Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Н. Бабалик, А. С. Карстеа, Билинейный подход к суперсимметричному уравнению Гарднера, *ТМФ*, 2016, том 188, номер 2, 244–253

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9055>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 16:35:21

© 2016 г.

К. Н. Бабалик^{*†}, А. С. Карстеа^{*†}

БИЛИНЕЙНЫЙ ПОДХОД К СУПЕРСИММЕТРИЧНОМУ УРАВНЕНИЮ ГАРДНЕРА

Изучается суперсимметричная версия уравнения Гарднера (как фокусирующего, так и дефокусирующего), при этом используется супербилинейный формализм. Рассматриваемое уравнение является новым, и его нельзя получить из суперсимметричного модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза с ненулевыми граничными условиями. Построены суперсимметричные решения, и затем путем перехода к длинноволновому пределу в фокусирующем случае получены рациональные несингулярные решения. Обсуждается также суперсимметричная версия дефокусирующего уравнения и динамика его решений.

Ключевые слова: суперсимметрия, суперсимметричный билинейный формализм Хироты, суперсолитоны.

DOI: 10.4213/tmf9055

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время изучение суперсолитонных уравнений выявило очень интересные аспекты суперсолитонной динамики. Достижения в этой области стали возможными благодаря расширению билинейного формализма Хироты на суперпространство, что позволило найти мультисуперсолитонные решения различных уравнений [1]–[10]. В отличие от обычного случая, в члене взаимодействия присутствует фермионный хвост, одевающий нелинейную моду. В соответствии с этим чем больше суперсолитонов вовлечено во взаимодействие, тем более “одетым”, в определенном смысле, является взаимодействие. Особенно интересно то, что для многих изученных на настоящий момент примеров (уравнения КдФ, мКдФ, sin-Гордон, Савады–Котера, Ито, Калоджеро–Дегаспериса–Фокаса) одевание имеет одно и то

Н. К. Бабалик поддержан Romanian Ministry of Education and Research (проект PN-II-ID-PCE-2011-3-0083), А. С. Карстеа поддержан Romanian Ministry of Education and Research (проект PN-II-ID-PCE-2011-3-0137).

^{*}Department of Theoretical Physics, Institute of Physics and Nuclear Engineering, Bucharest, Romania. E-mail: carstea@gmail.com

[†]University of Craiova, Craiova, Romania

же выражение. В рамках дискретной постановки задачи одевание отличается, но до сих пор изучен только случай дискретизации суперсимметричного уравнения КдФ [11].

В настоящей работе мы применяем суперсимметричный билинейный формализм к новому уравнению, которое представляет собой комбинацию суперсимметричных уравнений КдФ и мКдФ. Хорошо известно, что в классической постановке комбинированное уравнение КдФ+мКдФ обычно называется уравнением Гарднера и по сути является уравнением мКдФ с ненулевым постоянным граничным условием на бесконечности. В суперсимметричном случае это не так, и комбинированное уравнение суперКдФ+супер-мКдФ представляет собой новое уравнение, которое мы называем суперсимметричным уравнением Гарднера. Применив суперсимметричный билинейный формализм, мы показываем, что оно допускает по крайней мере трех-суперсолитонное решение.

Кроме того, мы обсуждаем дефокусирующий случай, а также такие специальные решения, как суперрациональное решение и решение в виде ударной суперволны. В одномерном контексте рациональные решения не очень интересны, но уравнение Гарднера обладает несингулярными решениями с лоренцевой формой [12]. В суперсимметричном контексте ситуация аналогичная, т.е. как нечетная, так и четная части решения имеют несингулярную лоренцеву форму. Более того, у них есть свободные параметры, которые нельзя убрать калибровочным преобразованием (как в обычном случае). Мы анализируем взаимодействие этих суперрациональных решений с суперсолитонами и показываем, что ситуация аналогична классическому случаю: суперсолитон остается неизменным, а суперрациональное решение приобретает сдвиг, в некотором смысле напоминающий одевание суперсолитонного взаимодействия.

2. ФОКУСИРУЮЩЕЕ СУПЕРУРАВНЕНИЕ ГАРДНЕРА

Мы работаем в $N = 1$ суперпространстве (x, t, θ) с только одной независимой фермионной переменной θ . Рассмотрим следующее уравнение:

$$\Phi_t + \Phi_{xxx} + 3(D\Phi)(\Phi D\Phi)_x + 3\sigma(\Phi D\Phi)_x = 0, \quad (1)$$

