Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Э. Адлер, Разбиения множеств и интегрируемые иерархии, *ТМФ*, 2016, том 187, номер 3, 455–486

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9051>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 12:36:12

© 2016 г.

В. Э. Адлер*

РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ИЕРАРХИИ

Показано, что статистика для некоторых типов разбиений множеств описывается производящими функциями, возникающими в теории интегрируемых уравнений.

Ключевые слова: разбиение множества, разбиение типа B , неперекрывающееся разбиение, неделимое разбиение, многочлен Белла, число Доулинга, число Бесселя, производящая функция, интегрируемая иерархия.

DOI: 10.4213/tmf9051

1. ВВЕДЕНИЕ

В комбинаторике одна из типичных задач – это поиск алгоритмов, позволяющих генерировать и перечислять все объекты заданного типа. Для нас представляет интерес ситуация, когда можно

– описать данный алгоритм при помощи порождающих операций, которые позволяют рекурсивно строить рассматриваемые объекты из объектов с меньшим числом элементов,

– сопоставить каждому объекту число или моном от формальных переменных так, чтобы действию порождающих операций отвечали некоторые алгебраические или дифференциальные операции.

В результате совокупность всех объектов отображается в последовательность чисел или многочленов, подчиняющуюся определенным рекуррентным соотношениям.

Замечательным обстоятельством является то, что в некоторых случаях производящие функции для этих последовательностей возникают и в теории интегрируемых уравнений. В качестве примеров взаимопроникновения обеих теорий упомянем лишь связь разбиений чисел со статистической механикой [1], комбинаторику трансцендентов Пенлеве [2], солитонов Кортвега-де Фриза (КдФ) [3] и тау-функции иерархии Кадомцева–Петвиашвили (КП) [4]. Хорошо известный пример, более близкий по смыслу к содержанию нашей статьи, – многочлены Белла, описывающие

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 16-01-00289_a).

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Черноголовка, Московская обл., Россия. E-mail: adler@itp.ac.ru

статистику разбиений множеств и определяющие потенциальную иерархию Бюргерса [5], [6]. Целью настоящей статьи является обобщение данного наблюдения для некоторых специальных типов разбиений множеств с ограничениями на структуру блоков.

В разделах 2 и 4 рассматриваются примеры разбиений множеств общего вида и разбиений типа B , связанные соответственно с линеаризуемыми иерархиями Бюргерса и Ибрагимова–Шабата. Раздел 3 – единственный, в котором вместо разбиений множеств появляются другие комбинаторные объекты. Соответствующие уравнения можно получить из иерархии Бюргерса посредством преобразования годографа. Во всех указанных случаях определения мономов основаны на подсчете количества элементов в блоках.

В разделе 5 изучаются неперекрывающиеся разбиения, ассоциированные с иерархией КдФ, раздел 6 посвящен неделимым разбиениям и иерархии Каупа–Броера (калибровочно-эквивалентной версии нелинейного уравнения Шредингера (НУШ)). В данном разделе комбинаторика имеет более сложный вид; следовательно, усложняется и определение статистики: определение монома, отвечающего разбиению, основывается не на размере блоков, а на последовательности операций, приводящих к данному разбиению. Кроме того, комбинаторика становится более замаскированной: если в случае иерархии Бюргерса производящую функцию можно записать непосредственно для высших потоков, то в случае иерархии КдФ и НУШ производящая функция – это асимптотический ряд по спектральному параметру для логарифмической производной ψ -функции, удовлетворяющий уравнению Риккати.

Структура всех разделов единообразна: сначала определяются операции, порождающие рассматриваемые комбинаторные объекты, затем вводятся многочлены, описывающие их статистику, далее записываются рекуррентные соотношения и, наконец, проводится сравнение с интегрируемой иерархией.

2. РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ

2.1. Основные определения. Напомним, что *разбиением множества* называется множество его непустых попарно непересекающихся подмножеств (*блоков*), объединение которых дает все множество. Запись $\pi \vdash [n]$ означает, что π является разбиением множества $[n] = \{1, \dots, n\}$. Множество всех разбиений $[n]$ обозначается Π_n , его подмножество, состоящее из разбиений на k блоков, обозначается $\Pi_{n,k}$, $1 \leq k \leq n$. Как правило, мы обозначаем блоки той же буквой, что и само разбиение, но с нижним индексом: $\pi = \{\pi_1, \dots, \pi_k\}$. При $n = 0$ удобно считать, что множество $[0] = \emptyset$ допускает единственное разбиение $\emptyset$, не содержащее ни одного блока, т. е. $\Pi_0 = \Pi_{0,0} = \{\emptyset\}$.

Пусть $|A|$ означает число элементов множества A . Тогда $|\pi|$ есть число блоков разбиения множества π , а $|\pi_j|$ – размер блока π_j . Блок называется синглетом, если $|\pi_j| = 1$, и мультиплетом, если $|\pi_j| > 1$. Общее число элементов разбиваемого множества обозначается $\|\pi\|$.

По определению разбиение – это неупорядоченное множество, т. е. порядок блоков и порядок элементов в блоках не играют роли. Тем не менее отношение порядка, заданное нумерацией элементов, используется для определения однозначной записи

Рис. 1. Порождающие операции d_j , M добавляют новый элемент на одну из вакансий, отмеченных пустыми кружками. Блоку размера l приписывается переменная v_l .

разбиения. В *канонической записи* блок разбиения представлен списком, упорядоченным по возрастанию элементов, а само разбиение – списком блоков, упорядоченных по возрастанию первого (минимального) элемента. Для краткости пишут, например, что $\pi = 1, 2, 7|3, 5|4, 9, 12|6|8, 10, 11$, используя черту в качестве разделителя между блоками.

Альтернативно, разбиение множества представляется последовательностью вида $s = (s_1, \dots, s_n)$, где s_m есть номер блока в канонической записи, содержащего элемент m ; в приведенном выше примере получаем $(1, 1, 2, 3, 2, 4, 1, 5, 3, 5, 5, 3)$. Возникающие при этом целочисленные последовательности характеризуются условием *ограниченного роста*:

$$s_1 = 1, \quad 1 \leq s_m \leq \max(s_1, \dots, s_{m-1}) + 1. \quad (1)$$

Множество таких последовательностей длины n обозначим R_n .

Используемое в статье графическое представление разбиений множеств иллюстрируется на рис. 1. Элементы множества нумеруются слева направо, строки представляют собой блоки, упорядоченные сверху вниз по возрастанию минимальных элементов. Отрезок, соединяющий крайние элементы, называется *носителем* блока: $\text{supp } \pi_j = [\min \pi_j, \max \pi_j]_{\mathbb{R}}$. Это понятие используется в разделах 5, 6, посвященных так называемым *неперекрывающимся* и *неделимым* разбиениям.

2.2. Порождающие операции и порождающие функции. Задача построения всех разбиений Π_n допускает следующее решение. Рассмотрим операции

$$d_j: \Pi_{n,k} \rightarrow \Pi_{n+1,k}, \quad 1 \leq j \leq k, \quad M: \Pi_{n,k} \rightarrow \Pi_{n+1,k+1},$$

определяемые как добавление нового элемента в один из существующих блоков разбиения $\pi = \{\pi_1, \dots, \pi_k\}$ или в качестве нового синглета:

$$d_j \pi = \{\pi_1, \dots, \pi_j \cup \{n+1\}, \dots, \pi_k\}, \quad M \pi = \{\pi_1, \dots, \pi_k, \{n+1\}\}. \quad (2)$$

Эти операции автоматически порождают разбиения в канонической записи, если элемент $n+1$ (или множество $\{n+1\}$) добавляется в конец соответствующего списка (см. рис. 1, где столбец справа показывает все возможные вакансии для нового элемента).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Начиная с разбиения $\emptyset$, можно породить посредством операций d_j , M любое разбиение $[n]$, причем единственным способом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последовательность операций однозначно восстанавливается удалением элементов в обратном порядке, от n до 1. Утверждение доказано.

Для последовательности ограниченного роста $s = (s_1, \dots, s_n) \in R_n$ порождающие операции сводятся к приписыванию числа $s_{n+1} \in [k+1]$, где $k = \max s$, причем операции M отвечает значение $k+1$. Фактически s кодирует последовательность операций, порождающих данное разбиение. Иначе ее можно записать следующим образом. Пусть Φ_n – множество слов из n символов d_j и M , причем для каждого символа d его индекс может принимать значения от 1 до числа вхождений символа M правее данного символа. Утверждение 1 определяет биекцию $\varphi \mapsto \varphi(\emptyset)$ между Φ_n и Π_n . Хотя мы не используем такое представление разбиений в настоящем разделе, его обобщения будут важны при изучении специальных разбиений в разделах 5, 6.

Порождающие операции позволяют создать наглядный и простой алгоритм построения разбиений множеств, реализованный, в частности, в пакете *Combinatorica* (см. книгу [7]). Следует упомянуть, что существуют и более эффективные алгоритмы, использующие коды Грея (см. книги [8], [9]).

Перейдем к задаче подсчета числа разбиений. Сопоставим блоку π_j из l элементов переменную v_l . В соответствующей последовательности ограниченного роста число l равно кратности числа j . Разбиению сопоставим моном, равный произведению переменных, отвечающих каждому блоку:

$$p(\pi) = \prod_{j=1}^{|\pi|} v_{|\pi_j|}. \quad (3)$$

Суммируя по всем разбиениям $[n]$, определим (*полные экспоненциальные*) *многочлены Белла* (см., например, книгу [10]):

$$Y_n(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\pi \in \Pi_n} \prod_{j=1}^{|\pi|} v_{|\pi_j|} = \sum_{s \in R_n} \prod_{j=1}^{\max s} v_{\{i: s_i=j\}}. \quad (4)$$

В многочлене Y_n степени в любом мономе $v_1^{k_1} \dots v_r^{k_r}$ связаны следующим соотношением: $n = k_1 + 2k_2 + \dots + rk_r$ (т. е. многочлен однороден относительно веса $w(v_l) = l$), а коэффициент при мономе равен числу разбиений $[n]$ на k_1 блоков с одним элементом, $\dots$, k_r блоков с r элементами, например:

$$\begin{array}{ccccccc} Y_1 = v_1 & Y_2 = v_2 + v_1^2 & Y_3 = v_3 + 3v_1v_2 + v_1^3 \\ n = 1 & n = 2 = 1 + 1 & n = 3 = 1 + 2 = 1 + 1 + 1 \\ & 1 & 12 & 1|2 & 123 & 1|23 & 1|2|3 \\ & & & & & 12|3 & 13|2 \end{array},$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
Y_4 = & v_4 & + & 4v_1v_3 & + & 3v_2^2 & + & 6v_1^2v_2 & + & v_1^4 \\
n = & 4 & = & 1+3 & = & 2+2 & = & 1+1+2 & = & 1+1+1+1 \\
& 1234 & & 1|234 & & 12|34 & & 1|2|34 & & 1|2|3|4 \\
& & & 123|4 & & 13|24 & & 1|23|4 & & \\
& & & 124|3 & & 14|23 & & 1|24|3 & & \\
& & & 134|2 & & & & 12|3|4 & & \\
& & & & & & & 13|2|4 & & \\
& & & & & & & 14|2|3 & &
\end{array}$$

При $n = 0$ верно равенство $Y_0 = p(\emptyset) = 1$ в соответствии с обычным соглашением, что произведение по пустому множеству равно 1.

