Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. М. Зубарев, О. В. Зубарева, Точные решения для равновесных конфигураций поверхности проводящей жидкости в неоднородном магнитном поле, *ТМФ*, 2016, том 188, номер 3, 497–504

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9045>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 13:35:39

© 2016 г.

Н. М. Зубарев^{*†}, О. В. Зубарева^{*}

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ РАВНОВЕСНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В двумерной постановке исследуется задача о равновесной конфигурации свободной поверхности идеально проводящей жидкости, деформированной магнитным полем системы линейных проводников с токами. Равновесие достигается за счет баланса капиллярного и магнитного давлений. С помощью метода конформных отображений получены точные решения задачи, описывающие появление системы двумерных лунок на изначально плоской поверхности жидкого проводника под действием неоднородного магнитного поля. Подробно рассмотрен случай для двух симметрично расположенных лунок.

Ключевые слова: равновесные конфигурации, точные решения, свободная поверхность, проводящая жидкость, поверхностное натяжение, неоднородное магнитное поле, метод конформных отображений.

DOI: 10.4213/tmf9045

1. ВВЕДЕНИЕ

Свободная поверхность проводящей жидкости (жидкого металла) деформируется под влиянием приложенного высокочастотного магнитного поля (см. статью [1] и ссылки в ней). Поле проникает только в тонкий поверхностный слой проводника (так называемый скин-эффект). Если глубина скин-слоя достаточно мала, то можно приближенно считать, что поле внутри жидкости отсутствует. Вне жидкости силовые линии магнитного поля направлены по касательной к ее границе. Взаимодействие внешнего магнитного поля и индуцированного им поверхностного электрического тока приводит к появлению нормальных (усредненных по времени) магнитных сил, которые при определенных условиях могут уравниваться капиллярными.

Работа выполнена в рамках государственного задания № 0389-2014-0006 при поддержке РФФИ (гранты № 14-08-00235, 16-08-00228) и УрО РАН (грант 15-8-2-8).

^{*}Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург, Россия. E-mail: nick@ier.uran.ru

[†]Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия

Задача поиска соответствующих равновесных конфигураций свободной поверхности эквивалентна магнитоэлектростатической задаче о форме границы идеально проводящей жидкости, помещенной в постоянное внешнее магнитное поле, не проникающее внутрь среды. Интерес к этой проблематике связан с возможностью управления формой расплавленного металла посредством воздействия электромагнитного поля [2] и, в частности, обусловлен возможностью приложений в металлургии, таких как непрерывное литье и взвешенная плавка.

Поиск равновесных конфигураций поверхности с учетом поверхностного натяжения является чрезвычайно сложной задачей, что связано существенной нелинейностью условия баланса давлений на границе неизвестной формы (в отсутствии поверхностного натяжения задача упрощается [3]). Однако в плоско-симметричном случае, когда все величины зависят лишь от двух декартовых координат, анализ существенно упрощается, поскольку можно использовать метод конформных отображений. В рамках этого метода исходная задача сводится к качественно более простой задаче с известной границей, для которой распределение магнитного поля можно найти аналитически (неизвестной остается отображающая функция). Подобный подход использовался, например, для анализа конфигураций жидкометаллических колонн в высокочастотном магнитном поле. В работе [4] были найдены аналитические решения для периодической системы колонн во внешнем однородном магнитном поле и численно исследовалась форма отдельной колонны в однородном или квадрупольном полях. В статье [5] были численно рассчитаны конфигурации столба проводящей жидкости в магнитном поле, создаваемом несколькими линейными токонесящими проводниками. Наконец, в нашей недавней работе [6] было получено однопараметрическое семейство точных решений для формы изначально плоской поверхности проводящей жидкости, деформированной магнитным полем параллельного ей линейного проводника с током. Согласно этим частным решениям на свободной поверхности под проводником возникает двумерная лунка. При относительно больших токах лунка трансформируется в цилиндрическую полость, охватывающую проводник; эта полость связана шейкой с внешней областью.

В настоящей работе мы рассматриваем задачу о равновесных конфигурациях в магнитном поле в ситуации, когда параллельно поверхности проводящей жидкости расположена система прямых токонесящих проводников. На основе подхода, предложенного в статье [6] для уединенного проводника, показано, что эта задача допускает широкий класс точных решений для произвольного числа проводников с токами. Методика построения решений продемонстрирована на относительно простом примере двух токонесящих проводников, симметрично расположенных над изначально плоской поверхностью жидкости. Отметим, что аналогичный подход применялся нами ранее для нахождения точных решений ряда электростатических задач (см. работы [7]–[10]).

