Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Морозов, Существуют ли p -адические инварианты узлов?, *ТМФ*, 2016, том 187, номер 1, 3–11

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9047>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 15:49:43

© 2016 г.

А. Ю. Морозов^{*†‡}

СУЩЕСТВУЮТ ЛИ p -АДИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ УЗЛОВ?

Предлагается использовать вариант Холла–Литтлвуда формулы Россо–Джонса для определения ростков p -адических полиномов ХОМФЛИ торических узлов $[m, n]$ как коэффициентов разложения суперполиномов по q . При этом их топологическая инвариантность гарантирована по крайней мере на уровне симметрии $[m, n] \leftrightarrow [n, m]$. Это открывает новые возможности для интерпретации суперполиномов как p -адических деформаций полиномов ХОМФЛИ и ставит вопрос об обобщениях на другие семейства узлов, что является содержательной задачей для ряда разделов современной теории.

Ключевые слова: полиномы узлов, p -адический анализ, p -адическая струна.

DOI: 10.4213/tmf9047

Бранко Драговичу по случаю его 70-летия

p -Адические струны оказались в центре внимания в конце 1980-х гг. [1], после того как было осознано значение адельического свойства гамма-функций для четырехточечной древесной амплитуды Венециано [2]. Однако неудача с наивной аделизацией петлевых амплитуд [3] и другие аналогичные трудности быстро свели этот сюжет с авансцены теоретической физики (ныне внимание в этой области частично смещено к приложениям в биологии и компьютерных науках). Это кажется несправедливым, поскольку полная пригодность квантовой теории поля, по крайней мере к p -адизации, была продемонстрирована достаточно убедительно и разнообразно.

Настоящая работа выполнена в Институте проблем передачи информации при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 14-50-00150).

^{*}Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: morozov@itep.ru

[†]Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, Москва, Россия

[‡]Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, Россия

К счастью, недавний прогресс в изучении конформных теорий и теории узлов открывает для p -адической физики совершенно новые перспективы – и эта возможность не должна быть упущена. Имеется несколько мест, где следует ожидать появления p -адических объектов, причем в достаточно нетривиальном виде, и цель настоящей работы – привлечь внимание к этой интересной теме.

Обсуждение предмета можно начать с различных стартовых точек, например с простого тождества

$$\begin{aligned} \frac{N(N+1)}{2} - \frac{N(N-1)}{2} &= \\ &= \frac{N(N+1)(N+2)}{6} - \frac{N(N-1)(N+1)}{3} + \frac{N(N-1)(N-2)}{6}, \end{aligned} \quad (1)$$

у которого есть непосредственная квантовая деформация

$$\begin{aligned} t^{3N} \left(t^{-3} \frac{[N][N+1]}{[2]} - t^3 \frac{[N][N-1]}{[2]} \right) &= \\ &= t^{4N} \left(t^{-4} \frac{[N][N+1][N+2]}{[2][3]} - \frac{[N][N-1][N+1]}{[3]} + t^4 \frac{[N][N-1][N-2]}{[2][3]} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $[M] = \frac{t^M - t^{-M}}{t - t^{-1}}$ – “квантовое число”. Соотношение (2) можно интерпретировать как инвариантность Радмейстера полинома ХОМФЛИ [4] $H_{\square}^{3,1}(t|A)|_{A=t^N}$ для простейшего из всех узлов – трилистника 3_1 , представленного в виде торического узла $[2, 3]$ или $[3, 2]$. В соответствии с этим у формулы (2) имеется бесконечное разноеобразие обобщений любого уровня сложности, начиная с эквивалентности фундаментальных полиномов ХОМФЛИ для торических узлов $[m, n]$ и $[n, m]$ и кончая совпадением цветных полиномов ХОМФЛИ для различных представлений сколь угодно сложных узлов в виде замкнутых кос (см. работы [5] о современном подходе к этой задаче и ссылки на более старые работы в [6]).

