Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Лакаев, А. Р. Халмухамедов, А. М. Халхужаев,
О связанных состояниях оператора Шредингера системы трех бозонов на решетке, *ТМФ*, 2016, том 188, номер 1, 36–48

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9058>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 17:32:25

© 2016 г.

С. Н. Лакаев*, А. Р. Халмухамедов*,
А. М. Халхужаев*

О СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЯХ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА СИСТЕМЫ ТРЕХ БОЗОНОВ НА РЕШЕТКЕ

Рассмотрен гамильтониан H_μ системы трех одинаковых квантовых частиц (бозонов) на d -мерной решетке $\mathbb{Z}^d$, $d = 1, 2$, взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения $\mu < 0$. Доказана конечность числа связанных состояний соответствующего оператора Шредингера $H_\mu(K)$, $K \in \mathbb{T}^d$, и установлены местоположение и структура его существенного спектра. Показано, что связанное состояние экспоненциально убывает на бесконечности. Доказана регулярность собственного значения и соответствующего связанного состояния как функции квазиимпульса $K \in \mathbb{T}^d$.

Ключевые слова: дискретный оператор Шредингера, система трех частиц, контактное взаимодействие, собственное значение, связанное состояние, существенный спектр, решетка.

DOI: 10.4213/tmf9058

1. ВВЕДЕНИЕ

Холодные атомы, помещенные в оптическую решетку, обеспечивают некоторую реализацию квантового решеточного газа.

Динамика ультрахолодных атомов, помещенных в нижнюю полосу, хорошо описывается с помощью гамильтониана Бозе–Хаббарда [1]; в разделе 2 мы опишем соответствующий оператор Шредингера.

В непрерывном случае [2], [3] оператор энергии можно разделить на сумму энергии движения центра масс и относительной кинетической энергии. Так что трехчастичные связанные состояния являются собственными векторами оператора относительной кинетической энергии.

Настоящая работа поддержана Фондом поддержки фундаментальных наук Республики Узбекистан.

*Самаркандский государственный университет им. Алишера Навои, Самарканд, Узбекистан. E-mail: slakaev@mail.ru

Кинематика квантовых частиц на решетке довольно экзотическая. Дискретный лапласиан, в отличие от непрерывного случая, не является трансляционно-инвариантным, и поэтому гамильтониан системы не разделяется на две части.

Однако в этом случае можно использовать разложение Блоха–Флоке: гильбертово пространство $\ell^2[(\mathbb{Z}^d)^3]$ разлагается в прямой интеграл фон Неймана, ассоциированный с представлением абелевой группы $\mathbb{Z}^d$, образованной с помощью операторов сдвига на решетке:

$$\ell^2[(\mathbb{Z}^d)^3] = \int_{K \in \mathbb{T}^d} \bigoplus \ell^2[(\mathbb{Z}^d)^2] \eta(dK),$$

где $\eta(dK)$ – мера Хаара (нормализованная мера) на торе $\mathbb{T}^d$.

Следовательно, и трехчастичный полный гамильтониан H системы трех одинаковых квантовых частиц (бозонов) на d -мерной решетке $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$, взаимодействующих с помощью парных короткодействующих потенциалов, также разлагается в прямой интеграл:

$$H = \int_{\mathbb{T}^d} \bigoplus H(K) \eta(dK).$$

Соответствующий оператор Шредингера $H(K)$ параметрически (непрерывно) зависит от квазиимпульса $K \in \mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / (2\pi\mathbb{Z})^d$. В результате из-за потери сферической симметрии спектр оператора $H(K)$ оказывается довольно чувствительным к изменению квазиимпульса $K \in \mathbb{T}^d$.

Связанное состояние $\psi_{E,K}$ – это решение уравнения Шредингера

$$H(K)\psi_{E,K} = E\psi_{E,K}, \quad \psi_{E,K} \in \ell^2[(\mathbb{Z}^d)^2],$$

и оно непрерывно зависит от квазиимпульса K .

