$. Новых симметрий, зависящих от t , в накрытии $\tilde{\mathcal{E}}^+$ не возникает, а симметрии, полученные из локальных, образуют в $\text{sym}(\tilde{\mathcal{E}}^+)$ градуированный идеал. Точная формулировка этих результатов содержится в теореме 1.

В случае накрытия $\tilde{\mathcal{E}}^-$ (см. теорему 2) масштабная симметрия дает начало неотрицательной части $\mathfrak{W}^+$ алгебры Витта, а симметрии, зависящие от t , включаются в алгебру петель $\mathcal{L}[t]$; алгебра $\mathfrak{W}^+$ действует на $\mathcal{L}[t]$, а локальные симметрии, зависящие от y , образуют прямое слагаемое в алгебре Ли $\text{sym}(\tilde{\mathcal{E}}^-)$.

Наконец, мы показываем, что взаимно обратные операторы рекурсии, найденные в работе [10], действуют в алгебрах $\mathcal{L}[y]$ и $\mathcal{L}[t]$, а также связывают друг с другом две части алгебры Витта – $\mathfrak{W}^-$ и $\mathfrak{W}^+$.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы приводим основные определения и факты, необходимые для дальнейшего изложения. В разделе 3 обсуждаются основные свойства трехмерного уравнения rdDym : его локальные симметрии, пары Лакса и накрытия. Главные результаты сформулированы и доказаны в разделе 4. В разделе 5 обсуждаются операторы рекурсии.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В этом разделе в упрощенной координатной форме мы излагаем основы геометрического подхода к дифференциальным уравнениям и дифференциальным накрытиям. Мы следуем работам [9], [8].

2.1. Джеты и уравнения. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n$ с координатами $x^1, \dots, x^n$ и пространство $\mathbb{R}^m$ с координатами $u^1, \dots, u^m$. Пространство k -джетов $J^k(n, m)$, где $k = 0, 1, \dots, \infty$, наделено координатами $x^1, \dots, x^n$ и u_σ^j , где $j = 1, \dots, m$, а σ – симметрический мультииндекс длины $|\sigma| \leq k$; мы полагаем $u_\emptyset^j = u^j$. Если $u^j = f(x^1, \dots, x^n)$ – вектор-функция, то совокупность частных производных

$$u_\sigma^j = \frac{\partial^{|\sigma|} u^j}{\partial x^\sigma}, \quad j = 1, \dots, m, \quad |\sigma| \leq k,$$

называется ее k -джетом.

Зафиксируем точку $\theta \in J^k(n, m)$. Линейная оболочка $\mathcal{C}_\theta$ касательных пространств к графикам всех k -джетов, проходящим через эту точку, называется *плоскостью Картана*, соответствие $\mathcal{C}: \theta \mapsto \mathcal{C}_\theta$ – *распределением Картана*. Если $k = \infty$, то

базис распределения $\mathcal{E}$ состоит из векторных полей

$$D_{x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j,\sigma} u_{\sigma}^j \frac{\partial}{\partial u_{\sigma}^j}, \quad i = 1, \dots, n,$$

которые называются *полными производными*. Полные производные попарно коммутируют, и это означает, что распределение Картана на пространстве $J^\infty(n, m)$ формально интегрируемо.

Рассмотрим подмногообразие в $J^k(n, m)$, заданное соотношениями

$$F^1(x^i, u_{\sigma}^j) = \dots = F^r(x^i, u_{\sigma}^j) = 0, \quad (1)$$

которые представляют собой дифференциальное уравнение порядка k . Его бесконечное продолжение $\mathcal{E} \subset J^\infty(n, m)$ задается уравнениями

$$D_{\sigma}(F^j) = 0, \quad j = 1, \dots, r, \quad |\sigma| \geq 0,$$

где $D_{\sigma} = D_{x^{i_1}} \circ \dots \circ D_{x^{i_k}}$ для $\sigma = i_1 \dots i_k$. Всюду ниже мы имеем дело только с бесконечными продолжениями и отождествляем их с самими дифференциальными уравнениями.

Полные производные можно ограничить на бесконечно продолженные уравнения, и эти ограничения порождают распределение Картана на уравнении $\mathcal{E}$. Максимальные интегральные многообразия полученного распределения суть решения рассматриваемого уравнения.

2.2. Симметрии. Рассмотрим уравнение $\mathcal{E} \subset J^\infty(n, m)$. Ниже мы всегда будем предполагать, что естественная проекция $\mathcal{E} \rightarrow J^0(n, m) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ является сюръективным отображением на свой образ¹⁾. Следовательно, алгебра функций $C^\infty(J^0(n, m))$ вкладывается в алгебру $C^\infty(\mathcal{E})$.

Векторное поле $X: C^\infty(\mathcal{E}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{E})$ называется *вертикальным*, если выполнено условие $X|_{C^\infty(J^0(n, m))} = 0$, т.е. если его координатное представление не содержит компонент вида $\partial/\partial x^i$. Вертикальное поле X является *высшей*, или *обобщенной, симметрией* уравнения $\mathcal{E}$, если оно сохраняет распределение Картана, т.е. $[X, \mathcal{E}] \subset \mathcal{E}$. Симметрии уравнения $\mathcal{E}$ образуют $\mathbb{R}$ -алгебру Ли, которая обозначается через $\text{sym}(\mathcal{E})$.

Векторное поле является симметрией тогда и только тогда, когда оно является *эволюционным*, т.е. имеет вид

$$\mathbf{E}_{\varphi} = \sum D_{\sigma}(\varphi^j) \frac{\partial}{\partial u_{\sigma}^j}, \quad (2)$$

где суммирование осуществляется по всем внутренним координатам уравнения $\mathcal{E}$. Здесь $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^m)$ – вектор-функция на $\mathcal{E}$, называемая *производящим сечением* (или *характеристикой*) симметрии. Она должна удовлетворять уравнению

$$\ell_{\mathcal{E}}(\varphi) = 0,$$

¹⁾Это означает, что дифференциальные следствия уравнения (1) не содержат функциональных соотношений.

где $\ell_{\mathcal{E}}$ – *линеаризация* уравнения $\mathcal{E}$, которая определяется как ограничение оператора

$$\ell_F = \left\| \sum_{\sigma} \frac{\partial F^j}{\partial u_{\sigma}^l} D_{\sigma} \right\| \quad (3)$$

на $\mathcal{E}$. Производящие функции симметрий образуют алгебру Ли относительно *скобки Якоби*

$$\{\varphi, \psi\}^j = \sum \left(D_{\sigma}(\varphi^l) \frac{\partial \psi^j}{\partial u_{\sigma}^l} - D_{\sigma}(\psi^l) \frac{\partial \varphi^j}{\partial u_{\sigma}^l} \right).$$

Скобку Якоби можно определить, не используя локальных координат и полагая $\{\varphi, \psi\} = \mathbf{E}_{\varphi}(\psi) - \mathbf{E}_{\psi}(\varphi)$.

2.3. Дифференциальные накрытия. Рассмотрим пространство $\tilde{\mathcal{E}} = \mathbb{R}^s \times \mathcal{E}$, $s \leq \infty$, и естественную проекцию $\tau: \tilde{\mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{E}$. Мы будем говорить, что τ – s -мерное (*дифференциальное*) *накрытие* над $\mathcal{E}$, если на пространстве $\tilde{\mathcal{E}}$ заданы такие векторные поля $\tilde{D}_{x^1}, \dots, \tilde{D}_{x^n}$, что

$$[\tilde{D}_{x^i}, \tilde{D}_{x^j}] = 0, \quad \tau_*(\tilde{D}_{x^i}) = D_{x^i}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Пусть $\{w^{\alpha}\}$ – координаты в $\mathbb{R}^s$ (они называются *нелокальными переменными*). Тогда структура накрытия задается такими векторными полями $\tilde{D}_{x^i} = D_{x^i} + X_i$, что

$$D_{x^i}(X_j) - D_{x^j}(X_i) + [X_i, X_j] = 0,$$

где

$$X_i = \sum_{\alpha} X_i^{\alpha} \frac{\partial}{\partial w^{\alpha}}$$

суть τ -вертикальные векторные поля.

Существует специальный класс накрытий, ассоциированных с двухкомпонентными законами сохранения уравнения $\mathcal{E}$. Зафиксируем два целых числа i и j , $1 \leq i < j \leq n$, и рассмотрим дифференциальную форму

$$\omega = X_i dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n + X_j dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \dots \wedge dx^n,$$

где обозначение $\widehat{dx^i}$ означает, что соответствующий член пропущен. Пусть форма ω замкнута относительно горизонтального дифференциала де Рама, т. е.

$$D_{x^i}(X_j) = (-1)^{i+j-1} D_{x^j}(X_i).$$

Рассмотрим евклидово пространство V с координатами w^{σ} , где σ – симметрический мультииндекс, состоящий из любых целых чисел от 1 до n , кроме i и j . Таким образом, $\dim V = 1$, если $n = 2$, и $\dim V = \infty$ в противном случае. Тогда система векторных полей

$$\tilde{D}_{x^k} = D_{x^k} + \sum_{\sigma} w^{\sigma k} \frac{\partial}{\partial w^{\sigma}}, \quad k \neq i, j,$$

$$\tilde{D}_{x^i} = D_{x^i} + \sum_{\sigma} \tilde{D}_{\sigma}(X_j) \frac{\partial}{\partial w^{\sigma}},$$

$$\tilde{D}_{x^j} = D_{x^j} + (-1)^{i+j-1} \sum_{\sigma} \tilde{D}_{\sigma}(X_i) \frac{\partial}{\partial w^{\sigma}}$$

определяет структуру накрытия в пространстве $\tilde{\mathcal{E}}_{\omega} = V \times \mathcal{E}$. Накрытия такого типа называются *абелевыми*.

2.4. Нелокальные симметрии. Обозначим через $\tilde{\mathcal{C}}$ распределение на $\tilde{\mathcal{E}}$, порожденное полями $\tilde{D}_{x^1}, \dots, \tilde{D}_{x^n}$, и пусть X – поле, вертикальное относительно композиции $\tilde{\mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Такое поле называется *нелокальной симметрией*, если оно сохраняет распределение $\tilde{\mathcal{C}}$. Эти симметрии образуют алгебру Ли над $\mathbb{R}$, обозначаемую через $\text{sym}_\tau(\mathcal{E})$. Ограничение $X|_{C^\infty(\mathcal{E})}: C^\infty(\mathcal{E}) \rightarrow C^\infty(\tilde{\mathcal{E}})$ называется *нелокальной τ -тенью*. Нелокальная симметрия называется *невидимой*, если ее тень тривиальна.