Естественный вопрос состоит в том, допускают ли соотношение (1) и его обобщения не только квантовые, но и p -адические деформации? Хотелось бы думать, что такая возможность есть, поскольку полиномы ХОМФЛИ являются вильсоновскими средними в теории Черна–Саймонса [7]–[9], а они тесно связаны [8], [10] с конформными блоками [11] в модели ВЗНВ [12]. Эта модель имеет представление через свободные поля [13], у которых есть естественный p -адический аналог – квантовая теория поля на деревьях Брюа–Титса [14]. Достоинство удивления, что эта тема пока что не привлекла особого внимания, и мы мало что знаем о p -адических аналогах конформных блоков, решений уравнений Белавина–Полякова–Замолотчикова и Книжника–Замолотчикова, их модулярных преобразований и полиномов узлов. Цель настоящей работы – привлечь внимание к этому кругу задач. Мы будем следовать ниже лишь одной из многих возможных линий рассуждения, начинающейся непосредственно с тождеств типа (2) и максимально связанной со сложными вопросами современной теории узлов. Это ни в коем случае не отрицает важности и интересности более прямых и дедуктивных подходов, упомянутых выше.

Самым очевидным шагом было бы переписать размерности представлений, из которых фактически составлены формулы (1) и (2), в виде отношений гамма-функций,

а их уже можно p -деформировать по обычному правилу

$$\Gamma(x) \longrightarrow \Gamma_p(x) = \frac{1 - p^{x-1}}{1 - p^{-x}}. \quad (3)$$

Эта мысль, однако, слишком наивна и не ведет к успеху (на самом деле при таком подходе имело бы смысл использовать представления цветных полиномов ХОМФЛИ в духе работ [15], где они выражаются через символы Похгаммера и удовлетворяют замечательным рекуррентным соотношениям [16], тесно связанным с общей топологической рекурсией АММ/ЕО [17]).

Менее наивной является интерпретация соотношения (2) как тождества между характеристиками $\chi_R\{p_k\}$ на топологическом локусе

$$p_k = p_k^* \equiv \frac{A^k - A^{-k}}{t^k - t^{-k}} = \frac{[Nk]}{[k]}, \quad A = t^N, \quad (4)$$

в соответствии с формулой, предложенной в работе [18]:

$$A^3(t^{-3}\chi_{[2]}^* - t^3\chi_{[11]}^*) = A^4(t^{-4}\chi_{[3]}^* - \chi_{[21]}^* + t^4\chi_{[111]}^*). \quad (5)$$

Две стороны этого равенства – это просто формулы Россо–Джонса [19] для полиномов ХОМФЛИ для торических узлов $[2, 3]$ и $[3, 2]$, при этом роль характеров играют обычные функции Шура.

Что несколько менее тривиально, соотношение (5) можно поднять до тождества, включающего полиномы Макдональда [20], которые зависят не только от t и от времен $\{p_k\}$, но также от дополнительного параметра q . Как объясняется в работе [18],

$$\begin{aligned} \left(\frac{qA}{t}\right)^3 (q^{-3}c_{[2]}M_{[2]}^* - t^3c_{[11]}M_{[11]}^*) = \\ = \left(\frac{qA}{t}\right)^4 (q^{-4}c_{[3]}M_{[3]}^* - c_{[21]}M_{[21]}^* + t^4c_{[111]}M_{[111]}^*). \end{aligned} \quad (6)$$

Это тождество описывает инвариантность Радемейстера для суперполиномов [21], но всё для того же случая реализации торического трилистника замкнутыми косами $[2, 3]$ и $[3, 2]$. Участвующие в этой формуле полиномы Макдональда равны

$$\begin{aligned} M_{[2]} &= \frac{(1+t^2)(1-q^2)}{2(1-q^2t^2)}p_2 + \frac{(1-t^2)(1+q^2)}{2(1-q^2t^2)}p_1^2, \\ M_{[11]} &= -\frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_1^2, \\ M_{[3]} &= \frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-t^6)}{3(1-t^2)(1-q^2t^2)(1-q^4t^2)}p_3 + \frac{(1-t^4)(1-q^6)}{2(1-q^2t^2)(1-q^4t^2)}p_2p_1 + \\ &\quad + \frac{(1+q^2)(1-q^6)(1-t^2)^2}{6(1-q^2)(1-q^2t^2)(1-q^4t^2)}p_1^3, \\ M_{[21]} &= -\frac{(1-q^2)(1-t^6)}{3(1-t^2)(1-q^2t^4)}p_3 + \frac{(1+t^2)(t^2-q^2)}{2(1-q^2t^4)}p_2p_1 + \\ &\quad + \frac{(1-t^2)(2+q^2+t^2+2q^2t^2)}{6(1-q^2t^4)}p_1^3, \\ M_{[111]} &= \frac{1}{3}p_3 - \frac{1}{2}p_2p_1 + \frac{1}{6}p_1^3. \end{aligned} \quad (7)$$