где $\Phi(x, t, \theta) = \zeta(x, t) + \theta u(x, t)$ – фермионное суперполе, $D = \partial_\theta + \theta \partial_x$ – суперпроизводная, $\zeta(x, t)$ и $u(x, t)$ – фермионная и бозонная функции, а σ – произвольная бозонная постоянная. Уравнение (1) является в точности комбинированным уравнением суперКдФ+супер-мКдФ. Запишем его покомпонентно:

$$\begin{aligned} \zeta_t + \zeta_{xxx} + 3(u + \sigma)(\zeta u)_x &= 0, \\ u_t + u_{xxx} + 6u^2 u_x + 6\sigma u u_x - 3u_x \zeta \zeta_x - 3(u + \sigma)\zeta \zeta_{xx} &= 0. \end{aligned}$$

Если $\zeta(x, t) \rightarrow 0$, мы получаем обычное уравнение Гарднера

$$u_t + u_{xxx} + 6u^2 u_x + 6\sigma u u_x = 0. \quad (2)$$

Вообще говоря, обычное уравнение Гарднера представляет собой уравнение мКдФ с ненулевым граничным условием. Однако уравнение (1) нельзя получить из суперсимметричного уравнения мКдФ, налагая ненулевое граничное условие σ . В самом деле, сразу можно заметить, что если взять суперсимметричное уравнение мКдФ

$$\Psi_t + \Psi_{xxx} + 3(D\Psi)(\Psi D\Psi)_x = 0 \quad (3)$$

и положить $\Psi = \phi + \beta$, где β – нечетная постоянная (в том смысле, что она не зависит от x и t , но может зависеть от θ , и в этом случае $D\beta = \sigma$), то из уравнения (3) невозможно получить для ϕ уравнение (1). Следовательно, уравнение (1) является новым.

Чтобы получить супербилинейную форму, преобразуем уравнение (1) к потенциальному виду. Полагая $\Phi = D\phi$, где $\phi(x, t, \theta)$ – бозонное суперполе, запишем уравнение (1) в виде

$$\phi_t + \phi_{xxx} + 2\phi_x^3 - 3(D\phi)(D\phi_x)\phi_x + 3\sigma\phi_x^2 - 3\sigma D\phi D\phi_x = 0. \quad (4)$$

Для супербилинеаризации возьмем $\phi = i \ln(g/f)$ с бозонными суперфункциями

$$g(x, t, \theta) = G(x, t) + \theta\gamma(x, t), \quad f(x, t, \theta) = F(x, t) + \theta\varphi(x, t).$$

Здесь $F(x, t)$, $G(x, t)$ – бозонные (четные) функции, а $\varphi(x, t)$, $\gamma(x, t)$ – фермионные (нечетные) функции. Используя свойства оператора Хироты $\mathbf{D}$, получим

$$\begin{aligned} \phi_t + \phi_{xxx} + 2\phi_x^3 &= i \frac{(\mathbf{D}_t + \mathbf{D}_x^3)g \cdot f}{gf} - 3i \frac{(\mathbf{D}_x^2 g \cdot f)(\mathbf{D}_x g \cdot f)}{g^2 f^2}, \\ -3(D\phi)(D\phi_x)\phi_x &= 3i \frac{D(gf)(\mathbf{S}_x^3 g \cdot f)}{g^2 f^2} \frac{\mathbf{D}_x g \cdot f}{gf} + 3i \frac{(\mathbf{D}_x^2 g \cdot f)(\mathbf{D}_x g \cdot f)}{g^2 f^2} - \\ &\quad - 3i \frac{D(\mathbf{S}_x^3 g \cdot f)(\mathbf{D}_x g \cdot f)}{g^2 f^2}, \\ 3\sigma\phi_x^2 &= -3\sigma \left(\frac{\mathbf{D}_x g \cdot f}{gf} \right)^2, \\ -3\sigma D\phi D\phi_x &= 3\sigma \frac{D(gf)(\mathbf{S}_x^3 g \cdot f)}{g^2 f^2} + 3\sigma \frac{\mathbf{D}_x^2 g \cdot f}{gf} - 3\sigma \frac{D(\mathbf{S}_x^3 g \cdot f)}{gf}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{S}_x^N$ – супероператор Хироты [1], действие которого на две произвольные суперфункции $a(x, \theta)$ и $b(x, \theta)$ задается формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_x^{2N} a \cdot b &= \mathbf{D}^N a \cdot b, \quad \mathbf{S}_x^{2N+1} a \cdot b = \mathbf{S}_x \mathbf{D}^N a \cdot b, \\ \mathbf{S}_x a \cdot b &= (Da)b - (-1)^{|a|} a(Db), \end{aligned}$$

где $|a|$ – грассманова четность суперфункции $a(x, \theta)$.

