Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Л. Лакштанов, Б. Р. Вайнберг, Тест на существование исключительных точек в задаче рассеяния Фаддеева, *ТМФ*, 2017, том 190, номер 1, 87–103

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9056>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 16:53:15

© 2017 г.

Е. Л. Лакштанов*, Б. Р. Вайнберг†

ТЕСТ НА СУЩЕСТВОВАНИЕ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ ТОЧЕК В ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ ФАДДЕЕВА

Исключительными точками называются такие значения спектрального параметра, для которых однородная задача рассеяния Фаддеева имеет нетривиальное решение. Сформулирован критерий существования исключительных точек, принадлежащих данной траектории. Для этого используются расчеты в концах траектории. Изучается также проблема наличия или отсутствия исключительных точек для малых возмущений проводящего потенциала произвольной формы; показано, что в задаче с поглощающим потенциалом не существует исключительных точек в окрестности начала координат.

Ключевые слова: исключительные точки, фаддеевская функция Грина, проводящий потенциал.

DOI: 10.4213/tmf9056

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматривается двумерная задача рассеяния Фаддеева, в которой падающие волны экспоненциально растут на бесконечности [1]. Эта задача часто используется при решении обратных задач [2]–[4]. Решение обратной задачи зависит от существования и локализации исключительных точек задачи рассеяния Фаддеева (подробности приводятся далее). Указанные точки являются объектом изучения в нашей работе.

Напомним формулировку задачи Фаддеева. Пусть $\mathcal{O}$ – открытая ограниченная область в $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}_z^2$, $z = (x, y)$, с C^2 -границей $\partial\mathcal{O}$ и внешней нормалью ν . Пусть

Работа Е. Л. Лакштанова получила поддержку Center for Research and Development in Mathematics and Applications и Portuguese Foundation for Science and Technology (“FCT–Fundação para a Ciência e a Tecnologia”) в рамках проекта PEst-OE/MAT/UI4106/2014. Работа Б. Р. Вайнберга частично поддержана NSF (грант DMS-1410547).

*Department of Mathematics, University of Aveiro, Aveiro, Portugal. E-mail: lakshtanov@ua.pt

†Department of Mathematics and Statistics, University of North Carolina, Charlotte, USA. E-mail: brvainbe@uncc.edu

$\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$ – отличный от нулевого вектор с комплексными компонентами $\zeta_i \in \mathbb{C}$, причем $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 = E \geq 0$. В основном мы рассмотрим случай $E = 0$, т. е. $\zeta = (k, \pm ik)$, $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тогда $u = u(z, \zeta)$ является решением задачи рассеяния Фаддеева, если

$$-\Delta u - nu = 0, \quad z \in \mathbb{R}^2, \quad (1)$$

$$u(z, \zeta) = e^{i\zeta \cdot z} + u^{\text{out}}, \quad e^{-i\zeta \cdot z} u^{\text{out}} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^2), \quad p > 2, \quad (2)$$

где $\zeta \cdot z = \zeta_1 x + \zeta_2 y$. Потенциал $n = n(z)$ ограничен в области $\mathcal{O}$, является комплекснозначным, если не оговорено обратное, и равен нулю вне области $\overline{\mathcal{O}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $E = 0$. Точка $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ называется *исключительной*, если однородная задача (1), (2) при $\zeta = (k, \pm ik)$ имеет нетривиальное решение. Однородная задача имеет вид

$$-\Delta v - nv = 0, \quad z \in \mathbb{R}^2, \quad e^{-i\zeta \cdot z} v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^2), \quad p > 2. \quad (3)$$

Говорят, что исключительная точка имеет *кратность* m , если размерность пространства решений задачи (3) равна m .

Мы ограничимся случаем $\zeta = (k, ik)$, $k \in \mathbb{C}$, случай $\zeta = (k, -ik)$, $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, рассматривается аналогичным образом (см. рассуждения в работе [2], с. 76). Множество исключительных точек обозначим как $\mathcal{E}$.

Если энергия положительна, то уравнение (1) нужно заменить на уравнение

$$-\Delta u - Eu - nu = 0, \quad z = (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (4)$$

В этом случае вместо параметризации $\zeta = (k, ik)$ используется следующая параметризация вектора $\zeta \in \mathbb{C}^2$, $\zeta^2 = E > 0$ (см. работу [4]):

$$\zeta = \begin{pmatrix} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) \frac{\sqrt{E}}{2} \\ \left(\frac{1}{\lambda} - \lambda\right) \frac{i\sqrt{E}}{2} \end{pmatrix}, \quad |\lambda| \neq 1.$$

Фундаментальное решение, соответствующее уходящим волнам, которые описываются уравнением (4), имеет вид

$$G_\zeta(z) = e^{i\zeta \cdot z} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{iz' \cdot z}}{|z'|^2 + 2\zeta \cdot z'} dz',$$

при этом условие (2) нужно заменить на условие, что решение u выражается через G следующим образом:

$$u(z, \zeta) = e^{i\zeta \cdot z} + \int_{\partial\mathcal{O}} G_\zeta(z - w) \mu_\zeta(w) dl_w, \quad \mu \in H^{-1/2}(\partial\mathcal{O}), \quad z \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}, \quad (5)$$

где dl_w – элемент длины.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $E > 0$. Точка $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $|\lambda| \neq 1$, называется *исключительной*, если задача (4), (5) имеет нетривиальное решение. Кратность исключительной точки определяется как число линейно независимых решений уравнений (4), (5). Множество всех исключительных точек обозначается как $\mathcal{E}(E)$.

Заметим, что падающие волны в классической задаче рассеяния (с положительной энергией) имеют вид $e^{i\sqrt{E}(\omega_1 x + \omega_2 y)}$, где (ω_1, ω_2) – действительный единичный вектор. В этом случае множество исключительных точек будет пустым из-за отсутствия собственных значений, погруженных в непрерывный спектр (очень простое доказательство можно найти в работе [5]). Аналогичные соображения не работают в задаче рассеяния Фаддеева, поскольку уходящие решения уравнений (3) и (4) не затухают на бесконечности.

Знать исключительные точки особенно важно, когда задача рассеяния Фаддеева применяется для решения обратной задачи восстановления потенциала n по отображению Дирихле–Нейман F_n на границе $\partial\mathcal{O}$, которое определяется по решениям либо уравнения (1), либо уравнения (4) в области $\mathcal{O}$. Например, если действительный потенциал продолжить нулем вне области $\mathcal{O}$, то, при условии отсутствия исключительных точек, для решения u уравнения (1) справедливо следующее соотношение (см., например, работу [2] и рассуждения после формулы (21) в работе [6]):

$$e^{-i\zeta \cdot z} u(z, k) = 1 - \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{t(k')}{(k' - k)k'} e_{-z}(k') \overline{e^{-i\zeta' \cdot z} u(z, k')} dk'_1 dk'_2. \quad (6)$$

Здесь $e_z(k) = e^{kz + \bar{k}\bar{z}}$, а коэффициент $t(k)$ – так называемое прямое преобразование рассеяния, которое можно вычислить по F_n :

$$t(k) = \int_{\partial\mathcal{O}} e^{i\bar{k}z} [(F_n - F_0)u](z, k) dl_z. \quad (7)$$

Функцию u на границе $\partial\mathcal{O}$ в формуле (7) можно найти без использования потенциала (см. далее формулу (13)).

Чтобы завершить решение обратной задачи, нужно также знать, что решение интегрального уравнения (6) единственно. Тогда потенциал $n(z)$ можно найти с помощью развитого в работе [2] подхода или просто в виде $-\Delta u/u$ [7], [8].