Число разбиений с блоками предписанного размера можно найти в явном виде, и мы приходим к формуле

$$Y_n = \sum_{k_1+2k_2+\dots+rk_r=n} \frac{n!}{(1!)^{k_1} \dots (r!)^{k_r} k_1! \dots k_r!} v_1^{k_1} \dots v_r^{k_r}, \quad (5)$$

в которой суммирование ведется по всевозможным разбиениям числа n . Следующее утверждение дает более эффективные способы вычисления числа разбиений. В этом утверждении и далее $D = \partial_x$ означает дифференцирование по переменной x , а переменные v_l интерпретируются как производные от функции $v = v_0 = v(x)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Многочлены Y_n от переменных $v_l = D^l(v)$ подчиняются рекуррентному соотношению*

$$Y_0 = 1, \quad Y_{n+1} = (D + v_1)(Y_n), \quad n \geq 0. \quad (6)$$

Экспоненциальная производящая функция последовательности Y_n равна

$$\sum_{n=0}^{\infty} Y_n \frac{z^n}{n!} = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n \frac{z^n}{n!}\right). \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\pi \in \Pi_n$. По правилу Лейбница действие дифференцирования D на моном $p(\pi)$ состоит в поочередной замене v_l на v_{l+1} для каждого сомножителя с учетом кратности. На языке разбиений этому действию отвечает поочередное наращивание одного из блоков новым элементом. В результате мы имеем сумму мономов $p(d_j\pi)$ для всех допустимых значений j . Умножение монома $p(\pi)$ на v_1 дает моном $p(M\pi)$.

Таким образом, $(D + v_1)(p(\pi)) = \sum_{\pi'} p(\pi')$, где суммирование ведется по разбиениям π' , получающимся из разбиения π добавлением элемента $n+1$ всеми возможными способами. Суммируя по π и учитывая утверждение 1, приходим к соотношению (6). Это уравнение можно переписать в виде $Y_{n+1} = e^{-v} D e^v(Y_n)$, откуда следует, что $Y_n = e^{-v} D^n(e^v)$. Для экспоненциальной производящей функции справедлива формула

$$\sum_{n=0}^{\infty} Y_n \frac{z^n}{n!} = e^{-v} \sum_{n=0}^{\infty} D^n(e^v) \frac{z^n}{n!} = e^{v(x+z)-v(x)},$$

а разложение $v(x+z)$ в ряд Тейлора по z приводит к равенству (7). Утверждение доказано.

ПРИМЕР. Выпишем несколько многочленов Белла Y_n (скобки группируют члены одинаковой степени):

$$\begin{aligned} Y_0 &= 1, \\ Y_1 &= v_1, \\ Y_2 &= v_2 + v_1^2, \\ Y_3 &= v_3 + 3v_1v_2 + v_1^3, \\ Y_4 &= v_4 + (4v_1v_3 + 3v_2^2) + 6v_1^2v_2 + v_1^4, \\ Y_5 &= v_5 + (5v_1v_4 + 10v_2v_3) + (10v_1^2v_3 + 15v_1v_2^2) + 10v_1^3v_2 + v_1^5. \end{aligned}$$

Суммы членов k -й степени, называемые частными многочленами Белла $Y_{n,k}$, фигурируют в формуле Фаа ди Бруно для n -й производной сложной функции (см. статью [11]):

$$D^n(f(v)) = f'(v)Y_{n,1} + f''(v)Y_{n,2} + \dots + f^{(n)}(v)Y_{n,n}. \quad (8)$$

Суммируя коэффициенты в $Y_{n,k}$, что равносильно отождествлению всех переменных v_l , мы забываем про размеры блоков и рассматриваем только их число в данном разбиении. В результате появляются многочлены Белла–Тушара от одной переменной:

$$B_n(v) = Y_n(v, \dots, v) = \sum_{k=0}^n \{n \atop k\} v^k,$$

где коэффициент при v^k есть *число Стирлинга второго рода*, равное числу разбиений $[n]$ на k блоков (см. электронную энциклопедию [12], последовательность A048993). По определению $\{n \atop 0\} = 0$ при $n > 0$ и $\{0 \atop 0\} = 1$ в соответствии с соглашением, что $\Pi_{0,0} = \{\emptyset\}$. При подстановке $v_l = v$ из рекуррентного соотношения (6) получаем выражение

$$B_0(v) = 1, \quad B_{n+1}(v) = (v\partial_v + v)(B_n(v)) \iff \{n+1 \atop k\} = \{n \atop k-1\} + k\{n \atop k\},$$

а производящая функция (7) принимает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(v) \frac{z^n}{n!} = e^{v(e^z - 1)}.$$

Общее число разбиений n -элементного множества называется *числом Белла* или *экспоненциальным числом* (см. [12], A000110) и определяется формулами

$$B_n = B_n(1) = Y_n(1, \dots, 1) = \sum_{k=0}^n \{n \atop k\}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!} = e^{e^z - 1}.$$

Несколько первых чисел Стирлинга второго рода и чисел Белла приведены в табл. 1.

2.3. Потенциальная иерархия Бюргера. Напомним понятие обобщенных симметрий из теории интегрируемых уравнений. Пусть $v_{,t} = \partial_t(v)$ и, как раньше, $v_i = D^i(v)$ обозначают производные по выделенной переменной x . Эволюционное уравнение

$$v_{,t} = f(v_0, \dots, v_m)$$

ТАБЛИЦА 1. Числа Стирлинга второго рода $\{n_k\} = |\Pi_{n,k}|$; суммы по строкам дают числа Белла $B_n = |\Pi_n|$.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	B_n
0	1								1
1	0	1							1
2	0	1	1						2
3	0	1	3	1					5
4	0	1	7	6	1				15
5	0	1	15	25	10	1			52
6	0	1	31	90	65	15	1		203
7	0	1	63	301	350	140	21	1	877

допускает симметрию $v_\tau = g(v_0, \dots, v_n)$ (классическую при $n \leq 1$, обобщенную, или высшую, при $n > 1$), если соответствующие потоки коммутируют, т. е. выполняется равенство

$$f_*(g) = g_*(f),$$

где f_* – дифференциальный оператор:

$$f_* = \partial_{v_0}(f) + \dots + \partial_{v_m}(f)D^m.$$

Уравнение называется интегрируемым, если оно допускает последовательность (или иерархию) симметрий сколь угодно высокого порядка. При этом типична ситуация, когда высшие симметрии коммутируют и друг с другом. Таким свойством коммутативности обладает потенциальная иерархия Бюргерса

$$v_{,t_n} = Y_n(v_1, \dots, v_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Проще всего получить данное свойство из эквивалентности иерархии Бюргерса и линейной иерархии

$$\psi_{,t_n} = \psi_n, \quad (10)$$

а именно, в результате замены $\psi = e^v$ возникают следующие равенства:

$$v_{,t_n} = \psi^{-1}D^n(\psi) = e^{-v}D^n(e^v) = (D + v_1)^n(1) = Y_n(v_1, \dots, v_n).$$

Попарная коммутативность потоков (10) очевидна: $D_n(\psi_m) = D_m(\psi_n)$, и несложно доказать, что это свойство сохраняется при точечных заменах переменных (см., например, книгу [13]).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Вообще говоря, в теории интегрируемых систем естественно считать эквивалентными уравнения, связанные точечными или контактными преобразованиями, а также некоторыми необратимыми дифференциальными подстановками, поскольку эти замены не нарушают таких свойств, как существование высших симметрий, законов сохранения, лаговых пар и т. п. Комбинаторная интерпретация, однако, не имеет такого инвариантного характера. Напротив, мы видим, что содержательная комбинаторика может возникнуть буквально из ниоткуда в результате простой замены переменных в уравнениях (9) и (10). Дальнейшие примеры такого рода приведены в п. 3.2, 4.2. Таким образом, комбинаторика привязана к конкретному виду иерархии.

Рис. 2. Иллюстрация к доказательству тождества (12).

Коммутативность следует также из тождества (12), приведенного ниже, совпадающего с рекуррентным соотношением (6) при $m = 1$, $Y_1 = v_1$, $(Y_1)_* = D$. Общий случай легко доказать, применяя индукцию по m , но вместо этого мы обобщим комбинаторное доказательство формулы (6). Предварительно введем следующее обозначение.

Стыковой разбиений $\pi \vdash [n]$, $\rho \vdash [m]$ называется разбиение

$$\pi|_r = \pi \cup (\rho + n) \vdash [m + n], \quad (11)$$

где $\rho + n$ – разбиение $[n + 1, n + m]$, полученное из ρ добавлением n ко всем элементам. (Отметим, что в языке *Mathematica* принято соглашение, что при сложении со списком скаляр прибавляется к каждой компоненте: $(a_1, \dots, a_k) + b = (a_1 + b, \dots, a_k + b)$.)

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Многочлены Белла удовлетворяют тождеству*

$$Y_{m+n} = (Y_m)_*(Y_n) + Y_m Y_n. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\pi \vdash [n]$, $\rho \vdash [m]$. Построим следующее разбиение: $\sigma = \pi|_r$ (см. рис. 2а). Для соответствующих мономов (3) имеем равенство $p(\sigma) = p(\pi)p(\rho)$. Далее, рассмотрим те разбиения, которые получаются из σ удалением одного из блоков $\rho + n$ размера l и приписыванием его элементов к блокам π всеми возможными способами (одно из таких разбиений показано на рис. 2б). Сумма соответствующих мономов равна $D^l(p(\pi))\partial_{v_l}(p(\rho))$.

Наоборот, для заданного разбиения $\sigma \vdash [m + n]$ рассмотрим блоки, минимальный элемент которых не превосходит n . Пересечения этих блоков с $[n]$ однозначно определяют разбиение π , а блок, сформированный из их остатков, и оставшиеся блоки σ порождают разбиение $\rho + n$. Таким образом, указанные операции позволяют получить все разбиения Π_{m+n} по одному разу, когда π и ρ пробегает множества Π_n и Π_m соответственно. Суммирование мономов дает равенство

$$\sum_{\sigma \in \Pi_{m+n}} p(\sigma) = \sum_{\pi \in \Pi_n} \sum_{\rho \in \Pi_m} \left(p(\pi)p(\rho) + \sum_l D^l(p(\pi))\partial_{v_l}(p(\rho)) \right),$$

что и требуется. Утверждение доказано.

2.4. Иерархия Бюргерса. Так как правые части уравнений (9) не содержат v , можно сделать подстановку $u = u_0 = v_1$. Это приводит к иерархии Бюргерса

$$u_{,t_n} = D(Y_n(u_0, \dots, u_{n-1})), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (13)$$

однородной относительно веса $w(u_j) = j + 1$. Несколько первых уравнений имеют вид

$$\begin{aligned} u_{,t_1} &= u_1, \\ u_{,t_2} &= u_2 + 2uu_1, \\ u_{,t_3} &= u_3 + (3uu_2 + 3u_1^2) + 3u^2u_1, \\ u_{,t_4} &= u_4 + (4uu_3 + 10u_1u_2) + (6u^2u_2 + 12uu_1^2) + 4u^3u_1, \\ u_{,t_5} &= u_5 + (5uu_4 + 15u_1u_3 + 10u_2^2) + (10u^2u_3 + 50uu_1u_2 + 15u_1^3) + \\ &\quad + (10u^3u_2 + 30u^2u_1^2) + 5u^4u_1. \end{aligned}$$

Какую комбинаторную интерпретацию имеют коэффициенты в этом случае? Дифференцированию в формуле (13) отвечает поочередное добавление элемента к блокам разбиений Π_n . Так как новый блок мы здесь не добавляем, рассматриваемые разбиения строятся еще и в п. 2.2, но на последнем шаге не используется операция M . В результате возникают не все разбиения Π_{n+1} , а только те, в которых элемент $n + 1$ не образует блок из одного элемента. Например, для $n = 3$ имеем

$$\begin{array}{ccccccc} u_2 + 3uu_1 + u^3 & \xrightarrow{D} & u_3 + 3uu_2 + 3u_1^2 + 3u^2u_1 + 0u^4 \\ 123 & 1|23 & 1|2|3 & 1234 & 1|234 & 12|34 & 1|2|34 \\ & & & & & & \cancel{1|2|3|4} \\ & & & & & & \cancel{123|4} \\ & & & & & & 13|24 \\ & & & & & & \cancel{1|23|4} \\ & & & & & & 124|3 \\ & & & & & & 14|23 \\ & & & & & & 1|24|3 \\ & & & & & & \cancel{12|3|4} \\ & & & & & & \cancel{13|2|4} \\ & & & & & & 14|2|3 \end{array} .$$

Перенумерация позволяет заменить элемент $n + 1$ любым другим, и мы приходим к следующему утверждению.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Коэффициент при мономе $u_0^{k_0} \dots u_r^{k_r}$ в иерархии Бюргерса равен числу разбиений множества $[k_0 + 2k_1 + \dots + (r + 1)k_r]$ на k_0 блоков с 1 элементом, $\dots$, k_r блоков с $r + 1$ элементом при дополнительном ограничении, что выделенный элемент множества не является синглетом.