В локальных координатах любая симметрия $X \in \text{sym}_\tau(\mathcal{E})$ имеет вид

$$X = \tilde{\mathbf{E}}_\varphi + \sum_\alpha \psi^\alpha \frac{\partial}{\partial w^\alpha},$$

где $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^m)$, ψ^α – функции на $\tilde{\mathcal{E}}$, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} \tilde{\ell}_\mathcal{E}(\varphi) &= 0, \\ \tilde{D}_{x^i}(\psi^\alpha) &= \sum_{j,\sigma} \frac{\partial X_i^\alpha}{\partial u_\sigma^j} \tilde{D}_\sigma(\varphi^j) + \sum_\beta \frac{\partial X_i^\alpha}{\partial w^\beta} \psi^\beta, \end{aligned}$$

где операторы $\tilde{\mathbf{E}}_\varphi$ и $\tilde{\ell}_\mathcal{E}$ получаются из выражений (2) и (3) соответственно заменой D_{x^i} на $\tilde{D}_{x^i}$. Нелокальные тени – это операторы вида $\tilde{\mathbf{E}}_\varphi$, а для невидимых симметрий выполняется равенство $\varphi = 0$.

В частности, для накрытий вида $\tilde{\mathcal{E}}_\omega$, где ω – двухкомпонентный закон сохранения, симметрии – это векторные поля

$$X = \tilde{\mathbf{E}}_\varphi + \sum_\sigma D_\sigma(\psi) \frac{\partial}{\partial w^\sigma},$$

где функции φ и ψ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \tilde{\ell}_\mathcal{E}(\varphi) &= 0, \\ \tilde{D}_{x^i}(\psi) &= \sum_{\sigma,k} \frac{\partial X_j}{\partial u_\sigma^k} \tilde{D}_\sigma(\varphi^k) + \sum_\sigma \frac{\partial X_j}{\partial w^\sigma} \tilde{D}_\sigma(\psi), \\ \tilde{D}_{x^j}(\psi) &= (-1)^{i+j-1} \left(\sum_{\sigma,k} \frac{\partial X_i}{\partial u_\sigma^k} \tilde{D}_\sigma(\varphi^k) + \sum_\sigma \frac{\partial X_i}{\partial w^\sigma} \tilde{D}_\sigma(\psi) \right). \end{aligned}$$

2.5. Преобразования Бэклунда и операторы рекурсии. Рассмотрим уравнения $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$. Преобразованием Бэклунда между уравнениями $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ называется диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{\mathcal{E}} & \\ \tau_1 \swarrow & & \searrow \tau_2 \\ \mathcal{E}_1 & & \mathcal{E}_2 \end{array},$$

где τ_1 и τ_2 – накрытия. Если $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$, то говорят об *автопреобразовании Бэклунда*. Если накрытие τ_1 конечномерно, а $\gamma \subset \mathcal{E}_1$ – график решения, то в ситуации общего положения множество $\tau_2(\tau_1^{-1}(\gamma))$ является конечномерным многообразием,

снабженным интегрируемым n -мерным распределением; интегральные многообразия этого распределения суть решения уравнения $\mathcal{E}_2$.

Рассмотрим уравнение $\mathcal{E}$, заданное соотношениями (1), и систему

$$F(x^i, u_\sigma^j) = 0, \quad \ell_F(x^i, u_\sigma^j, q_\sigma^j) = 0,$$

где $F = (F^1, \dots, F^r)$. Эта система называется *касательным уравнением* к уравнению $\mathcal{E}$ и обозначается через $\mathcal{TE}$, а проекция $t: \mathcal{TE} \rightarrow \mathcal{E}$ называется *касательным накрытием*. Сечения этого накрытия, сохраняющие распределение Картана, отождествляются с производящими функциями симметрий уравнения $\mathcal{E}$.

Пусть $\mathcal{R}$ – преобразование Бэклунда между $\mathcal{TE}_1$ и $\mathcal{TE}_2$. Тогда из сказанного выше следует, что оно осуществляет соответствие между симметриями уравнений $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$. Если $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$, это соответствие называется *оператором рекурсии* [11].

3. УРАВНЕНИЕ

Трехмерное уравнение rdDym (уравнение $\mathcal{E}$) имеет вид

$$u_{ty} = u_x u_{xy} - u_y u_{xx}. \quad (4)$$

В качестве внутренних координат для $\mathcal{E}$ можно выбрать функции

$$u_k = \underbrace{u_x \dots x}_{k \text{ раз}}, \quad u_{k,l}^t = \underbrace{u_x \dots x}_{k \text{ раз}} \underbrace{t \dots t}_{l \text{ раз}}, \quad u_{k,l}^y = \underbrace{u_x \dots x}_{k \text{ раз}} \underbrace{y \dots y}_{l \text{ раз}}, \quad k \geq 0, \quad l \geq 0.$$

Таким образом, $u_0 = u$, $u_1 = u_x$, $u_{0,1}^y = u_y$, $u_{0,1}^t = u_t$ и т. д. Тогда полные производные имеют вид

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{\partial}{\partial x} + \sum_k u_{k+1} \frac{\partial}{\partial u_k} + \sum_{k,l} \left(u_{k+1,l}^y \frac{\partial}{\partial u_{k,l}^y} + u_{k+1,l}^t \frac{\partial}{\partial u_{k,l}^t} \right), \\ D_y &= \frac{\partial}{\partial y} + \sum_k u_{k,1}^y \frac{\partial}{\partial u_k} + \sum_{k,l} \left(u_{k,l+1}^y \frac{\partial}{\partial u_{k,l}^y} + D_x^k D_t^{l-1} (u_x u_{xy} - u_y u_{xx}) \frac{\partial}{\partial u_{k,l}^t} \right), \\ D_t &= \frac{\partial}{\partial t} + \sum_r u_{k,1}^t \frac{\partial}{\partial u_k} + \sum_{k,l} \left(D_x^k D_y^{l-1} (u_x u_{xy} - u_y u_{xx}) \frac{\partial}{\partial u_{k,l}^y} + u_{k,l+1}^t \frac{\partial}{\partial u_{k,l}^t} \right). \end{aligned}$$

3.1. Локальные симметрии. Локальные симметрии уравнения (4) суть решения линеаризованного уравнения

$$\ell_{\mathcal{E}}(\varphi) \equiv D_t D_y(\varphi) - u_x D_x D_y(\varphi) + u_y D_x^2(\varphi) - u_{xy} D_x(\varphi) + u_{xx} D_y(\varphi) = 0. \quad (5)$$

Пространство решений этого уравнения порождено функциями

$$\begin{aligned} \psi_0 &= x u_x - 2u, & v_0(B) &= B u_y, \\ \theta_0(A) &= A u_t + A'(x u_x - u) + \frac{1}{2} A'' x^2, & \theta_{-1}(A) &= A u_x + A' x, & \theta_{-2}(A) &= A, \end{aligned}$$

Таблица 1. Структура алгебры Ли в пространстве $\text{sum}(\mathcal{E})$.

	ψ_0	$v_0(\bar{B})$	$\theta_0(\bar{A})$	$\theta_{-1}(\bar{A})$	$\theta_{-2}(\bar{A})$
ψ_0	0	0	0	$-\theta_{-1}(\bar{A})$	$-2\theta_{-2}(\bar{A})$
$v_0(B)$	...	$v_0(B\bar{B}' - \bar{B}B')$	0	0	0
$\theta_0(A)$	...	...	$\theta_0(\bar{A}A' - A\bar{A}')$	$\theta_{-1}(\bar{A}A' - A\bar{A}')$	$\theta_{-2}(\bar{A}A' - A\bar{A}')$
$\theta_{-1}(A)$	...	...	...	$\theta_{-2}(\bar{A}A' - A\bar{A}')$	0
$\theta_{-2}(A)$	...	...	...	...	0

где $A = A(t)$, $B = B(y)$, а штрихом обозначена производная по t . Всякому решению φ соответствует эволюционное векторное поле

$$\mathbf{E}_\varphi = \sum_k D_x^k(\varphi) \frac{\partial}{\partial u_k} + \sum_{k,l} \left(D_x^k D_y^l(\varphi) \frac{\partial}{\partial u_{k,l}^y} + D_x^k D_t^l(\varphi) \frac{\partial}{\partial u_{k,l}^t} \right) \quad (6)$$

на $\mathcal{E}$.

Структура алгебры Ли в пространстве $\text{sum}(\mathcal{E})$ представлена в табл. 1.

3.2. Накрытия. Уравнение rdDym (4) допускает линейное представление Лакса

$$\begin{aligned} w_t &= (u_x - \lambda)w_x, \\ w_y &= \lambda^{-1}u_y w_x, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\lambda \neq 0$ – неустраиваемый параметр. Разлагая переменную w в формальный ряд

$$w = \sum_{i=-\infty}^{\infty} w_i \lambda^i$$

по степеням λ , мы получаем систему

$$\begin{aligned} w_{i,t} &= u_x w_{i,x} - w_{i-1,x}, \\ w_{i,y} &= u_y w_{i+1,x} \end{aligned} \quad (8)$$

(ср. с [2], [12]). Эта система бесконечна в обоих направлениях, и поэтому величины w_i не являются корректно определенными. Чтобы определить их должным образом, рассмотрим две редукции системы (8): а) $w_i = 0$ при $i < 0$; б) $w_i = 0$ при $i > 0$. В результате возникают две иерархии двухкомпонентных нелокальных законов сохранения (ср. с [2]). Мы будем называть их *положительной* и *отрицательной иерархиями* соответственно. Наша цель – описать нелокальные симметрии в ассоциированных с этими иерархиями абелевых накрытиях.

Заметим, что положительной иерархии соответствует разложение w в ряд Тейлора, а отрицательной – в ряд Лорана.