Складывая полученные выражения и собирая чисто билинейные члены, получим

$$(i\mathbf{D}_t + i\mathbf{D}_x^3 + 3\sigma\mathbf{D}_x^2 + \text{другие возможные члены})g \cdot f = 0. \quad (5)$$

Оставшаяся часть такова:

$$(D(gf)(\mathbf{S}_x^3 g \cdot f) - gf D(\mathbf{S}_x^3 g \cdot f))(3i\mathbf{D}_x g \cdot f + 3\sigma gf) = 3\sigma gf(\mathbf{D}_x g \cdot f)^2. \quad (6)$$

В то же время верно следующее равенство, которое можно проверить непосредственными вычислениями:

$$gf(\mathbf{D}_x g \cdot f)D(\mathbf{S}_x g \cdot f) - D(gf)(\mathbf{S}_x g \cdot f)(\mathbf{D}_x g \cdot f) = gf(\mathbf{D}_x g \cdot f)^2. \quad (7)$$

Заменяя правую часть в уравнении (6) левой частью равенства (7), умноженной на 3σ , получим

$$3iD(gf)(\mathbf{D}_x g \cdot f)(\mathbf{S}_x^3 g \cdot f - i\sigma \mathbf{S}_x g \cdot f) - 3igf(\mathbf{D}_x g \cdot f)D(\mathbf{S}_x^3 g \cdot f - i\sigma \mathbf{S}_x g \cdot f) + 3\sigma gfD(gf)(\mathbf{S}_x^3 g \cdot f) - 3\sigma g^2 f^2 D(\mathbf{S}_x^3 g \cdot f) = 0. \quad (8)$$

Исходя из этого уравнения наложим следующее билинейное соотношение:

$$\mathbf{S}_x^3 g \cdot f - i\sigma \mathbf{S}_x g \cdot f = 0, \quad (9)$$

которое аннулирует два слагаемых в первой строке (8). Заменяя $\mathbf{S}_x^3$ на $i\sigma \mathbf{S}_x$ в оставшейся части уравнения (8), получаем

$$3i\sigma^2(gfD(gf)(\mathbf{S}_x g \cdot f) - g^2 f^2 D(\mathbf{S}_x g \cdot f)) = 0. \quad (10)$$

Сразу же можно заметить, что (10) есть не что иное, как уравнение

$$-3i\sigma^2 g^2 f^2 (\mathbf{D}_x g \cdot f) = 0,$$

и его можно перевести в (5) заменой “других возможных членов”. Наконец, билинейная форма Хироты фокусирующего суперуравнения Гарднера записывается как

$$(\mathbf{D}_t + \mathbf{D}_x^3 - 3i\sigma \mathbf{D}_x^2 - 3\sigma^2 \mathbf{D}_x)g \cdot f = 0, \quad (\mathbf{S}_x^3 - i\sigma \mathbf{S}_x)g \cdot f = 0. \quad (11)$$

С помощью простого линейного преобразования $x \rightarrow X - 3\sigma^2 T$, $t \rightarrow T$ система (11) упрощается и принимает вид

$$(\mathbf{D}_T + \mathbf{D}_X^3 - 3i\sigma \mathbf{D}_X^2)g \cdot f = 0, \quad (\mathbf{S}_X^3 - i\sigma \mathbf{S}_X)g \cdot f = 0. \quad (12)$$

Используя компоненты $g = G + \theta\gamma$, $f = F + \theta\varphi$, где G и F – бозонные (четные) поля, а ζ и ϕ – фермионные (нечетные) поля, запишем систему как

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}_T + \mathbf{D}_X^3 - 3\sigma i \mathbf{D}_X^2)G \cdot F &= 0, \\ (\mathbf{D}_T + \mathbf{D}_X^3 - 3\sigma i \mathbf{D}_X^2)(\gamma \cdot F + G \cdot \varphi) &= 0, \\ (\mathbf{D}_X - i\sigma)\gamma \cdot F - (\mathbf{D}_X - i\sigma)G \cdot \varphi &= 0, \\ \mathbf{D}_X(\mathbf{D}_X - i\sigma)G \cdot F - 2(\mathbf{D}_X - i\sigma)\gamma \cdot \varphi &= 0. \end{aligned}$$

Можно заметить, что если $\gamma = 0$, $\phi = 0$, то эта система приобретает вид [12] классической билинейной формы уравнения Гарднера (2):

$$(\mathbf{D}_T + \mathbf{D}_X^3 - 3\sigma i \mathbf{D}_X^2)G \cdot F = 0, \quad \mathbf{D}_X(\mathbf{D}_X - i\sigma)G \cdot F = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Билинейная система (11) появляется в литературе (см. работу [7]) как супербилинейное преобразование Бэклунда, связывающее различные решения суперсимметричного уравнения КдФ.

3. СУПЕРСОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ

Можно построить солитонные решения уравнения (12), комбинируя заданные в суперпространстве моды $e^{\eta+\theta\xi} = e^{kX+\omega T+\eta_0+\theta\xi}$ (здесь η_0 – произвольная четная постоянная, которая необходима при построении рациональных решений). По сути любое суперрешение характеризуется парой (k, ξ) четного и нечетного параметров, которые соответствуют координатам (X, θ) на суперсфере, и, вообще говоря, $\omega = \omega(k, \xi)$. Конечно, никто не обязывает нас фиксировать число нечетных параметров, так что суперсолитон можно характеризовать многими нечетными параметрами типа $(k, \xi_1, \dots, \xi_p)$. Однако мы намерены построить суперсолитоны как фундаментальные блоки, зависящие от минимального числа параметров, поэтому с этого момента мы будем рассматривать только одну пару (k, ξ) для каждого суперсолитона.

