Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Латышев, А. А. Юшканов, Нестационарная граничная задача для модельных кинетических уравнений при критических параметрах, *ТМФ*, 1998, том 116, номер 2, 305–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf905>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 15:17:09

© 1998 г.

А. В. Латышев*, А. А. Юшканов*

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МОДЕЛЬНЫХ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПРИ КРИТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРАХ

Изучаются нестационарные решения модельного кинетического уравнения. Получено решение этого уравнения при критических значениях параметров движения стенки, ограничивающей занятое газом подпространство. Разделение переменных приводит к характеристическому уравнению. В пространстве обобщенных функций найдены собственные функции и исследован спектр собственных значений. Доказана теорема о разложении решения уравнения по собственным функциям. В качестве приложения рассматривается известная задача Рэлея. Показана непрерывность функции распределения в плоскости параметров движения стенки, в том числе и при переходе через замкнутую линию критических значений параметров.

1. ВВЕДЕНИЕ

Интерес к точному решению нестационарных граничных задач для кинетических уравнений возник в середине 60-х годов после появления статей [1, 2]. Результаты этих работ хорошо известны по монографиям [3, 4]. Для лаплас-изображений решения в плоскости комплексного спектрального параметра $s = \sigma + i\omega$ была выделена замкнутая кривая γ (см. рис. 5 в [3, с. 194] или рис. 38 в [4, с. 345]), состоящая из критических значений параметра s . Смысл критичности линии γ состоит в том, что когда параметр s принадлежит внутренности γ , исходное уравнение имеет два дискретных решения, если же s лежит вне γ , то этих решений нет. В статье [5] было показано, что в первом случае индекс соответствующей однородной краевой задачи Римана равен -1 , а во втором 0 . Вопрос о том, существует ли решение кинетического уравнения при критических значениях параметра и является ли это решение непрерывным при переходе параметра s через линию критических значений, до сих пор остается открытым. Цель данной работы – восполнить этот пробел. Отметим, что и в последующих работах [6–9] этот вопрос не рассматривался.

В предлагаемой работе исследование поставленного вопроса ведется на примере классической задачи Рэлея. Как известно, в задаче Рэлея рассматривается отклик газовой

*Московский педагогический университет, Москва, Россия

среды на гармонические колебания стенки. При этом стенка колеблется в собственной плоскости. Здесь рассматривается обобщенный вариант задачи Рэлея, когда амплитуда гармонических колебаний стенки может увеличиваться или уменьшаться во времени по экспоненциальному закону, т.е. закон движения стенки описывается функцией $u(t) = u_0 e^{st}$, где $s = \sigma + i\omega$.

Рассмотрим [1, 3–5] простейшее модельное нестационарное кинетическое уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mu \frac{\partial}{\partial x} + 1\right) \varphi(t, x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu'^2) \varphi(t, x, \mu') d\mu'. \quad (1.1)$$

Функция φ в задаче Рэлея удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \varphi(t, 0, \mu) &= 2u_0 e^{st}, & \mu > 0, \\ \varphi(t, \infty, \mu) &= 0, & \mu < 0, \end{aligned}$$

где u_0 – безразмерная скорость движения стенки в момент времени $t = 0$.

Учитывая уравнение движения стенки, будем искать функцию φ в виде

$$\varphi(t, x, \mu) = e^{st} \psi(x, \mu, s). \quad (1.2)$$

Тогда нестационарное уравнение (1.1) преобразуется в стационарное

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial x} + (1 + s) \psi(x, \mu, s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu'^2) \psi(x, \mu', s) d\mu'. \quad (1.3)$$

Граничные условия в задаче Рэлея в силу (1.2) принимают вид

$$\psi(0, \mu, s) = 2u_0, \quad \mu > 0, \quad (1.4)$$

$$\psi(\infty, \mu, s) = 0, \quad \mu < 0. \quad (1.5)$$

2. СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНОГО И ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРОВ

Разделение переменных в уравнении (1.1) согласно общему методу Фурье приводит к выражению

$$\psi_\eta(x, \mu, s) = \exp\left(-\frac{1+s}{\eta}x\right) \Phi(\eta, \mu, s), \quad (2.1)$$

в котором функция Φ удовлетворяет характеристическому уравнению

$$(\eta - \mu) \Phi(\eta, \mu, s) = \pi^{-1/2} \eta n(\eta, s). \quad (2.2)$$

Здесь функция n определяется условием нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu^2) \Phi(\eta, \mu, s) d\mu = (1+s)n(\eta, s). \quad (2.3)$$

Если параметр $\eta \in (-\infty, +\infty)$, то из уравнений (2.2) и (2.3) находим собственные функции непрерывного спектра

$$\Phi(\eta, \mu, s) = F(\eta, \mu, s)n(\eta, s),$$

где

$$F(\eta, \mu, s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta P \frac{1}{\eta - \mu} + \exp(\eta^2) \lambda(\eta, s) \delta(\eta - \mu). \quad (2.4)$$

Символ Px^{-1} обозначает распределение – главное значение интеграла от x^{-1} , $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, $\lambda(s, z) = s + \lambda_c(z)$, где

$$\lambda_c(z) = 1 + z \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\tau^2) \frac{d\tau}{\tau - z}$$

есть дисперсионная функция Черчиньяни.