Полагая все переменные равными единице, находим общее число разбиений $[n + 1]$, в которых выделенный элемент не является синглетом:

$$\begin{aligned} D(Y_n(u_0, \dots, u_{n-1}))|_{u_j=1} &= B'_n(1) = \\ &= \sum_{k=0}^n k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \sum_{k=0}^{n+1} \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\} - \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = B_{n+1} - B_n, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Эти числа образуют последовательность

$$0, 1, 3, 10, 37, 151, 674, 3263, 17007, 94828, 562595, \dots$$

Согласно энциклопедии [12] (см. последовательность A005493) она определяется так же, как общее число блоков во всех разбиениях $[n]$. Действительно, рассматриваемые разбиения $[n+1]$ получаются из разбиений $[n]$ наращиванием одного из блоков, и эта операция применяется ровно столько раз, сколько имеется блоков.

3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НАТУРАЛЬНОГО РОСТА

3.1. Статистика. Пусть T_n – множество целочисленных последовательностей $a = (a_1, \dots, a_n)$, удовлетворяющих условию *натурального роста* $1 \leq a_i \leq i$. Последовательности a можно сопоставить верхнетреугольную матрицу размера $n \times n$ с одной единицей в каждом столбце и остальными элементами, равными 0 (см. рис. 3). Очевидно, что $T_n = [1] \times [2] \times \dots \times [n]$, т. е. это множество устроено проще множества R_n последовательностей ограниченного роста (1). В частности, $|T_n| = n!$, а не числам Белла B_n (как для множества R_n). Тем не менее и для таких последовательностей можно определить вполне содержательную производящую функцию.

Для каждой последовательности $a \in T_n$ подсчитаем число вхождений в нее чисел от 1 до n и сопоставим ей моном

$$p(a) = u_{|\{i: a_i=1\}|} \dots u_{|\{i: a_i=n\}|}. \quad (14)$$

Суммируя по всем последовательностям, определим многочлены

$$h_n(u_0, \dots, u_n) = \sum_{a \in T_n} \prod_{j=1}^n u_{|\{i: a_i=j\}|} \quad (15)$$

аналогично определению многочленов Белла (4) для последовательностей ограниченного роста. В обоих случаях определение мономов связано с подсчетом числа элементов для множеств уровня, которыми служат строки верхнетреугольной матрицы или блоки разбиения. Отметим, что вместо подсчета по строкам единицы можно подсчитывать по диагоналям матрицы, что дает моном $\bar{p}(a) = \prod_{j=1}^n u_{|\{i: a_i=i-j+1\}|}$. Вообще говоря, $\bar{p}(a) \neq p(a)$, но тем не менее суммирование по всем a приводит к одному и тому же результату. Действительно, если записать в обратном порядке часть каждого столбца, начиная с первого элемента и заканчивая диагональным, то возникнет матрица того же типа, причем это преобразование взаимно однозначно и переводит строки в диагонали. Для последовательностей это преобразование имеет вид $a \rightarrow (2, \dots, n+1) - a$.

При выводе рекуррентного соотношения для h_n предположим, как и раньше, что $u = u_0 = u(x)$, $D = \partial_x$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Многочлены h_n от переменных $u_l = D^l(u)$ подчиняются рекуррентному соотношению

$$h_1 = u_1, \quad h_{n+1} = D(uh_n), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (16)$$

т. е. $h_n = (Du)^n(1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем интерпретировать последовательность a как распределение нумерованных шаров по нумерованным ящикам, возможно, пустым, причем i -й шар может находиться только в первых i ящиках. Каждому ящику с l шарами

Рис. 3. Верхнетреугольная матрица, соответствующая последовательности $a = (1, 2, 1, 4, 2, 5)$. Распределение по строкам дает моном $p(a) = u^2 u_1^2 u_2^2$, по диагоналям – моном $\bar{p}(a) = u^2 u_1^3 u_3$.

отвечает переменная u_l , их произведение и есть моном (14). Порождающие операции для T_n крайне просты: переход к T_{n+1} заключается в приписывании произвольного числа $a_{n+1} \in [n+1]$. Пусть $d_j a = (a_1, \dots, a_n, j)$, $j = 1, \dots, n+1$. Эти операции интерпретируются следующим образом: сначала добавляется пустой ящик с номером $n+1$, при этом моном $p(a)$ умножается на $u = u_0$; затем шар номер $n+1$ помещается в ящик номер j , при этом переменная u_l , отвечающая этому ящику, заменяется на u_{l+1} . В результате $p(a)$ переходит в сумму мономов по всем последовательностям a' , у которых первые n элементов совпадают с a :

$$\sum_{a'} p(a') = \sum_{j=1}^{n+1} p(d_j a) = \sum_{l=0}^n u_{l+1} \partial_{u_l} (u p(a)) = D(u p(a)).$$

Суммирование по $a \in T_n$ завершает доказательство.

ПРИМЕР. Выпишем несколько первых многочленов h_n :

$$\begin{aligned} h_1 &= u_1, \\ h_2 &= u u_2 + u_1^2, \\ h_3 &= u^2 u_3 + 4 u u_1 u_2 + u_1^3, \\ h_4 &= u^3 u_4 + u^2 (7 u_1 u_3 + 4 u_2^2) + 11 u u_1^2 u_2 + u_1^4, \\ h_5 &= u^4 u_5 + u^3 (11 u_1 u_4 + 15 u_2 u_3) + u^2 (32 u_1^2 u_3 + 34 u_1 u_2^2) + 26 u u_1^3 u_2 + u_1^5. \end{aligned}$$

Соответствующие им числа Эйлера $\langle n \rangle_k$ приведены в табл. 2.

В отличие от многочленов Белла многочлены h_n однородны не только по весу $w(u_l) = l$, но и по степени. Сгруппируем в них члены по степеням выделенной переменной $u = u_0$. Положим остальные переменные равными v и обозначим $h_n(u, v, \dots, v) = v E_n(u, v)$, что дает однородные многочлены от двух переменных

$$E_n(u, v) = \sum_{k=1}^n \langle n \rangle_k u^{n-k} v^{k-1} = u^{n-1} + \dots + v^{n-1},$$

где число Эйлера $\langle n \rangle_k$ равно числу последовательностей из T_n , принимающих k различных значений (см. [12], A008292). Очевидно, что сумма всех коэффициентов равна $E_n(1, 1) = |T_n| = n!$.

ТАБЛИЦА 2. Числа Эйлера $\langle n \rangle_k$.

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2	1	1					
3	1	4	1				
4	1	11	11	1			
5	1	26	66	26	1		
6	1	57	302	302	57	1	
7	1	120	1191	2416	1191	120	1

При указанной подстановке оператор D заменяется на оператор $v(\partial_u + \partial_v)$ и рекуррентное соотношение (16) принимает вид

$$E_1 = 1, \quad E_{n+1} = (\partial_u + \partial_v)(uvE_n), \quad n = 1, 2, \dots,$$

откуда следуют свойство симметрии и рекуррентное соотношение для чисел Эйлера:

$$\langle n \rangle_k = \langle n+1-k \rangle, \quad \langle n \rangle_k = (n+1-k)\langle n-1 \rangle_{k-1} + k\langle n-1 \rangle_k.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Следует отметить, что для чисел Эйлера существуют и другие интерпретации, связанные с перестановками из n элементов. В частности, $\langle n \rangle_k$ равно также числу перестановок $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in S_n$ с $k-1$ спуском (так называются позиции i , в которых $\sigma_i > \sigma_{i+1}$) и числу перестановок с $k-1$ превышением (т.е. такими позициями i , что $\sigma_i > i$). Вообще, перестановки допускают целый ряд комбинаторных интерпретаций и способов записи, что приводит к большому разнообразию ассоциированных статистик (см., например, книги [14], [15]). Последовательности натурального роста также возникают в теории перестановок в виде векторов инверсий и кодов Лемера. Напомним, что вектор инверсий – это последовательность $b = (b_1, \dots, b_n)$ такая, что b_i равно числу элементов σ , находящихся левее i и больших, чем i , т.е. $b_i = |\{j: j < (\sigma^{-1})_i \wedge \sigma_j > i\}|$. Очевидно, что $b_i \in [0, n-i]$, поэтому, добавляя 1 к компонентам вектора инверсий и записывая их в обратном порядке, мы получим последовательность из T_n . Это отображение $S_n \rightarrow T_n$ является биекцией (см., например, книги [7], [15]).

3.2. Иерархия уравнения $u_t = u^2 u_2$. Многочлены h_n с точностью до некоторых обозначений возникают при вычислении производных обратной функции подобно тому, как многочлены Белла возникают в формуле для производных сложной функции (8). Действительно, пусть $u = 1/D(v(x))$, $D = d/dx$, тогда

$$\frac{d^n x}{dv^n} = (uD)^n(x) = u(Du)^{n-1}(1) = uh_{n-1}(u, \dots, u_{n-1})$$

(ср. с определением h_n в энциклопедии [12], последовательность A145271). По существу эта формула используется при применении преобразования типа годографа в линейной иерархии (10), которую мы запишем в виде

$$\partial_{\tilde{t}_n}(\tilde{v}) = \partial_{\tilde{x}}^n(\tilde{v}).$$

Сделаем замену $v = \tilde{x}$, $x = \tilde{v}$, $t_n = \tilde{t}_n$. Тогда производные пересчитываются по правилу

$$\partial_{\tilde{x}} = \frac{1}{v_1} D, \quad \partial_{\tilde{t}_n} = \partial_{t_n} - \frac{v_{,t_n}}{v_1} D, \quad D = \partial_x, \quad v_1 = D(v)$$

и уравнения иерархии принимают вид $v_{,t_n} = -(D/v_1)^{n-1}(1)$. Дальнейшая дифференциальная подстановка $u = 1/v_1$ приводит к уравнениям

$$u_{,t_n} = u^2 D(Du)^{n-1}(1) = u^2 D(h_{n-1}(u, \dots, u_{n-1})), \quad n = 2, 3, \dots, \quad (17)$$

в частности, первые два потока имеют вид

$$u_{,t_2} = u^2 u_2, \quad u_{,t_3} = u^3 u_3 + 3u^2 u_1 u_2$$

(обсуждение этого примера можно найти в книге [13]).

Как и в п. 2.3, коммутативность уравнений (17) следует из их связи с уравнениями (10), но может быть и непосредственно доказана при помощи тождества

$$h_{m+n+1} = (h_m)_* u^2 D(h_n) + D(u h_m h_n),$$

которое легко получить индукцией по m . Было бы интересно установить его комбинаторную интерпретацию, как это сделано в утверждении 3.

4. РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ ТИПА B

4.1. Порождающие операции и статистика. Разбиения типа B [16] (см. также работы [17]–[19]) возникают при учете симметрии отражения на рассматриваемом множестве.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Разбиение π множества $\{-n, \dots, n\}$ называется разбиением типа B , если:

- 1) $\pi = -\pi$, т.е. для каждого блока $\beta \in \pi$ также имеем $-\beta \in \pi$;
- 2) в π есть лишь один блок π_0 (он называется 0-блоком) такой, что $\pi_0 = -\pi_0$.

Все такие разбиения обозначаются Π_n^B , разбиения с k блочными парами обозначаются $\Pi_{n,k}^B$, $0 \leq k \leq n$. Каноническая запись разбиения типа B определяется следующим образом: из 0-блока удалены отрицательные элементы; элементы блоков упорядочены по абсолютной величине; из блочной пары оставлен блок с положительным первым элементом; блоки упорядочены по возрастанию первых элементов. Кроме того, вместо $-j$ удобнее писать $\bar{j}$. Например, разбиение

$$\{\{-5, -3\}, \{-1, 2\}, \{-4, 0, 4\}, \{-2, 1\}, \{3, 5\}\}$$

записывается как $04|1\bar{2}|35$. Графическое представление приведено на рис. 4.