Дополнительным усложнением в тождестве (6) являются нетривиальные коэффициенты

$$\begin{aligned} c_{[2]} &= 1, & c_{[11]} &= \frac{\{t^2\}}{\{qt\}}, & c_{[3]} &= 1, \\ c_{[21]} &= \frac{\{t\}(q^{-2} + t^2q^{-2} + t^2)}{\{q^2t\}}, & c_{[111]} &= \frac{\{t^2\}\{t^3\}}{\{qt\}\{qt^2\}}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\{x\} = x - x^{-1}$.

Теперь мы подошли к центральному моменту настоящей статьи: как было обнаружено в работах [22], громоздкие выражения для суперполиномов в двух частях равенства (6) существенно упрощаются, если переписать их через полиномы Холла–Литтлвуда $L_R\{t|p_k\} = M_R\{q, t|p_k\}|_{q=0}$:

$$\begin{aligned} P_{\square}^{[2,3]} &= \left(\frac{A}{t}\right)^3 (L_{[2]}^*(t) + q^2(1-t^4)L_{[11]}^*(t)) = \\ &= \left(\frac{A}{t}\right)^4 (L_{[3]}^*(t) + q^2(1-t^2)L_{[21]}^*(t)) = P_{\square}^{[3,2]}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} L_{[2]}(t) &= \frac{1+t^2}{2}p_2 + \frac{1-t^2}{2}p_1^2, \\ L_{[11]}(t) &= -\frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_1^2, \\ L_{[3]}(t) &= \frac{1+t^2+t^4}{3}p_3 + \frac{1-t^4}{2}p_2p_1 + \frac{(1-t^2)^2}{6}p_1^3, \\ L_{[21]}(t) &= -\frac{1+t^2+t^4}{3}p_3 + \frac{t^2(1+t^2)}{2}p_2p_1 + \frac{(1-t^2)(2+t^2)}{6}p_1^3, \\ L_{[111]}(t) &= \frac{1}{3}p_3 - \frac{1}{2}p_2p_1 + \frac{1}{6}p_1^3 \end{aligned} \quad (10)$$

и

$$\begin{aligned} L_{[2]}^*(t) &= \frac{t}{A} \frac{\{A\}}{\{t\}}, & L_{[3]}^*(t) &= \frac{t^2}{A^2} \frac{\{A\}}{\{t\}}, \\ L_{[11]}^*(t) &= \frac{\{A\}\{A/t\}}{\{t\}\{t^2\}}, & L_{[21]}^*(t) &= \frac{t^2}{A} \frac{\{A\}\{A/t\}}{\{t\}^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Для торических узлов общего вида в формуле Росса–Джонса (в версии Холла–Литтлвуда) сумма идет по всем диаграммам Юнга Q с числом клеток $|Q|$, равным числу нитей m в косе, но число строк в диаграмме Q при этом также ограничено, $l(Q) \leq r$, где r – величина остатка в формуле деления $n = mk + r$. Чтобы подчеркнуть различие ролей переменных q и t в (6), достаточно сказать, что предел $t = 0$ (при фиксированных p_k) существенно отличается от (9), возможно даже, что он гораздо интереснее (см. подробности в работах [22]).