3.2.1. Положительная иерархия. Положим $w_i = 0$ для $i < 0$ и перепишем систему (8) в виде

$$\begin{aligned} w_{i,t} &= \frac{u_x}{u_y} w_{i-1,y} - w_{i-1,x}, \\ w_{i,x} &= \frac{w_{i-1,y}}{u_y}. \end{aligned}$$

Тогда из сделанного выше предположения следует, что $w_{0,t} = w_{0,x} = 0$, или $w_0 = G(y)$. Поэтому определяющие уравнения для накрытия приобретают вид

$$\begin{aligned} w_{1,t} &= \frac{u_x}{u_y} G', & w_{i,t} &= \frac{u_x}{u_y} w_{i-1,y} - w_{i-1,x}, \\ w_{1,x} &= \frac{G'}{u_y}, & w_{i,x} &= \frac{w_{i-1,y}}{u_y}, \end{aligned}$$

где $i > 0$ и штрихом обозначена производная по y .

Без потери общности можно предположить, что $G' \neq 0$, и сделать замену переменных $y \mapsto G(y)$. Это преобразование сохраняет уравнение, поскольку $v_0(B)$ – симметрия. Обозначая полученные после преобразования нелокальные переменные через q_i , $i > 0$, мы получаем накрытие, определяемое уравнениями

$$q_{1,t} = \frac{u_x}{u_y}, \quad q_{1,x} = \frac{1}{u_y} \quad (9)$$

и

$$q_{i,t} = \frac{u_x}{u_y} q_{i-1,y} - q_{i-1,x}, \quad q_{i,x} = \frac{q_{i-1,y}}{u_y}. \quad (10)$$

Заметим, что величины q_i не образуют полный набор нелокальных переменных в рассматриваемом накрытии. Полнота обеспечивается добавлением функций $q_i^{(j)}$, описываемых системой

$$q_i^{(0)} = q_i, \quad q_i^{(j+1)} = (q_i^{(j)})_y.$$

Тогда полные производные на пространстве $\tilde{\mathcal{E}}^+$ накрывающего уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{D}_x &= D_x + \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{D}_y^j \left(\frac{1}{u_y} \right) \frac{\partial}{\partial q_1^{(j)}} + \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{D}_y^j \left(\frac{q_{i-1}^{(1)}}{u_y} \right) \frac{\partial}{\partial q_i^{(j)}}, \\ \tilde{D}_y &= D_y + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} q_i^{(j+1)} \frac{\partial}{\partial q_i^{(j)}}, \\ \tilde{D}_t &= D_t + \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{D}_y^j \left(\frac{u_x}{u_y} \right) \frac{\partial}{\partial q_1^{(j)}} + \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{D}_y^j \left(\frac{u_x}{u_y} q_{i-1}^{(1)} - \tilde{D}_x \left(q_{i-1}^{(0)} \right) \right) \frac{\partial}{\partial q_i^{(j)}}, \end{aligned}$$

где D_x , D_y , D_t – описанные ранее полные производные на $\mathcal{E}$.

3.2.2. Отрицательная иерархия. В этом случае мы полагаем $w_i = 0$ для $i > 0$. Тогда из системы (8) следует, что

$$\begin{aligned} w_{0,x} &= 0, & w_{-1,x} &= u_x w_{0,x} - w_{0,t}, & w_{-2,x} &= u_x w_{-1,x} - w_{-1,t}, \\ w_{0,y} &= 0, & w_{-1,y} &= u_y w_{0,x}, & w_{-2,y} &= u_y w_{-1,x}, \end{aligned}$$

поэтому

$$w_0 = \tilde{F}(t), \quad w_{-1} = -x\tilde{F}' + G(t), \quad w_{-2} = -\tilde{F}'u + \frac{1}{2}x^2\tilde{F}'' - G'x + H(t).$$

Без потери общности можно считать, что $G = H = 0$. Тогда, введя обозначения $r_i = w_{-i-2}$, $i = 1, 2, \dots$, мы получим следующие определяющие уравнения для отрицательной иерархии:

$$\begin{aligned} r_{1,x} &= F(u_t - u_x^2) + F'(u + xu_x) - \frac{1}{2}x^2F'', & r_{i,x} &= u_x r_{i-1,x} - r_{i-1,t}, \\ r_{1,y} &= u_y(xF' - Fu_x), & r_{i,y} &= u_y r_{i-1,x}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $i > 1$ и $F = \tilde{F}'$. Эти уравнения можно упростить.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Существует калибровочное преобразование пространства $\tilde{\mathcal{E}}^-$, которое исключает функцию F , т.е. преобразует систему (11) к виду*

$$\begin{aligned} r_{1,x} &= u_x^2 - u_t, & r_{i,x} &= u_x r_{i-1,x} - r_{i-1,t}, \\ r_{1,y} &= u_x u_y, & r_{i,y} &= u_y r_{i-1,x}. \end{aligned} \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем новую нелокальную переменную $\bar{r}_1$, полагая

$$r_1 = -F\bar{r}_1 - F'xu + \frac{1}{6}F''x^3. \quad (13)$$

Подставляя равенство (13) в первое и третье уравнения системы (11), мы видим, что

$$\bar{r}_{1,x} = u_x^2 - u_t, \quad \bar{r}_{1,y} = u_x u_y.$$

Введем оператор

$$\mathcal{Y}_- = -x \frac{\partial}{\partial t} + 2u \frac{\partial}{\partial x} - 3\bar{r}_1 \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{i \geq 1} (i+3) \bar{r}_{i+1} \frac{\partial}{\partial \bar{r}_i}$$

и при $k \geq 2$ положим по индукции

$$r_k = \frac{1}{k+2} \mathcal{Y}_-(r_{k-1}). \quad (14)$$

Очевидно,

$$r_k = F\bar{r}_k + o(k-1),$$

где символ $o(k-1)$ обозначает члены, зависящие только от $\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_{k-1}$.

Предположим теперь, что $k > 1$ и что утверждение верно для определяющих уравнений на функции $\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_{k-1}$. Тогда, подставляя равенство (14) в уравнения на r_k , мы видим, что последнее преобразуется к виду

$$F\bar{r}_{k,x} = F(u_x \bar{r}_{k-1,x} - \bar{r}_{k-1,t}), \quad F\bar{r}_{k,y} = F u_y \bar{r}_{k-1,x}$$

в силу предположения индукции. ■

Забудем о “старых” переменных r_k и заменим обозначения $\bar{r}_k$ на r_k . Полный набор нелокальных переменных в рассматриваемом накрытии состоит из величин $r_i^{(j)}$, определяемых равенствами

$$r_i^{(0)} = r_i, \quad r_i^{(j+1)} = (r_i^{(j)})_t.$$

ТАБЛИЦА 2. Распределение локальных симметрий по весам.

Веса	-2	-1	0
	$\theta_{-2}(A)$	$\theta_{-1}(A)$	$\begin{matrix} \psi_0 \\ \theta_0(A) \\ v_0(B) \end{matrix}$

Тогда полные производные на пространстве $\tilde{\mathcal{E}}^-$ имеют вид

$$\begin{aligned}\tilde{D}_x &= D_x + \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{D}_t^j (u_x^2 - u_t) \frac{\partial}{\partial r_1^{(j)}} + \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{D}_t^j (u_x r_{i-1,x} - r_{i-1,t}) \frac{\partial}{\partial r_i^{(j)}}, \\ \tilde{D}_y &= D_y + \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{D}_t^j (u_x u_y) \frac{\partial}{\partial r_1^{(j)}} + \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{D}_t^j (u_y r_{i-1,x}) \frac{\partial}{\partial r_i^{(j)}}, \\ \tilde{D}_t &= D_t + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} r_i^{(j+1)} \frac{\partial}{\partial r_i^{(j)}}.\end{aligned}$$

3.3. Веса. Присвоим переменным, входящим в уравнение, следующие веса:

$$|x| = 1, \quad |u| = 2, \quad |y| = |t| = 0.$$

Тогда

$$|u_k| = |u_{k,l}^y| = |u_{k,l}^t| = 2 - k,$$

а любой моном получает вес, равный сумме весов входящих в него сомножителей.

Мы будем говорить, что векторное поле X *однородно*, если

$$|X(f)| = |X| + |f|$$

для любой однородной функции f , где величина $|X|$ зависит только от X и называется весом поля X . Все локальные симметрии, описанные в п. 3.1, однородны; их веса представлены в табл. 2. Очевидно,

$$|[X, Y]| = |X| + |Y|$$

для любых однородных полей X и Y .

Из уравнений (9)–(11) немедленно вычисляются веса

$$|q_i| = -i, \quad |r_i| = i + 2, \quad i = 1, 2, \dots,$$

нелокальных переменных в накрытиях $\tilde{\mathcal{E}}^+$ и $\tilde{\mathcal{E}}^-$.

4. СИММЕТРИИ

В этом разделе описываются алгебры Ли нелокальных симметрий $\text{sym } \tilde{\mathcal{E}}^+$ и $\text{sym } \tilde{\mathcal{E}}^-$.