Тау-функции g и f для односуперсолитонного решения записываются как

$$f = 1 + ae^{\eta+\theta\xi}, \quad g = 1 + a^*e^{\eta+\theta\xi} = f^*, \quad (13)$$

где $\eta = kX + \omega T + \eta_0$, $\omega(k) = -k^3 - 3k\sigma^2$, $a = 1 + ik/\sigma$ и ξ – произвольная нечетная грассманова постоянная, а 1-суперсолитон имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_{1\text{-ss}} &= D\phi = iD \ln \frac{g}{f} = iD \ln \frac{1 + a^*e^{\eta+\theta\xi}}{1 + ae^{\eta+\theta\xi}} = \\ &= 2\frac{k}{\sigma} \frac{e^\eta}{(1 + a^*e^\eta)(1 + ae^\eta)} \xi + 2\frac{k^2}{\sigma} \frac{e^\eta}{(1 + a^*e^\eta)(1 + ae^\eta)} \theta = \\ &= \frac{k}{\sigma} \frac{\xi}{1 + \sqrt{aa^*} \operatorname{ch}(\eta + \ln \sqrt{aa^*})} + \frac{k^2}{\sigma} \frac{\theta}{1 + \sqrt{aa^*} \operatorname{ch}(\eta + \ln \sqrt{aa^*})}. \end{aligned} \quad (14)$$

Для двухсуперсолитонного решения теперь мы имеем две пары параметров (k_1, ξ_1) и (k_2, ξ_2) для каждого суперсолитона и, конечно, нужно добавить член взаимодействия. Из-за сложности нелинейной формы приведем только выражения для тау-функций g и f :

$$\begin{aligned} f &= 1 + a_1e^{\eta_1+\theta\xi_1} + a_2e^{\eta_2+\theta\xi_2} + A_{12}a_1a_2(1 + \beta_{12}\xi_1\xi_2)e^{\eta_1+\eta_2+\theta(\alpha_{12}\xi_1+\alpha_{21}\xi_2)}, \\ g &= 1 + a_1^*e^{\eta_1+\theta\xi_1} + a_2^*e^{\eta_2+\theta\xi_2} + A_{12}a_1^*a_2^*(1 + \beta_{12}\xi_1\xi_2)e^{\eta_1+\eta_2+\theta(\alpha_{12}\xi_1+\alpha_{21}\xi_2)}, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$A_{ij} = \left(\frac{k_i - k_j}{k_i + k_j} \right)^2, \quad \beta_{ij} = \frac{2}{k_i - k_j}, \quad \alpha_{ij} = -\alpha_{ji} = \frac{k_i + k_j}{k_i - k_j}, \quad a_i = 1 + i\frac{k_i}{\sigma}$$

и

$$\eta_i = k_iX + (-k_i^3 - 3k_i\sigma^2)T + \eta_i^0, \quad i = 1, 2,$$

а ξ_1, ξ_2 – произвольные нечетные грассмановы постоянные.

Новой деталью этого решения по сравнению с обычным уравнением Гарднера является фермионная поправка $\beta_{12}\xi_1\xi_2$, на которую умножается A_{12} , и фермионное одевание параметра ξ_i множителями α_{ij} в экспоненте. Их роль более наглядна