Для узких целей настоящей статьи существенно, что преобразование тождества (1) в (9) не просто простое и изящное – оно также допускает p -адическую интерпретацию. Дело в том, что предел $q = 0$ Холла–Литтлвуда для полиномов Макдональда описывает зональные сферические функции (радиальные части решений уравнений

Лапласа–Бельтрами) в p -адических однородных пространствах [23]: достаточно положить $t = 1/p$. Поэтому в работах [14] было предложено рассматривать полиномы $M_R\{q, t|p_k\}$ при $q = 0$, $t = 1/p$ в качестве p -адических аналогов функций Шура. Следуя этой логике, при $t = 1/p$ мы назовем функцию (9) p -адическим полиномом ХОМФЛИ, а само равенство (9) будет тогда гарантировать топологическую инвариантность этого полинома (по крайней мере частичную). Полиномы $L_{[s]}^*(t) \sim \{A\}/\{t\}$ в чисто симметрических представлениях $[s]$ практически не зависят от s (и все дают один и тот же ответ в случае отсутствия узлов). Поэтому, чтобы получить нечто нетривиальное, нужно взять хотя бы первый нетривиальный росток $dP/dq^2|_{q=0}$, а то и полный набор коэффициентов перед разными степенями q (которые все вместе образуют суперполином, но естественным образом градуированы по степеням q).

Аналогичным образом можно определить p -адические полиномы ХОМФЛИ для многих других торических узлов, например

$$\left(\frac{t}{A}\right)^n P_{\square}^{[2,n]} = L_{[2]}(t) + q^2(1-t^4)\frac{1-(qt)^{n-1}}{1-q^2t^2}L_{[11]}(t) \quad (12)$$

и

$$\begin{aligned} \left(\frac{t}{A}\right)^8 P_{\square}^{[3,4]} &= L_{[3]}(t) + q^2(1-t^2)(1+q^2+q^2t^2)L_{[21]}(t) + \\ &\quad + q^6(1-t^4)(1-t^6)(1+q^2t^2)L_{[111]}(t), \\ \left(\frac{t}{A}\right)^{10} P_{\square}^{[3,5]} &= L_{[3]}(t) + q^2(1-t^2)(1+q^2)(1+q^2t^2)L_{[21]}(t) + \\ &\quad + q^6(1-t^4)(1-t^6)L_{[111]}(t), \\ \left(\frac{t}{A}\right)^{14} P_{\square}^{[3,7]} &= L_{[3]}(t) + q^2(1-t^2)(1+q^4t^2)(1+q^2+q^2t^2)L_{[21]}(t) + \\ &\quad + q^6(1-t^4)(1-t^6)(1+q^2t^2+q^4t^2(1+t^2)+q^6t^6)L_{[111]}(t), \\ \left(\frac{t}{A}\right)^{16} P_{\square}^{[3,8]} &= L_{[3]}(t) + q^2(1-t^2)(1+q^2(1+t^2)+ \\ &\quad + q^4t^2+q^6t^2(1+t^2)+q^8t^4)L_{[21]}(t) + \\ &\quad + q^6(1-t^4)(1-t^6)(1+q^2t^2+q^4t^2(1+t^2)+q^6t^4(1+t^2)+q^8t^8)L_{[111]}(t) \end{aligned}$$

и т.д. Отметим, что во всех этих примерах степень полинома по q (но не по t) в точности равна степени полинома Александера, т.е. регулируется *дефектом* [24] дифференциального разложения [25]. Если это свойство сохранится и в других примерах, оно может оказаться ключом к построению пока неизвестных разложений Холла–Литтлвуда для неторических узлов. Еще одно полезное замечание состоит в том, что такие разложения верны и за пределами топологического локуса, т.е. для расширенных полиномов узлов, описанных в работах [18], [26].

Буквально, предложение, которое мы сделаем в настоящей работе, влечет, что p -адические полиномы узлов можно получить из обычных суперполиномов, по крайней мере для торических узлов в фундаментальном представлении. В обращенном виде данный подход позволяет приписать суперполиномам смысл p -адических деформаций полиномов узлов. По-настоящему интересен вопрос о распространении