Эффект Ефимова является одним из замечательных результатов спектрального анализа трехчастичных непрерывного и решетчатого операторов Шредингера: если в системе трех частиц, взаимодействующих с помощью парных короткодействующих потенциалов, ни одна из трех двухчастичных подсистем не имеет связанных состояний с отрицательной энергией, но по меньшей мере две из них имеют резонанс с энергией в нуле, то у этой трехчастичной системы существует бесконечное число трехчастичных связанных состояний с отрицательной энергией, накапливающихся к нулю [4]–[11].

Конечность числа собственных значений (отсутствие эффекта Ефимова) гамильтониана системы трех частиц на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$, $d = 1, 2$, доказана в работе [12].

В настоящей работе рассматривается гамильтониан H_μ системы трех одинаковых частиц на решетке $\mathbb{Z}^d$, $d = 1, 2$, взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов $\mu < 0$. Доказывается конечность числа связанных состояний ассоциированного с гамильтонианом H_μ оператора Шредингера $H_\mu(K)$, $K \in \mathbb{G} \subseteq \mathbb{T}^d$, $d = 1, 2$, где $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{T}^d$ – некоторая область.

Описывается локализация и структура существенного спектра оператора Шредингера $H_\mu(K)$, $K \in \mathbb{T}^d$. Показано, что связанное состояние экспоненциально убывает на бесконечности. Доказана регулярность собственного значения и соответствующего связанного состояния как функции квазиимпульса $K \in \mathbb{T}^d$.

Конечность числа собственных значений оператора Шредингера, соответствующего системе трех бозонов на одномерной решетке, установлена в работе [13].

Работа имеет следующую структуру. В разделе 2 вводятся двухчастичный и трехчастичный дискретные операторы Шредингера $h_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, и $H_\mu(K)$, $K \in \mathbb{T}^d$, ассоциированные с гамильтонианами систем двух и трех частиц на d -мерной решетке, $d = 1, 2$. Основные результаты сформулированы в разделе 3. В разделе 4 вводятся *канальные операторы* и описывается существенный спектр оператора $H_\mu(K)$ через спектры невозмущенного оператора $H_0(K)$ и двухчастичного дискретного оператора Шредингера $h_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$. В разделе 5 доказываются основные результаты.

2. ИМПУЛЬСНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДВУХЧАСТИЧНЫХ И ТРЕХЧАСТИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ ШРЕДИНГЕРА НА РЕШЕТКЕ

Рассмотрим гамильтонианы h_μ и H_μ систем двух и трех одинаковых квантовых частиц (бозонов) с парными контактными потенциалами $\mu < 0$ в импульсном представлении. Разложение гамильтонианов h_μ и H_μ в прямые интегралы приводит к семействам двух- и трехчастичных дискретных операторов Шредингера $h_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, и $H_\mu(K)$, $K \in \mathbb{T}^d$ (см. [6], [8]), где $\mathbb{T}^d = (-\pi, \pi]^d$ – d -мерный тор.

Пусть $L^2[(\mathbb{T}^d)^m]$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определенных на декартовом произведении $(\mathbb{T}^d)^m$, $m \in \mathbb{N}$. Обозначим через $L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^m] \subset L^2[(\mathbb{T}^d)^m]$ подпространство симметричных функций, определенных на $(\mathbb{T}^d)^m$, $m \in \mathbb{N}$, и $L^{2,e}(\mathbb{T}^d) \subset L^2(\mathbb{T}^d)$ – подпространство четных функций.

Оператор $h_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, действует в $L^{2,e}(\mathbb{T}^d)$ по формуле

$$h_\mu(k) = h_0(k) + \mu v. \quad (2.1)$$

Здесь $h_0(k)$ – оператор умножения на функцию $\mathcal{E}_k(p)$:

$$(h_0(k)f)(p) = \mathcal{E}_k(p)f(p), \quad f \in L^{2,e}(\mathbb{T}^d),$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_k(p) &= \varepsilon\left(\frac{k}{2} - p\right) + \varepsilon\left(\frac{k}{2} + p\right), \\ \varepsilon(p) &= \sum_{i=1}^d (1 - \cos p^{(i)}), \quad p = (p^{(1)}, \dots, p^{(d)}) \in \mathbb{T}^d, \end{aligned}$$

и

$$(vf)(p) = \int_{\mathbb{T}^d} f(q) \eta(dq), \quad f \in L^{2,e}(\mathbb{T}^d).$$