в трехсуперсолитонном решении, которое имеет вид

$$\begin{aligned}
 f = & 1 + a_1 e^{\eta_1 + \theta \xi_1} + a_2 e^{\eta_2 + \theta \xi_2} + a_3 e^{\eta_3 + \theta \xi_3} + \\
 & + A_{12} a_1 a_2 (1 + \beta_{12} \xi_1 \xi_2) e^{\eta_1 + \eta_2 + \theta(\alpha_{12} \xi_1 + \alpha_{21} \xi_2)} + \\
 & + A_{13} a_1 a_3 (1 + \beta_{13} \xi_1 \xi_3) e^{\eta_1 + \eta_3 + \theta(\alpha_{13} \xi_1 + \alpha_{31} \xi_3)} + \\
 & + A_{23} a_2 a_3 (1 + \beta_{23} \xi_2 \xi_3) e^{\eta_2 + \eta_3 + \theta(\alpha_{23} \xi_2 + \alpha_{32} \xi_3)} + \\
 & + A_{12} A_{13} A_{23} a_1 a_2 a_3 (1 + \beta_{12} \alpha_{13} \alpha_{23} \xi_1 \xi_2) (1 + \beta_{13} \alpha_{12} \alpha_{32} \xi_1 \xi_3) (1 + \beta_{23} \alpha_{21} \alpha_{31} \xi_2 \xi_3) \times \\
 & \times e^{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \theta(\alpha_{12} \alpha_{13} \xi_1 + \alpha_{21} \alpha_{23} \xi_2 + \alpha_{31} \alpha_{32} \xi_3)}, \\
 g = & 1 + a_1^* e^{\eta_1 + \theta \xi_1} + a_2^* e^{\eta_2 + \theta \xi_2} + a_3^* e^{\eta_3 + \theta \xi_3} + \\
 & + A_{12} a_1^* a_2^* (1 + \beta_{12} \xi_1 \xi_2) e^{\eta_1 + \eta_2 + \theta(\alpha_{12} \xi_1 + \alpha_{21} \xi_2)} + \\
 & + A_{13} a_1^* a_3^* (1 + \beta_{13} \xi_1 \xi_3) e^{\eta_1 + \eta_3 + \theta(\alpha_{13} \xi_1 + \alpha_{31} \xi_3)} + \\
 & + A_{23} a_2^* a_3^* (1 + \beta_{23} \xi_2 \xi_3) e^{\eta_2 + \eta_3 + \theta(\alpha_{23} \xi_2 + \alpha_{32} \xi_3)} + \\
 & + A_{12} A_{13} A_{23} a_1^* a_2^* a_3^* (1 + \beta_{12} \alpha_{13} \alpha_{23} \xi_1 \xi_2) (1 + \beta_{13} \alpha_{12} \alpha_{32} \xi_1 \xi_3) (1 + \beta_{23} \alpha_{21} \alpha_{31} \xi_2 \xi_3) \times \\
 & \times e^{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \theta(\alpha_{12} \alpha_{13} \xi_1 + \alpha_{21} \alpha_{23} \xi_2 + \alpha_{31} \alpha_{32} \xi_3)},
 \end{aligned}$$

где A_{ij} , β_{ij} , α_{ij} , a_i , η_i определены выше и ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 – произвольные нечетные грасманы постоянные. В трехсуперсолитонном решении фермионные поправки также одеты, поскольку любая пара солитонов взаимодействует с третьим солитоном. Это видно из выражения

$$\begin{aligned}
 & A_{12} A_{13} A_{23} a_1 a_2 a_3 (1 + \beta_{12} \alpha_{13} \alpha_{23} \xi_1 \xi_2) (1 + \beta_{13} \alpha_{12} \alpha_{32} \xi_1 \xi_3) (1 + \beta_{23} \alpha_{21} \alpha_{31} \xi_2 \xi_3) \times \\
 & \times e^{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \theta(\alpha_{12} \alpha_{13} \xi_1 + \alpha_{21} \alpha_{23} \xi_2 + \alpha_{31} \alpha_{32} \xi_3)}.
 \end{aligned}$$

Для уточнения укажем, что фермионная поправка в случае четырехсуперсолитонного решения имеет вид $\beta_{12} \alpha_{13} \alpha_{14} \alpha_{23} \alpha_{24} \xi_1 \xi_2$, поскольку пара солитонов 1 и 2 взаимодействует с солитонами 3 и 4. Кроме того, одевание параметра ξ_1 в экспоненте будет иметь вид $\alpha_{12} \alpha_{13} \alpha_{14} \xi_1$, поскольку солитон 1 взаимодействует с тремя другими солитонами 2, 3 и 4, и т.д.

Замечено, что в случае интегрируемых уравнений взаимодействие более чем двух солитонов выражается в виде произведений “двойных” взаимодействий. Таким образом, если известна процедура описания взаимодействия трех солитонов, то ее можно обобщить на случай N солитонов, доказав тем самым так называемую полную интегрируемость Хироты. Поскольку трехсуперсолитонное решение в суперсимметричном случае найдено, N -суперсолитон, вероятно, выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
 f = & \sum_{\mu=0,1} \exp \left[\sum_{i=1}^N \mu_i \left(\eta_i + \ln a_i + \theta \xi_i \prod_{m \neq i} \alpha_{im} \right) + \right. \\
 & \left. + \sum_{i < j} \mu_i \mu_j \left(\ln A_{ij} + \beta_{ij} \xi_i \xi_j \prod_{k \neq i,j} \alpha_{ik} \alpha_{jk} \right) \right], \\
 g = & \sum_{\mu=0,1} \exp \left[\sum_{i=1}^N \mu_i \left(\eta_i + \ln a_i^* + \theta \xi_i \prod_{m \neq i} \alpha_{im} \right) + \right. \\
 & \left. + \sum_{i < j} \mu_i \mu_j \left(\ln A_{ij} + \beta_{ij} \xi_i \xi_j \prod_{k \neq i,j} \alpha_{ik} \alpha_{jk} \right) \right],
 \end{aligned}$$

где произведения величин α_{im} и $\alpha_{ik}\alpha_{jk}$ считаются равными единице для $N = 1$ и $N = 2$ соответственно.