этого определения с торических на произвольные узлы или, для начала, хотя бы на другие простые семейства типа твистованных, рациональных, претцелевых, древоподобных и пальцеобразных трехнитевых узлов (см. определения и ссылки на сайте [6]). Другими словами, следует искать независимое p -адическое определение чего-то вроде коэффициентов разложения по q суперполиномов, которые будут топологическими инвариантами (или инвариантами движений Радемейстера, если заметить узлы замкнутыми косами). После разобранных примеров эти поиски не кажутся безнадежными, несмотря на не удавшиеся в прошлом попытки найти p -адические аналоги $\mathcal{R}$ -матриц. Возможно, ситуация здесь похожа на то, что случилось с виртуальными узлами [27]. Для них $\mathcal{R}$ -матричный формализм в духе работ [28], [5] тоже разрушается, но не слишком сильно: так, что сохраняется возможность построить в явном виде топологически инвариантные полиномы ХОМФЛИ [29]. В самом минимальном случае польза от изучения этой задачи сведется к прояснению роли разложений Холла–Литтлвуда полиномов узлов, которая пока остается загадочной и недостаточно исследованной даже в торическом случае.

На самом деле равенство (5) можно переписать еще и следующим образом [22]:

$$\frac{A^3}{t^3} L_{[2]}(t^3)^* = \frac{A^4}{t^4} L_{[3]}(t^4)^*, \quad (13)$$

где сначала t в (10) заменяется на степень t , а после этого подставляется выражение (4) с неизменным t для p_k . Это не то же самое, что просто заменить t в (11), поэтому значок $*$ теперь стоит на другом месте. Такое представление сильно отличается от (9), и его p -адическая интерпретация не столь очевидна. Тем не менее и оно заслуживает внимания при поиске p -адических инвариантов узлов. Заметим, что и на этот раз равенство

$$\left(\frac{t}{A}\right)^{(m-1)n} H_{\square}^{[m,n]} \{t|p_k\} = L_{[m]} \{t^n|p_k\} \quad (14)$$

выполняется для расширенных полиномов ХОМФЛИ, а не ограничивается только пределами топологического локуса.

Подводя итог, заметим, что построение p -адических полиномов ХОМФЛИ кажется разрешимой задачей, но поиск решения является серьезным вызовом для p -адической теории струн. Работа в этом направлении несомненно важна для развития различных областей современной математической физики.

Благодарности. Я признателен А. Миронову за обсуждение p -адических инвариантов узлов, а организаторам Международной конференции “ p -Adic Mathematical Physics and Its Applications (p-ADICS.2015)”, посвященной 70-летию Бранко Драговича, за приятный повод для написания этой заметки.

Список литературы

- [1] I. V. Volovich, *Class. Quantum Gravity*, **4:4** (1987), L83–L87; Yu. I. Manin, “Reflections on arithmetical physics”, *Conformal Invariance and String Theory* (Poiana Braşov, 1987), Academic Press, Boston, MA, 1989, 293–303; *p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.*, **5:4** (2013), 313–325, arXiv:1312.5160; I. Ya. Aref’eva, B. G. Dragović, I. V. Volovich, *Phys. Lett. B*, **200:4** (1988), 512–514; **209:4** (1988), 445–450; **212:3** (1988), 283–291;