Рис. 4. Полное представление разбиения типа B . Блоки упорядочены сверху вниз по возрастанию элементов, минимальных по абсолютной величине (а). Представление канонической записи. Отрицательные элементы помечены знаком ∇ , положительные – знаком Δ . Порождающие операции добавляют элемент на одну из вакансий, отмеченных пустыми треугольниками Δ или ∇ . Рядом с блоками выписаны соответствующие мономы (18) (б).

Заметим, что удаление элементов $\pm n$ из любого разбиения Π_n^B приводит к разбиению из Π_{n-1}^B . Следовательно, разбиение Π_n^B получается из Π_{n-1}^B добавлением $\pm n$ всеми возможными способами, которые перечислены ниже:

- $d_0: \Pi_{n-1,k}^B \rightarrow \Pi_{n,k}^B$ – добавление обоих элементов $\pm n$ в 0-блок,
- $d_j: \Pi_{n-1,k}^B \rightarrow \Pi_{n,k}^B$ – добавление $\pm n$ в блоки $\pm \pi_j$, $j = 1, \dots, k$,
- $\bar{d}_j: \Pi_{n-1,k}^B \rightarrow \Pi_{n,k}^B$ – добавление $\pm n$ в блоки $\mp \pi_j$, $j = 1, \dots, k$,
- $M: \Pi_{n-1,k}^B \rightarrow \Pi_{n,k+1}^B$ – добавление новой блочной пары $\{-n\}, \{n\}$.

Начиная с тривиального разбиения множества $\{0\}$, с помощью этих операций можно породить единственным образом любое разбиение типа B .

Определим отображение p из Π_n^B в множество мономов от переменных u_j . Для блока β обозначим $\langle \beta \rangle$ – число его положительных элементов:

$$\langle \beta \rangle = |\{i \in \beta: i > 0\}|.$$

Ясно, что число отрицательных элементов в блоке равно $\langle -\beta \rangle$. Пусть $\pi \in \Pi_{n,k}^B$ состоит из 0-блока π_0 и блочных пар $\pi_1, -\pi_1, \dots, \pi_k, -\pi_k$, причем в блоках π_j наименьший по модулю элемент положителен. Такому разбиению сопоставим моном степени $2k + 1$:

$$p(\pi) = u_{\langle \pi_0 \rangle} u_{\langle \pi_1 \rangle - 1} u_{\langle -\pi_1 \rangle} \dots u_{\langle \pi_k \rangle - 1} u_{\langle -\pi_k \rangle}, \quad (18)$$

а всем разбиениям Π_n^B сопоставим многочлен

$$a_n(u_0, u_1, \dots, u_n) = \sum_{\pi \in \Pi_n^B} u_{\langle \pi_0 \rangle} \prod_{j=1}^{(|\pi|-1)/2} u_{\langle \pi_j \rangle - 1} u_{\langle -\pi_j \rangle}, \quad (19)$$

который и служит $\mathbb{Z}_2$ -аналогом многочлена Белла Y_n . Многочлены (19) однородны относительно веса $w(u_j) = 2j + 1$. В качестве примера перечислим все разбиения Π_3^B ,

группируя вместе разбиения, отвечающие одному и тому же моному (как обычно, считаем $u = u_0$):

$$a_3 = u_3 + 5u^2u_2 + 8uu_1^2 + 9u^4u_1 + u^7$$

0123	0 123	0 12 $\bar{3}$	0 12 3	0 1 2 3
	0 1 $\bar{2}\bar{3}$	0 1 $\bar{2}$ 3	0 1 $\bar{2}$ 3	
	012 3	01 23	0 13 2	
	013 2	01 2 $\bar{3}$	0 1 $\bar{3}$ 2	
	023 1	02 13	0 23 1	
		02 1 $\bar{3}$	0 2 $\bar{3}$ 1	
		03 12	01 2 3	
		03 1 $\bar{2}$	02 1 3	
			03 1 2	

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Многочлены (19) от переменных $u_i = D^i(u)$, $D = \partial_x$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$a_0 = u, \quad a_{n+1} = (D + u^2)(a_n), \quad n \geq 0. \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть разбиение $\pi \in \Pi_{n-1,k}^B$. Проследим, что происходит с мономом $p(\pi)$ при порождающих преобразованиях d_0 , d_j , $\bar{d}_j$ и M :

d_0 заменяет множитель $u_{\langle \pi_0 \rangle}$ на $u_{\langle \pi_0 \rangle+1}$,

d_j заменяет множитель $u_{\langle \pi_j \rangle-1}$ на $u_{\langle \pi_j \rangle}$,

$\bar{d}_j$ заменяет множитель $u_{\langle -\pi_j \rangle}$ на $u_{\langle -\pi_j \rangle+1}$,

M добавляет два множителя u .

Таким образом, применение всех возможных операций $\pi \rightarrow \pi'$ приводит к замене монома $p(\pi)$ на $\sum_{\pi'} p(\pi') = (D + u^2)(p(\pi))$. Суммирование по π завершает доказательство.

Огрубим статистику, объединяя члены одной степени, что приводит к многочленам

$$a_n(u, \dots, u) = (u\partial_u + u^2)^n(u).$$

Их коэффициенты при u^{2k+1} соответствуют числу разбиений $\Pi_{n,k}^B$, т.е. являются аналогами чисел Стирлинга второго рода для разбиений типа B (см. [12], A039755). Полные суммы коэффициентов $a_n(1, \dots, 1)$ соответствуют числу разбиений Π_n^B и образуют последовательность B -аналогов чисел Белла, или чисел Доулинга (см. [12], A007405).

ПРИМЕР. Выпишем несколько первых многочленов a_n :

$$a_0 = u,$$

$$a_1 = u_1 + u^3,$$

$$a_2 = u_2 + 4u^2u_1 + u^5,$$

$$a_3 = u_3 + (5u^2u_2 + 8uu_1^2) + 9u^4u_1 + u^7,$$

$$a_4 = u_4 + (6u^2u_3 + 26uu_1u_2 + 8u_1^3) + (14u^4u_2 + 44u^3u_1^2) + 16u^6u_1 + u^9,$$

$$a_5 = u_5 + (7u^2u_4 + 38uu_1u_3 + 26uu_2^2 + 50u_1^2u_2) + (20u^4u_3 + 170u^3u_1u_2 + 140u^2u_1^3) + (30u^6u_2 + 140u^5u_1^2) + 25u^8u_1 + u^{11}.$$

ТАБЛИЦА 3. B -аналоги чисел Стирлинга второго рода $|\Pi_{n,k}^B|$. Суммы по строкам равны числам Доулинга $|\Pi_n^B|$.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	$ \Pi_n^B $
0	1								1
1	1	1							2
2	1	4	1						6
3	1	13	9	1					24
4	1	40	58	16	1				116
5	1	121	330	170	25	1			648
6	1	364	1771	1520	395	36	1		4088
7	1	1093	9219	12411	5075	791	49	1	28640

Скобки группируют члены одинаковой степени. B -аналоги чисел Стирлинга второго рода $|\Pi_{n,k}^B|$ и числа Доулинга $|\Pi_n^B|$ для этих многочленов приведены в табл. 3.

4.2. Иерархия Ибрагимова–Шабата. Диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 \psi_{,t_3} = \psi_3 & & u_{,t_3} = u_3 + 3u^2u_2 + 9uu_1^2 + 3u^4u_1 \\
 \updownarrow \psi^2 = s & & \updownarrow u^2 = v \\
 s_{,t_3} = D\left(s_2 - \frac{3s_1^2}{4s}\right) & & v_{,t_3} = D\left(v_2 - \frac{3v_1^2}{4v} + 3vv_1 + v^3\right) \\
 \uparrow s = q_1 & & \uparrow v = w_1 \\
 q_{,t_3} = q_3 - \frac{3q_2^2}{4q_1} & \xleftrightarrow{q=e^{2w}} & w_{,t_3} = w_3 - \frac{3w_2^2}{4w_1} + 3w_1w_2 + w_1^3
 \end{array}$$

описывает цепочку точечных замен и подстановок типа введения потенциала, линеаризующих уравнение Ибрагимова–Шабата [20]. Вся иерархия состоит из уравнений, связанных этими преобразованиями с уравнениями $\psi_{,t_{2m+1}} = \psi_{2m+1}$. Отсутствие четных потоков объясняется тем, что, хотя замены выглядят достаточно безобидно, они частично нарушают алгебру симметрий. Для $\partial_{t_{2m+1}}$ замена $\psi^2 = s$ приводит к уравнению с полной производной в правой части:

$$s_{,t_{2m+1}} = 2\psi\psi_{2m+1} = D(2\psi\psi_{2m} - 2\psi_1\psi_{2m-1} + 2\psi_2\psi_{2m-2} + \cdots \pm \psi_m^2). \quad (21)$$

Однако в аналогичной формуле для $s_{,t_{2m}}$ слагаемое ψ_m^2 остается за знаком производной, т.е. $s_{,t_{2m}} \notin \text{Im } D$, поэтому дальнейшая подстановка $s = q_1$ выводит из класса эволюционных уравнений. Структура нечетных потоков описывается следующим утверждением.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Введем обозначения

$$D_t = \partial_{t_1} + z^2\partial_{t_3} + z^4\partial_{t_5} + \cdots, \quad A = A(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots, \quad \bar{A} = A(-z),$$

тогда иерархия Ибрагимова–Шабата эквивалентна уравнениям

$$D_t(u) = \frac{1}{2u}D(A\bar{A}) = \frac{1}{2z}(A - \bar{A}) - uA\bar{A}, \quad (22)$$

$$z(D + u^2)(A) = A - u, \quad (23)$$

причем коэффициенты a_n совпадают с многочленами (20).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим производящую функцию

$$\Psi = \psi + \psi_1 z + \psi_2 z^2 + \dots$$

и определим A равенством $\Psi = \sqrt{2}e^w A$. Замена переменных

$$\psi = \sqrt{q_1} = \sqrt{2e^{2w}w_1} = \sqrt{2}e^w u$$

переводит тождество $zD(\Psi) = \Psi - \psi$ в уравнение (23), которое в точности эквивалентно рекуррентным соотношениям (20).

Далее, пусть $\bar{\Psi} = \Psi(-z)$, тогда имеем (ср. с (21))

$$\begin{aligned} D(\Psi\bar{\Psi}) &= z^{-1}(\Psi - \psi)\bar{\Psi} - z^{-1}\Psi(\bar{\Psi} - \psi) = \\ &= z^{-1}\psi(\Psi - \bar{\Psi}) = 2\psi(\psi_1 + \psi_3 z^2 + \dots) = 2\psi D_t(\psi) = D_t(s). \end{aligned}$$

Применяя операцию D^{-1} , получаем, что $\Psi\bar{\Psi} = D_t(q) = 2e^{2w}D_t(w)$, откуда следует соотношение

$$2uD_t(u) = D_t(v) = DD_t(w) = \frac{1}{2}D(e^{-2w}\Psi\bar{\Psi}) = D(A\bar{A}).$$

Второе равенство в (22) следует из него при замене производных в силу выражения (23). Утверждение доказано.

5. НЕПЕРЕКРЫВАЮЩИЕСЯ РАЗБИЕНИЯ

5.1. Порождающие операции. Для определения неперекрывающихся разбиений [21] используется отношение порядка на множестве $[n]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Блоки α и β разбиения $\pi \vdash [n]$ перекрываются, если

$$\min \alpha < \min \beta < \max \alpha < \max \beta.$$

Разбиение называется *неперекрывающимся*, если в нем не перекрывается ни одна пара блоков. Аналогично, носители любых двух блоков либо не пересекаются, либо содержатся один в другом.