Метод обратной задачи был обоснован в случае проводящего потенциала [2]. Такой потенциал имеет вид $n = -q^{-1/2} \Delta q^{1/2}$, где q – гладкая неотрицательная функция, причем $q - 1$ обращается в ноль вне $\mathcal{O}$. В этом случае уравнение (1) сводится к уравнению $\nabla(q\nabla v) = 0$ с помощью подстановки $u = \sqrt{q}v$. Задача с так называемыми субкритическими потенциалами изучалась в работе [6].

Исключительные точки для знакоопределенных возмущений проводящих потенциалов были исследованы в работах [9], [10] при условии сферической симметрии потенциала и его возмущения. В этом случае существование или отсутствие исключительных точек зависит от знака возмущения.

Аналогичным образом можно продолжить потенциал ненулевой действительной константой E вне области $\mathcal{O}$. Отсутствие исключительных точек и единственность решения соответствующего интегрального уравнения в случае достаточно малых потенциалов было подтверждено в работе [11], а в случае произвольных потенциалов, но если энергия E достаточно велика, – в работе [4].

Интегральное уравнение, аналогичное уравнению (6), было получено в некоторых случаях (см. соотношения (8.27), (8.28) в [4]) при условии, что в окрестности начала координат, а также в окрестности бесконечности исключительные точки отсутствуют. Предложенные в разделе 8 статьи [4] идеи были перенесены в работе [12] на общий метод восстановления потенциала при наличии исключительных точек.

Напомним оригинальную конструкцию уравнения (6) (см. работу [13]), которая справедлива для энергии $E > 0$, когда потенциалы настолько малы, что исключительные точки не существуют. Соответствующее уравнение имеет вид

$$u(\lambda, z) = e^{i(\sqrt{E}/2)(\lambda\bar{z}+z/\lambda)} + (T_0 u(\cdot, z))(\lambda) + \int_{|\varsigma|=1} \frac{d\varsigma}{\varsigma - \lambda} \int_{|\varsigma'|=1} W_0(\varsigma, \varsigma') h(\varsigma, \varsigma') u^-(\varsigma') d\varsigma', \quad (8)$$

где функция u непрерывна в $\mathbb{R}^2 \setminus S^1$, а $\mu(\cdot, z) = u(\cdot, z)e^{-i(\sqrt{E}/2)(\lambda\bar{z}+z/\lambda)}$ стремится к нулю при $|\lambda| \rightarrow 0, \infty$. В уравнении (8)

$$(T_0 \phi)(\lambda) = \int_{\mathbb{C}} r(\lambda) \phi(\varsigma, z) \frac{d\operatorname{Re} \varsigma d\operatorname{Im} \varsigma}{\lambda - \varsigma}, \quad (9)$$

$$W_0(\lambda, \varsigma) = \int_{|\eta|=1} \frac{1}{2(\varsigma - \eta)} \theta \left[\operatorname{sgn}(|\lambda|^2 - 1) i \left(\frac{|\lambda|\eta}{\lambda} - \frac{\lambda}{|\lambda|\eta} \right) \right] |d\eta|, \quad \lambda, \varsigma \in \partial\Lambda,$$

а u^- – внутренний след функции u на единичной окружности $|\lambda| = 1$. Функция $r(\cdot)$ имеет вид

$$r(\lambda) = \frac{\operatorname{sgn}(|\lambda|^2 - 1)}{\bar{\lambda}} \pi h \left(-\frac{1}{\bar{\lambda}}, \lambda \right), \quad |\lambda| \neq 0, 1, \quad (10)$$

где h – данные рассеяния,

$$h(\varsigma, \lambda) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\sqrt{E}/2)(\varsigma\bar{z}+z/\varsigma)} v(z) \psi(z, \lambda) dx dy, \quad |\lambda|, |\varsigma| \neq 1. \quad (11)$$

При наличии исключительных точек нужно выбрать множество контуров, которые охватывают множество $\mathcal{E}$ исключительных точек. Например, можно взять просто границу кольца $A^{-1} < |\lambda| < A$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}_\lambda$ с достаточно большим A , но также можно взять множество контуров, которые охватывают по отдельности каждую из связных компонент множества $\mathcal{E}$. Последний вариант может быть полезным при изучении вклада этих компонент в решение обратной задачи.

Множество $\mathcal{E}$ исключительных точек инвариантно относительно отображения $\lambda \rightarrow -1/\bar{\lambda}$. Пусть $\Gamma = \{\Gamma_i\}$ – множество таких областей на плоскости $\mathbb{C}_\lambda$, что $\cup\{\Gamma_i\}$ инвариантно относительно отображения $\lambda \rightarrow -1/\bar{\lambda}$ и множество $\mathcal{E}$ содержится строго внутри $\cup\{\Gamma_i\}$. Рассмотрим уравнение (8) с заменой оператора T_0 на

$$(T_0 \phi)(\lambda) = \int_{\mathbb{C} \setminus \cup \Gamma_i} r(\lambda) \phi(\varsigma, z) \frac{d\operatorname{Re} \varsigma d\operatorname{Im} \varsigma}{\lambda - \varsigma} + \sum_i \int_{\partial \Gamma_i} \frac{d\varsigma}{\varsigma - \lambda} \int_{\partial \Gamma_i} W(\varsigma, \varsigma') h(\varsigma, \varsigma') \phi_i^-(\varsigma') d\varsigma', \quad (12)$$

где ϕ_i^- – след функции ϕ на границе $\partial \Gamma_i$, полученный как предел при стремлении аргумента функции ϕ к границе изнутри области Γ_i . Явный вид функции W был найден в работе [12]. Из результатов этой работы следует, что решение уравнения (8) с оператором T_0 вида (12) совпадает с решением задачи рассеяния Фаддеева при $\lambda \notin \cup \Gamma_i$. Последнее замечание позволяет восстановить потенциал при наличии исключительных точек. Эти результаты демонстрируют важность методов, дающих возможность локализовать исключительные точки.

Описание полученных результатов. В настоящей работе получен некоторый критерий локализации исключительных точек. Для определенности мы полагаем, что $E = 0$ во всех случаях, когда явно не указано, что $E > 0$ или $E \geq 0$.

Решение $u(z, k)$ уравнений (1), (2) можно найти путем сведения задачи к уравнению Липпмана–Швингера, что дает (см., например, работу [3])

$$u(z, k) = (I + S_k(F_n - F_0))^{-1} e^{i\zeta \cdot z}, \quad z \in \partial\mathcal{O}. \quad (13)$$

Здесь F_n – отображение Дирихле–Нейман для уравнения $(-\Delta - n)u = 0$ в $\mathcal{O}$, $F_0 = F_n|_{n=0}$ и $S = S_k$ – однослойный оператор на границе с фаддеевской функцией Грина $G_k(z)$:

$$S_k: H^{-1/2}(\partial\mathcal{O}) \rightarrow H^{1/2}(\partial\mathcal{O}), \quad S_k\sigma(z) = \int_{\partial\mathcal{O}} G_k(z - z')\sigma(z') dl_{z'}, \quad z \in \partial\mathcal{O}, \quad (14)$$

где

$$G_k(z) = \frac{1}{(2\pi)^2} e^{i\zeta \cdot z} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{i(\xi_1 x + \xi_2 y)}}{|\xi|^2 + 2k\xi} d\xi_1 d\xi_2, \quad \xi = \xi_1 + i\xi_2.$$

Функция G_k принимает действительные значения (см., например, п. 3.1.1 в статье [14]). В самом деле, второе условие в задаче (3) мы можем представить в виде $|e^{i\zeta \cdot z}|u^{\text{out}} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$. Отсюда следует, что $\text{Re } G_k$ – функция Грина, в то время как $\text{Im } G_k = 0$ в силу единственности, доказанной Нахманом в работе [2].