2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В невозмущенном состоянии поверхность жидкости представляет собой горизонтальную плоскость. Введем прямоугольную систему координат $\{x, y, z\}$ таким образом, что ось y направлена по нормали к плоскости, т. е. в вертикальном направлении. Пусть имеется внешнее однородное горизонтальное магнитное поле с абсолютным значением индукции B . Кроме того, расположим N бесконечно длин-

ных тонких прямых проводников над поверхностью жидкости параллельно оси z . Электрические токи, протекающие по проводникам, равны I_k , где $k = 1, 2, \dots, N$. В плоскости поперечного сечения $\{x, y\}$ положения проводников соответствуют точкам с координатами $\{x_k, y_k\}$.

Свободная поверхность жидкости деформируется под действием неоднородного магнитного поля. Определим ее форму. Будем считать, что задача обладает плоской симметрией, т. е. все величины зависят лишь от пары переменных x и y (поверхность жидкости инвариантна по отношению к сдвигу вдоль проводников). В этом случае векторный потенциал магнитного поля ($\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$) имеет только одну z -компоненту: $\mathbf{A} = \{0, 0, \psi(x, y)\}$. Распределение магнитного поля определяется выражением

$$\mathbf{B} = \{\psi_y, -\psi_x, 0\}. \quad (1)$$

Условие $\psi = \text{const}$ задает силовые линии магнитного поля. Вектор магнитной индукции $\mathbf{B}$ связан с вектором плотности тока $\mathbf{j}$ уравнением Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad \mathbf{j} = \{0, 0, \sum_{k=1}^N I_k \delta(x - x_k) \delta(y - y_k)\},$$

где δ – дельта-функция, а μ_0 – магнитная постоянная. Подставляя сюда выражение (1), приходим к двумерному уравнению Пуассона на z -компоненту векторного потенциала ψ :

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = -\mu_0 \sum_{k=1}^N I_k \delta(x - x_k) \delta(y - y_k). \quad (2)$$

Это уравнение следует решать совместно с условием $\psi = 0$ на свободной поверхности (т. е. магнитное поле направлено по касательной к границе), а также условием однородности поля на бесконечности

$$\psi \rightarrow By, \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Форма поверхности определяется условием баланса между магнитным и капиллярным давлениями:

$$\frac{(\nabla \psi)^2}{2\mu_0} = T\kappa + P_0, \quad (4)$$

где T – коэффициент поверхностного натяжения, κ – локальная кривизна поверхности, а $P_0 \equiv B^2/2\mu_0$ – постоянная разность давлений внутри и вне жидкости.

Для удобства перейдем к безразмерным переменным посредством замен

$$\mathbf{r} \rightarrow 2\mu_0 T B^{-2} \mathbf{r}, \quad \psi \rightarrow 2\mu_0 T B^{-1} \psi,$$

при этом вместо токов I_k мы используем безразмерные комплексы $J_k = -I_k B/2T$.

3. ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ

Введем комплексный потенциал магнитного поля $\Phi = -\psi + i\varphi$, где функция φ является гармонически сопряженной к z -компоненте векторного потенциала магнитного поля ψ . Комплексный потенциал Φ – аналитическая функция комплексной переменной $w = x + iy$ всюду в области над жидкостью за исключением точек, где

находятся токонесущие проводники. В соответствии с выражением (3) потенциал Φ удовлетворяет следующему условию на бесконечности:

$$\Phi \rightarrow iw, \quad |w| \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Условие баланса сил (4) на свободной поверхности жидкости можно переписать в виде

$$\left| \frac{d\Phi}{dw} \right|^2 = \kappa + 1. \quad (6)$$

Осуществим конформное отображение $w(\xi)$ области над жидкостью в верхнюю полуплоскость комплексной переменной ξ , удовлетворяющее условию

$$w \rightarrow \xi, \quad |\xi| \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Пусть $\xi = u + iv$ и соответственно граница жидкости задается условием $v = 0$. Положим, что координатами проводников в конформных переменных являются $\{u_k, v_k\}$, где $k = 1, 2, \dots, N$. Форма границы задается параметрическими выражениями $x = X(u)$ и $y = Y(u)$, или, в комплексном виде, – выражением

$$w = W(u) \equiv X(u) + iY(u).$$

В этих обозначениях кривизна поверхности определяется формулой

$$\kappa = \frac{Y_{uu}X_u - X_{uu}Y_u}{(X_u^2 + Y_u^2)^{3/2}} = \frac{\text{Im}(W_{uu}\overline{W}_u)}{|W_u|^3}. \quad (8)$$