4.1. Симметрии в положительной иерархии. Любая симметрия уравнения $\tilde{\mathcal{E}}^+$ – это векторное поле вида

$$\mathbf{X}_\Phi = \tilde{\mathbf{E}}_\varphi + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\varphi_i \frac{\partial}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{D}_y^j(\varphi_i) \frac{\partial}{\partial q_{(j)}} \right), \quad (15)$$

где слагаемое $\tilde{\mathbf{E}}_\varphi$ описано равенством (6), в котором полные производные $D_\bullet$ заменены на $\tilde{D}_\bullet$, а семейство функций

$$\Phi = \langle \varphi_0 = \varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_i, \dots \rangle, \quad \varphi_i \in C^\infty(\tilde{\mathcal{E}}^+),$$

удовлетворяет уравнениям

$$\tilde{\ell}_{\mathcal{E}}(\varphi) \equiv \tilde{D}_t \tilde{D}_y(\varphi) - u_x \tilde{D}_x \tilde{D}_y(\varphi) + u_y \tilde{D}_x^2(\varphi) - u_{xy} \tilde{D}_x(\varphi) + u_{xx} \tilde{D}_y(\varphi) = 0, \quad (16)$$

$$\tilde{D}_y(\varphi) q_{1,t} + u_y \tilde{D}_t(\varphi_1) = \tilde{D}_x(\varphi), \quad (17)$$

$$\tilde{D}_y(\varphi) q_{1,x} + u_y \tilde{D}_x(\varphi_1) = 0, \quad (18)$$

$$\tilde{D}_y(\varphi)(q_{i,t} + q_{i-1,x}) + u_y(\tilde{D}_t(\varphi_i) + \tilde{D}_x(\varphi_{i-1})) = \tilde{D}_x(\varphi) q_{i-1,y} + u_x \tilde{D}_x(\varphi_{i-1}), \quad (19)$$

$$\tilde{D}_y(\varphi) q_{i,x} + u_y \tilde{D}_x(\varphi_i) = \tilde{D}_y(\varphi_{i-1}), \quad (20)$$

где $i > 1$. Для любых двух симметрий Φ и Ψ их скобка Якоби $\{\Phi, \Psi\}$ определяется равенством

$$\mathbf{X}_{\{\Phi, \Psi\}} = [\mathbf{X}_\Phi, \mathbf{X}_\Psi].$$

4.1.1. Поднятия локальных симметрий и иерархии нелокальных симметрий. Начнем со следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Локальные симметрии ψ_0 , $\theta_{-2}(A)$, $\theta_{-1}(A)$ и $\theta_0(A)$ можно поднять в накрытие $\tilde{\mathcal{E}}^+$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим поднятия, которые мы ищем, через

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= \langle \psi_0, \psi_0^1, \dots, \psi_0^i, \dots \rangle, \\ \Theta_{-2}(A) &= \langle \theta_{-2}(A), \theta_{-2}^1(A), \dots, \theta_{-2}^i(A), \dots \rangle, \\ \Theta_{-1}(A) &= \langle \theta_{-1}(A), \theta_{-1}^1(A), \dots, \theta_{-1}^i(A), \dots \rangle, \\ \Theta_0(A) &= \langle \theta_0(A), \theta_0^1(A), \dots, \theta_0^i(A), \dots \rangle \end{aligned}$$

и положим

$$\begin{aligned} \psi_0^i &= i q_i + x q_{i,x}, \quad i \geq 1, \\ \theta_{-2}^i(A) &= 0, \quad \theta_{-1}^i(A) = A q_{i,x}, \quad i \geq 1, \\ \theta_0^1(A) &= \theta_{-1}(A) q_{1,x}, \quad \theta_0^i(A) = \theta_{-1}(A) q_{i,x} - A q_{i-1,x}, \quad i > 1. \end{aligned}$$

Чтобы доказать, что введенные выше функции действительно являются симметриями, мы непосредственно проверим, что они удовлетворяют уравнениям (17)–(20). Докажем, например, что Ψ_0 – симметрия.

Для уравнения (17) получаем²⁾

$$\begin{aligned} D_y(xu_x - 2u)q_{1,x} + u_y D_x(q_1 + xq_{1,x}) &= \\ &= \left(xu_{xy} \boxed{-2u_y}\right) q_{1,x} + u_y \left(\boxed{2q_{1,x}} + xq_{1,xx}\right) = \\ &= xu_{xy} q_{1,x} + u_y x \left(\frac{1}{u_y}\right)_x = xu_{xy} \frac{1}{u_y} - xu_y \frac{u_{xy}}{u_y^2} = 0. \end{aligned}$$

Далее, уравнение (18) принимает вид

$$\begin{aligned} D_y(xu_x - 2u)q_{1,t} + u_y D_t(q_1 + xq_{1,x}) - D_x(xu_x - 2u) &= \\ &= \left(xu_{xy} \boxed{-2u_y}\right) q_{1,t} + u_y \left(\boxed{q_{1,t}} + xq_{1,xt}\right) + u_x - xu_{xx} = \\ &= (xu_{xy} - u_y) \frac{u_x}{u_y} + xu_y \left(\frac{u_x}{u_y}\right)_x + \\ &+ u_x - xu_{xx} = (xu_{xy} - u_y) \frac{u_x}{u_y} + xu_y \frac{u_{xx}u_y - u_x u_{xy}}{u_y^2} + u_x = 0. \end{aligned}$$

В случае уравнения (19) имеем

$$\begin{aligned} D_y(xu_x - 2u)q_{i,x} + u_y D_x(iq_i + xq_{i,x}) - D_y((i-1)q_{i-1} + xq_{i-1,x}) &= \\ &= \left(xu_{xy} \boxed{-2u_y}\right) q_{i,x} + u_y \left(\boxed{(i+1)q_{i,x}} + xq_{i,xx}\right) - (i-1)q_{i-1,y} - xq_{i-1,xy} = \\ &= \left(xu_{xy} + \boxed{(i-1)u_y}\right) \frac{q_{i-1,y}}{u_y} + u_y x \left(\frac{q_{i-1,y}}{u_y}\right)_x \boxed{-(i-1)q_{i-1,y}} - xq_{i-1,xy} = \\ &= xu_{xy} \frac{q_{i-1,y}}{u_y} + u_y x \frac{q_{i-1,xy}u_y - q_{i-1,y}u_{xy}}{u_y^2} - xq_{i-1,xy} = 0. \end{aligned}$$

Наконец, уравнение (20) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} D_y(xu_x - 2u) \frac{u_x}{u_y} q_{i-1,y} + u_y (D_t(iq_i + xq_{i,x}) + D_x((i-1)q_{i-1} + xq_{i-1,x})) - \\ - D_x(xu_x - 2u)q_{i-1,y} - u_x D_y((i-1)q_{i-1} + xq_{i-1,x}) &= \\ &= (xu_{xy} - 2u_y) \frac{u_x}{u_y} q_{i-1,y} + \left(\boxed{iq_{i,t}} + xq_{i,xt} + \boxed{iq_{i-1,x}} + xq_{i-1,xx}\right) + \\ &+ (u_x - xu_{xx})q_{i-1,y} - u_x ((i-1)q_{i-1,y} + xq_{i-1,xy}) = \\ &= \left(xu_{xy} \boxed{-2u_y}\right) \frac{u_x}{u_y} q_{i-1,y} + u_y \left(\boxed{i \frac{u_x}{u_y} q_{i-1,y}} + xq_{i,xt} + xq_{i-1,xx}\right) + \\ &+ (\boxed{u_x} - xu_{xx})q_{i-1,y} - u_x \left(\boxed{(i-1)q_{i-1,y}} + xq_{i-1,xy}\right) = \\ &= xu_{xy} \frac{u_x}{u_y} q_{i-1,y} + xu_y \left(\boxed{q_{i,t} + q_{i-1,x}}\right)_x - xu_{xx}q_{i-1,y} - u_x xq_{i-1,xy} = \\ &= xu_{xy} \frac{u_x}{u_y} q_{i-1,y} + xu_y \left(\frac{u_x}{u_y} q_{i-1,y}\right)_x - xu_{xx}q_{i-1,y} - u_x xq_{i-1,xy} = \end{aligned}$$

²⁾Здесь и ниже в рамки взяты взаимно сокращающиеся члены.

$$\begin{aligned}
 &= xu_{xy} \frac{u_x}{u_y} q_{i-1,y} + xu_y \left(\left(\frac{u_x}{u_y} \right)_x q_{i-1,y} + \boxed{\frac{u_x}{u_y} q_{i-1,xy}} \right) - \\
 &\quad - xu_{xx} q_{i-1,y} \boxed{-u_x x q_{i,xy}} = \\
 &= xu_{xy} \frac{u_x}{u_y} q_{i-1,y} + xu_y \frac{u_{xx} u_y - u_x u_{xy}}{u_y^2} q_{i-1,y} - xu_{xx} q_{i-1,y}.
 \end{aligned}$$

На этом доказательство заканчивается.

Доказательства для остальных симметрий аналогичны. ■

Теперь мы опишем невидимые симметрии в накрытии $\tilde{\mathcal{E}}^+$. Будем говорить, что Φ – невидимая симметрия *глубины* k , если первые ее k компонент равны нулю, т. е.

$$\Phi = \langle \underbrace{0, \dots, 0}_{k \text{ раз}}, \varphi_1^{\text{inv}}, \dots, \varphi_i^{\text{inv}}, \dots \rangle.$$

Определяющие уравнения на невидимые симметрии имеют вид

$$\begin{aligned}
 \tilde{D}_x(\varphi_1^{\text{inv}}) &= 0, & \tilde{D}_t(\varphi_1^{\text{inv}}) &= 0, \\
 u_y \tilde{D}_x(\varphi_i^{\text{inv}}) &= \tilde{D}_y(\varphi_{i-1}^{\text{inv}}), & u_y (\tilde{D}_t(\varphi_i^{\text{inv}}) + \tilde{D}_x(\varphi_{i-1}^{\text{inv}})) &= u_x \tilde{D}_x(\varphi_{i-1}^{\text{inv}}), \quad i > 1.
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\varphi_1^{\text{inv}} = B(y)$ и любая однородная невидимая симметрия глубины k полностью определяется функцией B . Обозначим такую симметрию через $\Upsilon_k(B)$. Очевидно,

$$|\Upsilon_k(B)| = k.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для любого целого числа $k \geq 1$ и функции $B = B(y)$ симметрия $\Upsilon_k(B)$ существует.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим оператор

$$\mathcal{X} = q_1 \frac{\partial}{\partial y} + \sum_{i=1}^{\infty} (i+1) q_{i+1} \frac{\partial}{\partial q_i}$$

и положим

$$\varphi_1^{\text{inv}} = B(y), \quad \varphi_i^{\text{inv}} = \frac{1}{i-1} \mathcal{X}(\varphi_{i-1}^{\text{inv}}), \quad i > 1. \quad (21)$$

Заметим, что определяющие уравнения на невидимые симметрии можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varphi_2^{\text{inv}}}{\partial q_1} &= \frac{\partial B}{\partial y}, \\
 \dots\dots\dots, \\
 \frac{\partial \varphi_i^{\text{inv}}}{\partial q_{i-1}} &= \frac{\partial \varphi_{i-1}^{\text{inv}}}{\partial q_{i-2}}, \quad \dots, \quad \frac{\partial \varphi_i^{\text{inv}}}{\partial q_1} = \frac{\partial \varphi_{i-1}^{\text{inv}}}{\partial y}, \\
 \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

Докажем равенства

$$\frac{\partial \varphi_i^{\text{inv}}}{\partial q_j} = \frac{\partial \varphi_{i-1}^{\text{inv}}}{\partial q_{j-1}}$$