Уравнение (13) является основой стандартного метода изучения множества исключительных точек $\mathcal{E}$: исключительные точки можно определить как значения параметра $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, для которых семейство несамосопряженных операторов вида

$$I + S_k(F_n - F_0) \quad (15)$$

имеет нетривиальное ядро. Естественно рассматривать $S_k(F_n - F_0)$ как оператор в $L_2(\partial\mathcal{O})$ или в пространстве Соболева $H^s(\partial\mathcal{O})$, где значения s ограничены только гладкостью границы $\partial\mathcal{O}$. Второе слагаемое в (15) есть компактный оператор в каждом из указанных пространств, а ядро оператора (15) не зависит от выбора пространства.

Наш подход к изучению множества $\mathcal{E}$ основан на установлении связи между исключительными значениями k и ядрами операторов $F_n - F^{\text{out}}(k)$, которые проще контролировать, чем ядра операторов (15). Здесь $F^{\text{out}}(k)$ – отображение Дирихле–Неймана для внешней задачи рассеяния Фаддеева в $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}$.

Раздел 2 начинается с изучения некоторых свойств оператора $F^{\text{out}}(k)$, а затем мы доказываем, что точка $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ является исключительной тогда и только тогда, когда ядро оператора $F_n - F^{\text{out}}(k)$ нетривиально; кроме того, размерность ядра совпадает с кратностью исключительной точки (т. е. с размерностью пространства решений задачи (3)).

В разделе 3 содержатся два основных результата работы. Они следуют из полученного в разделе 2 нового критерия существования исключительных точек. Первый результат – это отсутствие исключительных точек в окрестности начала координат $k = 0$ в случае поглощающих потенциалов. Второй результат обобщает результаты работ [9], [10] о знакоопределенных возмущениях проводящих потенциалов на сферически несимметричные задачи. Мы не предполагаем наличия радиальной

симметрии ни у соответствующего проводящего потенциала, ни у его возмущения. Доказано, что для возмущений некоторого конкретного знака исключительные точки отсутствуют, а для возмущений противоположного знака существует множество исключительных точек. Это множество близко к окружности с центром в начале координат.

В последнем коротком разделе 4 приводится критерий существования исключительных точек.

2. РЕДУКЦИЯ К ГРАНИЧНЫМ ОПЕРАТОРАМ

В этом разделе мы рассмотрим задачу рассеяния Фаддеева (1), (2) с нулевой энергией. Без ограничения общности предположим, что уравнение $-\Delta v - nv = 0$ в $\mathcal{O}$ не имеет нетривиальных решений, которые обращаются в ноль на границе (т. е. ноль не является собственным значением внутренней задачи Дирихле). Другими словами, оператор F_n хорошо определен. Можно убедиться в справедливости этого условия, незначительно расширив область $\mathcal{O}$, сохраняя при этом функцию n .

Рассмотрим внешнюю задачу Дирихле

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0, \quad z \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathcal{O}}, \quad u|_{\partial\mathcal{O}} = f \in H^{1/2}(\partial\mathcal{O}), \\ e^{-i\zeta \cdot z} u &\in W^{1,p}(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathcal{O}}), \quad p > 2. \end{aligned} \quad (16)$$

Обозначим через $F^{\text{out}}(k): H^{1/2}(\partial\mathcal{O}) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\mathcal{O})$ оператор, отображающий данные Дирихле f в производную решения задачи (16) по внешней (по отношению к $\mathcal{O}$) нормали u_ν , взятую на границе $\partial\mathcal{O}$. Обозначим через $\mathcal{E}_D$ множество значений параметра $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, для которых однородная задача (16) имеет нетривиальное решение (нижний индекс D означает Дирихле).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем множество $\{k = k_1 + ik_2\} \subset \mathbb{C}$ *действительным одномерным аналитическим многообразием*, если множество соответствующих точек $(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$ является пересечением одномерного аналитического многообразия в $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}_{k_1, k_2}^2$ с евклидовым пространством $\mathbb{R}^2$.

Обратим внимание на обозначение k . Его мы будем использовать для точек $k = k_1 + ik_2$ комплексной плоскости. Если же эти точки нужно считать векторами в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$, будем использовать обозначение (k_1, k_2) вместо k .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что оператор A имеет *действительное интегральное ядро*, если $A\bar{f} = \bar{A}f$ для любой функции f из области определения оператора A . Оператор $A^\dagger := (A - A^*)/2i$ называется *несамосопряженной частью* оператора A .

Введем параметр

$$\varepsilon = \varepsilon(k) := \left[-\nu \left(\frac{\gamma}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \ln |k| \right) \right]^{-1}, \quad |k| \ll 1,$$

где γ – постоянная Эйлера, а $\nu = |\partial\mathcal{O}|$ – длина границы.

Следующая лемма имеет отношение к внешней задаче Фаддеева (16).

ЛЕММА 2.1. *Имеют место следующие утверждения.*

1. Множество $\mathcal{E}_D \subset \mathbb{C}$ является действительным аналитическим многообразием и совпадает с множеством $\mathcal{K}$ значений $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, для которых ядро оператора S_k нетривиально. Оператор S_k является сюръективным, если $k \notin \mathcal{E}_D \cup \{0\}$.

2. Отображение Дирихле–Нейман

$$F^{\text{out}}(k): H^{1/2}(\partial\mathcal{O}) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\mathcal{O}), \quad k \notin \mathcal{E}_D \cup \{0\},$$

для внешней задачи Фаддеева (16) существует, аналитично по каждой из переменных k_1, k_2 и является эллиптическим псевдодифференциальным оператором первого порядка с отрицательным символом.

3. Оператор $F^{\text{out}}(k): H^{1/2}(\partial\mathcal{O}) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\mathcal{O})$ с $k \neq 0$ допускает непрерывное продолжение в точку $k = 0$. Если $|k|$ достаточно мал, то расширенный оператор является бесконечно гладкой функцией параметров $\varepsilon(k) \geq 0$ и $\arg k$, а также обладает следующими свойствами: он самосопряжен, имеет изолированное простое собственное значение $\lambda = 0$, которому отвечают постоянные собственные функции, и существует такое $\delta > 0$, что $F^{\text{out}}(0) \leq -\delta < 0$ на подпространстве $H^{1/2,\perp}(\partial\mathcal{O})$.

4. Оператор $F^{\text{out}}(k)$ с $k \notin \mathcal{E}_D \cup \{0\}$ имеет действительнозначное интегральное ядро. При этом несамосопряженная часть оператора $F^{\text{out}}(k)$ является сглаживающим оператором, норма которого обращается в ноль при $|k| \rightarrow 0$. Точнее,

$$\|(F^{\text{out}})^\dagger \varphi\|_{H^{1/2}(\partial\mathcal{O})} \leq C|k| \cdot \|\varphi\|_{H^{-1/2}(\partial\mathcal{O})}. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с проблемы обратимости оператора S_k (заданного формулой (14)) при $k \rightarrow 0$. В частности, докажем, что множество $\mathcal{K}$ (значений параметра $k \neq 0$, для которых оператор S_k имеет нетривиальное ядро) является действительным аналитическим многообразием. Ниже мы покажем, что множество $\mathcal{K}$ совпадает с множеством $\mathcal{E}_D$, и поэтому последнее множество также является действительным аналитическим многообразием. Докажем, что оператор S_k обратим при $k \rightarrow 0$.