Таким образом, суперуравнение Гарднера вполне интегрируемо.

3.1. Суперрациональные и смешанные суперрациональные суперсолитонные решения. Хорошо известно, что обычное уравнение Гарднера обладает также рациональными несингулярными решениями, которые имеют лоренцев вид и которые можно получить с помощью предельного перехода, предложенного много лет назад Абловицем и Сацумой [12]. В общем случае, чтобы получить N -рациональное решение из N -солитонного решения, нужно:

- 1) разложить тау-функцию, соответствующую N -солитонному решению, в ряд по k_i (где k_i – солитонные параметры);
- 2) выбрать произвольные фазовые постоянные η_i^0 так, чтобы все члены порядка $O(k_j^m)$ для $m < N$ при всех j равнялись нулю;
- 3) для каждого j перейти к пределу $k_j \rightarrow 0$ и получить N -рациональное решение из оставшихся членов порядка $O(k_j^p)$ с $p \geq N$.

Мы хотим понять, обладает ли фокусирующее суперуравнение Гарднера несингулярными суперрациональными решениями. Применим описанный выше метод. Исходя из односуперсолитонного решения будем считать $k = \epsilon k_0$ и $\xi = \epsilon \xi_0$, где $\epsilon \rightarrow 0$ (для двух параметров суперсолитона сделаем так, чтобы в пределе оба параметра k_0 и ξ_0 были членами порядка $O(1)$). Выбрав $e^{\eta^0} = -1$, запишем односуперрациональное решение в виде

$$\begin{aligned} \Phi = D\phi &= iD \ln \frac{-ik_0/\sigma + k_0X - 3k_0\sigma^2T + \theta\xi_0}{ik_0/\sigma + k_0X - 3k_0\sigma^2T + \theta\xi_0} = \\ &= -\frac{\sigma}{k_0} \frac{1}{\sigma^2(X - 3\sigma^2T)^2 + 1} \xi_0 - 2\sigma \frac{1}{\sigma^2(X - 3\sigma^2T)^2 + 1} \theta. \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, мы получили бозонную и фермионную компоненты слабо локализованной уединенной волны лоренцева вида (лампы), распространяющейся с постоянной скоростью σ . Аналогичным способом можно найти двух-, трех- и т. д. суперрациональные решения, но, имея одинаковую скорость, они не взаимодействуют. Более интересно рассмотреть взаимодействие между суперрациональным решением и суперсолитоном. Для этого применим предельный переход к двухсуперсолитонному решению, но только для первого солитона (характеризующегося параметрами (k_1, ξ_1)), а второй оставим без изменений. В результате, полагая в выражениях (15) $k_1 = \epsilon k_{10}$ и $\xi_1 = \epsilon \xi_{10}$, где $\epsilon \rightarrow 0$, и снова выбирая $e^{\eta_1^0} = -1$, получим

$$\begin{aligned} f &= Q + a_2 \left(\frac{4k_{10}}{k_2} + Q \right) e^{\eta_2} + \frac{2}{k_2} a_2 e^{\eta_2} \xi_{10} \xi_2 + \theta \left((a_2 e^{\eta_2} - 1) \xi_{10} + a_2 \left(\frac{2k_{10}}{k_2} + Q \right) e^{\eta_2} \xi_2 \right), \\ g &= Q^* + a_2^* \left(\frac{4k_{10}}{k_2} + Q^* \right) e^{\eta_2} + \frac{2}{k_2} a_2^* e^{\eta_2} \xi_{10} \xi_2 + \theta \left((a_2^* e^{\eta_2} - 1) \xi_{10} + a_2^* \left(\frac{2k_{10}}{k_2} + Q \right) e^{\eta_2} \xi_2 \right), \end{aligned}$$

где

$$Q = -k_{10}X + 3k_{10}\sigma^2T - \frac{ik_{10}}{\sigma}, \quad a_2 = 1 + \frac{ik_2}{\sigma}.$$

Чтобы понять эффект взаимодействия, зафиксируем систему отсчета, связанную с суперсолитоном ($\eta_2 = \text{const}$) и получим соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Phi_{\text{mixed}} = iD \ln \frac{1 + a_2^* e^{\eta_2 + \theta \xi_2}}{1 + a_2 e^{\eta_2 + \theta \xi_2}},$$

означающее, что суперрациональное решение не вносит изменений в структуру суперсолитона после взаимодействия, как это и ожидалось.