В результате задача нахождения комплексного потенциала с условием $\text{Re } \Phi = 0$ на неизвестной свободной поверхности сводится к задаче с аналогичным условием на прямой $v = 0$. Ее решение в рамках метода изображений дается соотношением

$$\Phi(\xi) = i\xi + 2 \sum_{k=1}^N J_k \ln \frac{\xi - u_k + iv_k}{\xi - u_k - iv_k}. \quad (9)$$

Отметим, что это выражение удовлетворяет на бесконечности условию

$$\Phi \rightarrow i\xi, \quad |\xi| \rightarrow \infty,$$

являющемуся следствием условий (5) и (7).

Неизвестным остается отображение $w = w(\xi)$. Функция $w(\xi)$ является аналитической при $v \geq 0$. Она удовлетворяет условию (7) на бесконечности и равенству $w(\xi)|_{v=0} = W(u)$ на границе $v = 0$. Комплексная функция W задает форму поверхности и определяется условием баланса давлений (6), которое в конформных переменных принимает вид

$$\left| \frac{d\Phi}{d\xi} \right|_{v=0}^2 = \frac{\text{Im}(W_{uu}\overline{W}_u)}{|W_u|} + |W_u|^2. \quad (10)$$

Задача определения формы поверхности существенно упрощается, если ввести вспомогательную аналитическую функцию $g = \sqrt{w_\xi}$. Как следует из (7), эта функция удовлетворяет условию

$$g \rightarrow 1, \quad |\xi| \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Удобно ввести также комплексную функцию $G(u) = g(\xi)|_{v=0}$, которая задает значение функции g на границе $v = 0$. Для известной функции G форму свободной поверхности $w = W(u)$ можно найти из дифференциального уравнения

$$\frac{dW}{du} = G^2. \quad (12)$$

Условие баланса сил (10), записанное с использованием функции G , принимает вид нелинейного уравнения четвертой степени

$$\left(1 - \sum_{k=1}^N \frac{4J_k v_k}{(u - u_k)^2 + v_k^2}\right)^2 = 2 \operatorname{Im}(\bar{G}G_u) + (G\bar{G})^2, \quad (13)$$

где мы воспользовались выражением (9) для комплексного потенциала Φ . Таким образом, исходная задача свелась к отысканию функции $g(\xi)$, аналитической в полуплоскости $v \geq 0$ и удовлетворяющей условиям (11) и (13).

Обратим внимание, что если левую часть ключевого уравнения (13), ответственную за влияние внешнего магнитного поля, разложить по полюсам, то она будет содержать лишь полюсы первого и второго порядка. Это обстоятельство подсказывает нам, в какой форме следует искать неизвестную функцию $g(\xi)$, а также связанную с ней функцию $G(u)$. Так, будем искать частное решение для $g(\xi)$ в виде

$$g(\xi) = 1 - \sum_{k=1}^N \frac{i\gamma_k - \eta_k}{\xi - u_k + iv_k}. \quad (14)$$

В соответствии с этим представлением функция $g(\xi)$ имеет особенности в точках $\xi = u_k - iv_k$, где $k = 1, 2, \dots, N$, т.е. в нижней полуплоскости комплексной переменной ξ . Тогда, как и требуется, функция $g(\xi)$ является аналитической в верхней полуплоскости, а также удовлетворяет условию (11) на бесконечности. В терминах функции G выражение (14) эквивалентно следующему равенству:

$$G(u) = 1 - \sum_{k=1}^N \frac{i\gamma_k - \eta_k}{u - u_k + iv_k}, \quad (15)$$

т.е. каждому проводнику соответствует простой полюс функции $G(u)$ (в общем случае разложение содержит полюсы произвольного порядка). Входящие в (15) параметры γ_k определяют степень деформации поверхности (формула (15) описывает систему N двумерных лунок в поверхности), а параметры η_k характеризуют асимметрию лунок, связанную с их взаимодействием.