Плоскость $s = \sigma + i\omega$ будем называть плоскостью комплексного параметра, или плоскостью комплексных частот. Замкнутая кривая

$$\gamma = \{s = \sigma + i\omega: \sigma = -\lambda_c(\mu), \omega = \pm\sqrt{\pi}\mu \exp(-\mu^2), 0 \leq \mu \leq +\infty\}$$

разбивает s -плоскость на область S^+ , лежащую внутри γ , и область S^- , лежащую вне ее. В работе [5] показано, что при $s \in S^+$ функция $\lambda(s, z)$ имеет два нуля $\pm\eta_0(s)$, которые находятся из представления

$$\lambda(s, z) = s(\eta_0^2 - z^2)X(s, z)X(s, -z), \quad s \in S^+. \quad (2.5)$$

Функция $X(s, z)$ удовлетворяет однородной краевой задаче Римана [10]

$$X^+(s, \mu) = G(s, \mu)X^-(s, \mu), \quad 0 < \mu < \infty, \quad (2.6)$$

с коэффициентом $G(s, \mu) = \lambda^+(s, \mu)/\lambda^-(s, \mu)$. Полагая $z = 0$ в (2.5), получаем, что

$$\eta_0(s) = (1 + s^{-1})^{1/2} X^{-1}(s, 0). \quad (2.7)$$

Функция X определяется выражением

$$X(s, z) = z^{-\kappa(s)} \exp V(s, z), \quad (2.8)$$

где

$$V(s, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty [\ln G(s, \mu) - 2\pi i \kappa(s)] \frac{d\mu}{\mu - z}. \quad (2.9)$$

Под логарифмом понимается ветвь, для которой $\ln G(s, 0) = 0$. Отметим, что для такой ветви автоматически выполняется условие $\ln G(s, \infty) = 0$. Величина $\kappa(s)$ – индекс коэффицента $G(s, \mu)$, причем $\kappa(s) = 1$, если $s \in S^+$, и $\kappa(s) = 0$, если $s \in S^-$. При $s \in S^-$ вместо (2.5) имеет место представление

$$\lambda(s, z) = sX(s, z)X(s, -z), \quad s \in S^-. \quad (2.10)$$

Итак, при $s \in S^+$ дискретный спектр состоит из двух точек $\pm\eta_0(s)$, при $s \in S^-$ дискретный спектр пуст. Отметим, что при $s \in S^+$ формула (2.1) дает два частных решения уравнения (1.1)

$$\psi_{\pm\eta_0}(x, \mu, s) = \exp\left[\mp \frac{1+s}{\eta_0} x\right] F(\pm\eta_0, \mu, s) \quad (2.11)$$

с собственными функциями характеристического уравнения (2.2)

$$F(\eta_0, \mu, s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\pm\eta_0}{\pm\eta_0 - \mu}, \quad s \in S^+. \quad (2.12)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Собственная функция непрерывного спектра $F(\eta, \mu, s)$, определяемая равенством (2.4), переходит в собственную функцию дискретного спектра $F(\pm\eta_0, \mu, s)$, определяемую равенством (2.12), когда параметр η стремится к действительным нулям $\pm\eta_0(s)$, $s \in \gamma$, дисперсионной функции $\lambda^\pm(s, \mu) = 0$.

В самом деле, рассмотрим равенство

$$\lambda^+(s, \mu) - \lambda^-(s, \mu) = 2\sqrt{\pi}i\mu \exp(-\mu^2), \quad -\infty < \mu < +\infty.$$

На границе области S^+ , когда, например, $s \in \gamma^-$ ($\gamma^\pm$ – часть γ , лежащая в верхней/нижней полуплоскости), выполняется тождество $\lambda^+(s, \eta_0(s)) = 0$. Следовательно,

$$\lambda^-(s, \eta_0(s)) = -2\sqrt{\pi}i\eta_0(s) \exp(-\eta_0^2(s)).$$

Учитывая, что $\lambda(s, \mu) = [\lambda^+(s, \mu) + \lambda^-(s, \mu)]/2$, получаем

$$\lambda(s, \eta_0(s)) = \frac{1}{2}\lambda^-(s, \eta_0(s)) = -i\sqrt{\pi}\eta_0(s) \exp(-\eta_0^2(s)), \quad s \in \gamma^-.$$

Возьмем выражение для собственной функции (2.4). Из этого выражения при $s \in \gamma^-$ находим, что

$$F(\eta_0, \mu, s) = \eta_0(s) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[P \frac{1}{\eta_0(s) - \mu} - i\pi\delta(\eta_0 - \mu) \right].$$

Теперь воспользуемся известным [11] свойством δ -функции

$$\frac{1}{x + i\varepsilon} = P\frac{1}{x} - i\pi\delta(x).$$

Тогда получаем

$$F(\eta_0, \mu, s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta_0(s) \frac{1}{\eta(s) - \mu + i\varepsilon}.$$

Слагаемое $i\varepsilon$ в знаменателе означает, что нуль $\eta_0(s')$ “садится” на действительную ось сверху при $s' \rightarrow s$, $s \in \gamma^-$.

Итак, при $s \rightarrow \gamma^\pm$ собственная функция дискретного спектра переходит в собственную функцию непрерывного спектра, а дискретный спектр переходит в нуль граничных значений дисперсионной функции $\lambda^+(s, \mu)$ или $\lambda^-(s, \mu)$.

3. РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Сделаем несколько замечаний. Чтобы удовлетворить граничному условию (1.5), выбросим из набора собственных решений возрастающие и осциллирующие (по переменной x) решения. Пусть $s \in S^-$. В этом случае дискретный спектр отсутствует. Что касается непрерывного спектра, то убывающие решения существуют тогда и только тогда, когда или $\operatorname{Re}(1+s) = 1 + \sigma > 0$ при $\eta \in (0, +\infty)$ и при любом $\omega \in (-\infty, +\infty)$, или $\operatorname{Re}(1+s) < 0$ при $\eta \in (-\infty, 0)$ и при любом $\omega \in (-\infty, +\infty)$. Осциллирующие решения при $\omega \neq 0$ существуют тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re}(1+s) = 0$ при всех $\eta \in (-\infty, +\infty)$. Пусть $s \in S^+$. Теперь к непрерывному спектру добавляется дискретный спектр, состоящий из двух нулей $\pm\eta_0(s)$ дисперсионной функции (см. формулу (2.7)). Отметим, что если $\omega \neq 0$, а $\operatorname{Re}(1+s) \in (0, 1)$, т.е. $-1 < \sigma < 0$, то нули $\pm\eta_0(s)$ являются чисто мнимыми. В самом деле, когда $\omega = 0$, число $s = \sigma$ является действительным, при этом $\overline{\lambda^+(\sigma, \mu)} = \lambda^-(\sigma, \mu)$ (черта означает комплексное сопряжение). Следовательно, если $\theta^+(\sigma, \mu) = \arg \lambda^+(\sigma, \mu)$ — однозначная ветвь аргумента, фиксированная условием $\theta^+(\sigma, 0) = 0$, то $G(\sigma, \mu) = \exp[2i\theta^+(\sigma, \mu)]$. Поэтому из (2.9) следует, что

$$V(\sigma, z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\theta^+(\sigma, \tau) - \pi}{\tau - z} d\tau. \quad (3.1)$$

Это означает, что функция

$$X(\sigma, 0) = \frac{1}{\mu} \exp V(\sigma, 0)$$

(см. (2.8)) принимает лишь действительные значения. Поэтому формула (2.7) дает два чисто мнимых значения. Таким образом, если $\omega = 0$, $-1 < \sigma < 0$, то дискретный спектр порождает осциллирующие решения. В связи с этим выбросим из рассмотрения отрезок $\omega = 0$, $-1 \leq \sigma \leq 0$. При этом область S^+ преобразуется во множество $S_0 = S^+ \setminus \{\omega = 0, -1 \leq \sigma \leq 0\}$, состоящее из двух непересекающихся областей

S^{++} и S^{+-} , лежащих соответственно в верхней и нижней полуплоскостях. Из формул (2.7)–(2.9) видно, что при $\omega \neq 0$ оба нуля $\pm\eta_0(s)$ не вырождаются ни в чисто мнимые, ни в чисто действительные. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть явное выражение для этих нулей:

$$\eta_0(s) = \sqrt{\frac{\sigma(1+\sigma) + \omega^2 - i\omega}{\sigma^2 + \omega^2}} \frac{1}{X(s, 0)}, \quad (3.2)$$

где

$$X(s, \mu) = \frac{1}{\mu} \exp V(s, \mu),$$

$$V(s, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \left[\ln \frac{\sigma + \lambda_c(\mu) + i(\omega + \sqrt{\pi}\mu \exp(-\mu^2))}{\sigma + \lambda_c(\mu) + i(\omega - \sqrt{\pi}\mu \exp(-\mu^2))} - 2\pi i \right] \frac{d\mu}{\mu - z}.$$

Через $\eta_0(s)$ обозначим тот нуль из (3.2), у которого $\operatorname{Re} \eta_0(s) > 0$.

ТЕОРЕМА 1. *Если $s \in \gamma^\pm$, то граничная задача (1.3)–(1.5) имеет единственное решение*

$$\psi(x, \mu, s) = a_0(s) \psi_{\eta_0}(x, \mu, s) + \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1+s}{\eta}x\right) F(\eta, \mu, s) a(\eta, s) ds. \quad (3.3)$$

В разложении (3.3) $a_0(s)$ – коэффициент, отвечающий дискретному спектру, $a(\eta, s)$ – коэффициент, отвечающий непрерывному спектру. Эти коэффициенты находятся в процессе приводимого ниже доказательства.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что разложение (3.3) по форме совпадает с разложением (3.2) из [5]. Однако между этими разложениями существует принципиальное различие. Дело в том, что дискретная мода $\psi_{\eta_0}(x, \mu, s)$ из разложения (3.2) является неособой, т.к. при $s \in S^+$ нуль $\eta_0(s)$ дисперсионной функции является комплекснозначным и знаменатель этой моды в нуль не обращается. При $s \in \gamma^\pm$ имеем $\lambda^\mp(s, \eta_0(s)) = 0$, т.е. значение $\eta_0(s)$ является действительным, а тогда из (2.11) и (2.12) видно, что дискретная мода из (3.3) имеет полярную особенность.

Возникает вопрос, нужно ли в разложении (3.3) выписывать отдельно дискретную моду? Ведь нуль $\eta_0(s)$ дисперсионной функции имеется в непрерывном спектре, и интегральный член из (3.3) содержит соответствующее слагаемое при $\eta = \eta_0(s)$. Ответ на этот вопрос положителен, что видно из приводимого далее доказательства.