Например, разбиение на рис. 1 не удовлетворяет этому требованию, поскольку в нем перекрываются блоки π_1, π_3 (а также π_2, π_3 , а остальные пары не перекрываются).

Все неперекрывающиеся разбиения $[n]$ обозначаются Π_n^* , а те из них, которые содержат k мультиплетов (и произвольное число синглетов), обозначаются $\Pi_{n,k}^*$, $0 \leq k \leq n/2$. Естественно считать $\emptyset$ неперекрывающимся разбиением, т. е. $\Pi_{0,0}^* = \Pi_{0,0}^* = \{\emptyset\}$. Кроме того, пусть $\tilde{\Pi}_n^*$ обозначает множество неперекрывающихся разбиений $[n]$ без синглетов.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В работах [21], [22] $S_{n,k}^*$ обозначает число неперекрывающихся разбиений $[n]$ с k блоками произвольного размера. Подсчет только мультиплетов оказывается более удобным при описанном далее способе порождения разбиений. При этом можно мысленно объединять все синглеты разбиения в один выделенный блок (возможно, пустой). Отметим, что это устанавливает биекцию между Π_n^* и подмножеством $\tilde{\Pi}_{n+2}^*$, состоящим из разбиений с элементами 1 и $n+2$ в одном блоке.

Рис. 5. Графическое представление операции d_j для неперекрывающихся разбиений.

Порождающие операции для неперекрывающихся разбиений устроены сложнее, чем в предыдущих разделах. Они включают операции

$$d_j: \Pi_{n,k}^* \rightarrow \Pi_{n+1,k}^*, \quad 0 \leq j \leq k, \quad P: \Pi_{n,k}^* \times \Pi_{m,l}^* \rightarrow \Pi_{n+m+2,k+l+1}^*,$$

которые мы сейчас опишем.

Операция d_0 представляет собой добавление к разбиению синглета $\{n+1\}$. Она совпадает с операцией M для разбиений множеств общего вида из п. 2.2, но мы используем другое обозначение, интерпретируя d_0 как добавление элемента в сборную команду синглетов. Отметим, что $d_0 \emptyset = \{\{1\}\}$.

Операция d_j , $1 \leq j \leq k$, представляет собой добавление элемента $n+1$ к мультиплетам. Пусть $\mu_1, \dots, \mu_k$ — это все мультиплеты в $\pi \in \Pi_{n,k}^*$ в порядке возрастания минимальных элементов. Если просто приписать элемент $n+1$ к μ_j , то это приведет к перекрытию с мультиплетом, носители которых содержат μ_j (см. верхнюю часть рис. 5). Пусть это мультиплеты с номерами $j_1 < \dots < j_s = j$. Разобьем их на левые и правые части относительно $m = \max \mu_{j_r}$:

$$\mu_{j_r}^- = \{i \in \mu_{j_r} : i < m\}, \quad \mu_{j_r}^+ = \{i \in \mu_{j_r} : i \geq m\},$$

и образуем новые мультиплеты, циклически переставляя правые части (см. нижнюю часть рис. 5):

$$\tilde{\mu}_{j_1} = \mu_{j_1}^- \cup \{m, n+1\}, \quad \tilde{\mu}_{j_r} = \mu_{j_r}^- \cup \mu_{j_{r-1}}^+, \quad r = 2, \dots, s.$$

Отметим, что блок $\tilde{\mu}_{j_1}$, в который попадает элемент $n+1$, содержит не меньше трех элементов. Нетрудно видеть, что описанная процедура приводит к блокам, которые не перекрываются ни друг с другом, ни с оставшимися мультиплетом.

Опишем теперь операцию P . Пусть $\pi \in \Pi_{n,k}^*$, $\rho \in \Pi_{m,l}^*$, тогда

$$P(\pi, \rho) = \pi \cup \{\{n+1, m+n+2\}\} \cup (\rho + n+1) \in \Pi_{m+n+2,k+l+1}^*. \quad (24)$$

Эта операция является разновидностью стыковки (11) с окаймлением второго разбиения блоком-дуплетом (см. рис. 6). В частности, $P(\emptyset, \emptyset) = \{\{1, 2\}\}$.

Рис. 6. Графическое представление операции P для неперекрывающихся разбиений.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. Начиная с разбиения $\emptyset$ и применяя все допустимые операции d_j , P , можно породить любое неперекрывающееся разбиение:

$$\Pi_0^* = \{\emptyset\}, \quad \Pi_{n+1}^* = \left(\bigcup_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \bigcup_{j=0}^k d_j \Pi_{n,k}^* \right) \cup \left(\bigcup_{j=0}^{n-1} P(\Pi_j^*, \Pi_{n-1-j}^*) \right), \quad n \geq 0, \quad (25)$$

причем каждое разбиение возникает ровно один раз.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последняя из операций, которые привели к данному разбиению $\pi \in \Pi_{n+1}^*$, определяется по блоку β с элементом $n+1$ следующим образом:

- если $|\beta| = 1$, то $\pi = d_0 \rho$,
- если $|\beta| = 2$, то $\pi = P(\rho, \sigma)$,
- если $|\beta| > 2$, то $\pi = d_j \rho$, где j – максимальный номер мультиплета, носитель которого содержит элемент $m \in \beta$, предшествующий $n+1$.

Во всех случаях разбиения ρ или σ находятся однозначно и имеют меньшее число элементов, что позволяет применить индукцию. Утверждение доказано.

Порождение конкретного разбиения определяется выражением $\varphi(u)$, построенным из формальной переменной u при помощи бинарной операции $P(a, b)$ и операций $d_j a$, $0 \leq j \leq \deg a - 1$, где $\deg a$ равно числу вхождений u в a . Пусть множество Φ_n^* состоит из всех таких выражений, содержащих $n+1$ символов u , d , P , а множество $\Phi_{n,k}^*$ включает те из них, которые содержат $k+1$ символов u . Тогда

$$d_j: \Phi_{n,k}^* \rightarrow \Phi_{n+1,k}^*, \quad 0 \leq j \leq k, \quad P: \Phi_{n,k}^* \times \Phi_{m,l}^* \rightarrow \Phi_{n+m+2,k+l+1}^*.$$

Кроме того, $0 \leq k \leq n/2$, так как число вхождений P в φ всегда на единицу меньше числа вхождений u (т.е. равно $\deg \varphi - 1$). Учитывая утверждение 8 и действие операций на разбиения, имеем следующую биекцию.

СЛЕДСТВИЕ 1. Посредством подстановки $\varphi(u) \mapsto \varphi(\emptyset)$ определяется взаимно однозначное отображение $\Phi_{n,k}^* \rightarrow \Pi_{n,k}^*$ при всех n, k .

Табл. 4 содержит полный список выражений Φ_n^* и отвечающих им разбиений Π_n^* при $n \leq 4$. Отметим, что $\Pi_n^* = \Pi_n$ при $n \leq 3$, а из Π_4 выбрасывается только разбиение 13|24.

Неперекрывающиеся разбиения $\tilde{\Pi}_n^*$ без синглетов строятся по той же схеме, но из набора порождающих операций исключена операция d_0 . Соответствующее множество $\tilde{\Phi}_n^*$ состоит из всех выражений Φ_n^* , в которых нет ни одного вхождения d_0 .

ТАБЛИЦА 4. Множества Φ_n^* , Π_n^* и мономы $p(\varphi)$ при $n \leq 4$.

n	$\varphi(u)$	$\varphi(\emptyset)$	$p(\varphi)$	n	$\varphi(u)$	$\varphi(\emptyset)$	$p(\varphi)$
0	u	$\emptyset$	u	4	$d_0 d_0 d_0 d_0 u$	1 2 3 4	u_4
1	$d_0 u$	1	u_1		$d_0 d_0 P(u, u)$	12 3 4	uu_2
					$d_1 d_0 P(u, u)$	124 3	u_1^2
2	$d_0 d_0 u$ $P(u, u)$	1 2 12	u_2 u^2		$d_0 d_1 P(u, u)$	123 4	u_1^2
					$d_1 d_1 P(u, u)$	1234	uu_2
					$d_0 P(u, d_0 u)$	13 2 4	u_1^2
					$d_1 P(u, d_0 u)$	134 2	uu_2
3	$d_0 d_0 d_0 u$ $d_0 P(u, u)$ $d_1 P(u, u)$ $P(u, d_0 u)$ $P(d_0 u, u)$	1 2 3 12 3 123 13 2 1 23	u_3 uu_1 uu_1 uu_1 uu_1		$d_0 P(d_0 u, u)$	1 23 4	uu_2
					$d_1 P(d_0 u, u)$	1 234	u_1^2
					$P(u, d_0 d_0 u)$	14 2 3	uu_2
					$P(u, P(u, u))$	14 23	u^3
					$P(d_0 u, d_0 u)$	1 24 3	u_1^2
					$P(d_0 d_0 u, u)$	1 2 34	uu_2
					$P(P(u, u), u)$	12 34	u^3

5.2. Статистика. В разделах 2, 4 мы сопоставляли разбиению моном, подсчитывая элементы (или положительные элементы) в блоках и перемножая соответствующие переменные u_i . Для неперекрывающихся разбиений это не приводит к разумному результату, поскольку операции d_j неконтролируемо меняют размеры блоков. В этом случае подходящее определение связано с кодировкой разбиения выражением $\varphi \in \Phi_n^*$. Определим моном $p(\varphi)$ как значение выражения φ , вычисленное по следующим правилам:

1) операция $d_j a$ добавляет единицу к индексу u для $(j+1)$ -го вхождения u в a , если считать слева (как обычно, мы полагаем $u = u_0$);

2) все операции $P(a, b)$ применяются после d_j , и их результатом служат произведения ab .

Суммируя по всем выражениям Φ_n^* , определим многочлены

$$f_n(u, u_1, \dots, u_n) = \sum_{\varphi \in \Phi_n^*} p(\varphi) \quad (26)$$

и рассмотрим производящую функцию

$$f = -\frac{z}{2} + f_0 z^{-1} + \dots + f_{n-1} z^{-n} + \dots \quad (27)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. Многочлены f_n от переменных $u_i = D^i(u)$, $D = \partial_x$ подчиняются рекуррентным соотношениям

$$f_0 = u, \quad f_{n+1} = D(f_n) + \sum_{s=0}^{n-1} f_s f_{n-1-s}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (28)$$

эквивалентным уравнению Риккати

$$D(f) + f^2 = \frac{z^2}{4} - u. \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (28) следует из (25) и тождеств

$$\sum_{j=0}^{\deg \varphi - 1} p(d_j \varphi) = D(p(\varphi)), \quad p(P(\varphi, \phi)) = p(\varphi)p(\phi),$$

где $\varphi \in \Phi_n^*$, $\phi \in \Phi_m^*$. Второе тождество следует из правила 2. Чтобы доказать первое тождество, запишем переменные u_i в мономах в том порядке, в котором они идут после применения операций d_j по правилу 1. Тогда если для выражения $\varphi \in \Phi_{n,k}^*$ соответствующий моном равен $p(\varphi) = u_{i_0} \dots u_{i_k}$, то справедливо равенство $p(d_j \varphi) = u_{i_0} \dots u_{i_{j+1}} \dots u_{i_k}$, $0 \leq j \leq k$, и остается просуммировать по j . Утверждение доказано.

В приведенном доказательстве операция d_j интерпретируется как действие операции дифференцирования D на один из сомножителей по правилу Лейбница. Это дает следующее простое описание: в многочленах f_n коэффициент при любом мономе равен числу способов, которыми можно его получить при помощи умножения и дифференцирования. Например, для монома uu_1 имеется четыре способа (см. табл. 4): сначала умножить u на u и затем применить D к первому или второму сомножителю, или сначала применить D к u и затем умножить результат на u слева или справа.