(мы формально полагаем $q_0 = y$). В случае $i = 2$ доказательство сводится к прямым вычислениям. Предположим теперь, что утверждение верно для некоторого $i > 2$, и заметим, что

$$\left[\frac{\partial}{\partial q_j}, \mathcal{X} \right] = j \frac{\partial}{\partial q_{j-1}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{i+1}^{\text{inv}}}{\partial q_j} &= \frac{1}{i} \left(j \frac{\partial \varphi_i^{\text{inv}}}{\partial q_{j-1}} + \mathcal{X} \left(\frac{\partial \varphi_i^{\text{inv}}}{\partial q_j} \right) \right) = \frac{1}{i} \left(j \frac{\partial \varphi_i^{\text{inv}}}{\partial q_{j-1}} + \mathcal{X} \left(\frac{\partial \varphi_{i-1}^{\text{inv}}}{\partial q_{j-1}} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{i} \left(j \frac{\partial \varphi_i^{\text{inv}}}{\partial q_{j-1}} - (j-1) \frac{\partial \varphi_{i-1}^{\text{inv}}}{\partial q_{j-2}} + \frac{\partial \mathcal{X}(\varphi_{i-1}^{\text{inv}})}{\partial q_{j-1}} \right) = \\ &= \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial q_{j-1}} \left(\varphi_i^{\text{inv}} + \mathcal{X}(\varphi_{i-1}^{\text{inv}}) \right) = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial q_{j-1}} (\varphi_i^{\text{inv}} + (i-1) \varphi_i^{\text{inv}}) = \frac{\partial \varphi_i^{\text{inv}}}{\partial q_{j-1}}, \end{aligned}$$

что завершает доказательство. ■

Далее, прямыми вычислениями легко доказывается, что функции

$$\psi_{-1} = q_1 u_y + x, \quad \psi_{-2} = (2q_2 - q_1 q_1^{(1)}) u_y \quad (22)$$

являются тенями в положительном накрытии, т. е. удовлетворяют уравнению (16).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Тени (22) восстанавливаются до симметрий уравнения $\tilde{\mathcal{E}}^+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\Psi_{-1} = \langle \psi_{-1}, \psi_{-1}^1, \dots, \psi_{-1}^i, \dots \rangle, \quad \Psi_{-2} = \langle \psi_{-2}, \psi_{-2}^1, \dots, \psi_{-2}^i, \dots \rangle,$$

где

$$\psi_{-1}^i = -(i+1)q_{i+1} + q_i^{(1)} q_1, \quad \psi_{-2}^i = -(i+2)q_{i+2} + q_1 q_{i+1}^{(1)} + (2q_2 - q_1 q_1^{(1)}) q_i^{(1)}.$$

Оставшаяся часть доказательства аналогична доказательству предложения 2. ■

Очевидно,

$$|\Psi_{-1}| = -1, \quad |\Psi_{-2}| = -2.$$

Определим две новые иерархии нелокальных симметрий, полагая

$$\begin{aligned} \Psi_{-k} &= \text{ad}_{-1}^{k-2}(\Psi_{-2}), & k &\geq 3, \\ \Upsilon_{-k}(B) &= \{\Psi_{-k-1}, \Upsilon_1(B)\}, & k &\geq 0, \end{aligned}$$

где

$$\text{ad}_{-1}(\Phi) = \{\Phi, \Psi_{-1}\}.$$

Очевидно,

$$|\Psi_{-k}| = |\Upsilon_{-k}(B)| = -k,$$

и $\Upsilon_0(B)$ является поднятием локальной симметрии $v_0(B)$ в $\tilde{\mathcal{E}}^+$. Распределение элементов алгебры $\text{sym}(\tilde{\mathcal{E}}^+)$ по весам представлено в табл. 3.

ТАБЛИЦА 3. Распределение нелокальных симметрий в $\tilde{\mathcal{E}}^+$ по весам.

Веса	...	$-l$	...	-2	-1	0	1	...	k	...
	...	Ψ_{-l}	...	Ψ_{-2}	Ψ_{-1}	Ψ_0				
	...	$\Upsilon_{-l}(B)$	...	$\Theta_{-2}(A)$ $\Upsilon_{-2}(B)$	$\Theta_{-1}(A)$ $\Upsilon_{-1}(B)$	$\Theta_0(A)$ $\Upsilon_0(B)$	$\Upsilon_1(B)$	...	$\Upsilon_k(B)$	...

4.1.2. *Структура алгебры Ли.* Чтобы вычислить коммутаторы, нам понадобятся асимптотические оценки коэффициентов симметрий, составляющих базис алгебры Ли $\text{sym}(\tilde{\mathcal{E}}^+)$.

Начнем с симметрий Ψ_{-k} , $k \geq 1$. Нас интересуют члены максимального (относительно переменных q_j) порядка в коэффициентах при $\partial/\partial q_i$. Используя обозначения (15), мы по определению имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{\Psi_{-1}} &= \cdots + \left(-(i+1)q_{i+1} + q_1 q_i^{(1)} + o(i-1) \right) \frac{\partial}{\partial q_i} + \cdots, \\ \mathbf{X}_{\Psi_{-2}} &= \cdots + \left(-(i+2)q_{i+2} + q_1 q_{i+1}^{(1)} + o(i) \right) \frac{\partial}{\partial q_i} + \cdots, \end{aligned}$$

где $o(k)$ обозначает члены, содержащие только переменные q_j с $j \leq k$. Предположим теперь, что

$$\mathbf{X}_{\Psi_{-k}} = \cdots + \left(a_k^i q_{i+k} + b_k^i q_1 q_{i+k-1}^{(1)} + o(i+k-2) \right) \frac{\partial}{\partial q_i} + \cdots.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{\Psi_{-k-1}} &= [\mathbf{X}_{\Psi_{-k}}, \mathbf{X}_{\Psi_{-1}}] = \cdots + \left((i+k+1)a_k^i - (i+1)a_k^{i+1} q_{i+k+1} + \right. \\ &\quad \left. + ((i+k)b_k^i - (i+1)b_k^{i+1}) q_1 q_{i+k}^{(1)} + o(i+k-1) \right) \frac{\partial}{\partial q_i} + \cdots. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$a_{k+1}^i = (i+k+1)a_k^i - (i+1)a_k^{i+1}, \quad b_{k+1}^i = (i+k)b_k^i - (i+1)b_k^{i+1},$$

и, используя элементарную индукцию с базой $a_2^i = -(i+2)$, $b_2^i = 1$, мы немедленно получаем, что

$$a_k^i = -(k-2)!(k+i), \quad b_k^i = (k-2)! \quad (23)$$

для всех $i \geq 1$ (мы формально считаем, что $(-1)! = 1$). Чтобы устранить полученные противоречия в обозначениях, изменим базисный элемент Ψ_0 , полагая $\Psi_0 \mapsto -\Psi_0$.

Получим теперь оценки для элементов $\Upsilon_k(B)$. При $k > 0$ воспользуемся определением (21). Тогда простые вычисления показывают, что

$$\varphi_i^{\text{inv}} = B' q_{i-1} + B'' q_1 q_{i-2} + o(i-3),$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{\Upsilon_k(B)} &= \varphi_1^{\text{inv}} \frac{\partial}{\partial q_k} + \cdots + \varphi_{i-k+1}^{\text{inv}} \frac{\partial}{\partial q_i} + \cdots = \\ &= B \frac{\partial}{\partial q_k} + \cdots + (B' q_{i-k} + B'' q_1 q_{i-k-1} + o(i-k-2)) \frac{\partial}{\partial q_i} + \cdots. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}_{\Upsilon_{-k}(B)} &= [\mathbf{X}_{\Psi_{-k-1}}, \mathbf{X}_{\Upsilon_1(B)}] = \\
 &= \left[\cdots + (a_{k+1}^i q_{i+k+1} + b_{k+1}^i q_1 q_{i+k}^{(1)} + o(i+k-1)) \frac{\partial}{\partial q_i} + \cdots, \right. \\
 &\quad \left. B \frac{\partial}{\partial q_1} + \cdots + (B' q_{i-1} + B'' q_1 q_{i-2} + o(i-3)) \frac{\partial}{\partial q_i} + \cdots \right] = \\
 &= \cdots + ((a_{k+1}^{i-1} - a_{k+1}^i) B' q_{i+k} - b_{k+1}^i B q_{i+k}^{(1)} + \\
 &\quad + (a_{k+1}^{i-2} - a_{k+1}^i - b_{k+1}^i) B'' q_1 q_{i+k-1} + \\
 &\quad + (b_{k+1}^{i-1} - b_{k+1}^i) B' q_1 q_{i+k-1}^{(1)} + o(i+k-2)) \frac{\partial}{\partial q_i} + \cdots = \\
 &= (k-1)! \left(\cdots + (B' q_{i+k} - B q_{i+k}^{(1)} + B'' q_1 q_{i+k-1}) \frac{\partial}{\partial q_i} + \cdots \right).
 \end{aligned}$$

Полученные оценки позволяют теперь вычислить все необходимые коммутаторы³⁾.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Имеют место следующие коммутационные соотношения:*

$$\begin{aligned}
 \{\Psi_{-k}, \Psi_{-l}\} &= \frac{(k-2)!(l-2)!}{(k+l-2)!} (k-l) \Psi_{-k-l}, \quad k, l \geq 0, \\
 \{\Psi_{-k}, \Upsilon_l(B)\} &= \frac{l(-l-1)!(k-2)!}{(l-k-1)!} \Upsilon_{l-k}(B), \quad k \geq 0, \quad l \in \mathbb{Z}, \\
 \{\Upsilon_k(B), \Upsilon_l(\tilde{B})\} &= \frac{(-k-1)!(-l-1)!}{(-k-l-1)!} \Upsilon_{k+l}(B\tilde{B}' - B'\tilde{B}), \quad k, l \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство состоит в аккуратном использовании полученных выше оценок. ■

Изменим исходный базис алгебры $\text{sym}(\tilde{\mathcal{E}}^+)$, полагая

$$\Psi_{-k} \mapsto \frac{1}{(k-2)!} \Psi_{-k}, \quad \Upsilon_l(B) \mapsto \frac{1}{(-l-1)!} \Upsilon_l(B),$$

и напомним стандартную конструкцию. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли над $\mathbb{R}$, а $\mathbb{R}_n[z] = \mathbb{R}[z]/(z^n)$ – кольцо обрезанных многочленов. Тогда алгебра Ли $\mathfrak{g}_{[n]} = \mathbb{R}_n[z] \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$ со скобкой

$$[a \otimes g, b \otimes h] = ab \otimes [g, h], \quad g, h \in \mathfrak{g}, \quad a, b \in \mathbb{R}_n[z],$$

является градуированной алгеброй Ли, если положить $\mathfrak{g}_0 = \cdots = \mathfrak{g}_{n-1} = \mathfrak{g}$, а все остальные $\mathfrak{g}_i$ сделать тривиальными. Если рассмотреть многочлены от переменной z^{-1} , то полученная с помощью этой конструкции алгебра будет обозначаться через $\mathfrak{g}_{[-n]}$. Обозначим через $\mathfrak{V}[t]$ алгебру Ли векторных полей $A(t)\partial/\partial t$ на $\mathbb{R}$. Тогда справедлив следующий результат.