Ниже будет показано, что разложение (3.3) представляет собой функцию, непрерывно дифференцируемую по x . Воспользовавшись этим фактом, перейдем к пределу при $x \rightarrow 0$ и, учитывая условие (1.4), получим сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши:

$$2u_0 = a_0(s) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\eta_0(s)}{\eta_0(s) - \mu} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\eta a(\eta, s)}{\eta - \mu} d\eta + \exp(\mu^2) \lambda(s, \mu) a(\mu, s), \quad \mu > 0. \quad (3.4)$$

Введем вспомогательную функцию

$$N(z, s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\eta a(\eta, s)}{\eta - z} d\eta, \quad (3.5)$$

для которой ее граничные значения сверху и снизу на полуоси $(0, +\infty)$ связаны формулами Сохоцкого

$$N^+(\mu, s) + N^-(\mu, s) = 2N(\mu, s), \quad N^+(\mu, s) - N^-(\mu, s) = 2\sqrt{\pi}i\mu a(\mu, s), \quad \mu > 0.$$

С помощью таких же формул для дисперсионной функции сведем уравнение (3.4) к неоднородной краевой задаче Римана [10]

$$\begin{aligned} \lambda^+(s, \mu) \left[N^+(\mu, s) - 2u_0 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{a_0(s)\eta_0(s)}{\eta_0(s) - \mu} \right] = \\ = \lambda^-(s, \mu) \left[N^-(\mu, s) - 2u_0 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{a_0(s)\eta_0(s)}{\eta_0(s) - \mu} \right], \quad \mu > 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

4. ОДНОРОДНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

Для решения неоднородной задачи (3.6) решим сначала соответствующую однородную краевую задачу

$$\frac{X^+(s, \mu)}{X^-(s, \mu)} = \frac{\lambda^+(s, \mu)}{\lambda^-(s, \mu)}, \quad \mu > 0. \quad (4.1)$$

Пусть для определенности $s \in \gamma^-$, тогда

$$\lambda^+(s, \eta_0) = \sigma + \lambda(\eta_0) + i(\omega + \sqrt{\pi}\eta_0 \exp(-\eta_0^2)),$$

а $\lambda^-(s, \eta_0) \neq 0$. Учитывая последующее логарифмирование правой части (4.1), перопределим дисперсионную функцию следующим образом:

$$\lambda_1(s, z) = \frac{\lambda(s, z)}{\sqrt{\eta_0(s)} - (\sqrt{z})}. \quad (4.2)$$

Здесь $(\sqrt{z})$ означает однозначную регулярную ветвь радикала $\sqrt{z}$ в области, представляющей собой комплексную плоскость с разрезом вдоль действительной положительной полуоси. Представим эту функцию в виде $(\sqrt{z}) = \sqrt{r} \exp(i\varphi/2)$, где $r = |z|$, $\varphi = \arg z$, $0 < \varphi < 2\pi$. Если точка z “ложится” на разрез $(0, +\infty)$ сверху ($\varphi \rightarrow 0$), то $(\sqrt{z})^+ = \sqrt{r}e^{i0/2} = \sqrt{r}$, если снизу ($\varphi \rightarrow 2\pi$), то $(\sqrt{z})^- = \sqrt{r}e^{i2\pi/2} = -\sqrt{r}$. Учитывая эти замечания, для граничных значений $\lambda_1(s, z)$ имеем

$$\lambda_1^+(s, \mu) = \frac{\lambda^+(s, \mu)}{\sqrt{\eta_0(s)} - \sqrt{\mu}}, \quad \lambda_1^-(s, \mu) = \frac{\lambda^-(s, \mu)}{\sqrt{\eta_0(s)} + \sqrt{\mu}}.$$

Умножая уравнение (4.1) слева и справа на одну и ту же дробь $(\sqrt{\eta_0} + \sqrt{\mu})/(\sqrt{\eta_0} - \sqrt{\mu})$, получим эквивалентную однородную краевую задачу

$$\frac{X_1^+(s, \mu)}{X_1^-(s, \mu)} = \frac{\lambda_1^+(s, \mu)}{\lambda_1^-(s, \mu)}, \quad \mu > 0, \quad (4.3)$$

где

$$X_1(s, z) = \frac{X(s, z)}{\sqrt{\eta_0(s) - \sqrt{z}}}. \quad (4.4)$$

Заметим, что правая часть уравнения (4.3) уже не обращается в нуль в точке $\mu = \eta_0(s)$. В качестве решения задачи (4.3) возьмем ограниченное в нуле решение

$$X_1(s, z) = \frac{1}{\sqrt{z}} \exp V(s, z), \quad (4.5)$$

где

$$V(s, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \left[\ln \frac{\lambda_1^+(s, \mu)}{\lambda_1^-(s, \mu)} - \pi i \right] \frac{d\mu}{\mu - z}. \quad (4.6)$$

Из формул (4.4)–(4.6) следует, что

$$\begin{aligned} X_1(s, z) &\approx \frac{1}{\sqrt{z}} \quad \text{при } |z| \rightarrow \infty, \\ X(s, z) &= -1 + o(1) \quad \text{при } |z| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

5. РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ И ЗАВЕРШЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ

Преобразуем неоднородную задачу (3.6) с помощью однородной (4.1) к задаче определения аналитической функции по ее нулевому скачку на полуоси $(0, \infty)$:

$$\begin{aligned} X^+(s, \mu) \left[N^+(\mu, s) - 2u_0 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{a_0(s)\eta_0(s)}{\eta_0(s) - \mu} \right] = \\ = X^-(s, \mu) \left[N^-(\mu, s) - 2u_0 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{a_0(s)\eta_0(s)}{\eta_0(s) - \mu} \right], \quad \mu > 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Учитывая поведение входящих в краевое условие (5.1) функций и замечая, что

$$\frac{X^+(s, \mu)}{\lambda^+(s, \mu)} = \frac{X_1^+(s, \mu)}{\lambda_1^+(s, \mu)},$$

получим общее решение этой задачи в виде

$$N(z, s) = 2u_0 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{a_0(s)\eta_0(s)}{z - \eta_0(s)} + c \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{\eta_0(s) - \sqrt{z}}} \exp[-V(s, z)], \quad (5.2)$$

где c – произвольная постоянная.