ПРИМЕР. Выпишем несколько многочленов f_n :

$$\begin{aligned} f_0 &= u, \\ f_1 &= u_1, \\ f_2 &= u_2 + u^2, \\ f_3 &= u_3 + 4uu_1, \\ f_4 &= u_4 + (6uu_2 + 5u_1^2) + 2u^3, \\ f_5 &= u_5 + (8uu_3 + 18u_1u_2) + 16u^2u_1, \\ f_6 &= u_6 + (10uu_4 + 28u_1u_3 + 19u_2^2) + (30u^2u_2 + 50uu_1^2) + 5u^4, \end{aligned}$$

однородных относительно веса $w(u_j) = j + 2$. Соответствующие числа $|\Pi_{n,k}^*|$ приведены в табл. 5.

ТАБЛИЦА 5. Число $|\Pi_{n,k}^*|$ неперекрывающихся разбиений $[n]$ с k мультиплетами. Суммы по строкам дают числа Бесселя $B_n^* = |\Pi_n^*|$, а $\tilde{B}_n^* = |\tilde{\Pi}_n^*|$.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	B_n^*	$\tilde{B}_n^*$
0	1						1	1
1	1						1	0
2	1	1					2	1
3	1	4					5	1
4	1	11	2				14	3
5	1	26	16				43	7
6	1	57	80	5			143	20
7	1	120	324	64			509	60
8	1	247	1170	490	14		1922	195
9	1	502	3948	2944	256		7651	675
10	1	1013	12776	15403	2730	42	31965	2480

Рассмотрим теперь множество $\tilde{\Pi}_n^*$ неперекрывающихся разбиений без синглетов. Так как в отвечающие им выражения φ не входит d_0 , при вычислении монома $p(\varphi)$ первое вхождение u не дифференцируется, следовательно, $p(\varphi)$ делится на u . Сопоставим рассматриваемым разбиениям многочлен

$$\tilde{f}_n(u, \dots, u_n) = \frac{1}{u} \sum_{\varphi \in \tilde{\Phi}_n^*} p(\varphi).$$

В частности, из табл. 4 легко находим, что

$$\tilde{f}_0 = 1, \quad \tilde{f}_1 = 0, \quad \tilde{f}_2 = u, \quad \tilde{f}_3 = u_1, \quad \tilde{f}_4 = u_2 + 2u^2.$$

Оказывается, существует простая связь между этими многочленами и многочленами для всех неперекрывающихся разбиений.

УТВЕРЖДЕНИЕ 10. *Производящая функция для $\tilde{f}_n$ равна*

$$\tilde{f} = \tilde{f}_0 z^{-1} + \tilde{f}_1 z^{-2} + \dots + \tilde{f}_{n-1} z^{-n} + \dots = \frac{1}{z/2 - f}. \quad (30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Повторяя рассуждения из предыдущего доказательства, получаем, что функция $\tilde{f} = \tilde{f}_0 z^{-1} + \tilde{f}_1 z^{-2} + \dots$ удовлетворяет уравнению

$$D(\tilde{f}) + u\tilde{f}^2 - z\tilde{f} + 1 = 0.$$

Далее все $\tilde{f}_n$ можно найти отсюда однозначно по рекуррентным формулам, которые нетрудно выписать. Замена $f = z/2 - 1/\tilde{f}$ приводит к уравнению (29), причем начальный член f равен $z/2 - 1/(1/z) = -z/2$, откуда и следует, что f совпадает с рядом (27). Утверждение доказано.

Как и в предыдущих разделах, перейдем к огрубленной статистике, суммируя в f_n члены одной степени при подстановке $u_i = u$. Так как $\deg p(\varphi)$ на единицу больше числа мультиплетов в соответствующем разбиении $\varphi(\emptyset)$, коэффициент при u^{k+1} равен мощности множества $\Phi_{n,k}^*$, или, что то же самое, мощности множества $\Pi_{n,k}^*$.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Число $|\Pi_{n,k}^*|$ неперекрывающихся разбиений $[n]$ с k мультиплетами равно коэффициенту при u^{k+1} в многочлене $F_n(u)$ от одной переменной, определенном рекуррентными соотношениями*

$$F_0 = u, \quad F_{n+1} = uF'_n + \sum_{s=0}^{n-1} F_s F_{n-1-s}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (31)$$

Производящая функция $F = -z/2 + \sum_{n \geq 1} F_{n-1} z^{-n}$ удовлетворяет уравнению

$$uF'(u) + F(u)^2 = \frac{z^2}{4} - u. \quad (32)$$

СЛЕДСТВИЕ 3. *Число $|\tilde{\Pi}_{n,k}^*|$ неперекрывающихся разбиений $[n]$ с k мультиплетами и без синглетов равно коэффициенту при u^k в многочлене $\tilde{F}_n(u)$, где*

$$\sum_{n \geq 1} \tilde{F}_{n-1} z^{-n} = \frac{1}{z - \sum_{n \geq 1} F_{n-1} z^{-n}}.$$

Подстановка $u = y^2/4$, $F(u) = y\psi'(y)/(2\psi(y))$ сводит уравнение (32) к уравнению Бесселя

$$y^2\psi''(y) + y\psi'(y) + (y^2 - z^2)\psi(y) = 0$$

с линейно независимыми решениями $\psi = J_{\pm z}(y)$, где J_z – функция Бесселя

$$J_z(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (y/2)^{z+2k}}{k! \Gamma(z+k+1)}.$$

Эта функция также удовлетворяет рекуррентным соотношениям

$$J_{z-1}(y) = J'_z(y) + \frac{z}{y} J_z(y), \quad J_{z+1}(y) - \frac{2z}{y} J_z(y) + J_{z-1}(y) = 0.$$

Производящие функции f , F , $\tilde{f}$, $\tilde{F}$ удовлетворяют соответствующим уравнениям Риккати как формальные асимптотические ряды по параметру z . Учитывая, что $F(u) = -z/2 + 0z^0 + \dots$, получаем асимптотическое разложение

$$\frac{yJ'_z(y)}{2J_z(y)} = -\frac{z}{2} + \frac{yJ_{z-1}(y)}{2J_z(y)} \sim F\left(\frac{y^2}{4}, -z\right), \quad \operatorname{Re} z \rightarrow +\infty. \quad (33)$$

Числа Бесселя $B_n^* = |\Pi_n^*| = F_n(1)$, определяющие число неперекрывающихся разбиений $[n]$, равны полным суммам коэффициентов f_n . Аналогично, 2-ассоциированные числа Бесселя $\tilde{B}_n^* = |\tilde{\Pi}_n^*| = \tilde{F}_n(1)$ определяют число неперекрывающихся разбиений без синглетов. Впервые обе последовательности были определены в статье [21], где было выведено асимптотическое разложение, совпадающее с (33) при подстановке $y = 2$. Однако для его вывода применялась другая комбинаторная техника: вместо описанных выше производящих операций, приводящих к уравнению Риккати, использовались так называемые диаграммы путей [23], приводящие к разложению F в цепную дробь, что эквивалентно трехчленному рекуррентному соотношению для J_z . Отсюда выводится функциональное уравнение для производящей функции $F(1, z)$, что дает рекуррентное соотношение непосредственно для чисел B_n^* [24] (см. также работу [22] и энциклопедию [12], A006789, A099950 по поводу последовательности $\tilde{B}_n^* + \tilde{B}_{n+1}^*$). Это эквивалентно следующему утверждению при исключении $\tilde{B}_n^*$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 11. Последовательности B_n^* , $\tilde{B}_n^*$ связаны рекуррентными соотношениями

$$\tilde{B}_0^* = 1, \quad B_n^* = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \tilde{B}_{n-j}^*, \quad \tilde{B}_{n+1}^* = \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{B}_j^* B_{n-1-j}^*, \quad n \geq 0. \quad (34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение для последовательности $\tilde{B}_{n+1}^*$ вытекает из следствия 3, уравнение для B_n^* получается, если дополнять разбиения без синглетов до нужного размера, вставляя синглеты всеми возможными способами. Утверждение доказано.

Диагональные элементы числового треугольника из табл. 5, т. е. коэффициенты при “бездисперсионных членах” u^{k+1} в f_{2k} образуют последовательность чисел Каталана (см. [12], A000108). Эти мономы отвечают разбиениям, построенным при

помощи только операции P , т. е. состоящим лишь из неперекрывающихся дуплетов, что легко отождествляется с правильными скобочными структурами. Соответственно, замена начального условия в формуле (28) на единицу приводит к рекурсии для прореженных чисел Каталана (см. [12], A126120):

$$c_0 = 1, \quad c_{n+1} = \sum_{s=0}^{n-1} c_s c_{n-1-s} \longrightarrow 1, 0, 1, 0, 2, 0, 5, 0, \dots$$

5.3. Иерархия КдФ. Напомним, что уравнение Риккати (29) играет ключевую роль в теории уравнения КдФ

$$u_{,t_3} = u_3 + 6uu_1,$$

позволяя вычислять одновременно законы сохранения и высшие симметрии [25]. Иерархия КдФ определяется как условия совместности уравнения Шредингера

$$D^2(\psi) = \left(\frac{z^2}{4} - u \right) \psi \quad (35)$$

с уравнениями вида $\psi_{,t_{2n+1}} = G_{2n}D(\psi) - 1/2D(G_{2n})\psi = 0$, где

$$G_{2n} = z^{2n} + 2g_0z^{2n-2} + \dots + 2g_{2n-2}.$$

Прямое вычисление приводит к уравнениям $u_{,t_{2n+1}} = D(g_{2n})$ и рекуррентным соотношениям

$$g_0 = u_0, \quad D(g_{2n+2}) = D^3(g_{2n}) + 4uD(g_{2n}) + 2u_1g_{2n}, \quad n \geq 0. \quad (36)$$

Для производящей функции $g = 1 + 2 \sum_{n \geq 0} g_{2n} z^{-2n-2}$ отсюда следует уравнение

$$2gD^2(g) - D(g)^2 + (4u - z^2)g^2 = -z^2, \quad (37)$$

из которого все g_{2n} можно найти однозначным образом как многочлены, однородные относительно веса $w(u_i) = i + 2$ (если в правой части (37) написать произвольный постоянный ряд по z^{-2} , то однородные потоки заменятся их линейными комбинациями). Легко проверить, что решение уравнения (37) выражается через решение уравнения (29):

$$g = \frac{z}{f(-z) - f(z)}, \quad (38)$$

что эквивалентно соотношениям

$$g_0 = f_0 = u, \quad g_{2n} = f_{2n} + 2 \sum_{s=0}^{n-1} g_{2s} f_{2n-2-2s}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

дополняющим рекуррентные соотношения (28). Уравнение (29) сводится к (35) подстановкой $f = D(\psi)/\psi$, и, таким образом, формула (38) эквивалентна соотношению $g = \text{const } \psi(z)\psi(-z)$. Из равенств

$$f_{,t_{2n+1}} = D(G_{2n}f) - \frac{1}{2}D^2(G_{2n}), \quad f(z) + f(-z) = -D(\log g)$$

следует, что f служит производящей функцией для плотностей законов сохранения, причем плотности f_{2n+1} тривиальны.

Хотя связь между производящими функциями f и g очень проста и напоминает формулу (30), комбинаторная интерпретация для многочленов g_{2n} или рекуррентных соотношений (36) в терминах неперекрывающихся разбиений или других комбинаторных объектов остается неизвестной. Тем не менее для коэффициентов этих многочленов существуют явные, хотя и довольно сложные формулы. Одна из них получена в работе [25] и выражает коэффициент при данном мономе через некоторый многократный интеграл. Формулы из статей [26]–[28] дают выражения для коэффициентов в виде некоторых сложных сумм по разбиениям чисел.

6. НЕДЕЛИМЫЕ РАЗБИЕНИЯ

6.1. Порождающие операции. Неделимые разбиения множеств введены в работе [29] в связи с изучением алгебры симметрических многочленов от некоммутативных переменных (эти разбиения нумеруют некоторый базис генераторов этой алгебры). Как и в случае неперекрывающихся разбиений, определение использует упорядочение рассматриваемого множества.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Разбиение $\pi = \{\pi_1, \dots, \pi_k\} \vdash [n]$ называется *неделимым*, если не существует подмножества его блоков, образующего разбиение множества $[m]$ при $1 \leq m < n$.