Пусть

$$G_k^0(z) = -\frac{1}{2\pi} \ln |z| - \frac{\gamma}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \ln |k|,$$

где γ – постоянная Эйлера, и пусть $S_k^0: H^{-1/2}(\partial\mathcal{O}) \rightarrow H^{1/2}(\partial\mathcal{O})$ – однослойный оператор (аналогичный оператору (14)), заданный ядром $G_k^0(z)$:

$$S_k^0 \sigma(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathcal{O}} G_k^0(z - z') \sigma(z') dl_{z'}, \quad z \in \partial\mathcal{O}. \quad (18)$$

Обозначим через $H^{\pm, \perp}(\partial\mathcal{O})$ линейные подпространства в пространствах соответственно $H^{\pm 1/2}(\partial\mathcal{O})$, состоящие из функций φ таких, что $\int_{\partial\mathcal{O}} \varphi ds = 0$. Каждый элемент $\psi \in H^{\pm 1/2}(\partial\mathcal{O})$ можно представить единственным образом в виде вектора

$$\begin{pmatrix} c \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad c = \frac{1}{|\partial\mathcal{O}|} \int_{\partial\mathcal{O}} \psi ds, \quad \varphi = \psi - c.$$

Компоненты вектора ψ ортогональны только в $L_2(\partial\mathcal{O})$, но нормы в исходных пространствах Соболева, очевидно, эквивалентны соответствующим нормам Гильберта–Шмидта, т. е. $\|\psi\| \sim (|c|^2 + \|\varphi\|^2)^{1/2}$.

Запишем операторы S_k , S_k^0 в матричном виде, используя указанные векторные представления пространств Соболева $H^{\pm 1/2}(\partial\mathcal{O})$. В частности,

$$S_k^0 = \begin{pmatrix} -\nu \left(\frac{\gamma}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \ln |k| \right) & b_1 \\ b_2 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & b_1 \\ b_2 & B \end{pmatrix}, \quad (19)$$

где $B: H^{-1/2,\perp}(\partial\mathcal{O}) \rightarrow H^{1/2,\perp}(\partial\mathcal{O})$ – однослойный оператор (аналогичный оператору (18)) с ядром $-(1/2\pi) \ln |z - z'|$. В (19) $\nu = |\partial\mathcal{O}|$, а операторы b_1 , b_2 , B ограничены и не зависят от k . Оператор B является псевдодифференциальным оператором порядка -1 . Из стандартной теории потенциалов следует, что оператор B^{-1} ограничен.

В работе [9] доказано, что $N(kz) := G_k - G_k^0$ – бесконечно гладкая функция переменной kz , при этом $N(0) = 0$. Та же буква N используется для обозначения оператора с интегральным ядром $N(k(z - z'))$, т. е.

$$N := S_k - S_k^0: H^{-1/2}(\partial\mathcal{O}) \rightarrow H^{1/2}(\partial\mathcal{O}).$$

Тогда $\|N\| = O(|k|)$ при $k \rightarrow 0$. Норма экспоненциально мала по ε при $\varepsilon \rightarrow 0$, и ее можно оценить как $C_n \varepsilon^n$ с произвольным $n > 0$. Следовательно, для S_k справедливо следующее матричное представление при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$S_k = \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & b_1 \\ b_2 & B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(\varepsilon^n) & O(\varepsilon^n) \\ O(\varepsilon^n) & O(\varepsilon^n) \end{pmatrix}.$$

Пусть D – диагональная матрица с элементами ε^{-1} и B на диагонали. Умножим приведенное выше равенство слева на DD^{-1} . Тогда

$$S_k = \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} I & \varepsilon b_1 \\ B^{-1}b_2 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(\varepsilon^n) & O(\varepsilon^n) \\ O(\varepsilon^n) & O(\varepsilon^n) \end{pmatrix} \right], \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (20)$$

Второй множитель в правой части равенства – оператор в пространстве $H^{-1/2}(\partial\mathcal{O})$. Для всех матриц можно использовать нормы Гильберта–Шмидта, причем они эквивалентны нормам операторов, представленных этими матрицами. Очевидно, второй множитель в (20) является малым возмущением обратимой матрицы $\begin{pmatrix} I & 0 \\ B^{-1}b_2 & I \end{pmatrix}$. Таким образом,

$$(S_k)^{-1} = \left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ -B^{-1}b_2 & I \end{pmatrix} + O(\varepsilon) \right] \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(\varepsilon^2) & O(\varepsilon) \\ O(\varepsilon) & O(\varepsilon) \end{pmatrix}, \quad (21)$$

где $\varepsilon \rightarrow 0$, а остаточные члены являются бесконечно гладкими по ε . Обратимость оператора S_k при $0 \neq |k| \ll 1$ доказана.

Из последнего факта следует, что множество $\mathcal{K}$ значений k , для которых оператор S_k необратим, является действительным аналитическим многообразием. В самом деле, оператор S_k^0 – эллиптический псевдодифференциальный оператор порядка -1 на компактном многообразии $\partial\mathcal{O}$, и поэтому его индекс равен нулю. Тогда то же самое верно для оператора S_k , поскольку функция $G_k - G_k^0$ бесконечно гладкая по (z, k) и аналитическая по k_1 , k_2 , где $k = k_1 + ik_2 \neq 0$ (см., например, [9]).

Таким образом, операторы S_k образуют семейство операторов Фредгольма, аналитических по $(k_1, k_2) \neq (0, 0)$. Следовательно, если оператор S_k обратим в одной точке $k \neq 0$, то множество значений $(k_1, k_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, для которых ядро оператора S_k нетривиально, является одномерным аналитическим многообразием (см. теорему 4.11 в работе [15]). Пересечение этого многообразия с действительной плоскостью есть действительное аналитическое многообразие.

Покажем, что $\mathcal{E}_D = \mathcal{K}$. Пусть операторы $\hat{S}_k^0 : H^{-1/2}(\partial\mathcal{O}) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathcal{O}})$, где $p > 2$, являются однослойными операторами, заданными той же формулой, что и операторы S_k и S_k^0 в (14) и (18) соответственно, но для всех $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}$. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0, \quad z \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathcal{O}}, \quad u|_{\partial\mathcal{O}} = f \in H^{1/2}(\partial\mathcal{O}), \\ e^{-i\zeta \cdot z} u &\in W^{1,p}(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathcal{O}}), \quad p > 2. \end{aligned} \quad (22)$$

Пусть $k = k' \notin \mathcal{K}$. Тогда оператор $S_{k'}$ является сюръективным и существует функция $\mu \in H^{-1/2}(\partial\mathcal{O})$ такая, что $S_{k'}\mu = f$. Поэтому $u = \hat{S}_{k'}\mu$ является решением задачи (22). Если это решение единственно, то оператор F^{out} хорошо определен (формулой $F^{\text{out}}f = u_\nu|_{\partial\mathcal{O}}$) и $k' \notin \mathcal{E}_D$. Если решение $u = \hat{S}_{k'}\mu$ задачи (22) не единственное, то существует нетривиальное решение u однородной задачи (22) при $k = k'$. Обозначим через v решение u , продолженное нулем в $\mathcal{O}$. Тогда

$$-\Delta v = \alpha \delta(\partial\mathcal{O}), \quad z \in \mathbb{R}^2, \quad e^{-i\zeta \cdot z} v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^2), \quad p > 2, \quad (23)$$

где $\delta(\partial\mathcal{O})$ – дельта-функция на $\partial\mathcal{O}$ и $\alpha = u_\nu|_{\partial\mathcal{O}}$. Из единственности, доказанной Нахманом в работе [2] (см. лемму 1.3), следует, что $\alpha \neq 0$ (иначе $v \equiv 0$) и что $v = \hat{S}_{k'}\alpha \delta(\partial\mathcal{O})$. Таким образом, $0 = u|_{\partial\mathcal{O}} = S_{k'}\alpha$. Это противоречит предположению о том, что $k' \notin \mathcal{K}$. Поэтому $k' \notin \mathcal{E}_D$.