Чтобы функцию (5.2) можно было принять в качестве функции $N(z, s)$, введенной ранее равенством (3.5), потребуем, чтобы она не имела полюса в точке $\eta_0(s)$, т.е.

$$\operatorname{Res} N(z, s) = 0, \quad z = \eta_0(s), \quad (5.3)$$

и чтобы она имела равный нулю предел в бесконечно удаленной точке, т.е.

$$\lim_{z \rightarrow \infty} N(z, s) = 0. \quad (5.4)$$

Из условия (5.4) сразу видно, что $c = 2u_0$. Условие (5.3) приводит к уравнению

$$a_0(s)\eta_0(s) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - \eta_0(s)} + c \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{\sqrt{z} \exp[-V(s, z)]}{\sqrt{\eta_0(s) - \sqrt{z}}} dz = 0. \quad (5.5)$$

Здесь Γ – окружность $|z - \eta_0(s)| = \varepsilon$, ориентированная против часовой стрелки, а Γ^+ – замкнутый контур, состоящий из отрезка действительной оси и верхней части окружности Γ . Из уравнения (5.5) находим, что

$$a_0(s) = 2\sqrt{\pi}u_0 \exp[-V(s, \eta_0)]. \quad (5.6)$$

Коэффициент непрерывного спектра $a(\eta, s)$ найдем, если к функции $N(z, s)$, введенной равенством (3.5), применим формулу Сохоцкого, а затем подставим общее решение (5.2):

$$\begin{aligned} N^+(\mu, s) - N^-(\mu, s) &= 2\sqrt{\pi}i\mu a(\mu, s) = 2u_0 \left[\frac{1}{X^+(s, \mu)} - \frac{1}{X^-(s, \mu)} \right] = \\ &= 2u_0 \frac{1}{X^+(s, \mu)} \left[1 - \frac{X^+(s, \mu)}{X^-(s, \mu)} \right] = \\ &= 2u_0 \frac{1}{X^+(s, \mu)} \left[1 - \frac{\lambda^+(s, \mu)}{\lambda^-(s, \mu)} \right] = -2u_0 \frac{2\sqrt{\pi}i\mu \exp(-\mu^2)}{X^+(s, \mu)\lambda^-(s, \mu)}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$a(\mu, s) = -2u_0[X^+(s, \mu)\lambda^-(s, \mu)]^{-1}. \quad (5.7)$$

Сингулярный интеграл типа Коши

$$N(\mu, s, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int \exp\left(-\frac{1+s}{\eta}x\right) \frac{\eta a(\eta, s)}{\eta - \mu} d\mu$$

из разложения (3.3) с плотностью (5.7) представляет собой непрерывно дифференцируемую функцию по x на замкнутой полуоси $0 \leq x < +\infty$, т.к. интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\varphi'_x(\eta, s, x)}{\eta - \mu} d\eta = - \int_0^\infty (1+s) \exp\left(-\frac{1+s}{\eta}x\right) \frac{a(\eta, s)}{\eta - \mu} d\mu$$

сходится равномерно по x на этой же полуоси. Справедливость последнего факта вытекает из гильдеровости функции $a(\eta, s)$ на любом конечном отрезке полуоси $(0, +\infty)$ и ее асимптотического поведения $a(\eta, s) \approx \exp(-\eta^2)$ при $\eta \rightarrow +\infty$.

Итак, разложение (3.3) есть непрерывно дифференцируемая по x функция.

Осталось доказать единственность разложения (3.3). Пусть имеется еще одно разложение с коэффициентами $\tilde{a}_0(s)$ и $\tilde{a}(\eta, s)$, отличное от (3.3). Тогда, составляя разность этих разложений, придем к краевой задаче

$$\begin{aligned} X^+(s, \mu) \left[N^+(\mu, s) - \tilde{N}^+(\mu, s) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{a_0(s) - \tilde{a}_0(s)}{\eta_0(s) - \mu} \eta_0(s) \right] = \\ = X^-(s, \mu) \left[N^-(\mu, s) - \tilde{N}^-(\mu, s) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{a_0(s) - \tilde{a}_0(s)}{\eta_0(s) - \mu} \eta_0(s) \right], \quad \mu > 0, \end{aligned} \quad (5.8)$$

где

$$\tilde{N}(z, s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\eta \tilde{a}(\eta, s)}{\eta - z} d\eta.$$

Задача (5.8) имеет лишь тривиальное решение, из которого находим

$$N(z, s) - \tilde{N}(z, s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{a_0(s) - \tilde{a}_0(s)}{z - \eta_0(s)} \eta_0(s).$$

Устраняя у этого решения полюс в точке $z = \eta_0(s)$, получаем, что $a_0(s) \equiv \tilde{a}_0(s)$. Следовательно, $N(z, s) \equiv \tilde{N}(z, s)$, откуда $a(\eta, s) \equiv \tilde{a}(\eta, s)$. Теорема 1 полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Решение граничной задачи (1.3)–(1.5) в виде разложения (3.3) можно представить в явном виде, используя формулы (5.6) и (5.7) для его коэффициентов,

$$\begin{aligned} \psi(x, \mu, s) = \frac{2u_0\eta_0(s)}{\eta_0(s) - \mu} \exp \left[-V(s, \eta_0) - \frac{1+s}{\eta_0} x \right] - \lambda(s, \mu) \frac{2u_0\chi_+(\mu) \exp(-x/\mu)}{X^+(s, \mu)\lambda^-(s, \mu)} + \\ + \frac{u_0}{\pi i} \int_0^\infty \exp \left(-\frac{1+s}{\eta} x \right) \left[\frac{1}{X^+(s, \eta)} - \frac{1}{X^-(s, \eta)} \right] \frac{d\eta}{\eta - \mu}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

где $\chi_+(\mu) = 1$ при $\mu > 0$, $\chi_+(\mu) = 0$ при $\mu < 0$.

6. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПАДАЮЩИХ МОЛЕКУЛ

В этом разделе построим функцию распределения падающих молекул на стенке, т.е. при $\mu < 0$, $x = 0$. По условию задачи (см. (1.4)) функция распределения отраженных молекул известна и равна $2u_0$. Ниже покажем, что построенная функция распределения (5.9) в точности удовлетворяет условию (1.4). Функция распределения строится в явном виде в терминах вспомогательной функции $X(s, z)$, факторизующей коэффициент краевой задачи. Родственной задачей в теории переноса является задача нахождения функции распределения на границе полупространства при $\mu < 0$. Эта задача называется задачей Милна и носит самостоятельный характер.

Выпишем полученное выражение (5.9) для функции распределения на стенке:

$$\begin{aligned} \psi(0, \mu, s) = & \frac{2u_0\eta_0(s)}{\eta_0(s) - \mu} \exp[-V(s, \eta_0(s))] - \frac{2u_0\lambda(s, \mu)\chi_+(\mu)}{X^+(s, \mu)\lambda^-(s, \mu)} + \\ & + \frac{u_0}{\pi i} \int_0^\infty \left[\frac{1}{X^+(s, \eta)} - \frac{1}{X^-(s, \eta)} \right] \frac{d\eta}{\eta - \mu}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Интеграл в правой части (6.1)

$$N(\mu, s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\eta a(\eta, s)}{\eta - \mu} d\eta = \frac{u_0}{\pi i} \int_0^\infty \left[\frac{1}{X^+(s, \eta)} - \frac{1}{X^-(s, \eta)} \right] \frac{d\eta}{\eta - \mu} \quad (6.2)$$

вычислим аналитически с помощью техники контурного интегрирования.

Рассмотрим область D , ограниченную контуром γ_ϵ , изображенную на рис. 1 для двух случаев: $\mu > 0$ (а) и $\mu < 0$ (б).

Рис. 1

Разложим функцию $X^{-1}(s, z)$ в асимптотический ряд в окрестности точки $z = \infty$:

$$\frac{1}{X(s, z)} = -1 - \frac{\sqrt{\eta_0(s)}}{\sqrt{z}} - \frac{V_1 - \eta_0(s)}{z} + \dots, \quad (6.3)$$

где

$$V_1 = -\frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \left[\ln \frac{\lambda_1^+(s, \mu)}{\lambda_1^-(s, \mu)} - \pi i \right] d\mu. \quad (6.4)$$

Возьмем функцию $f(z, s) = X^{-1}(s, z) + 1$, исчезающую в точке $z = \infty$, аналитическую в плоскости с разрезом вдоль положительной действительной полуоси и имеющую простой полюс в точке $\eta_0(s) \in (0, +\infty)$ “сверху”. Последнее означает, что этот полюс имеют граничные значения функции $f^+(\mu, s)$. Поэтому функция $f(z)/(z - \mu)$ является

аналитической по z как при $\mu > 0$, так и при $\mu < 0$. Согласно интегральной теореме Коши

$$\oint_{\gamma_\varepsilon} \left[\frac{1}{X(s, \eta) + 1} \right] \frac{d\eta}{\eta - \mu} = 0. \quad (6.5)$$

Из формулы (6.5) в пределе при $\varepsilon \rightarrow \infty$ получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \left[\frac{1}{X^+(s, \eta)} - \frac{1}{X^-(s, \eta)} \right] \frac{d\eta}{\eta - \mu} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\varepsilon} \left[\frac{1}{X(s, \eta)} + 1 \right] \frac{d\eta}{\eta - \mu} - \\ & - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\varepsilon^+} \left[\frac{1}{X(s, \eta)} + 1 \right] \frac{d\eta}{\eta - \mu} + \\ & + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\eta|=1/\varepsilon} \left[\frac{1}{X(s, \eta)} + 1 \right] \frac{d\eta}{\eta - \mu} = 0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Здесь Γ_ε – окружность с центром в точке μ и радиусом 2ε , Γ_ε^+ – замкнутый контур, состоящий из отрезка действительной оси и верхней полуокружности Γ_ε .

Следующие равенства приведем без доказательства:

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\varepsilon} \left[\frac{1}{X(s, \eta)} + 1 \right] \frac{d\eta}{\eta - \mu} = \frac{1}{X(s, \mu)} + 1, \\ & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\varepsilon^+} \left[\frac{1}{X(s, \eta)} + 1 \right] \frac{d\eta}{\eta - \mu} = -\frac{\eta_0(s)}{\eta_0(s) - \mu} \exp[-V(s, \eta_0)], \\ & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{|\eta|=1/\varepsilon} \left[\frac{1}{X(s, \eta)} + 1 \right] \frac{d\eta}{\eta - \mu} = 0. \end{aligned}$$

На основании этих соотношений и равенства (6.6) находим интеграл (6.2):

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\eta a(\eta, s)}{\eta - \mu} d\eta = 2u_0 \left[\frac{1}{X(s, \mu)} + 1 - \frac{\eta_0(s)}{\eta_0(s) - \mu} \exp[-V(s, \eta_0)] \right]. \quad (6.7)$$

Заметим, что

$$\frac{\lambda(s, \mu)}{X^+(s, \mu)\lambda^-(s, \mu)} = \frac{\lambda^+(s, \mu) + \lambda^-(s, \mu)}{2\lambda^-(s, \mu)X^+(s, \mu)} = \frac{1}{2X^+(s, \mu)} \left[1 + \frac{X^+(s, \mu)}{X^-(s, \mu)} \right] = \frac{1}{X(s, \mu)}. \quad (6.8)$$