Это равносильно тому, что не существует непустых разбиений ρ, σ таких, что справедливо равенство $\pi = \rho | \sigma$, где $|$ – операция стыковки (11). Еще одно эквивалентное определение звучит так: разбиение неделимо, если носители его блоков покрывают весь интервал разбиения:

$$\bigcup_{j=1}^k \text{supp } \pi_j = [1, n]_{\mathbb{R}}. \quad (39)$$

Пусть Π_n^a и $\Pi_{n,k}^a$ обозначают множества всех неделимых разбиений $[n]$ и тех разбиений, которые состоят из k блоков, $k = 1$ при $n = 1$ и $1 \leq k \leq n - 1$ при $n > 1$. Для построения неделимых разбиений рассмотрим операции

$$\begin{aligned} d_j: \Pi_{n,k}^a &\rightarrow \Pi_{n+1,k}^a, & 1 \leq j \leq k, & & M: \Pi_{n,k}^a &\rightarrow \Pi_{n+1,k+1}^a, & n \geq 2, \\ P: \Pi_{n,k}^a \times \Pi_{m,l}^a &\rightarrow \Pi_{m+n,k+l}^a, & m, n \geq 2. \end{aligned}$$

Первые две операции аналогичны операциям (2) с той разницей, что новый элемент добавляется на позицию n , вытесняя старый элемент, находившийся на этой позиции, на позицию $n + 1$ (ср. рис. 1 и рис. 7). Кроме того, операция M применяется лишь при $n > 1$. А именно, сначала в разбиении $\pi = \{\pi_1, \dots, \pi_k\} \vdash [n]$ элемент n заменяется на $n + 1$:

$$\pi' = \{\pi'_1, \dots, \pi'_k\} = \pi|_{n \rightarrow n+1},$$

затем операция d_j добавляет элемент n в блок π'_j (в частности, если блок π_j содержал n , то результатом будет добавление $n + 1$ к этому блоку). Операция M добавляет элемент n как новый синглет:

$$d_j \pi = \{\pi'_1, \dots, \pi'_j \cup \{n\}, \dots, \pi'_k\}, \quad M \pi = \{\pi'_1, \dots, \pi'_k, \{n\}\}, \quad n \geq 2. \quad (40)$$

Рис. 7. Графическое представление операций d_j , M для неделимых разбиений. Пустые кружки ○ отмечают вакансии для нового элемента.

Операция P – это модификация стыковки с перемещением последних элементов разбиений (ср. с формулой (24)). Пусть $\rho \in \Pi_n^a$, $\sigma \in \Pi_m^a$, $m, n \geq 2$. Тогда

$$P(\rho, \sigma) = \rho|_{n \rightarrow m+n-1} \cup (\sigma|_{m \rightarrow m+1} + n - 1). \quad (41)$$

Иначе говоря, сначала стыкуются разбиения, из которых удалены максимальные элементы, а затем удаленные элементы возвращаются в старые блоки на предпоследнюю позицию для блока из первого разбиения и последнюю для блока из второго разбиения соответственно (см. рис. 8).

Рис. 8. Графическое представление операции P для неделимых разбиений.

УТВЕРЖДЕНИЕ 12. Начиная с разбиения $\{\{1\}\}$ и применяя операции (40), (41) всеми возможными способами, можно построить все неделимые разбиения:

$$\begin{aligned} \Pi_1^a &= \{\{\{1\}\}\}, & \Pi_2^a &= d_1 \Pi_1^a = \{\{\{1, 2\}\}\}, \\ \Pi_{n+1}^a &= \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} \bigcup_{j=1}^k d_j \Pi_{n,k}^a \right) \cup M \Pi_n^a \cup \left(\bigcup_{j=2}^{n-1} P(\Pi_j^a, \Pi_{n+1-j}^a) \right), & n &\geq 2, \end{aligned} \quad (42)$$

причем каждое разбиение получается единственным способом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что указанные операции сохраняют свойство неделимости. Заметим, что в разбиении $\pi \in \Pi_n^a$ блок π_j , содержащий элемент n , не является синглетом при $n > 1$, так как иначе разбиение имеет вид $\pi = \rho|_{\{\{1\}\}}$. Поэтому при переходе к разбиению $\pi' = \pi|_{n \rightarrow n+1}$ носитель этого блока увеличивается: $\text{supp } \pi'_j = \text{supp } \pi_j \cup [n, n+1]_{\mathbb{R}}$. При последующем добавлении элемента n носители блоков не уменьшаются, и из выражения (39) следует, что разбиения $d_j \pi$, $M\pi$ также неделимы. Случай $n = 1$, для которого $M\{\{1\}\} = \{\{1\}, \{2\}\}$, является исключением, поэтому в определение этой операции и добавлено ограничение $n \geq 2$.

Аналогично, в равенстве (41) блоки разбиений $\rho|_{m \rightarrow m+n-1}$ и $\sigma|_{n \rightarrow n+1} + m - 1$ покрывают соответственно отрезки $[1, m+n-1]_{\mathbb{R}}$ и $[m, m+n]_{\mathbb{R}}$ (опять учтем, что при $m, n \geq 2$ блоки с максимальными элементами не являются синглетами), объединение которых покрывает $[1, m+n]_{\mathbb{R}}$.

Покажем теперь, что любое разбиение $\pi \in \Pi_{n+1}^a$ представимо единственным образом как $\pi = M\tau$, либо $\pi = d_j\tau$, либо $\pi = P(\rho, \sigma)$, где ρ, σ, τ – неделимые разбиения. Пусть n (предпоследний элемент разбиения π) лежит в блоке π_j . Построим разбиение $\tau \vdash [n]$, удаляя этот элемент и сдвигая $n+1$ на освободившуюся позицию. Возможны следующие случаи.

А) Блок π_j является синглетом. Тогда $\tau \in \Pi_n^a$ и $\pi = M\tau$, причем другими способами разбиение π получить нельзя, так как при операциях d_j, P элемент n приписывается блоку, уже содержащему какие-то элементы.

Б) Блок π_j не является синглетом и $\tau \in \Pi_n^a$. Тогда $\pi = d_j\tau$. Единственность следует из того, что если $\pi = P(\rho, \sigma)$, то $\tau \notin \Pi_n^a$, а номер j однозначно определен как номер блока с элементом n .

В) Блок π_j не является синглетом и $\tau \notin \Pi_n^a$. Тогда τ представляется единственным образом в виде $\tau = \tilde{\rho}|\sigma$, где $\sigma \in \Pi_s^a, s > 1$. Разбиение σ характеризуется тем, что объединение носителей $\sigma + |\tilde{\rho}|$ покрывает отрезок, находящийся правее самой правой лакуны в объединении носителей τ . При этом блок $\pi_j \setminus \{n\}$ относится к разбиению $\tilde{\rho}$ и, добавив в этот блок элемент $|\tilde{\rho}| + 1$, мы приходим к неделимому разбиению ρ такому, что $\pi = P(\rho, \sigma)$.

Утверждение доказано.

6.2. Статистика.

6.2.1. *Назад к многочленам Белла.* Рассмотрим две статистики для неделимых разбиений. Сначала запишем определение многочленов $\tilde{Y}_n$, аналогичное определению многочленов Белла Y_n (4):

$$p(\pi) = \prod_{j=1}^{|\pi|} v_{|\pi_j|}, \quad \tilde{Y}_n(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\pi \in \Pi_n^a} p(\pi). \quad (43)$$

Оказывается, многочлены $\tilde{Y}_n$ и Y_n тесно связаны (ср. с утверждением 10). Обратим внимание на то, что ниже в уравнении (44) участвуют обыкновенные производящие функции Y и $\tilde{Y}$, а не экспоненциальная функция (7). Дифференциальные уравнения для них решаются в квадратурах, но эти формулы нам не понадобятся, так как Y и $\tilde{Y}$ служат лишь асимптотическими разложениями для решений, как и ряды из п. 5.2.

УТВЕРЖДЕНИЕ 13. *Производящие функции*

$$\tilde{Y} = \frac{\tilde{Y}_1}{z} + \frac{\tilde{Y}_2}{z^2} + \dots, \quad Y = Y_0 + \frac{Y_1}{z} + \frac{Y_2}{z^2} + \dots$$

связаны соотношением

$$\tilde{Y} = 1 - \frac{1}{Y}. \quad (44)$$

ТАБЛИЦА 6. Число $a_{n,k}$ неделимых разбиений $[n]$ с k блоками. Сумма по строкам дает общее число неделимых разбиений a_n .

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	a_n
1	1								1
2	1								1
3	1	1							2
4	1	4	1						6
5	1	11	9	1					22
6	1	26	48	16	1				92
7	1	57	202	140	25	1			426
8	1	120	747	916	325	36	1		2146
9	1	247	2559	5071	3045	651	49	1	11624

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v_i = D^i(v)$, $D = \partial_x$. Легко проверить, что для порождающих операций (40), (41) выполняются свойства

$$\sum_{j=1}^{|\pi|} p(d_j \pi) = D(p(\pi)), \quad p(M\pi) = v_1 p(\pi), \quad p(P(\rho, \sigma)) = p(\rho) p(\sigma).$$

Из утверждения 12 следуют рекуррентные соотношения

$$\tilde{Y}_1 = v_1, \quad \tilde{Y}_2 = v_2, \quad \tilde{Y}_{n+1} = D(\tilde{Y}_n) + v_1 \tilde{Y}_n + \sum_{s=2}^{n-1} \tilde{Y}_s \tilde{Y}_{n+1-s}, \quad n \geq 2, \quad (45)$$

которые эквивалентны уравнению Риккати

$$D(\tilde{Y}) + (\tilde{Y} - 1)(z\tilde{Y} - v_1) = 0. \quad (46)$$

Замена (44) приводит к уравнению $D(Y) = (z - v_1)Y - z$, эквивалентному рекуррентным соотношениям (6) для многочленов Белла. Утверждение доказано.

Пусть $a_{n,k} = |\Pi_{n,k}^a|$ – число неделимых разбиений $[n]$ с k блоками (см. [12], A087903) и $a_n = |\Pi_n^a|$ – общее число неделимых разбиений (см. табл. 6 и [12], A074664). Подстановки $v_j = v$ и $v_j = 1$ в (44) устанавливают связь этих чисел с числами Стирлинга второго рода и числами Белла:

$$\sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^n a_{n,k} \frac{v^k}{z^n} = 1 - \left(\sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n \{n\}_k \frac{v^k}{z^n} \right)^{-1}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{z^n} = 1 - \left(\sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{z^n} \right)^{-1}.$$

Впервые эти соотношения были получены в статье [29].

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В статьях [30], [31] изучались так называемые неразложимые разбиения, имеющие статистику, подобную рассмотренной выше. Общее число таких разбиений размера n совпадает с числом неделимых разбиений, но вместо $a_{n,k}$ возникает другой “числовой треугольник”. Довольно сложная биекция между этими двумя классами разбиений установлена в работе [32]. Пока неясно, описывается ли это соответствие посредством некоторого преобразования производящих функций или переменных v_i .

6.2.2. *Многочлены от двух переменных.* Рассмотрим выражения $\varphi(u)$, построенные из переменной u при помощи операций $P(a, b)$, Ma и $d_j a$, $1 \leq j \leq \deg a$, где $\deg a$ равно суммарному числу вхождений u и M в a . Пусть множество Φ_n^a , $n \geq 2$, состоит из всех таких выражений, содержащих $n - 1$ символов u , d , M , P , а множество $\Phi_{n,k}^a$ включает те из них, степень которых равна k . Согласно утверждению 12 отображение $\varphi(u) \mapsto \varphi(\{\{1, 2\}\})$ определяет биекцию между $\Phi_{n,k}^a$ и $\Pi_{n,k}^a$ при $n \geq 2$ (заметим, что разбиение $\{\{1\}\}$, составляющее Π_1^a , в формуле (42) фактически не участвует).