Теперь предположим, что $k = k' \in \mathcal{K}$. Тогда существует такая нетривиальная функция μ , что $S_{k'}\mu = 0$. Функция $v = \hat{S}_{k'}\alpha \delta(\partial\mathcal{O})$ является решением уравнения (23). Функция v обращается в ноль в $\mathcal{O}$, поскольку в этой области v – гармоническая функция и $v = 0$ на $\partial\mathcal{O}$. Скачок нормальной производной функции v пропорционален μ , поэтому функция v не равна нулю тождественно. Итак, v – нетривиальное решение однородной ($f = 0$) задачи (22). Тогда $k' \in \mathcal{E}_D$. Следовательно, $\mathcal{K} = \mathcal{E}_D$. Для завершения доказательства первого утверждения леммы остается вспомнить, что оператор S_k имеет нулевой индекс, и поэтому он является сюръективным, если ядро тривиально.

Докажем второе утверждение леммы. Справедлива следующая простая формула из теории потенциалов:

$$(F_0 - F^{\text{out}})S_k = I. \quad (24)$$

Эта формула влечет, что

$$F_0 - F^{\text{out}} = S_k^{-1}, \quad k \notin \mathcal{E}_D \cup \{0\}. \quad (25)$$

Поскольку правая часть равенства аналитична по k_1, k_2 и F_0 не зависит от k , оператор F^{out} аналитичен по k_1, k_2 при $k \notin \mathcal{E}_D \cup \{0\}$. Рассмотрим стандартное отображение Дирихле–Неймана F_b^{out} , заданное с помощью ограниченных решений внешней задачи для лапласиана (здесь нижний индекс b означает bounded). Разность $F^{\text{out}} - F_b^{\text{out}}$ является сглаживающим оператором, который отображает $H^{1/2}(\partial\mathcal{O})$ в $H^{3/2}(\partial\mathcal{O})$

(этот оператор бесконечно сглаживающий, если $\partial\mathcal{O} \in C^\infty$). Поэтому F^{out} – эллиптический псевдодифференциальный оператор первого порядка с отрицательным символом. Второе утверждение доказано.

Доказательство третьего утверждения леммы основано на формуле (25) и матричном представлении (21). Учтем также тот факт, что только нижний правый элемент в матричном представлении оператора F_0 является ненулевым. Для этого элемента оставим то же обозначение F_0 . Тогда

$$F^{\text{out}}(k) = F_0 - (S_k)^{-1} = \begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 \\ 0 & F_0 - B^{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(\varepsilon^2) & O(\varepsilon) \\ O(\varepsilon) & O(\varepsilon) \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Эта формула позволяет нам непрерывно продолжить $F^{\text{out}}(k)$ в точку $k = 0$. Это полностью докажет справедливость третьего утверждения леммы, если мы сумеем показать, что $F_0 - B^{-1} < -\delta < 0$.

Вспомним, что F_b^{out} является оператором Дирихле–Нейман, который отображает данные Дирихле на границе $\partial\mathcal{O}$ в нормальную производную u_ν соответствующего ограниченного решения u внешней задачи для лапласиана. Обозначим как $\tilde{S}$ однослойный оператор с ядром $-(1/2\pi) \ln |z - z'|$. По аналогии с формулой (24) имеем $(F_0 - \tilde{F}^{\text{out}})\tilde{S} = I$ на функциях, ортогональных константам. Отсюда следует, что $F_0 - F_b^{\text{out}} = B^{-1}$ на $H^{1/2,\perp}(\partial\mathcal{O})$. Из формулы Грина следует, что $F_b^{\text{out}} < 0$ на $H^{1/2,\perp}(\partial\mathcal{O})$. Поэтому $F_0 - B^{-1} < 0$ на $H^{1/2,\perp}(\partial\mathcal{O})$. Последний оператор не зависит от k . Он является эллиптическим псевдодифференциальным оператором первого порядка (сужением оператора F^{out} на подпространство коразмерности один), и поэтому его собственные значения стремятся к бесконечности. Таким образом, из отрицательности оператора $F_0 - B^{-1}$ следует, что $F_0 - B^{-1} < -\delta < 0$ на $H^{1/2,\perp}(\partial\mathcal{O})$.

Докажем последнее утверждение леммы. Вспомним, что ядро G_k оператора S_k действительно (см. п. 3.1.1 в работе [14] и рассуждения во введении к настоящей статье). Тогда интегральное ядро оператора F^{out} также действительно, поскольку два других оператора в (25) обладают этим свойством. Из равенства (25) следует также, что

$$(F^{\text{out}})^\dagger = -((S_k)^{-1})^\dagger. \quad (27)$$

Чтобы доказать оценку (17), нам необходимо рассмотреть некоторые операторы в пространствах Соболева с индексами $s \in [-3/2, 3/2]$, и это не должно вызвать трудности, поскольку мы предполагаем, что $\partial\mathcal{O} \in C^2$. Напомним, что $(S_k^0)^{-1}$ – псевдодифференциальный оператор первого порядка, а из (19) следует, что

$$\|(S_k^0)^{-1}\varphi\|_{H^{-3/2}(\partial\mathcal{O})} \leq C\|\varphi\|_{H^{-1/2}(\partial\mathcal{O})}, \quad 0 < |k| \ll 1. \quad (28)$$

В работе [9] доказано, что $N(kz) := G_k - G_k^0$ является бесконечно гладкой функцией переменной kz и $N(0) = 0$. Следовательно, для оператора $N = S_k - S_k^0$ справедлива следующая оценка:

$$\|N\varphi\|_{H^{3/2}(\partial\mathcal{O})} \leq C|k| \cdot \|\varphi\|_{H^{-3/2}(\partial\mathcal{O})}, \quad 0 < |k| < 1. \quad (29)$$

Это влечет оценку для оператора $(S_k)^{-1} = (S_k^0 + N)^{-1} = (S_k^0)^{-1}(I + N(S_k^0)^{-1})^{-1}$:

$$\|(S_k)^{-1}\varphi\|_{H^{-3/2}(\partial\mathcal{O})} \leq C\|\varphi\|_{H^{-1/2}(\partial\mathcal{O})}, \quad 0 < |k| \ll 1. \quad (30)$$

Зафиксируем теперь произвольную достаточно гладкую функцию φ и обозначим через $\psi = \psi(k)$ функцию $\psi = (S_k)^{-1}\varphi$, $0 < |k| \ll 1$. Тогда

$$(((S_k)^{-1})^\dagger \varphi, \varphi) = \text{Im}((S_k)^{-1}\varphi, \varphi) = \text{Im}(\psi, (S_k^0 + N)\psi) = \text{Im}(\psi, N\psi),$$

поскольку оператор S_k^0 самосопряжен. Из последнего равенства вместе с оценками (29), (30) следует, что

$$|(((S_k)^{-1})^\dagger \varphi, \varphi)| \leq |(\psi, N\psi)| \leq C|k| \cdot \|\psi\|_{H^{-3/2}(\partial\mathcal{O})}^2 \leq C|k| \cdot \|\varphi\|_{H^{-1/2}(\partial\mathcal{O})}^2, \quad 0 < |k| \ll 1.$$

Пусть $D: L_2(\partial\mathcal{O}) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\mathcal{O})$ – ограниченный обратимый оператор. Заменяем φ в приведенной выше оценке на $D\hat{\varphi} = \varphi$, тогда получим

$$|D^*(((S_k)^{-1})^\dagger D\hat{\varphi}, \hat{\varphi})| \leq C|k| \cdot \|\hat{\varphi}\|_{L_2(\partial\mathcal{O})}^2, \quad 0 < |k| \ll 1,$$

на плотном множестве в $L_2(\partial\mathcal{O})$. Поэтому

$$\|D^*(((S_k)^{-1})^\dagger D)\|_{L_2(\partial\mathcal{O})} \leq C|k|, \quad 0 < |k| \ll 1.$$

Данное неравенство вместе с соотношением (27) доказывает неравенство (17), и это завершает доказательство леммы.