Подставляя (6.7) и (6.8) в (6.1), получим искомую функцию распределения

$$\psi(0, \mu, s) = 2u_0 \left[1 + \frac{1 - \chi_+(\mu)}{X(s, \mu)} \right]. \quad (6.9)$$

Из (6.9) видно, что

$$\psi(0, \mu, s) = 2u_0, \quad \mu > 0, \quad (6.10)$$

$$\psi(0, \mu, s) = 2u_0 \left[1 + \frac{1}{X(s, \mu)} \right], \quad \mu < 0. \quad (6.11)$$

Здесь функция $X(s, z)$ определяется на основании (4.4) и (4.5):

$$X(s, z) = \frac{\sqrt{\eta_0(s)} - \sqrt{z}}{\sqrt{z}} \exp V(s, z),$$

а функция $V(s, z)$ задается равенством (4.6).

Найдем теперь значение функции распределения при $s \in S^\pm$.

Пусть сначала $s \in S^-$. На основании результатов работы [5] имеем

$$\psi(0, \mu, s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\eta a(\eta, s)}{\eta - \nu} d\eta, \quad \mu < 0,$$

где

$$2\sqrt{\pi}i\eta a(\eta, s) = -2u_0 \left[\frac{1}{X^+(s, \eta)} - \frac{1}{X^-(s, \eta)} \right].$$

Здесь функции $X(s, z)$ и $V(s, z)$ определяются равенствами (2.8) и (2.9), в которых $\kappa(s) = 0$. Вычисляя сингулярный интеграл с помощью техники контурного интегрирования, получаем

$$\psi(0, \mu, s) = 2u_0 \left[-\frac{1}{X(s, \mu)} \right], \quad \mu < 0. \quad (6.12)$$

Пусть теперь $s \in S^+$, тогда согласно [5]

$$\psi(0, \mu, s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\eta_0(s)a(\eta, s)}{\eta - \mu} d\mu, \quad \mu < 0, \quad (6.13)$$

где

$$a_0(s) = \frac{2u_0\sqrt{\pi}}{\eta_0(s)X(s, \eta_0)}, \quad 2\sqrt{\pi}i\eta a(\eta, s) = -\frac{2u_0}{\eta - \eta_0(s)} \left[\frac{1}{X^+(s, \eta)} - \frac{1}{X^-(s, \eta)} \right].$$

Вычислим сингулярный интеграл из разложения (6.13). Имеем

$$J(\eta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \left[\frac{1}{X^+(s, \eta)} - \frac{1}{X^-(s, \eta)} \right] \frac{d\eta}{\eta - \eta_0(s)},$$

интеграл $J(\mu)$ записывается так же, а функции $X(s, z)$ и $V(s, z)$ определяются равенствами (2.8) и (2.9), в которых $\kappa(s) = 1$.

Рис. 2

Для вычисления интеграла $J(\eta_0)$ возьмем контур, изображенный на рис. 2. Рассмотрим следующее разложение в окрестности точки $z = \infty$:

$$\frac{1}{X(s, z)} = z \exp[-V(s, z)] = z \left(1 - \frac{V_1(s)}{z} + \frac{\tilde{V}_2(s)}{z^2} + \dots \right).$$

Образует функцию $f(z, s) = X^{-1}(s, z) - z + V_1(s)$, исчезающую на бесконечности как z^{-1} , аналитическую в комплексной плоскости, кроме разреза вдоль $[0, +\infty)$. Для этой функции по теореме Коши получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\epsilon} f(z, s) dz = 0,$$

откуда

$$J(\eta_0) + \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\oint_{|\eta|=1/\epsilon} - \oint_{\Gamma_\epsilon} \right] \left[\frac{1}{X(s, \eta)} - \eta + V_1(s) \right] \frac{d\eta}{\eta - \eta_0} = 0.$$

Вычисляя этот предел, получаем, что $J(\eta_0) = X^{-1}(s, \eta_0) - \eta_0(s) + V_1(s)$, поэтому $J(\mu) = X^{-1}(s, \mu) - \mu + V_1(s)$. Следовательно, с учетом (6.13) функция распределения построена и имеет вид

$$\psi(0, \mu, s) = 2u_0 \left[1 - \frac{1}{(\mu - \eta_0(s))X(s, \mu)} \right], \quad \mu < 0. \quad (6.14)$$

Отметим, что из формулы (6.9) (или (6.10)) следует, что построенная при $\mu > 0$ функция распределения в точности удовлетворяет граничному условию (1.4).

7. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ПЛОСКОСТИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧАСТОТ

В этом разделе покажем непрерывность функции распределения на стенке при $\mu < 0$ в плоскости комплексного параметра $s = \sigma + i\omega$. Напомним, что именно этот параметр характеризует амплитуду и частоту колебаний стенки. Из равенств (6.11), (6.12) и (6.14) следует, что для доказательства непрерывности функции распределения требуется доказать два предельных соотношения:

$$\lim_{s^+ \rightarrow s_0} (\mu - \eta_0(s^+))X(s^+, \mu) = -X(s_0, \mu), \quad (7.1)$$

$$\lim_{s^- \rightarrow s_0} X(s^-, \mu) = -X(s_0, \mu), \quad s^\pm \in S^\pm, \quad s_0 \in \partial S^+. \quad (7.2)$$

Здесь функция $X(s^+, \mu)$ определяется равенством (2.8), $X(s_0, \mu)$ – равенством (4.4). С учетом равенств (2.8) и (4.4) для доказательства (7.1) требуется доказать, что

$$\lim_{s^+ \rightarrow s_0} \left[\ln \frac{\mu - \eta_0(s^+)}{\mu} + V(s^+, \mu) \right] = \ln \frac{\sqrt{\mu} - \sqrt{\eta_0(s_0)}}{\sqrt{\mu}} + V(s_0, \mu), \quad (7.3)$$

где $V(s^+, \mu)$ определяется равенством (2.9), в котором $\kappa(s) = 1$, а $V(s_0, \mu)$ – равенством (4.6).