В дополнение к переменной $u = u_0$ введем переменную $v = v_0$ и определим моном $q(\varphi)$ как значение выражения φ , вычисленное по следующим правилам, применяемым в указанном порядке:

- 1) все операции Ma заменяются на $P(a, v)$;
- 2) операция $d_j a$ увеличивает на единицу индекс для j -го вхождения u или v в a , если считать слева;
- 3) все операции $P(a, b)$ заменяются на ab .

Все выражения из Φ_n^a при $n = 2, 3, 4$ и отвечающие им разбиения и мономы перечислены в табл. 7.

ТАБЛИЦА 7. Выражения $\Phi_n^a = \varphi(u)$, разбиения $\Pi_n^a = \varphi(\{\{1, 2\}\})$ и мономы $q(\varphi)$ при $n = 2, 3, 4$.

n	$\varphi(u)$	$\varphi(\{\{1, 2\}\})$	$q(\varphi)$
2	u	12	u
3	$d_1 u$	123	u_1
	Mu	13 2	uv
4	$d_1 d_1 u$	1234	u_2
	$d_1 Mu$	134 2	$u_1 v$
	$d_2 Mu$	14 23	uv_1
	$Md_1 u$	124 3	$u_1 v$
	MMu	14 2 3	uv^2
	$P(u, u)$	13 24	u^2

Суммируя по всем выражениям, определим многочлены

$$r_n(u, \dots, u_{n-2}, v, \dots, v_{n-3}) = \sum_{\varphi \in \Phi_n^a} q(\varphi). \quad (47)$$

ПРИМЕР. Выпишем несколько многочленов r_n :

$$\begin{aligned}
 r_2 &= u, \\
 r_3 &= u_1 + uv, \\
 r_4 &= u_2 + (2u_1 v + uv_1 + u^2) + uv^2, \\
 r_5 &= u_3 + (3u_2 v + 4u u_1 + 3u_1 v_1 + uv_2) + (3u_1 v^2 + 3uv v_1 + 3u^2 v) + uv^3, \\
 r_6 &= u_4 + (4u_3 v + 6u u_2 + 6u_2 v_1 + 5u_1^2 + 4u_1 v_2 + uv_3) + \\
 &\quad + (6u_2 v^2 + 16u u_1 v + 12u_1 v v_1 + 2u^3 + 5u^2 v_1 + 4uv v_2 + 3uv_1^2) + \\
 &\quad + (4u_1 v^3 + 6u^2 v^2 + 6uv^2 v_1) + uv^4.
 \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Сравнение табл. 4 и 7 показывает, что неперекрывающиеся разбиения Π_n^* находятся во взаимно однозначном соответствии с неделимыми разбиениями Π_{n+2}^a , построенными без применения операции M .

Напомним, что в разбиении $P(\rho, \sigma)$ блоки ρ и σ нумеруются последовательно, а операция M добавляет синглет в качестве последнего блока. Так как на шаге 1 переменная v вводится как второй аргумент, после этого шага нумерация переменных u, v слева направо согласована с нумерацией блоков соответствующего разбиения. Поэтому после шага 2 блоку из l элементов отвечает переменная u_{l-2} или v_{l-1} в зависимости от того, как этот блок был порожден: в результате операции P или M . Отсюда вытекает связь между мономерами p, q и, следовательно, между многочленами $\tilde{Y}_n, r_n$:

$$p(\varphi(\{\{1, 2\}\})) = q(\varphi)|_{u_l=v_{l+2}, v_l=v_{l+1}}, \quad \tilde{Y}_n = r_n|_{u_l=v_{l+2}, v_l=v_{l+1}}$$

(за исключением того, что $\tilde{Y}_1 = v_1$, так как многочлен r_1 не определен).

УТВЕРЖДЕНИЕ 14. Многочлены r_n , зависящие от переменных

$$u_i = D^i(u), \quad v_i = D^i(v), \quad D = \partial_x,$$

подчиняются рекуррентным соотношениям

$$r_2 = u, \quad r_{n+1} = D(r_n) + vr_n + \sum_{s=2}^{n-1} r_s r_{n+1-s}, \quad n \geq 2. \quad (48)$$

Производящая функция $r = r_2/z + r_3/z^2 + \dots$ удовлетворяет уравнению

$$D(r) + r^2 + vr + u = zr. \quad (49)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (48) следует из (42) и тождеств

$$\sum_{j=1}^{\deg \varphi} q(d_j \varphi) = D(q(\varphi)), \quad q(M\varphi) = vq(\varphi), \quad q(P(\varphi, \phi)) = q(\varphi)q(\phi).$$

Два последних тождества очевидны. Чтобы доказать первое тождество, запишем переменные u_i, v_i в мономе в том порядке, в котором они идут после применения операций M и d_j по правилам 1, 2. Тогда отличие монома $q(d_j \varphi)$ от монома $q(\varphi)$ состоит в том, что индекс j -го сомножителя увеличен на единицу. Далее просуммируем по j . Утверждение доказано.

6.3. Иерархия Каупа–Броера. Линеаризация уравнения Риккати (49) приводит к уравнению

$$D^2(\psi) + (v - z)D(\psi) + u\psi = 0. \quad (50)$$

Соответствующая иерархия нелинейных уравнений возникает из условия совместности (50) с уравнением $\psi_t = GD(\psi) + H\psi = 0$, где G и H являются многочленами по z . Непосредственные вычисления приводят к формулам

$$G = (z^{n-1}g)_{\geq 0}, \quad H = \frac{1}{2}(z^{n-1}((v - z)g - D(g)))_{\geq 0},$$

где знак ≥ 0 означает отбрасывание отрицательных степеней z , а производящая функция $g = 1 + g_1/z + g_2/z^2 + \dots$ удовлетворяет уравнению

$$2gD^2(g) - D(g)^2 + (4u - 2v_1 - (v - z)^2)g^2 = -z^2, \quad (51)$$

из которого можно найти все g_j . При этом условие совместности эквивалентно системе

$$u_{,t_n} = \frac{1}{2}D(D(g_n) - v g_n + g_{n+1}), \quad v_{,t_n}(v) = D(g_n).$$

Выбор правой части (51) обеспечивает однородность относительно веса $w(u_i) = i + 2$, $w(v_i) = i + 1$. Основные уравнения иерархии имеют вид

$$u_{,t_2} = D(u_1 + 2uv), \quad v_{,t_2} = D(-v_1 + v^2 + 2u).$$

Эта система является системой Каупа–Броера [33], одной из калибровочно-эквивалентных форм НУШ (последовательность замен можно найти в статье [34]). Выпишем также симметрию 3-го порядка:

$$u_{,t_3} = D(u_2 + 3u^2 + 3u_1v + 3uv^2), \quad v_{,t_3} = D(v_2 - 3vv_1 + v^3 + 6uv).$$

Из сравнения уравнений Риккати (46) и (49) следует, что все потоки допускают редукции $u = 0$ и $u = v_1$, каждая из которых приводит к иерархии Бюргерса. Из сравнения уравнения (49) с уравнением Риккати (29) следует, что все нечетные потоки допускают редукцию $v = 0$ к иерархии КдФ.

Производящая функция g связана с рядом $r = r(u, v, z)$ из утверждения 14 соотношением $g = z/(\bar{r} - r)$, где ряд

$$\bar{r} = -\frac{u}{r(u, -u_1/u - v, -z)} = z - v + \frac{v_1 - u}{z} + \dots$$

также удовлетворяет уравнению Риккати (49). Как и в случае уравнения (37), непосредственная комбинаторная интерпретация многочленов g_j неизвестна.

Список литературы

- [1] А. М. Вершик, *Функц. анализ и его прил.*, **30:2** (1996), 19–39.
- [2] P. Deift, *Notices Amer. Math. Soc.*, **47:6** (2000), 631–640.
- [3] M.-P. Grosset, A. P. Veselov, *J. Nonl. Math. Phys.*, **12:4** (2005), 469–474.
- [4] A. Alexandrov, A. Mironov, A. Morozov, S. Natanzon, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **45:4** (2012), 045209, 10 pp.
- [5] F. Lambert, I. Loris, J. Springael, R. Willox, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **27:15** (1994), 5325–5334.
- [6] F. Lambert, J. Springael, *Acta Appl. Math.*, **102:2–3** (2008), 147–178.
- [7] S. Pemmaraju, S. Skiena, *Computational Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory with Mathematica*, Cambridge Univ., Cambridge, 2003.
- [8] Д. Э. Кнут, *Искусство программирования: Комбинаторные алгоритмы. Часть 1*, **4А**, “Вильямс”, М., 2013.
- [9] T. Mansour, *Combinatorics of Set Partitions*, CRC Press, Boca Raton, FL, 2013.
- [10] L. Comtet, *Advanced Combinatorics. The Art of finite and Infinite Expansions*, D. Reidel, Dordrecht, 1974.

- [11] W. P. Johnson, *Amer. Math. Monthly*, **109**:3 (2002), 217–234.
- [12] N. J. A. Sloane, *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, 2010, <http://oeis.org>; Catalan n. A000108, A126120; Bell n. A000110; 2-Bell n. A005493; Bessel n. A006789; Dowling n. A007405; Stirling-2 n. A008277, A048993; Euler n. A008292; B -analogs of Stirling-2 n. A039755; of atomic partitions n. A074664; analogs of Stirling-2 for atomic partitions n. A087903; of 2-sparse nonoverlapping partitions n. A099950; expansion of $[g(x)d/dx]^n g(x)$ A145271.
- [13] Н. Х. Ибрагимов, *Группы преобразований в математической физике*, Наука, М., 1983.
- [14] M. Bóna, *Combinatorics of Permutations*, CRC Press, Raton, FL, 2004.
- [15] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, v. 1, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **49**, Wadsworth and Brooks, Monterey, CA, 1997.
- [16] T. A. Dowling, *J. Combinatorial Theory Ser. B*, **14**:1 (1973), 61–86.
- [17] M. Benounhani, *Discrete Math.*, **159**:1–3 (1996), 13–33.
- [18] V. Reiner, *Discrete Math.*, **177**:1–3 (1997), 195–222.
- [19] R. Suter, *J. Integer Seq.*, **3** (2000), 00.1.8, 18 pp.
- [20] Н. Х. Ибрагимов, А. Б. Шабат, *Функц. анализ и его прил.*, **14**:4 (1980), 79–80.
- [21] P. Flajolet, R. Schott, *European J. Combin.*, **11**:5 (1990), 421–432.
- [22] A. Claesson, *European J. Combin.*, **22**:7 (2001), 961–971.
- [23] P. Flajolet, *Discrete Math.*, **32**:2 (1980), 125–161.
- [24] M. Klazar, *J. Combin. Theory Ser. A*, **102**:1 (2003), 63–87.
- [25] И. М. Гельфанд, Л. А. Дикий, *УМН*, **30**:5(185) (1975), 67–100.
- [26] R. Schimming, *Acta Appl. Math.*, **39**:1 (1995), 489–505.
- [27] I. Avramidi, R. Schimming, *Math. Nachr.*, **219**:1 (2000), 45–64.
- [28] I. Polterovich, *Lett. Math. Phys.*, **49**:1 (1999), 71–77.
- [29] N. Bergeron, M. Zabrocki, *J. Algebra Appl.*, **8**:4 (2009), 581–600.
- [30] N. Bergeron, C. Reutenauer, M. Rosas, M. Zabrocki, *Canad. J. Math.*, **60**:2 (2008), 266–296.
- [31] M. B. Can, B. E. Sagan, *Electron. J. Combin.*, **18**:2 (2011), #P3, 7 pp.
- [32] W. Y. C. Chen, T. X. S. Li, D. G. L. Wang, *Electron. J. Combin.*, **18**:1 (2011), #P7, 7 pp.
- [33] B. A. Kupershmidt, *Commun. Math. Phys.*, **99**:1 (1985), 51–73.
- [34] A. V. Mikhailov, A. B. Shabat, R. I. Yamilov, *Commun. Math. Phys.*, **115**:1 (1988), 1–19.

Поступила в редакцию 5.10.2015