Важной особенностью уравнения (13) является то, что при подстановке в него выражения (15) его правая часть, как и левая, будет содержать лишь полюсы первого и второго порядков. Приравнивая коэффициенты при одинаковых полюсах (мы имеем N простых полюсов и N полюсов второго порядка) и затем разделяя полученные выражения на вещественные и мнимые части, получим $4N$ алгебраических уравнений, связывающих $5N$ параметров (γ_k , η_k , v_k , u_k и J_k). Таким образом, подстановка (14) дает N -параметрическое семейство точных решений задачи.

4. ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ДВУХ ПРОВОДНИКОВ

В предыдущем разделе мы построили точное решение для произвольного числа проводников. Рассмотрим теперь частный случай $N = 2$. Пусть два проводника, по которым протекают одинаковые токи J , расположены на расстоянии l от поверхности жидкости и на расстоянии $2d$ друг от друга. Положим, что начало системы координат находится посередине между проводниками, т. е. их положения в плоскости поперечного сечения $\{x, y\}$ задаются условиями $x = \pm d$ и $y = 0$.

В конформных переменных положения проводников определяются условиями $u = \pm h$ и $v = a$, где параметры h и a являются аналогами d и l . В этом случае выражение для комплексного потенциала (9) переписывается как равенство

$$\Phi(\xi) = i\xi + 2J \ln \frac{(\xi - h + ia)(\xi + h + ia)}{(\xi - h - ia)(\xi + h - ia)}, \quad (16)$$

а зависимость $G(u)$ принимает вид

$$G(u) = 1 - \frac{i\gamma - \delta}{u - h + ia} - \frac{i\gamma + \delta}{u + h + ia}. \quad (17)$$

Рассмотрим ситуацию, когда проводники расположены далеко друг от друга, так что геометрия лунок в основном определяется влиянием магнитного поля ближайшего проводника с током. В параметрической плоскости $\{u, v\}$ имеется два характерных пространственных масштаба: a и h . Тогда в качестве критерия достаточно большого расстояния между проводниками можно использовать условие малости a по сравнению с h , $a/h \ll 1$. В случае конечного a это условие означает малость параметра h^{-1} . Наличие в задаче малого параметра позволяет строить приближенные решения в виде асимптотических разложений. Из общих соображений понятно, что параметр решения δ , характеризующий асимметрию лунок, уменьшается при увеличении расстояния h . Можно предположить, что в основном порядке δ обратно пропорционально h :

$$\delta = sh^{-1} + O(h^{-2}), \quad (18)$$

где s – некоторая постоянная. Подставляя (16) и (17) в (13) и используя разложение (18) для δ , получаем следующие алгебраические уравнения, связывающие параметры задачи (они соответствуют полюсам разных порядков):

$$\begin{aligned} 16a^2J^2 - 16a^3J - 2a\gamma^2 - \gamma^4 + 8a^3\gamma - 8a^3\gamma^2 + 4a\gamma^3 &= -4ia^3(2s - \gamma^2)h^{-1} + O(h^{-2}), \\ 16a^2J^2 + 2\gamma a(2a - \gamma) - \gamma^2(2a - \gamma)^2 &= 2ia(2s - \gamma^2)(2a\gamma - a - \gamma^2)h^{-1} + O(h^{-2}). \end{aligned}$$

Здесь мы учли зеркальную симметрию задачи по отношению к плоскости $u = 0$. Вещественные (левые) и мнимые (правые) части этих уравнений должны одновременно обращаться в нуль. Видно, что правые части обоих уравнений равны нулю при $2s = \gamma^2$, т. е. в рамках рассматриваемого приближения мы получаем три уравнения на пять параметров задачи. Это соответствует двухпараметрическому семейству решений.

Выбирая в качестве независимых параметров величины γ и h , находим для a , J и δ в основном порядке, что

$$a = \frac{3}{4}\gamma + \frac{1}{4}\sqrt{\gamma^2 - 4\gamma} + O(h^{-2}), \quad J = \frac{\gamma}{4a}(2a - 1 - \gamma) + O(h^{-2}), \quad \delta = \frac{\gamma^2}{2h} + O(h^{-2}).$$

Рис. 1. Профили поверхности для $\gamma = -0.3$, $h \approx 3.97$ (линия 1) и $\gamma = -0.4$, $h = 4$ (линия 2). Точками показаны положения проводников с токами.