С другой стороны, фиксируя систему отчета, связанную с суперрациональным решением ($Q = \text{const}$), получим

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi_{\text{mixed}} &= iD \ln \frac{Q^* - \theta \xi_{10}}{Q - \theta \xi_{10}}, \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi_{\text{mixed}} &= iD \ln \frac{Q^* - \theta \xi_{10} + 4k_{10}/k_2 + 2\theta(k_2 \xi_{10} - k_{10} \xi_2)/k_2 + 2\xi_{10} \xi_2/k_2}{Q - \theta \xi_{10} + 4k_{10}/k_2 + 2\theta(k_2 \xi_{10} - k_{10} \xi_2)/k_2 + 2\xi_{10} \xi_2/k_2}. \end{aligned}$$

Таким образом, суперрациональное решение изменилось: в ответе появилось слагаемое $4k_{10}/k_2 + 2\theta(k_2 \xi_{10} - k_{10} \xi_2)/k_2 + 2\xi_{10} \xi_2/k_2$. Интересно, что калибровочным преобразованием нельзя убрать ξ_0 или ξ_{10} , кроме того, взаимодействие имеет тот же вид, что и в суперсолитонном случае [1].

4. ДЕФОКУСИРУЮЩЕЕ СУПЕРУРАВНЕНИЕ ГАРДНЕРА

Рассматриваемое уравнение имеет вид

$$\Phi_t + \Phi_{xxx} - 3(D\Phi)(\Phi D\Phi)_x - 3\sigma(\Phi D\Phi)_x = 0, \quad (17)$$

где $\Phi(x, t, \theta) = \zeta(x, t) + \theta v(x, t)$ – фермионное суперполе. Положив $\Phi = D \ln(g/f)$ и применив билинейный формализм Хироты, получим

$$(\mathbf{D}_T + \mathbf{D}_X^3 + 3\sigma \mathbf{D}_X^2)g \cdot f = 0, \quad (\mathbf{S}_X^3 + \sigma \mathbf{S}_X)g \cdot f = 0, \quad (18)$$

где $X = x - 3\sigma^2 t$, $T = t$.

Суперсолитонное решение уравнения (17) имеет ту же структуру, что и решение, полученное в фокусирующем случае, но имеются существенные различия, которые будут отмечены далее.

Односуперсолитонное решение записывается как

$$f = 1 + ae^{\eta + \theta \xi}, \quad g = 1 + be^{\eta + \theta \xi}, \quad (19)$$

где $\eta = kX + \omega T$, $\omega = -k^3 + 3k\sigma^2$, $a = 1 + k/\sigma$, $b = 1 - k/\sigma$ и ξ – произвольная грассманова нечетная константа. Имеем

$$\begin{aligned} \Phi_{1\text{-ss}} &= D\phi = D \ln \frac{g}{f} = D \ln \frac{1 + be^{\eta + \theta \xi}}{1 + ae^{\eta + \theta \xi}} = \\ &= -\frac{k}{\sigma} \frac{\xi}{1 + \sqrt{ab} \operatorname{ch}(\eta + \ln \sqrt{ab})} - \frac{k^2}{\sigma} \frac{\theta}{1 + \sqrt{ab} \operatorname{ch}(\eta + \ln \sqrt{ab})}. \end{aligned} \quad (20)$$

При $\sigma = -2$ бозонная часть нашего решения совпадает с полученной в работе [13].

Двухсуперсолитонное решение задается формулами

$$\begin{aligned} f &= 1 + a_1 e^{\eta_1 + \theta \xi_1} + a_2 e^{\eta_2 + \theta \xi_2} + A_{12} a_1 a_2 (1 + \beta_{12} \xi_1 \xi_2) e^{\eta_1 + \eta_2 + \theta(\alpha_{12} \xi_1 + \alpha_{21} \xi_2)}, \\ g &= 1 + b_1 e^{\eta_1 + \theta \xi_1} + b_2 e^{\eta_2 + \theta \xi_2} + A_{12} b_1 b_2 (1 + \beta_{12} \xi_1 \xi_2) e^{\eta_1 + \eta_2 + \theta(\alpha_{12} \xi_1 + \alpha_{21} \xi_2)}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \left(\frac{k_i - k_j}{k_i + k_j} \right)^2, & \beta_{ij} &= \frac{2}{k_i - k_j}, \\ \alpha_{ij} = -\alpha_{ji} &= \frac{k_i + k_j}{k_i - k_j}, & a_i &= 1 + \frac{k_i}{\sigma}, & b_i &= 1 - \frac{k_i}{\sigma} \end{aligned}$$

и $\eta_i = k_i X + (-k_i^3 + 3k_i \sigma^2)T$, $i = 1, 2$, а ξ_1, ξ_2 – произвольные грассмановы нечетные константы.