- 214:3 (1988), 339–349; A. V. Zabrodin, *Commun. Math. Phys.*, **123**:3 (1989), 463–483; A. Levin, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **243**:3 (1990), 207–214; B. Dragović, *Phys. Lett. B*, **256**:3–4 (1991), 392–396; *J. Math. Phys.*, **34**:3 (1992), 1143–1148, arXiv:math-ph/0402037; Б. Г. Драгович, *ТМФ*, **93**:2 (1992), 211–218; **100**:3 (1994), 342–353; L. Brekke, P. G. O. Freund, *Phys. Rep.*, **233**:1 (1993), 1–66; V. Vladimirov, I. Volovich, E. Zelenov, *p-Adic Analysis and Mathematical Physics*, Series on Soviet and East European Mathematics, **1**, World Sci., Singapore, 1994; G. Djordjević, B. Dragovich, L. Nešić, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **6**:2 (2003), 179–195, arXiv:hep-th/0105030; *Modern Phys. Lett. A*, **14**:5 (1999), 317–325, arXiv:hep-th/0005216; B. Dragovich, A. Yu Khrennikov, S. V. Kozyrev, I. V. Volovich, *p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.*, **1**:1 (2009), 1–17, arXiv:0904.4205.
- [2] L. Brekke, P. G. O. Freund, M. Olson, E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **302**:3 (1988), 365–402.
- [3] L. O. Chekhov, A. D. Mironov, A. V. Zabrodin, *Commun. Math. Phys.*, **125**:4 (1989), 675–711; Д. П. Лебедев, А. Ю. Морозов, *ТМФ*, **82**:1 (1990), 3–10.
- [4] J. W. Alexander, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **30**:2 (1928), 275–306; J. H. Conway, “An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties”, *Computational Problems in Abstract Algebra* (Science Research Council Atlas Computer Laboratory, Oxford, 29 August – 2 September, 1967), ed. J. Leech, Pergamon Press, Oxford, New York, 1970, 329–358; V. F. R. Jones, *Invent. Math.*, **72**:1 (1983), 1–25; *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)*, **12**:1 (1985), 103–111; *Ann. Math.*, **126**:2 (1987), 335–388; L. H. Kauffman, *Topology*, **26**:3 (1987), 395–407; P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. B. R. Lickorish, K. Millett, A. Ocneanu, *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)*, **12**:2 (1985), 239–246; J. H. Przytycki, K. P. Traczyk, *Kobe J. Math.*, **4**:2 (1987), 115–139.
- [5] A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov, *JHEP*, **03** (2012), 034, 33 pp., arXiv:1112.2654; S. Nawata, P. Ramadevi, Zodinmawia, *J. Knot Theory Ramifications*, **22**:13 (2013), 1350078, 58 pp., arXiv:1302.5144; А. С. Анохина, А. А. Морозов, *ТМФ*, **178**:1 (2014), 3–68, arXiv:1307.2216; A. Mironov, A. Morozov, *Nucl. Phys. B*, **899** (2015), 395–413, arXiv:1506.00339; A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, A. Sleptsov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **30**:26 (2015), 1550169, 40 pp., arXiv:1508.02870.
- [6] *Knot Polynomials and Other Link Invariants*, <http://knotbook.org> (2015).
- [7] S.-S. Chern, J. Simons, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **68**:4 (1971), 791–794; *Ann. Math. (2)*, **99**:1 (1974), 48–69; A. S. Schwarz, “New topological invariants arising in the theory of quantized fields”, *Topology and Its Applications*, Talk at the International Topological Conference. Abstracts. Part 2 (Baku, October 3–8, 1987), AMS, Providence, RI, 1993; M. Atiyah, *The Geometry and Physics of Knots*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
- [8] E. Witten, *Commun. Math. Phys.*, **121**:3 (1989), 351–399.
- [9] A. Morozov, A. Smirnov, *Nucl. Phys. B*, **835**:3 (2010), 284–313, arXiv:1001.2003; A. Smirnov, *Notes on Chern–Simons theory in the temporal gauge*, arXiv:0910.5011.
- [10] R. K. Kaul, T. R. Govindarajan, *Nucl. Phys. B*, **380**:1–2 (1992), 293–333, arXiv:hep-th/9111063; **393**:1–2 (1993), 392–412; P. Rama Devi, T. R. Govindarajan, R. K. Kaul, *Nucl. Phys. B*, **402**:1–2 (1993), 548–566, arXiv:hep-th/9212110; *Nucl. Phys. B*, **422**:1–2 (1994), 291–306, arXiv:hep-th/9312215; *Modern Phys. Lett. A*, **10**:22 (1995), 1635–1658, arXiv:hep-th/9412084; Zodinmawia, P. Ramadevi, *SU(N) quantum Racah coefficients and non-torus links*, arXiv:1107.3918; *Reformulated invariants for non-torus knots and links*, arXiv:1209.1346; D. Galakhov, D. Melnikov, A. Mironov, A. Morozov, A. Sleptsov, *Phys. Lett. B*, **743** (2015), 71–74, arXiv:1412.2616; A. Mironov, A. Morozov, A. Sleptsov, *JHEP*, **07** (2015), 069, 34 pp., arXiv:1412.8432; D. Galakhov, D. Melnikov, A. Mironov, A. Morozov, A. Sleptsov, *Nucl. Phys. B*, **899** (2015), 194–228, arXiv:1502.02621; A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov, P. Ramadevi, V. K. Singh, *JHEP*, **07** (2015), 109, 68 pp., arXiv:1504.00371.
- [11] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **241**:2 (1984), 333–380; А. А. Замолодчиков, Ал. Б. Замолодчиков, *Конформная теория поля и критические*