³⁾Всюду ниже $s! = 1$, если $s < 0$.

ТЕОРЕМА 1. Алгебра $\mathcal{L}u \operatorname{sym}(\tilde{\mathcal{E}}^+)$ изоморфна полупрямому произведению положительной части

$$\mathfrak{W}^- = \left\{ Z_k = z^{-k+1} \frac{\partial}{\partial z} \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}$$

алгебры Витта и прямой суммы $\mathcal{L}[y] \oplus \mathfrak{V}_{[-3]}[t]$ алгебр $\mathcal{L}u$

$$\mathcal{L}[y] = \left\{ Y_m(B) = z^m B(y) \frac{\partial}{\partial y} \mid m \in \mathbb{Z}, B \in C^\infty(\mathbb{R}) \right\}$$

и

$$\mathfrak{V}[t]_{[-3]} = \left\{ X_s(A) = z^s A(t) \frac{\partial}{\partial t} \mid s \in \{0, 1, 2\}, A \in C^\infty(\mathbb{R}) \right\},$$

где действие полей $z^{-k+1} \partial / \partial z$ на $\mathcal{L}[y]$ и $\mathfrak{V}[t]_{[-3]}$ определено естественным образом.

Упомянутый в теореме 1 изоморфизм отображает элементы Ψ_{-k} в Z_k , $\Upsilon_m(B)$ в $Y_m(B)$, $\Theta_{-s}(A)$ в $X_s(A)$.

4.2. Симметрии в отрицательной иерархии. Пользуясь предложением 1, положим $F = 1$ в определяющих уравнениях отрицательной иерархии. После такого упрощения изучение отрицательного случая становится очень похожим на исследование положительного. Любая симметрия уравнения $\tilde{\mathcal{E}}^-$ — это векторное поле

$$\mathbf{X}_\varphi = \tilde{\mathbf{E}}_\varphi + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\varphi_i \frac{\partial}{\partial r_i} + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{D}_t^j(\varphi_i) \frac{\partial}{\partial r_i^{(j)}} \right), \quad (24)$$

где в слагаемом $\tilde{\mathbf{E}}_\varphi$ все полные производные рассматриваются на $\tilde{\mathcal{E}}^-$, а семейство функций

$$\Phi = \langle \varphi_0 = \varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_i, \dots \rangle, \quad \varphi_i \in C^\infty(\tilde{\mathcal{E}}^-),$$

удовлетворяет уравнениям

$$\tilde{\ell}_\mathcal{E}(\varphi) \equiv \tilde{D}_t \tilde{D}_y(\varphi) - u_x \tilde{D}_x \tilde{D}_y(\varphi) + u_y \tilde{D}_x^2(\varphi) - u_{xy} \tilde{D}_x(\varphi) + u_{xx} \tilde{D}_y(\varphi) = 0, \quad (25)$$

$$\tilde{D}_x(\varphi_1) = \tilde{D}_t(\varphi) - 2u_x \tilde{D}_x(\varphi), \quad (26)$$

$$\tilde{D}_y(\varphi_1) = -u_y \tilde{D}_x(\varphi) - u_x \tilde{D}_y(\varphi), \quad (27)$$

$$\tilde{D}_x(\varphi_i) = r_{i-1,x} \tilde{D}_x(\varphi) + u_x \tilde{D}_x(\varphi_{i-1}) - \tilde{D}_t(\varphi_{i-1}), \quad (28)$$

$$\tilde{D}_y(\varphi_i) = r_{i-1,x} \tilde{D}_y(\varphi) + u_y \tilde{D}_x(\varphi_{i-1}), \quad (29)$$

$i > 1$. Как в п. 4.1, для любых двух симметрий Φ и Ψ их скобка Якоби $\{\Phi, \Psi\}$ определяется равенством

$$\mathbf{X}_{\{\Phi, \Psi\}} = [\mathbf{X}_\Phi, \mathbf{X}_\Psi].$$

4.2.1. *Поднятия локальных симметрий и иерархии нелокальных симметрий.* В дальнейшем нам понадобится оператор

$$\mathcal{Y}_+ = -x \frac{\partial}{\partial t} + 2u \frac{\partial}{\partial x} + 3r_1 \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{i \geq 1} (i+3)r_{i+1} \frac{\partial}{\partial r_i}. \quad (30)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Симметрии ψ_0 , $v(B)$ и $\theta_{-2}(A)$ поднимаются в накрытие $\tilde{\mathcal{E}}^-$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим искомые поднятия через

$$\begin{aligned}\Psi_0 &= \langle \psi_0, \psi_0^1, \dots, \psi_0^i, \dots \rangle, \\ \Upsilon_0(B) &= \langle v_0(B), v_0^1(B), \dots, v_0^i(B), \dots \rangle, \\ \Theta_{-2}(A) &= \langle \theta_{-2}(A), \theta_{-2}^1(A), \dots, \theta_{-2}^i(A), \dots \rangle\end{aligned}$$

и положим

$$\begin{aligned}\psi_0^i &= -(i+2)r_i + xr_{i,x}, & i \geq 1, \\ v_0^i(B) &= Br_{i,y}, & i \geq 1, \\ \theta_{-2}^1(A) &= -xA', & \theta_{-2}^i(A) = \frac{1}{i}y_+(\theta_{-2}^{i-1}(A)), & i > 1.\end{aligned}$$

Все остальные рассуждения аналогичны тем, которые использовались при доказательстве предложения 2. ■

Следующий шаг состоит в описании невидимых симметрий. Эти симметрии должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned}\tilde{D}_x(\varphi_1) &= 0, & \tilde{D}_y(\varphi_1) &= 0, \\ \tilde{D}_x(\varphi_i) &= u_x \tilde{D}_x(\varphi_{i-1}) - \tilde{D}_t(\varphi_{i-1}), & \tilde{D}_y(\varphi_i) &= u_y \tilde{D}_x(\varphi_{i-1}),\end{aligned}$$

где $i > 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Для любой функции $A = A(t)$ и натурального числа $k \geq 3$ существует единственная невидимая симметрия $\Theta_{-k}(A)$ веса $|\Theta_{-k}(A)| = -k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь обозначением (24), положим

$$\mathbf{X}_{\Theta_{-k}(A)} = \varphi_1^{\text{inv}} \frac{\partial}{\partial r_{k-2}} + \dots + \varphi_i^{\text{inv}} \frac{\partial}{\partial r_{k+i-3}} + \dots,$$

где $\varphi_1^{\text{inv}} = A$ и

$$\varphi_i^{\text{inv}} = \frac{1}{i-1}y_+(\varphi_{i-1}^{\text{inv}}), \quad i > 1.$$

Тогда результат доказывается простой индукцией по i . ■

Рассмотрим две функции

$$\psi_1 = 3r_1 + xu_t - 2u u_x, \quad \psi_2 = 4r_2 + xr_1^{(1)} + 2u u_t - (xu_t + 3r_1)u_x.$$

Легко проверить, что они являются тенями в накрытии $\tilde{\mathcal{E}}^-$, т.е. удовлетворяют уравнению (25).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Тени ψ_1 и ψ_2 восстанавливаются до нелокальных симметрий в накрытии $\tilde{\mathcal{E}}^-$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно положить

$$\Psi_1 = \langle \psi_1, \psi_1^1, \dots, \psi_1^i, \dots \rangle,$$

где

$$\psi_1^i = (i+3)r_{i+1} + xr_i^{(1)} - 2ur_{i,x},$$

и

$$\Psi_2 = \langle \psi_2, \psi_2^2, \dots, \psi_2^i, \dots \rangle,$$

где

$$\psi_2^i = (i+4)r_{i+2} + xr_{i+1}^{(1)} + 2ur_i^{(1)} - (xu_t + 3r_1)r_{i,x}.$$

Оставшаяся часть доказательства состоит в непосредственной проверке равенств (26)–(29). ■

Очевидно,

$$|\Psi_1| = 1, \quad |\Psi_2| = 2.$$

Аналогично положительному случаю, определим теперь первую иерархию нелокальных симметрий, полагая

$$\Psi_k = \text{ad}_{+1}^{k-2}(\Psi_2), \quad k \geq 3,$$

где $\text{ad}_{+1}(\Phi) = \{\Psi_1, \Phi\}$. Тогда

$$|\Psi_k| = k.$$

Вторая иерархия будет определена в п. 4.2.2 (см. равенство (31)).

4.2.2. Структура алгебры Ли. Как и выше, для вычисления коммутаторов понадобятся асимптотические оценки. Аналогично положительному случаю, используя индукцию, мы получаем следующие оценки для симметрий Ψ_k :

$$\mathbf{X}_{\Psi_k} = \dots + (a_k^i r_{i+k} + b_k^i x r_{i+k-1}^{(1)} + o(i+k-2)) \frac{\partial}{\partial r_i} + \dots,$$

где

$$a_k^i = (k-2)!(i+k+2), \quad b_k^i = (k-2)!.$$

Чтобы унифицировать знаки, сделаем замену $\Psi_0 \mapsto -\Psi_0$. Используя полученные оценки, легко доказать следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Для всех целых k и $l \geq 0$ выполняются следующие коммутационные соотношения:

$$\{\Psi_k, \Psi_l\} = \frac{(l-2)!(k-2)!(l-k)}{(k+l-2)!} \Psi_{k+l}.$$

После естественной замены $\Psi_k \mapsto \Psi_k/(k-2)!$ мы получаем коммутаторы

$$\{\Psi_k, \Psi_l\} = (l-k)\Psi_{k+l}.$$

Кроме того, для новых базисных элементов Ψ_k оценки принимают вид

$$\mathbf{X}_{\Psi_k} = \dots + ((i+k+2)r_{i+k} + x r_{i+k-1}^{(1)} + o(i+k-2)) \frac{\partial}{\partial r_i} + \dots.$$

ТАБЛИЦА 4. Распределение элементов алгебры $\text{sum}(\tilde{\mathcal{E}}^-)$ по весам.