Чтобы получить альтернативное определение множества $\mathcal{E}$ исключительных точек, сведем систему (1), (2) к задаче на границе:

$$u = u^{\text{out}} + e^{i\zeta \cdot z}, \quad F_n u = F^{\text{out}} u^{\text{out}} + F_0 e^{i\zeta \cdot z}, \quad z \in \partial\mathcal{O}. \quad (31)$$

Эта система немедленно влечет за собой следующее представление (эквивалентное представлению (13)) функции u на границе $\partial\mathcal{O}$:

$$u = (F_n - F^{\text{out}})^{-1}(F_0 - F^{\text{out}})e^{i\zeta \cdot z}. \quad (32)$$

Эквивалентность представлений (32) и (13) можно легко проверить с помощью равенства $F_n - F_0 = (F_n - F^{\text{out}}) + (F^{\text{out}} - F_0)$ и соотношения (24).

Итак, теперь у нас есть простое, но важное альтернативное определение множества $\mathcal{E}$ исключительных точек.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть оператор F_n хорошо определен. Точка $k \neq 0$ является исключительной тогда и только тогда, когда ядро оператора $F_n - F^{\text{out}}(k)$ нетривиально. Кроме того, кратность исключительной точки (т.е. число линейно независимых решений уравнения (3)) равна размерности $\text{Ker}(F_n - F^{\text{out}}(k))$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $k' \in \mathcal{E}_D$, т.е. оператор $F_n - F^{\text{out}}(k)$ имеет особенность в точке $k = k'$, то ядро представляет собой множество функций, на которых обращаются в ноль как сингулярная, так и главная часть оператора. Более строго, функция σ принадлежит ядру оператора, если $\lim[F_n - F^{\text{out}}(k)]\sigma = 0$ при $k \rightarrow k'$, $k \notin \mathcal{E}_D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Пусть $k \in \mathcal{E}$ и $\sigma = v|_{\partial\mathcal{O}}$, где v – нетривиальное решение уравнения (3). Из условия на оператор F_n следует, что $\sigma \neq 0$, а уравнение (3) влечет, что $F_n \sigma = F^{\text{out}} \sigma$. Таким образом, $F_n - F^{\text{out}}$ имеет нетривиальное ядро, которому принадлежит σ . Наоборот, предположим, что $\sigma \neq 0$ принадлежит

ядру оператора $F_n - F^{\text{out}}$ при некотором $k = k_0$. Зададим нетривиальное решение v уравнения (3) следующим образом. В области $\mathcal{O}$ определим его как решение задачи Дирихле, т.е. оно совпадает с σ на границе (напомним, что ноль не является собственным значением внутренней задачи Дирихле). На множестве $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathcal{O}}$ положим v равным решению u внешней задачи (16) с $f = \sigma$ при $k_0 \notin \mathcal{E}_D$. В остальных случаях определим v как $\lim_{k \rightarrow k_0} u$. Существование предела следует из вышеприведенного замечания.

3. ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ

Простым следствием теоремы 2.1 и леммы 2.1 является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть потенциал $n(x)$ абсорбирующий, т.е. $\text{Im } n(x) \geq \delta > 0$ на $\mathcal{O}$. Тогда в малой окрестности начала координат $k = 0$ не существует исключительных точек.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы Грина следует, что квадратичная форма

$$\begin{aligned} \text{Im}(F_n u, u) &= \text{Im} \int_{\partial \mathcal{O}} \frac{\partial u}{\partial \nu} \bar{u} \, dl = \text{Im} \int_{\mathcal{O}} \Delta u \bar{u} \, dS = \\ &= - \int_{\mathcal{O}} \text{Im } n(x) |u(x)|^2 \, dS \leq -\delta \int_{\mathcal{O}} |u(x)|^2 \, dS \end{aligned}$$

является знакоопределенной. Учтем, что стандартные оценки решений эллиптических уравнений справедливы в пространствах Соболева с отрицательным индексом, если уравнение однородно [16]. В частности, $\|u\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq C \|u\|_{H^{-1/2}(\partial \mathcal{O})}$ для решений u уравнения $-\Delta u - nu = 0$, $x \in \mathcal{O}$. Таким образом,

$$\text{Im}(F_n u, u) \leq -C\delta \|u\|_{H^{-1/2}(\partial \mathcal{O})}.$$

С другой стороны, из леммы 2.1 следует, что

$$\text{Im}(F^{\text{out}} u, u) \leq C|k| \cdot \|u\|_{H^{-1/2}(\partial \mathcal{O})}, \quad 0 < |k| \ll 1.$$

Поэтому оператор $\text{Im}(F_n - F^{\text{out}}(k))$ знакоопределен при малых $|k|$, а ядро оператора $F_n - F^{\text{out}}(k)$ тривиально при $0 < k \ll 1$. Остается применить теорему 2.1 и тем самым завершить доказательство.

Пусть n – проводящий потенциал, обращающийся в ноль вне $\mathcal{O}$. Это означает, что $n = -q^{-1/2} \Delta q^{1/2}$, где $q \in C^2(\mathbb{R}^2)$ – гладкая неотрицательная функция, причем $q - 1$ обращается в ноль вне $\mathcal{O}$. В работе [2] доказано, что для таких потенциалов не существует исключительных точек. В работе [9] рассмотрены возмущения проводящих потенциалов вида $n_\lambda = n(z) + \lambda \omega(z)$, где функция ω принимает действительные значения и определена на $\overline{\mathcal{O}}$. В этой работе доказано, что если считать потенциал радиальным, $n = n(|z|)$, $\omega = \omega(|z|)$, то при условии

$$\mu = \int_{\mathcal{O}} \omega q \, dS > 0 \tag{33}$$

для малых отрицательных λ множество исключительных точек является пустым, а для малых положительных λ множество исключительных точек существует. (Формально знак величины λ в нашем последнем утверждении противоположен знаку,

использованному в работе [9], поскольку мы используем волновое уравнение с другим знаком перед потенциалом). В работе [9] также показано, что множество исключительных точек является окружностью радиуса $e^{-(1+o(1))/\mu\lambda}$, где $\lambda \rightarrow +0$.

Наш подход позволяет распространить результаты на случай нерадиальных потенциалов. В этом случае множество исключительных точек уже не является окружностью, но приближается к окружности при $\lambda \rightarrow +0$. Рассмотрим переменные

$$\varepsilon = \left[-\nu \left(\frac{\gamma}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \ln |k| \right) \right]^{-1}, \quad \varphi = \arg k, \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $n_\lambda = n(z) + \lambda\omega(z)$, где n – проводящий потенциал (с действительными значениями), ω – действительнoзначная функция, $n(z) = \omega(z) = 0$ при $z \notin \overline{O}$ и выполняется условие (33).

Если $\lambda < 0$ достаточно мало, то множество $\mathcal{E}$ исключительных точек пусто. Более того, для преобразования рассеяния верна следующая оценка (7):

$$|t(k)| < \frac{C(\lambda)}{|\ln |k||}, \quad k \rightarrow 0.$$

Если $\lambda > 0$ достаточно мало, то исключительные точки существуют только в окрестности начала координат, при этом множество исключительных точек задается уравнением $\varepsilon = \mu\lambda(1+o(1))$, $\lambda \rightarrow +0$, в котором остаток гладко зависит от λ и φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем (см., например, соотношение (3.18) в работе [4])

$$|G_k(z)e^{-i\zeta \cdot z}| \leq \frac{c}{\sqrt{|k|}\sqrt{|z|}}, \quad c > 0, \quad E = 0. \quad (34)$$

Отсюда следует однозначная разрешимость уравнения Липпмана–Швингера

$$u - e^{i\zeta \cdot z} = -G_k * (n_\lambda u),$$

если $|n_\lambda| < C$ и параметр $|k|$ достаточно велик. Для таких k и λ задача (3) имеет только тривиальное решение. Следовательно, существует такое $K_0 > 0$, что в области $|k| > K_0$ нет точек $k \in \mathcal{E}$, когда $|n_\lambda| < C$ (подробности см. в доказательстве следствия 3.5 в работе [9]).