- явления в двумерных системах, МЦНМО, М., 2009; А. Д. Миронов, С. А. Миронов, А. Ю. Морозов, А. А. Морозов, *ТМФ*, **165**:3 (2010), 503–542, arXiv: 0908.2064.
- [12] E. Witten, *Commun. Math. Phys.*, **92**:4 (1984), 455–472; V. G. Knizhnik, A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **247**:1 (1984), 83–103.
- [13] M. Wakimoto, *Commun. Math. Phys.*, **104**:4 (1986), 605–609; А. Морозов, *Письма в ЖЭТФ*, **49**:6 (1989), 305–308; A. Gerasimov, A. Morozov, M. Olshanetsky, A. Marshakov, S. Shatashvili, *Internat. J. Modern Phys. A*, **5**:13 (1990), 2495–2589.
- [14] P. G. O. Freund, A. V. Zabrodin, *Commun. Math. Phys.*, **147**:2 (1992), 277–294, arXiv: hep-th/9110066; *Phys. Lett. B*, **294**:3–4 (1992), 347–353, arXiv: hep-th/9208063.
- [15] H. Itoyama, A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **28**:3–4 (2013), 1340009, 81 pp., arXiv: 1209.6304; H. Fuji, S. Gukov, P. Sułkowski, *Nucl. Phys. B*, **867**:2 (2013), 506–546, arXiv: 1205.1515.
- [16] S. Garoufalidis, T. T. Q. Lê, *Geom. Topol.*, **9** (2005), 1253–1293, arXiv: math/0309214; *An analytic version of the Melvin–Morton–Rozansky conjecture*, arXiv: math/0503641; A. Mironov, A. Morozov, *AIP Conf. Proc.*, **1483** (2012), 189–211, arXiv: 1208.2282; S. Garoufalidis, P. Kucharski, P. Sułkowski, *Knots, BPS states, and algebraic curves*, arXiv: 1504.06327.
- [17] A. Alexandrov, A. Mironov, A. Morozov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **19**:24 (2004), 4127–4165, arXiv: hep-th/0310113; **21**:12 (2006), 2481–2518, arXiv: hep-th/0412099; *Fortsch. Phys.*, **53**:5–6 (2005), 512–521, arXiv: hep-th/0412205; *Physica D*, **235**:1–2 (2007), 126–167, arXiv: hep-th/0608228; *JHEP*, **12** (2009), 053, 49 pp., arXiv: 0906.3305; A. С. Александров, А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов, *ТМФ*, **150**:2 (2007), 179–192, arXiv: hep-th/0605171; L. Chekhov, B. Eynard, N. Orantin, *JHEP*, **12** (2006), 053, 31 pp., arXiv: math-ph/0603003; B. Eynard, N. Orantin, *Commun. Number Theory Phys.*, **1**:2 (2007), 347–452, arXiv: math-ph/0702045; R. Dijkgraaf, H. Fuji, M. Manabe, *Nucl. Phys. B*, **849**:1 (2011), 166–211, arXiv: 1010.4542; J. Gu, H. Jockers, A. Klemm, M. Soroush, *Commun. Math. Phys.*, **336**:2 (2015), 987–1051, arXiv: 1401.5095.
- [18] P. Dunin-Barkowski, A. Mironov, A. Morozov, A. Sleptsov, A. Smirnov, *JHEP*, **03** (2013), 021, 85 pp., arXiv: 1106.4305.
- [19] M. Rosso, V. F. R. Jones, *J. Knot Theory Ramifications*, **2**:1 (1993), 97–112; X.-S. Lin, H. Zheng, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **362**:1 (2010), 1–18, arXiv: math/0601267.
- [20] И. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла*, Мир, М., 1984.
- [21] M. Khovanov, *Duke Math. J.*, **101**:3 (2000), 359–426, arXiv: math/9908171; S. Gukov, A. Schwarz, C. Vafa, *Lett. Math. Phys.*, **74**:1 (2005), 53–74, arXiv: hep-th/0412243; M. Khovanov, L. Rozansky, *Fund. Math.*, **199**:1 (2008), 1–91, arXiv: math/0401268; *Geom. Topol.*, **12**:3 (2008), 1387–1425, arXiv: math/0505056; *Virtual crossings, convolutions and a categorification of the $SO(2N)$ Kauffman polynomial*, arXiv: math/0701333; V. Dolotin, A. Morozov, *Nucl. Phys. B*, **878** (2014), 12–81, arXiv: 1308.5759.
- [22] A. Mironov, A. Morozov, S. Shakirov, A. Sleptsov, *JHEP*, **05** (2012), 70, 57 pp., arXiv: 1201.3339; A. Mironov, A. Morozov, Sh. Shakirov, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **45**:35 (2012), 355202, 11 pp., arXiv: 1203.0667; P. Etingof, E. Gorsky, I. Losev, *Adv. Math.*, **277** (2015), 124–180, arXiv: 1304.3412; Sh. Shakirov, *Colored knot amplitudes and Hall–Littlewood polynomials*, arXiv: 1308.3838.
- [23] F. I. Mautner, *Amer. J. Math.*, **80** (1958), 441–457; P. Cartier, *Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces* (William College, Williamstown, MA, July 31 – August 18, 1972), *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, **26**, AMS, Providence, RI, 1973; P. Freund, *Phys. Lett. B*, **257**:1–2 (1991), 119–124.
- [24] Ya. Kononov, A. Morozov, *Письма в ЖЭТФ*, **101**:12 (2015), 931–934, arXiv: 1504.07146.
- [25] N. Dunfield, S. Gukov, J. Rasmussen, *Experimental Math.*, **15**:2 (2006), 129–159, arXiv: math/0505662; A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov, *AIP Conf. Proc.*, **1562** (2013), 123–155, arXiv: 1306.3197; С. Б. Артамонов, А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов, *ТМФ*, **179**:2 (2014), 147–188, arXiv: 1306.5682.