Веса	...	$-l$	...	-2	-1	0	1	...	k	...
	...	$\Theta_{-l}(A)$	...	$\Theta_{-2}(A)$	$\Theta_{-1}(A)$	$\begin{matrix} \Psi_0 \\ \Theta_0(A) \\ \Upsilon_0(B) \end{matrix}$	$\begin{matrix} \Psi_1 \\ \Theta_1(A) \end{matrix}$	...	$\begin{matrix} \Psi_k \\ \Theta_k(A) \end{matrix}$	...

Достроим теперь иерархию симметрий $\{\Theta_{-k}(A)\}$ в положительном направлении, полагая

$$\Theta_k(A) = -\frac{1}{3}\{\Psi_{k+3}, \Theta_{-3}(A)\}, \quad k \geq -2. \quad (31)$$

Имеем $|\Theta_k(A)| = k$. Распределение элементов алгебры Ли $\text{sum}(\tilde{\mathcal{E}}^-)$ по весам представлено в табл. 4.

Коэффициенты невидимых симметрий имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_1^{\text{inv}} &= A, \\ \varphi_2^{\text{inv}} &= -xA', \\ \varphi_3^{\text{inv}} &= -uA + \frac{1}{2}x^2A'', \\ \varphi_4^{\text{inv}} &= -r_1A' + uxA'' - \frac{1}{6}x^3A''', \end{aligned}$$

а при $i \geq 5$ справедливы оценки

$$\varphi_i^{\text{inv}} = -A'r_{i-3} + xA''r_{i-4} + o(i-5).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{\Theta_{-k}(A)} &= A \frac{\partial}{\partial r_{k-2}} + \dots + \varphi_{i-k+3}^{\text{inv}} \frac{\partial}{\partial r_i} + \dots = \\ &= A \frac{\partial}{\partial r_{k-2}} + \dots + (-A'r_{i-k} + xA''r_{i-k-1} + o(i-k-2)) \frac{\partial}{\partial r_i} + \dots \end{aligned}$$

при $k \geq 3$.

Используя полученные оценки для симметрий Ψ_k и $\Theta_{-3}(A)$, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{\Theta_k(A)} &= -\frac{1}{3}[\mathbf{X}_{\Psi_{k+3}}, \mathbf{X}_{\Theta_{-3}(A)}] = \\ &= \left[\dots + ((i+k+2)r_{i+k} + xr_{i+k-1}^{(1)} + o(i+k-2)) \frac{\partial}{\partial r_i} + \dots, \right. \\ &\quad \left. \dots + (-A'r_{i-3} + xA''r_{i-4} + o(i-5)) \frac{\partial}{\partial r_i} + \dots \right] = \\ &= \dots + (-A'r_{i+k} + xA''r_{i+k-1} + o(i+k-2)) \frac{\partial}{\partial r_i} + \dots \end{aligned}$$

для всех $k \geq -2$. Из этих оценок вытекает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Для всех $k \geq 0, l \in \mathbb{Z}$ справедливы равенства

$$\{\Psi_k, \Theta_l(A)\} = l \Theta_{k+l}(A).$$

Наконец, справедлив следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Для любых целых чисел $k, l \in \mathbb{Z}$ и гладких функций $A = A(t)$, $\tilde{A} = \tilde{A}(t)$ имеют место соотношения

$$\{\Theta_k(A), \Theta_l(\tilde{A})\} = \Theta_{k+l}(A\tilde{A}' - A'\tilde{A}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Результат непосредственно следует из полученных выше оценок, если $k \leq -3$ или $l \leq -3$, но если $k > -3$ и $l > -3$ этот метод доказательства не работает. Однако в этом случае справедливы равенства

$$\begin{aligned} \{\Theta_k(A), \Theta_l(\tilde{A})\} &= -\frac{1}{3} \{ \{ \Psi_{k+3}, \Theta_{-3}(A) \}, \Theta_l(\tilde{A}) \} = \\ &= -\frac{1}{3} (\{ \{ \Psi_{k+3}, \Theta_l(\tilde{A}) \}, \Theta_{-3}(A) \} + \{ \Psi_{k+3}, \{ \Theta_{-3}(A), \Theta_l(\tilde{A}) \} \}) = \\ &= -\frac{1}{3} (l \{ \Theta_{k+l+3}(\tilde{A}), \Theta_{-3}(A) \} + \{ \Psi_{k+3}, \Theta_{l-3}(A\tilde{A}' - A'\tilde{A}) \}) = \\ &= -\frac{1}{3} (-l \Theta_{k+l}(A\tilde{A}' - A'\tilde{A}) + (l-3) \Theta_{k+l}(A\tilde{A}' - A'\tilde{A})) = \\ &= \Theta_{k+l}(A\tilde{A}' - A'\tilde{A}), \end{aligned}$$

что и завершает доказательство. ■

Итак, мы получили результат, аналогичный теореме 1.

ТЕОРЕМА 2. Алгебра Ли $\text{sym}(\tilde{\mathcal{E}}^-)$ изоморфна прямой сумме $(\mathfrak{W}^+ \times \mathfrak{L}[t]) \oplus \mathfrak{V}[y]$ полупрямого произведения положительной части

$$\mathfrak{W}^+ = \left\{ z^{k+1} \frac{\partial}{\partial z} \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}$$

алгебры Витта с алгеброй

$$\mathfrak{L}[t] = \left\{ z^m A(t) \frac{\partial}{\partial t} \mid m \in \mathbb{Z}, A \in C^\infty(\mathbb{R}) \right\},$$

где векторные поля $z^{k+1} \partial / \partial z$ естественным образом действуют на $\mathfrak{L}[t]$, а

$$\mathfrak{V}[y] = \left\{ B(y) \frac{\partial}{\partial y} \mid B \in C^\infty(\mathbb{R}) \right\}$$

– алгебра Ли векторных полей на прямой.

5. ДЕЙСТВИЕ ОПЕРАТОРОВ РЕКУРСИИ

Обсудим действие операторов рекурсии на описанные выше иерархии нелокальных симметрий.

5.1. Действие операторов рекурсии на локальные симметрии и тени.

Алгебра симметрий $\text{sym}(\mathcal{E})$ допускает оператор рекурсии $\hat{\chi} = \mathcal{R}_+(\chi)$, определяемый системой (см. [10])

$$\begin{aligned} D_t(\hat{\chi}) &= u_y^{-1} (u_y D_x(\chi) - u_x D_y(\chi) + (u_x u_{xy} - u_y u_{xx}) \hat{\chi}), \\ D_x(\hat{\chi}) &= u_y^{-1} (u_{xy} \hat{\chi} - D_y(\chi)). \end{aligned} \quad (32)$$

Это означает, что функция $\hat{\chi}$ является решением уравнения (5), если χ – тоже решение уравнения (5). Другой оператор рекурсии $\chi = \mathcal{R}_-(\hat{\chi})$ задается системой

$$\begin{aligned} D_x(\chi) &= D_t(\hat{\chi}) - u_x D_x(\hat{\chi}) + u_{xx} \hat{\chi}, \\ D_y(\chi) &= -u_y D_x(\hat{\chi}) + u_{xy} \hat{\chi}. \end{aligned} \quad (33)$$

Операторы $\mathcal{R}_+$ и $\mathcal{R}_-$ взаимно обратны.

Действие операторов $\mathcal{R}_+$ и $\mathcal{R}_-$ на симметриях $\text{sym}(\mathcal{E})$ можно продолжить на тени нелокальных симметрий $\text{sym}(\tilde{\mathcal{E}}^+)$ и $\text{sym}(\tilde{\mathcal{E}}^-)$, если заменить в равенствах (32) и (33) полные производные D_t , D_x и D_y на операторы $\hat{D}_t$, $\hat{D}_x$ и $\hat{D}_y$, определенные равенствами

$$\begin{aligned} \hat{D}_x &= D_x + \sum_{j=0}^{\infty} \hat{D}_y^j \left(\frac{1}{u_y} \right) \frac{\partial}{\partial q_1^{(j)}} + \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \hat{D}_y^j \left(\frac{q_{i-1}^{(1)}}{u_y} \right) \frac{\partial}{\partial q_i^{(j)}} + \\ &\quad + \sum_{j=0}^{\infty} \hat{D}_t^j (u_x^2 - u_t) \frac{\partial}{\partial r_1^{(j)}} + \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \hat{D}_t^j (u_x r_{i-1,x} - r_{i-1,t}) \frac{\partial}{\partial r_i^{(j)}}, \\ \hat{D}_y &= D_y + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} q_i^{(j+1)} \frac{\partial}{\partial q_i^{(j)}} + \sum_{j=0}^{\infty} \hat{D}_t^j (u_x u_y) \frac{\partial}{\partial r_1^{(j)}} + \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \hat{D}_t^j (u_y r_{i-1,x}) \frac{\partial}{\partial r_i^{(j)}}, \\ \hat{D}_t &= D_t + \sum_{j=0}^{\infty} \hat{D}_y^j \left(\frac{u_x}{u_y} \right) \frac{\partial}{\partial q_1^{(j)}} + \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \hat{D}_y^j \left(\frac{u_x}{u_y} q_{i-1}^{(1)} - \hat{D}_x \left(q_{i-1}^{(0)} \right) \right) \frac{\partial}{\partial q_i^{(j)}} + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} r_i^{(j+1)} \frac{\partial}{\partial r_i^{(j)}}, \end{aligned}$$

т. е. если рассмотреть сумму Уитни накрытий $\tilde{\mathcal{E}}^+$ и $\tilde{\mathcal{E}}^-$. Полученные после такой замены операторы будут также обозначаться через $\mathcal{R}_+$ и $\mathcal{R}_-$.