Теперь покажем, что исключительные точки потенциала n_λ могут существовать только в малой окрестности начала координат $k = 0$. Действительно, F_n есть псевдодифференциальный оператор первого порядка с положительным главным символом. По лемме 2.1 оператор $F^{\text{out}}(k)$ при $k \neq 0$ является псевдодифференциальным оператором первого порядка с отрицательным главным символом. Следовательно, $F_n - F^{\text{out}}(k)$ – эллиптический оператор первого порядка, и поэтому его собственные значения стремятся к бесконечности. Кроме того, учтем, что согласно теореме 2.1 ядро оператора $F_n - F^{\text{out}}(k)$ тривиально для всех $k \neq 0$. Это означает, что оператор $(F_n - F^{\text{out}}(k))^{-1}$ ограничен при каждом фиксированном $k \neq 0$. Из аналитичности этого оператора по k_1, k_2 следует, что верхнюю границу нормы $\|(F_n - F^{\text{out}}(k))^{-1}\|$ можно выбрать постоянной по k в каждой области вида $K_0 \geq |k| \geq \delta > 0$. Тогда это же верно, если n заменить на n_λ при достаточно малом $|\lambda|$. Поэтому теорема 2.1

означает, что исключительные точки задачи с возмущенным потенциалом n_λ при достаточно малом $|\lambda|$ могут появиться только в малой окрестности точки $k = 0$.

Изучим теперь структуру множества $\mathcal{E}$ в окрестности начала координат $k = 0$. Подстановка $u = \sqrt{q}v$ приводит уравнение (1) с проводящим потенциалом к уравнению $\nabla(q\nabla)v = 0$, поэтому отображения Дирихле–Нейман для этих уравнений совпадают. Следовательно, ядро и коядро оператора F_n являются одномерными пространствами, состоящими из постоянных функций. Норма сужения F_n на пространство $L^{2,\perp}$ функций, ортогональных константам, больше некоторой положительной постоянной.

Рассмотрим оператор $A(\lambda, k) := F_{n_\lambda} - F^{\text{out}}(k)$. Из леммы 2.1 и установленных выше свойств оператора F_n следует, что $A(0, 0)$ имеет нулевое собственное значение, которому отвечает постоянная собственная функция, а все остальные собственные значения больше некоторой константы $\delta > 0$. Оператор F_{n_λ} аналитичен по λ , а оператор $F^{\text{out}}(k)$ является бесконечно гладкой функцией от переменной

$$\varepsilon = \left[-\nu \left(\frac{\gamma}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \ln |k| \right) \right]^{-1}$$

в точке $\varepsilon = 0$, причем все производные в точке $\varepsilon = 0$ не зависят от полярного угла параметра k .

Свойства оператора $F^{\text{out}}(k)$ доказаны в лемме 2.1. Действительно, хотя утверждение о независимости производных от φ не сформулировано, его справедливость можно легко проверить в процессе доказательства. Следовательно, оператор $A(\lambda, k)$ при достаточно малых $|\lambda| + |k|$ имеет собственное значение ξ вида

$$\xi(\lambda, \varepsilon, \varphi) = a\lambda + b\varepsilon + O(\lambda^2 + \varepsilon^2),$$

которому отвечает гладкая по k , λ собственная функция $e(k, \lambda)$, а все остальные собственные значения отделены от нуля. Последнее утверждение, сформулированное для аналитических семейств операторов общего вида с изолированным собственным значением, можно найти в книге [17] (см. главу XII.8). Легко заметить, что изложенное в [17] доказательство не требует аналитичности и остается справедливым для гладких операторных функций.

Найдем постоянные a и b . Пусть $e = e(0, 0)$. Вспомним, что e является константой. Нормируем $e(k, \lambda)$ так, что $e \equiv 1$. Оператор $A(0, 0) := F_n - F^{\text{out}}(0)$ самосопряжен, поэтому

$$a = (A(\lambda, k)e(\lambda, k), e(\lambda, k))'_\lambda(0, 0) = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} A(0, 0)e, e \right) = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} F_{n_\lambda}(0, 0)e, e \right). \quad (35)$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$(A(0, 0)e'(0, 0), e) = (A(0, 0)e, e'(0, 0)) = 0,$$

поскольку оператор $A(0, 0)$ самосопряжен и $A(0, 0)e = 0$.

Преобразуем правую часть уравнения (35). Рассмотрим решение $f_\lambda \in H^{1/2}(\mathcal{O})$ уравнения $\Delta f_\lambda + n_\lambda f_\lambda = 0$ в $\mathcal{O}$ при граничном условии $f_\lambda = e$ на $\partial\mathcal{O}$. Заметим, что его производная удовлетворяет условиям $\Delta f'_\lambda + n_\lambda f'_\lambda = -n'_\lambda f_\lambda$ в $\mathcal{O}$ и $f'_\lambda = 0$ на $\partial\mathcal{O}$.

Из формулы Грина следует, что

$$\int_{\partial\mathcal{O}} \frac{\partial f'_\lambda}{\partial \nu} \bar{f} \, dl = \int_{\mathcal{O}} n'_\lambda |f_\lambda|^2 \, dS.$$

Положим $\lambda = 0$ и учтем, что $f_\lambda = q^{1/2}$ при $\lambda = 0$. Тогда

$$\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} F_{n_\lambda}(0, 0)e, e \right) = -\mu,$$

где μ задается выражением (33). Следовательно, $a = -\mu$.

Аналогичным образом из соотношения (26) следует, что

$$b = (Ae, e)'_\varepsilon(0, 0) = (A_\varepsilon(0, 0)e, e) = -\left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} F^{\text{out}}(k)e, e \right)_{\varepsilon=0} = 1.$$

В результате

$$\xi(\lambda, \varepsilon, \varphi) = -\mu\lambda + \varepsilon + O(\lambda^2 + \varepsilon^2), \quad |\lambda| + |k| \ll 1, \quad \mu > 0. \quad (36)$$

Множество $\mathcal{E}$ локализовано в малой окрестности начала координат $k = 0$, поэтому из теоремы 2.1 следует, что $\mathcal{E}$ определяется соотношениями $\xi(\lambda, \varepsilon, \varphi) = 0$ при $0 < \varepsilon \ll 1$. Поскольку $\varepsilon > 0$, все утверждения теоремы, не относящиеся к $t(k)$, непосредственно вытекают из формулы (36).

Теперь оценим $t(k)$ в окрестности $k = 0$. Из равенств (7) и (32) следует, что $|t(k)|$ можно оценить величиной $C\|(F_{n_\lambda} - F^{\text{out}})^{-1}(F_0 - F^{\text{out}})e^{i\zeta \cdot z}\|$. Из теоремы 2.1 следует, что для $\lambda < 0$ и малых $|\lambda|$ оператор $(F_{n_\lambda} - F^{\text{out}})^{-1}$ ограничен в малой окрестности точки k . Таким образом,

$$|t(k)| \leq C(\lambda)\|(F_0 - F^{\text{out}}(k))e^{i\zeta \cdot z}\|, \quad |k| \ll 1.$$

Остается использовать представление (21) для оператора $F_0 - F^{\text{out}}(k)$ (см. также (25)) и записать $e^{i\zeta \cdot z}$ в виде $1 + O(k)$. Теорема доказана.

4. УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРОСТОЙ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОЙ ТОЧКИ

Изложим теперь метод, позволяющий в некоторых случаях подтвердить существование исключительных точек на контуре $\gamma \subset \mathbb{C}$, аналитическом по k_1, k_2 , для чего проведем некоторые расчеты в концевых точках контура γ . В этом разделе будем считать потенциал n действительным.

Рассмотрим операторную функцию $P(k) := I + S_k(F_n - F_0)$ в пространствах $L_2(\partial\mathcal{O})$ или $H^{-1/2}(\partial\mathcal{O})$. Интегральное ядро оператора $P(k)$ является действительным, поскольку функция G_k действительна (см. работу [14], п. 3.1.1). Следовательно, если μ – собственное значение оператора $P(k)$, то комплексно сопряженное $\bar{\mu}$ – тоже собственное значение с той же кратностью. Ранее уже упоминалось, что оператор $S_k(F_n - F_0)$ является компактным. Поэтому для любого k собственные значения $\mu_i = \mu_i(k)$ сходятся к $\mu = 1$ при $i \rightarrow \infty$ и, следовательно, оператор $P(k)$ имеет не более чем конечное число отрицательных собственных значений.

Введем функцию, которая подсчитывает число отрицательных собственных значений $\mu_i(k)$ оператора $P(k)$:

$$n^-(k) = \sum_{i: \mu_i(k) < 0} m_i,$$

где m_i – алгебраическая кратность собственного значения μ_i . В случае положительной энергии операторная функция $P_E(\lambda)$ и функция $n^-(\lambda)$ вводятся абсолютно аналогично случаю $E = 0$.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $E = 0$ и $k, \hat{k} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ – произвольные точки такие, что $n^-(k) \neq n^-(\hat{k}) \pmod{2}$. Тогда каждый аналитический контур γ , соединяющий точки k и $\hat{k}$ и не проходящий через ноль, содержит по крайней мере одну исключительную точку. То же утверждение (с заменой $k, \hat{k}$ на $\lambda, \hat{\lambda}$) справедливо для $E > 0$ при дополнительном условии, что контур γ не содержит точек единичной окружности $|\lambda| = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $E = 0$ и $k = k(s)$, $0 \leq s \leq 1$, – аналитическая параметризация контура γ . Тогда оператор $P(k(s))$ является аналитическим по s . Поскольку оператор $S_k(F_n - F_0)$ компактен, спектр оператора $P(k(s))$ состоит из собственных значений $\mu_i(k(s))$ с конечными кратностями. Таким образом (см. книгу [17], следствие из теоремы XII.2), собственные значения $\mu_i(k(s))$ аналитичны по s , за исключением, быть может, конечного числа точек ветвления. Более того, для каждого собственного значения $\mu_i(k(s_0))$ с $0 \leq s_0 \leq 1$ существует его комплексная окрестность V и настолько малое $\varepsilon > 0$, что число всех собственных значений $\mu_i(k(s))$ в V при фиксированном s , $|s - s_0| < \varepsilon$, взятых с учетом их кратности, не зависит от s . Поэтому значение функции $n^-(k(s))$ может меняться (при изменении s от 0 до 1), только если собственное значение $\mu(k(s))$ оператора P проходит через точку $\mu = 0$, а также если некоторые собственные значения покидают действительную ось или появляются на ней. Вторая возможность реализуется только для пар комплексно сопряженных собственных значений. Поэтому разность $n^-(k(1)) - n^-(k(0))$ может быть нечетной, только когда хотя бы одно из собственных значений $\mu(k(s))$ проходит через $\mu = 0$. Соответствующая точка $k(s) \in \gamma$ является исключительной. Утверждение теоремы в случае $E = 0$ доказано.

Доказательство для случая $E > 0$ остается таким же. Дополнительное условие, что γ не пересекает единичную окружность, требуется только для того, чтобы параметр λ в задаче рассеяния Фаддеева с положительной энергией не лежал на единичной окружности.

Благодарности. Авторы выражают благодарность Эмели Бластен, Уве Калеру, Майклу Мьюзику, Роману Новикову и Самули Силтанену за полезные обсуждения задачи рассеяния Фаддеева. Авторы благодарят неизвестного рецензента, нашедшего существенную ошибку в предыдущей версии статьи.

Список литературы

- [1] Л. Д. Фаддеев, “Растущие решения уравнения Шредингера”, *Докл. АН СССР*, **165:3** (1965), 514–517.
- [2] A. I. Nachman, “Global uniqueness for a two-dimensional inverse boundary value problem”, *Ann. Math.*, **143:1** (1996), 71–96.

- [3] Р. Г. Новиков, “Многомерная обратная спектральная задача для уравнения $-\Delta\psi + (v(x) - Eu(x))\psi = 0$ ”, *Функц. анализ и его прил.*, **22**:4 (1988), 11–22.
- [4] R. G. Novikov, “The inverse scattering problem on a fixed energy level for the two-dimensional Schrödinger operator”, *J. Funct. Anal.*, **103**:2 (1992), 409–463.
- [5] Б. Р. Вайнберг, “Принципы излучения, предельного поглощения и предельной амплитуды в общей теории уравнений с частными производными”, *УМН*, **21**:3(129) (1966), 115–194.
- [6] M. Music, “The nonlinear Fourier transform for two-dimensional subcritical potentials”, *Inverse Problems and Imaging*, **8**:4 (201), 1151–1167.
- [7] R. Beals, R. R. Coifman, “Multidimensional scattering and nonlinear partial differential equations”, *Pseudodifferential Operators and Applications*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, **43**, ed. F. Trèves, AMS, Providence, RI, 1985, 45–70.
- [8] Р. Г. Новиков, Г. М. Хенкин, “ $\bar{\partial}$ -уравнение в многомерной обратной задаче рассеяния”, *УМН*, **42**:3(255) (1987), 93–152.
- [9] M. Music, P. Perry, S. Siltanen, “Exceptional circles of radial potentials”, *Inverse Problems*, **29**:4 (2013), 045004, 25 с.
- [10] S. Siltanen, J. Tamminen, *Exceptional points of radial potentials at positive energies*, arXiv: 1307.2037v1.
- [11] П. Г. Гриневич, С. П. Новиков, “Двумерная “обратная задача рассеяния” для отрицательных энергий и обобщенно-аналитические функции. I. Энергии ниже основного состояния”, *Функц. анализ и его прил.*, **22**:1 (1988), 23–33.
- [12] E. Lakshtanov, R. Novikov, B. Vainberg, *A global Riemann–Hilbert problem for two-dimensional inverse scattering at fixed energy*, arXiv: 1509.06495.
- [13] П. Г. Гриневич, С. В. Манаков, “Обратная задача теории рассеяния для двумерного оператора Шрёдингера, $\bar{\partial}$ -метод и нелинейные уравнения”, *Функц. анализ и его прил.*, **20**:2 (1986), 14–24.
- [14] S. Siltanen, “Electrical impedance tomography and Faddeev’s Green functions”, *Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica. Mathematica. Dissertationes*, **121**, Helsinki Univ. of Technology, Helsinki, 1999.
- [15] М. Г. Зайденберг, С. Г. Крейн, П. А. Кучмент, А. А. Панков, “Банаховы расслоения и линейные операторы”, *УМН*, **30**:5(185) (1975), 101–157.
- [16] Y. Roitberg, *Elliptic Boundary Value Problems in the Spaces of Distributions*, Mathematics and its Applications, **384**, Kluwer, Dordrecht, 1996.
- [17] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 4: *Анализ операторов*, Мир, М., 1982.

Поступила в редакцию 26.09.2015