- [26] A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov, “Character expansion for HOMFLY polynomials I: Integrability and difference equations”, *Strings, Gauge Fields, and the Geometry Behind* (The Legacy of Maximilian Kreuzer), eds. A. Rebhan, L. Katzarkov, J. Knapp, R. Rashkov, E. Scheidegger, World Sci., Singapore, 2013, 101–118, arXiv: 1112.5754.
- [27] L. H. Kauffman, *European J. Combin.*, **20:7** (1999), 663–690, arXiv: math/9811028; R. Fenn, D. P. Ilyutko, L. H. Kauffman, V. O. Manturov, “Unsolved problems in virtual knot theory and combinatorial knot theory”, *Knots in Poland III. Part III*, Banach Center Publications, **103**, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2014, 9–61, arXiv: 1409.2823.
- [28] N. Yu. Reshetikhin, V. G. Turaev, *Commun. Math. Phys.*, **127:1** (1990), 1–26; E. Guadagnini, M. Martellini, M. Mintchev, “Chern–Simons field theory and quantum groups”, *Quantum Groups*, Proceedings of the 8th International Workshop on Mathematical Physics (Clausthal, Germany, July 19–26, 1989), Lecture Notes in Physics, **370**, eds. H. D. Doebner, J. D. Hennig, World Sci., Singapore, 1990, 307–317; *Phys. Lett. B*, **235:3–4** (1990), 275–281.
- [29] A. Morozov, And. Morozov, Ant. Morozov, *Phys.Lett. B*, **737** (2014), 48–56, arXiv: 1407.6319; L. Bishler, A. Morozov, An. Morozov, Ant. Morozov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **30:14** (2015), 1550074, 39 pp., arXiv: 1411.2569; A. Morozov, An. Morozov, A. Popolitov, *Phys. Lett. B*, **749** (2015), 309–325, arXiv: 1506.07516; *Matrix model and dimensions at hypercube vertices*, arXiv: 1508.01957.

Поступила в редакцию 18.09.2015