Оператор $H_\mu(K)$, $K \in \mathbb{T}^d$, определяется как

$$H_\mu(K) = H_0(K) + \mu(V_1 + V_2 + V_3).$$

Здесь $H_0(K)$, $K \in \mathbb{T}^d$, действует в $L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2]$ как оператор умножения на функцию:

$$(H_0(K)f)(p, q) = E(K; p, q)f(p, q), \quad f \in L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2],$$

где

$$E(K; p, q) = \varepsilon(K - p - q) + \varepsilon(p) + \varepsilon(q).$$

Оператор $\mathbb{V} = V_1 + V_2 + V_3$ действует в $L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2]$ и в координатах $(p, q) \in (\mathbb{T}^d)^2$ имеет вид

$$(\mathbb{V}f)(p, q) = \int_{\mathbb{T}^d} f(p, t) \eta(dt) + \int_{\mathbb{T}^d} f(t, q) \eta(dt) + \int_{\mathbb{T}^d} f(t, K - p - q) \eta(dt).$$

3. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Возмущение v оператора $h_0(k)$ является одномерным, и, как следует из теоремы Вейля о существенном спектре [14], существенный спектр $\sigma_{\text{essspec}}(h_\mu(k))$ оператора $h_\mu(k)$, определенного в (2.1), совпадает со спектром оператора $h_0(k)$, т. е.

$$\sigma_{\text{essspec}}(h_\mu(k)) = [\mathcal{E}_{\min}(k), \mathcal{E}_{\max}(k)],$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\min}(k) &= \min_{q \in \mathbb{T}^d} \mathcal{E}_k(q) = 2 \sum_{j=1}^d \left(1 - \cos \frac{k^{(j)}}{2} \right) \geq 0, \\ \mathcal{E}_{\max}(k) &= \max_{q \in \mathbb{T}^d} \mathcal{E}_k(q) = 2 \sum_{j=1}^d \left(1 + \cos \frac{k^{(j)}}{2} \right) \leq 4d. \end{aligned}$$

В следующей теореме доказано существование и найдено расположение единственного собственного значения, а также доказана регулярность соответствующего связанного состояния оператора $h_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого $\mu < 0$ и $k \in \mathbb{T}^d$, $d = 1, 2$, оператор $h_\mu(k)$ имеет единственное собственное значение $e_\mu(k)$, удовлетворяющее соотношению $e_\mu(k) < \mathcal{E}_{\min}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, и $e_\mu(0) < e_\mu(k)$, $k \neq 0$. Для каждого $\mu < 0$ собственное значение $e_\mu(k)$ является регулярной функцией в $\mathbb{T}^d$.*

Соответствующее связанное состояние $f_{\mu, e_\mu(k)}(\cdot)$, $k \in \mathbb{T}^d$, регулярно в $\mathbb{T}^d$ и имеет вид

$$f_{\mu, e_\mu(k)}(\cdot) = \frac{\mu c(k)}{\mathcal{E}_k(\cdot) - e_\mu(k)},$$

где $c(k) \neq 0$, $k \in \mathbb{T}^d$, – нормирующий множитель. Кроме того, векторнозначное отображение

$$f_\mu: \mathbb{T}^d \rightarrow L^2[\mathbb{T}^d, \eta(dk); L^{2,e}(\mathbb{T}^d)], \quad k \mapsto f_{\mu, e_\mu(k)},$$

регулярно в $\mathbb{T}^d$.

Теорему 1 можно доказать аналогично теореме 3.1 работы [15].

Пусть

$$E_{\min}(K) \equiv \min_{p, q \in \mathbb{T}^d} E(K; p, q), \quad E_{\max}(K) \equiv \max_{p, q \in \mathbb{T}^d} E(K; p, q).$$

В следующей теореме существенный спектр трехчастичного оператора $H_\mu(K)$, $K \in \mathbb{T}^d$, описывается с помощью спектра невозмущенного оператора $H_0(K)$ и дискретного спектра двухчастичного оператора $h_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$.