Заметим, что операторы нетривиальным образом действуют на “вакуум”:

$$\mathcal{R}_+(0) = \theta_{-2}(A), \quad \mathcal{R}_-(0) = v_0(B);$$

это немедленно следует из уравнений (32) и (33). Поэтому действие имеет смысл рассматривать с точностью до $\theta_{-2}(A)$ для оператора $\mathcal{R}_+$ и с точностью до $v_0(B)$ для $\mathcal{R}_-$. Имея это в виду, можно доказать следующий факт.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. *С точностью до образа тривиальной симметрии действие операторов рекурсии имеет вид*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_+(\theta_i(A)) &= \begin{cases} \alpha_i^+ \theta_{i-1}(A), & i > -2, \\ 0, & i = -2, \end{cases} & \mathcal{R}_-(\theta_i(A)) &= \alpha_i^- \theta_{i+1}(A), \quad i \geq -2, \\ \mathcal{R}_+(v_i(B)) &= \beta_i^+ v_{i+1}(B), \quad i \leq 0, & \mathcal{R}_-(v_i(B)) &= \begin{cases} \beta_i^- v_{i+1}(B), & i < 0, \\ 0, & i = 0, \end{cases} \\ \mathcal{R}_+(\psi_i) &= \gamma_i^+ \psi_{i-1}, & \mathcal{R}_-(\psi_i) &= \gamma_i^- \psi_{i+1}, \quad i \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

где $\alpha_i^\pm, \beta_i^\pm, \gamma_i^\pm$ – ненулевые константы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно отметить следующие три факта: веса операторов $\mathcal{R}_+$ и $\mathcal{R}_-$ равны -1 и $+1$ соответственно; их действие (с точностью до образов нуля) не изменяет зависимости теней от переменных y и t ; только тени $\theta_{-2}(A)$ и $v_0(B)$ могут отображаться в нуль. ■

Заметим, что операторы $\mathcal{R}_+$ и $\mathcal{R}_-$ “склеивают” друг с другом тени ψ_m нелокальных симметрий из накрытий $\tilde{\mathcal{E}}^+$ и $\tilde{\mathcal{E}}^-$ и связывают между собой серии $\theta_k(A)$ и $v_j(B)$:

$$\begin{aligned} \dots & \xrightleftharpoons[\mathcal{R}_+]{\mathcal{R}_-} \psi_{-1} \xrightleftharpoons[\mathcal{R}_+]{\mathcal{R}_-} \psi_0 \xrightleftharpoons[\mathcal{R}_+]{\mathcal{R}_-} \psi_1 \xrightleftharpoons[\mathcal{R}_+]{\mathcal{R}_-} \dots \\ \dots & \xrightleftharpoons[\mathcal{R}_+]{\mathcal{R}_-} v_{-1}(B) \xrightleftharpoons[\mathcal{R}_+]{\mathcal{R}_-} v_0(B) \xrightleftharpoons[\mathcal{R}_+]{\mathcal{R}_-} 0 \xrightleftharpoons[\mathcal{R}_+]{\mathcal{R}_-} \theta_{-2}(A) \xrightleftharpoons[\mathcal{R}_+]{\mathcal{R}_-} \theta_{-1}(A) \xrightleftharpoons[\mathcal{R}_+]{\mathcal{R}_-} \dots \end{aligned}$$

5.2. Рекуррентные соотношения для симметрий положительного накрытия. Опишем оператор, дающий альтернативный способ построения элементов алгебры Ли $\text{sym}(\tilde{\mathcal{E}}^+)$. С этой целью выразим функции u_x и u_y из уравнений (9):

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{q_{1,t}}{q_{1,x}}, \\ u_y &= \frac{1}{q_{1,x}}. \end{aligned} \tag{34}$$

Условием совместности этой системы является уравнение

$$q_{1,xx} = q_{1,t}q_{1,xy} - q_{1,x}q_{1,ty}, \tag{35}$$

известное как уравнение универсальной иерархии (см. [13], [14]). Значит, системы (9) и (34) задают преобразование Бэклунда между уравнениями (4) и (35) (см. [15]). Подставляя выражения (34) в (10), получаем

$$\begin{aligned} q_{k,t} &= q_{1,t}q_{k-1,y} - q_{k-1,x}, \\ q_{k,x} &= q_{1,x}q_{k-1,y}, \end{aligned} \tag{36}$$

где $k \geq 2$. Условия совместности этой системы после переобозначения $k-1 \mapsto k$ принимают вид

$$q_{k,xx} = q_{1,t}q_{k,xy} - q_{1,x}q_{k,ty}, \quad k \geq 2. \tag{37}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. Системы (34) и (36) определяют автопреобразование Бэклунда бесконечной системы уравнений, заданной равенствами (35) и (37).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условия совместности для уравнений (34), (36) определяют равенства (35) и (37). Из системы (36) получаем обратное преобразование

$$q_{k-1,x} = -q_{k,t} + \frac{q_{1,t}}{q_{1,x}} q_{k,x},$$

$$q_{k-1,y} = \frac{q_{k,x}}{q_{1,x}},$$

условия совместности которого совпадают с уравнениями (37). ■

СЛЕДСТВИЕ 1. *Линеаризация*

$$D_t(\hat{\chi}_1) = u_y^{-2} (u_y D_x(\chi_0) - u_x D_y(\chi_0)), \quad (38)$$

$$D_x(\hat{\chi}_1) = -u_y^{-2} D_y(\chi_0), \quad (39)$$

$$D_t(\hat{\chi}_k) = q_{1,t} D_y(\chi_{k-1}) + q_{k-1,y} D_t(\chi_1) - D_x(\chi_{k-1}), \quad (40)$$

$$D_x(\hat{\chi}_k) = q_{1,x} D_y(\chi_{k-1}) + q_{k-1,y} D_x(\chi_1) \quad (41)$$

уравнений (9) и (36) определяет оператор рекурсии

$$\mathcal{Q}((\chi_0, \chi_1, \chi_2, \dots, \chi_k, \dots)) = (\chi_0, \hat{\chi}_1, \hat{\chi}_2, \dots, \hat{\chi}_k, \dots)$$

для алгебры $\text{sym}(\tilde{\mathcal{E}}^+)$.

Заметим, что симметрии ξ и $\mathcal{Q}(\xi)$ имеют одинаковые тени и поэтому различаются на невидимую симметрию. Поэтому, на первый взгляд, оператор рекурсии $\mathcal{Q}$ кажется бесполезным, но это не так: он предоставляет нам альтернативный способ поднятия теней до нелокальных симметрий из алгебры $\tilde{\mathcal{E}}^+$. Точнее говоря, если взять локальную симметрию или тень χ_0 , то оператор (38), (39) даст возможность вычислить χ_1 ; применяя равенства (40), (41) при $k = 2$ к χ_1 , мы получим χ_2 , применение (40), (41) к χ_{m-1} позволяет вычислить χ_m и т. д.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. При всех $k \geq 1$ и $j = 0, 1, 2$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\psi_0) &= \psi_0^1, & \mathcal{Q}(\psi_0^k) &= \psi_0^{k+1}, \\ \mathcal{Q}(\theta_{-j}(A)) &= \theta_{-j}^1(A), & \mathcal{Q}(\theta_{-j}^k(A)) &= \theta_{-j}^{k+1}(A). \end{aligned}$$

Кроме того, справедливы равенства

$$\mathcal{Q}(v_0(B)) = v_0^1(B), \quad \mathcal{Q}(v_0^k(B)) = v_0^{k+1}(B).$$

Это утверждение доказывается так же, как предложение 2.

К сожалению, нам не удалось построить аналогичный оператор рекурсии для симметрий в отрицательном накрытии.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы дали полное описание нелокальных симметрий, связанных с представлением Лакса для трехмерного уравнения rdDym . Полученная структура алгебры Ли кажется нам очень интересной, и мы в дальнейшем планируем изучить нелокальные симметрии других интегрируемых уравнений, рассмотренных в работе [5].

Благодарности. Все компьютерные вычисления были выполнены с помощью программных средств **Jets** (см. [16]).

Список литературы

- [1] M. Błaszak, *Phys. Lett. A*, **297**:3–4 (2002), 191–195.
- [2] M. V. Pavlov, *J. Math. Phys.*, **44**:9 (2003), 4134–4156.
- [3] O. I. Morozov, *J. Geom. Phys.*, **59**:11 (2009), 1461–1475.
- [4] V. Ovsienko, *Adv. Pure Appl. Math.*, **1**:1 (2010), 7–17.
- [5] E. V. Ferapontov, J. Moss, *Commun. Anal. Geom.*, **23**:1 (2015), 91–127, arXiv:1204.2777.
- [6] H. Baran, I. S. Krasil'shchik, O. I. Morozov, P. Vojčák, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **21**:4 (2014), 643–671, arXiv:1407.0246.
- [7] H. Baran, I. S. Krasil'shchik, O. I. Morozov, P. Vojčák, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **22**:2 (2015), 210–232, arXiv:1412.6461.
- [8] I. S. Krasil'shchik, A. M. Vinogradov, *Acta Appl. Math.*, **15**:1–2 (1989), 161–209.
- [9] А. М. Виноградов, И. С. Красильщик (ред.), *Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики*, XX век. Математика и механика, **9**, Факториал Пресс, М., 2005.
- [10] O. I. Morozov, *Recursion operators and nonlocal symmetries for integrable rmdKP and rd-Dym equations*, arXiv:1202.2308.
- [11] M. Marvan, “Another look on recursion operators”, *Differential Geometry and Applications* (Brno, Czech Republic, August 28 – September 1, 1995), Masaryk University, Brno, 1996, 393–402.
- [12] С. В. Манаков, П. М. Сантини, *ТМФ*, **152**:1 (2007), 147–156.
- [13] L. Martínez Alonso, A. B. Shabat, *Phys. Lett. A*, **299**:4 (2002), 359–365.
- [14] Л. Мартинес Алонсо, А. Б. Шабат, *ТМФ*, **140**:2 (2004), 216–229.
- [15] O. I. Morozov, *SIGMA*, **8** (2012), 051, 5 pp.
- [16] H. Baran, M. Marvan, *Jets: A software for differential calculus on jet spaces and diffeities*, <http://jets.math.slu.cz>.