Функцию $V(s^+, \mu)$ представим в виде

$$\begin{aligned} V(s^+, \mu) &\equiv \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \left[\ln \frac{\lambda^+(s^+, \tau)}{\lambda^-(s^+, \tau)} e^{-2\pi i} \right] \frac{d\tau}{\tau - \mu} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \left[\ln \frac{\lambda^+(s^+, \tau)(\sqrt{\eta_0(s^+)} + \sqrt{\tau})}{\lambda^-(s^+, \tau)(\sqrt{\eta_0(s^+)} - \sqrt{\tau})} e^{-\pi i} \right] \frac{d\tau}{\tau - \mu} - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \ln \frac{\sqrt{\tau} + \sqrt{\eta_0(s^+)}}{\sqrt{\tau} - \sqrt{\eta_0(s^+)}} \frac{d\tau}{\tau - \mu}. \end{aligned}$$

Для вычисления второго интеграла из последнего равенства воспользуемся контуром γ_ε (см. рис. 1б)) и интегральным представлением Коши. Тогда получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \ln \frac{\sqrt{\tau} + \sqrt{\eta_0(s^+)}}{\sqrt{\tau} - \sqrt{\eta_0(s^+)}} \frac{d\tau}{\tau - \mu} &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \ln \frac{1 + \sqrt{\eta_0(s^+)/\tau}}{1 - \sqrt{\eta_0(s^+)/\tau}} \frac{d\tau}{\tau - \mu} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\varepsilon} \ln(1 + \sqrt{\eta_0(s^+)/\tau}) \frac{d\tau}{\tau - \mu} = \ln(1 + \sqrt{\eta_0(s^+)/\mu}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$V(s^+, \mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \left[\ln \frac{\lambda^+(s^+, \tau)(\sqrt{\eta_0(s^+)} + \sqrt{\tau})}{\lambda^-(s^+, \tau)(\sqrt{\eta_0(s^+)} - \sqrt{\tau})} e^{-\pi i} \right] \frac{d\tau}{\tau - \mu} - \ln \frac{\sqrt{\mu} + \sqrt{\eta_0(s^+)}}{\sqrt{\mu}}.$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $s^+ \rightarrow s_0$:

$$\lim_{s^+ \rightarrow s_0} V(s^+, \mu) = V(s_0, \mu) - \ln \frac{\sqrt{\mu} + \sqrt{\eta_0(s^+)}}{\sqrt{\mu}}. \quad (7.4)$$

Подставляя соотношение (7.4) в (7.3), убеждаемся в справедливости равенства (7.1). Равенство (7.2) доказывается аналогично.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Важно отметить, что разделение переменных в рассмотренной задаче Рэлея приводит к тому же самому характеристическому уравнению, что и в работах [1, 3–5], в которых характеристическое уравнение было получено применением преобразования Лапласа к исходному кинетическому уравнению. Таким образом, задача Рэлея позволяет выявить общие математические закономерности решения нестационарных граничных задач для кинетических уравнений.

В данной работе используются понятия спектральной теории, введенные в начале 60-х годов Кейзом и известные по монографиям [3, 12]. В дальнейшем эти понятия развивались (см., например, [13]) и широко использовались, в том числе и в цитированных работах [1–9].

Интерес к нестационарным задачам связан, в частности, с многочисленными приложениями как в кинетической теории газов (задача Рэлея, излучение звука при колебаниях пластины), так и в области кинетики плазмы, например в теории скин-эффекта, при изучении отклика плазмы на переменное электрическое поле. Разработанный в работе метод может быть использован для анализа перечисленных выше задач.

Список литературы

- [1] *C. Cercignani, F. Sernagiotto.* Ann. Phys. 1964. V. 30. № 1. P. 154.
- [2] *C. Cercignani.* Ann. Phys. 1966. V. 40. № 4. P. 454.
- [3] *К. Черчиньяни.* Математические методы в кинетической теории газов. М.: Мир, 1973.
- [4] *К. Черчиньяни.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1977.
- [5] *А. В. Латышев, А. А. Юшканов.* ТМФ. 1992. Т. 92. № 1. С. 127.
- [6] *K. Aoki, C. Cercignani.* Z. angew. Math. und Phys. 1984. V. 35. № 2. P. 127.
- [7] *K. Aoki, C. Cercignani.* Z. angew. Math. und Phys. 1984. V. 35. № 3. P. 345.
- [8] *A. Frezzotti.* The propagation of sound waves in an ultrarelativistic gas according to the method of elementary solutions. In: Atti 8 Congr. Assoc. ital. mecc. teor. ed appl. (AIMETA). Torino, 1986. P. 725.
- [9] *C. E. Siewert, E. E. Burniston, J. R. Thomas.* Phys. Fluids. 1973. V. 16. № 9. P. 1532.
- [10] *Ф. Д. Газов.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
- [11] *В. С. Владимиров.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976.
- [12] *К. Кейз, П. Цвайфель.* Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972.
- [13] *Т. А. Гермогенова.* О полноте системы собственных функций характеристического уравнения теории переноса. Препринт 103. М.: ИПМ АН СССР, 1976.

Поступила в редакцию 1.IX.1997 г.,
после доработки 1.IV.1998 г.