ТЕОРЕМА 2. Для любого $\mu < 0$ существенный спектр $\sigma_{\text{essspec}}(H_\mu(K))$ оператора $H_\mu(K)$ определяется равенством

$$\sigma_{\text{essspec}}(H_\mu(K)) = \bigcup_{k \in \mathbb{T}^d} \{e_\mu(k) + \varepsilon(K - k)\} \cup [E_{\min}(K), E_{\max}(K)],$$

где $e_\mu(k)$ – единственное собственное значение оператора $h_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$.

Пусть $U_{\delta(K)}[p_\mu(K)] = \{K \in \mathbb{T}^d: |K - p_\mu(K)| < \delta\} - \delta = \delta(K)$ – окрестность точки $p_\mu(K) \in \mathbb{T}^d$.

Основным результатом этой работы является следующая теорема, утверждающая конечность числа собственных значений оператора $H_\mu(K)$, а также регулярность соответствующих связанных состояний.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $d = 1, 2$ и $\mu < 0$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Существует $\delta > 0$ такое, что при всех $K \in U_\delta[0]$ оператор $H_\mu(K)$ имеет конечное число собственных значений $E_{1,\mu}(K), \dots, E_{n,\mu}(K)$, лежащих ниже дна существенного спектра $\sigma_{\text{essspec}}(H_\mu(K))$.

2. Связанное состояние $\psi_{\mu, E_\mu(K)}(\cdot, \cdot) \in L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2]$ оператора $H_\mu(K)$, соответствующее собственному значению $E_\mu(K)$, $K \in U_\delta[0]$, регулярно по $(p, q) \in (\mathbb{T}^d)^2$. Кроме того, собственное значение $E_\mu(\cdot)$, $K \in U_\delta[0]$, и векторнозначное отображение

$$\psi_\mu: U_\delta[0] \rightarrow L^2[U_\delta[0], \eta(dK); L^{2,s}(\mathbb{T}^d)^2], \quad K \rightarrow \psi_{\mu, E_\mu(K)},$$

также регулярны по $K \in \mathbb{T}^d$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Из п.2 теоремы 3 вытекает, что связанное состояние в координатном представлении экспоненциально убывает на бесконечности.

СЛЕДСТВИЕ 2. Двухчастичный гамильтониан h_μ имеет единственный изолированный полосатый спектр, а трехчастичный гамильтониан H_μ имеет конечное число полосатых спектров.

Обозначим через $\tau_{\text{spec}}(H_\mu(K))$ и $\tau_{\text{essspec}}(H_\mu(K))$ соответственно дно спектра и дно существенного спектра трехчастичного оператора Шредингера $H_\mu(K)$, т. е.

$$\begin{aligned} \tau_{\text{spec}}(H_\mu(K)) &= \inf_{\|f\|=1} (H_\mu(K)f, f), \\ \tau_{\text{essspec}}(H_\mu(K)) &= \inf \sigma_{\text{essspec}}(H_\mu(K)). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Пусть

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{esstwo}}(H_\mu(K)) &= \bigcup_{k \in \mathbb{T}^d} \{e_\mu(k) + \varepsilon(K - k)\}, \\ \sigma_{\text{essthree}}(H_\mu(K)) &= [E_{\min}(K), E_{\max}(K)] \end{aligned}$$

– соответственно двухчастичный и трехчастичный существенные спектры оператора $H_\mu(K)$, а

$$\begin{aligned} \tau_{\text{esstwo}}(H_\mu(K)) &= \inf \sigma_{\text{esstwo}}(H_\mu(K)), \\ \tau_{\text{essthree}}(H_\mu(K)) &= E_{\min}(K) = \inf_{\|f\|=1} [(H_0(K)f, f)] \end{aligned}$$

– соответственно дно двухчастичного и дно трехчастичного существенных спектров.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Согласно теоремам 1 и 2 (см. ниже лемму 2) для оператора $H_\mu(K)$, ассоциированного с системой трех бозонов на решетке $\mathbb{Z}^d$, $d = 1, 2$, имеем соотношения

$$\sigma_{\text{esstwo}}(H_\mu(K)) \neq \emptyset$$

и

$$\tau_{\text{esstwo}}(H_\mu(K)) = \tau_{\text{essspec}}(H_\mu(K)) < \tau_{\text{essthree}}(H_\mu(K)),$$