Суперударные волны и смешанные решения. В отличие от фокусирующего суперуравнения Гарднера, дефокусирующий случай допускает решения в виде ударных волн. Они появляются только при $k = -\sigma$. Вводя это условие в формулы (19), получаем

$$\begin{aligned} \Phi &= D\phi = D \ln \frac{g}{f} = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{th} \left(-\frac{\sigma}{2} (X + 2\sigma^2 T) + \frac{\ln 2}{2} \right) \right) \xi - \frac{\sigma}{2} \left(1 + \operatorname{th} \left(-\frac{\sigma}{2} (X + 2\sigma^2 T) + \frac{\ln 2}{2} \right) \right) \theta. \end{aligned}$$

Бозонная часть этого решения при $\sigma = -2$ совпадает с полученным в работе [13] решением дефокусирующего уравнения Гарднера в виде ударной волны.

Можно также получить смешанное решение (один суперсолитон и одна ударная суперволна):

$$\Phi = D\phi = D \ln \frac{1 + b_1 e^{\eta_1 + \theta \xi_1} + 2e^{\eta_2 + \theta \xi_2} + 2A_{12} b_1 (1 + \beta_{12} \xi_1 \xi_2) e^{\eta_1 + \eta_2 + \theta(\alpha_{12} \xi_1 + \alpha_{21} \xi_2)}}{1 + a_1 e^{\eta_1 + \theta \xi_1}},$$

где величины $\beta_{12}, b_1, A_{12}, a_1$ те же, что и выше.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе супербилинейный формализм используется для анализа интегрируемости и суперсолитонных решений суперсимметричного обобщения уравнения Гарднера. В отличие от классического случая, это обобщение нельзя получить, наложив ненулевые граничные условия. Доказано, что уравнение допускает по крайней мере три суперсолитонных решения, поэтому оно вполне интегрируемо. Суперсолитонные решения отличаются разнообразием, поэтому мы обсуждаем также суперрациональные решения, полученные в так называемом “длинноволновом пределе”, который много лет назад изучался Абловицем и Сацумой. Показано, что суперрациональные и суперсолитонные решения при взаимодействии проявляют то же поведение, что и в классическом случае: суперсолитон остается без изменения, в то время как суперрациональное решение приобретает зависящий от θ сдвиг. Проанализирован также случай дефокусирующего суперсимметричного уравнения Гарднера и построены суперсолитонное решение и решение в виде ударной суперволны.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Перечислим несколько свойств билинейного суперсимметричного оператора Хироты, полезных при выводе билинейных форм и суперсолитонных решений:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_x^{2N} a \cdot b &= \mathbf{D}_x^N a \cdot b, \quad \mathbf{S}_x^{2N+1} a \cdot b = \mathbf{S}_x \mathbf{D}_x^N a \cdot b, \quad \mathbf{S}_x a \cdot b = (Da)b - (-1)^{|a|} a(Db), \\ \mathbf{S}_x^{2N+1} e^{\eta_1} \cdot e^{\eta_2} &= (\zeta_1 - \zeta_2 + \theta(k_1 - k_2))(k_1 - k_2)^N e^{\eta_1 + \eta_2}, \\ \mathbf{S}_x^{2N+1} 1 \cdot e^\eta &= (-1)^{N+1} (\zeta + \theta k) k^N e^\eta = (-1)^{N+1} \mathbf{S}_x^{2N+1} e^\eta \cdot 1,\end{aligned}$$

где $\eta_i = k_i x + \theta \zeta_i$, а ζ_i – нечетные грассмановы числа.

Список литературы

- [1] A. S. Carstea, *Nonlinearity*, **13**:5 (2000), 1645–1656.
- [2] A. S. Carstea, A. Ramani, B. Grammaticos, *Nonlinearity*, **14** (2001), 1419–1424.
- [3] B. Grammaticos, A. Ramani, A. S. Carstea, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **34**:23 (2001), 4881–4886.
- [4] A. S. Carstea, A. Ramani, B. Grammaticos, *Chaos Solitons Fractals*, **14**:1 (2002), 155–158.
- [5] A. S. Carstea, D. Grecu, A. Visinescu, *Europhys. Lett.*, **67**:4 (2004), 531–537.
- [6] Q. P. Liu, X.-B. Hu, M.-X. Zhang, *Nonlinearity*, **18**:4 (2005), 1597–1604.
- [7] Q. P. Liu, X.-B. Hu, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **38**:28 (2005), 6371–6378.
- [8] Q. P. Liu, X.-X. Yang, *Phys. Lett. A*, **351**:3 (2006), 131–135.
- [9] E. Fan, *Stud. Appl. Math.*, **127**:3 (2011), 284–301.
- [10] M.-X. Zhang, Q. P. Liu, Y.-L. Shen, K. Wu, *Sci. China A: Math.*, **52**:9 (2009), 1973–1981.
- [11] A. S. Carstea, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **48**:28 (2015), 285201, 13 pp.
- [12] M. J. Ablowitz, J. Satsuma, *J. Math. Phys.*, **19**:10 (1978), 2180–2186.
- [13] Y. Chen, P. L.-F. Liu, *Wave Motion*, **24**:2 (1996), 169–184.

Поступила в редакцию 21.09.2015