В пределе $h \rightarrow \infty$ формулы для параметров a и J переходят в выражения, полученные ранее для единственного проводника с током, при $N = 1$ [6].

Подставляя (17) в (12) и интегрируя получающееся выражение по u , находим следующее уравнение, описывающее геометрию границы:

$$w = W(u) = W_0 + u - \frac{(\delta - i\gamma)^2}{u - h + ia} - \frac{(\delta + i\gamma)^2}{u + h + ia} - 2i\gamma \ln[(u + ia)^2 - h^2] + \left(2\delta - \frac{\delta^2 + \gamma^2}{h}\right) \ln \frac{u - h + ia}{u + h + ia}. \quad (19)$$

Постоянная интегрирования W_0 вычисляется из условия $w(-h + ia) + w(h + ia) = 0$, определяющего положение начала координат. В исходных переменных $\{x, y\}$ расстояние от системы проводников до свободной поверхности задается условием $l = iw(0)$, а расстояние между проводниками – выражением $2d = w(h + ia) - w(-h + ia)$.

На рис. 1 представлены характерные равновесные конфигурации поверхности проводящей жидкости, соответствующие уравнению (19) для $\gamma = -0.3$ и $h \approx 3.97$ (относительно малая деформация поверхности), а также для $\gamma = -0.4$ и $h = 4$ (относительно большая деформация). Расстояние между проводниками фиксировано, $d \approx 4.39$ в обоих случаях.

Обсудим применимость используемых приближений. В первом случае $a/h \approx 0.015$, а во втором $a/h \approx 0.008$. Таким образом, как и требуется, отношение характерных масштабов a и h является относительно малым. Значения параметра асимметрии δ также малы. Действительно, $\delta/\gamma \approx -0.038$ в первом случае и $\delta/\gamma \approx -0.05$ во втором.

Рис. 1 демонстрирует, что влияние неоднородного магнитного поля приводит к появлению двумерных лунок на поверхности жидкости вблизи соответствующих проводников. Их глубина увеличивается с ростом электрического тока. Как видно, при достаточно сильных токах двумерные пузыри окружают проводники с токами.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В настоящей работе мы показали, что задачу нахождения формы поверхности идеально проводящей жидкости во внешнем неоднородном магнитном поле системы параллельных линейных проводников с токами можно решить аналитически.

Предложен алгоритм построения N -параметрического решения, где N – число проводников. Было получено и проанализировано решение, соответствующее случаю $N = 2$. Согласно этому решению на поверхности жидкости возникает пара двумерных лунок. Если расстояние между лунками достаточно велико и, следовательно, их взаимодействие является слабым, то решение переходит в решение, полученное в нашей работе [6] для простейшего случая $N = 1$, т. е. для уединенного проводника с током. При относительно малом расстоянии между лунками их взаимодействие приводит к заметному искажению их формы, в частности к нарушению их симметрии.

Благодарности. Авторы благодарны П. К. Иванову за плодотворные дискуссии.

Список литературы

- [1] T. P. Felici, *J. Fluid Mech.*, **302** (1995), 1–28.
- [2] A. Gagnoud, J. Etay, M. Garnier, *J. Méch. Théor. Appl.*, **5**:6 (1986), 911–934.
- [3] J. Descloux, *Eur. J. Mech. B/Fluids*, **10**:5 (1991), 513–526.
- [4] J. A. Shercliff, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **375**:1763 (1981), 455–473.
- [5] M. G. Blyth, J.-M. Vanden-Broeck, *SIAM J. Appl. Math.*, **66**:1 (2005), 174–186.
- [6] Н. М. Зубарев, О. В. Зубарева, *ПМТФ*, **54**:1 (2013), 3–12.
- [7] Н. М. Зубарев, *Письма в ЖТФ*, **25**:22 (1999), 79–83.
- [8] N. M. Zubarev, O. V. Zubareva, *Phys. Rev. E*, **71**:1 (2005), 016307, 6 pp.
- [9] Н. М. Зубарев, О. В. Зубарева, П. К. Иванов, *Письма в ЖТФ*, **35**:20 (2009), 84–88.
- [10] N. M. Zubarev, O. V. Zubareva, *Phys. D*, **241**:9 (2012), 921–928; Н. М. Зубарев, О. В. Зубарева, *ЖТФ*, **82**:12 (2012), 132–134.