которые позволяют доказать конечность связанных состояний оператора $H_\mu(K)$, $K \in \mathbb{T}^d$, $d = 1, 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Заметим, что для трехчастичного оператора Шредингера $H_\mu(K)$, ассоциированного с системой трех бозонов на трехмерной решетке $\mathbb{Z}^3$, существует $\mu_0 > 0$ такое, что

$$\sigma_{\text{essspec}}(H_{\mu_0}(0)) = \sigma_{\text{essthree}}(H_{\mu_0}(0))$$

и, следовательно,

$$\tau_{\text{essspec}}(H_{\mu_0}(0)) = \tau_{\text{essthree}}(H_{\mu_0}(0)).$$

В то же время для ненулевого $K \in \mathbb{T}^3$ имеет место соотношение

$$\sigma_{\text{esstwo}}(H_{\mu_0}(K)) \neq \emptyset.$$

Отсюда получим

$$\tau_{\text{esstwo}}(H_{\mu_0}(K)) < \tau_{\text{essthree}}(H_{\mu_0}(K))$$

и

$$\sigma_{\text{essthree}}(H_{\mu_0}(K)) \subset \sigma_{\text{essspec}}(H_{\mu_0}(K)).$$

Таким образом, только оператор $H_{\mu_0}(0)$ имеет бесконечное число связанных состояний.

4. СУЩЕСТВЕННЫЙ СПЕКТР ОПЕРАТОРА $H_\mu(K)$

Так как частицы являются одинаковыми, существует только один канальный оператор $H_{\mu,\text{ch}}(K)$, $K \in \mathbb{T}^d$, $d = 1, 2$, определенный в $L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2] \cong L^2(\mathbb{T}^d) \otimes L^{2,e}(\mathbb{T}^d)$ как

$$H_{\mu,\text{ch}}(K) = H_0(K) + \mu V.$$

Операторы $H_0(K)$ и $V = V_\alpha$ действуют по формулам

$$\begin{aligned} (H_0(K)f)(p, q) &= \mathcal{E}(K; p, q)f(p, q), \quad f \in L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2], \\ \mathcal{E}(K; p, q) &= \varepsilon(K - p) + \varepsilon\left(\frac{p}{2} - q\right) + \varepsilon\left(\frac{p}{2} + q\right), \end{aligned}$$

и

$$(Vf)(p, q) = \int_{\mathbb{T}^d} f(p, t) \eta(dt), \quad f \in L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2].$$

Пространство $L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2]$ разлагается в прямой интеграл

$$L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2] = \int_{k \in \mathbb{T}^d} \bigoplus L^{2,e}(\mathbb{T}^d) \eta(dk),$$

оператор $H_{\mu,\text{ch}}(K)$ разлагается в прямой интеграл

$$H_{\mu,\text{ch}}(K) = \int_{k \in \mathbb{T}^d} \bigoplus h_{\mu}(K, k) \eta(dk).$$

Оператор $h_{\mu}(K, k)$ действует в гильбертовом пространстве $L^{2,e}(\mathbb{T}^d)$ и имеет вид

$$h_{\mu}(K, k) = h_{\mu}(k) + \varepsilon(K - k)I, \quad (4.1)$$

где $I_{L^{2,e}(\mathbb{T}^d)}$ – единичный оператор, $h_{\mu}(k)$ – двухчастичный оператор, определенный в (2.1). Из разложения (4.1) для $h_{\mu}(K, k)$ и теоремы 1 вытекает следующее равенство для спектра оператора $h_{\mu}(K, k)$:

$$\sigma(h_{\mu}(K, k)) = Z_{\mu}(K, k) \cup [\mathcal{E}_{\min}(k), \mathcal{E}_{\max}(k)], \quad (4.2)$$

где

$$Z_{\mu}(K, k) = e_{\mu}(k) + \varepsilon(K - k) \quad (4.3)$$

и $e_{\mu}(k)$ – единственное собственное значение оператора $h_{\mu}(k)$.

Верна следующая лемма о спектре оператора $H_{\mu,\text{ch}}(K)$.

ЛЕММА 1. *Имеет место равенство*

$$\sigma(H_{\mu,\text{ch}}(K)) = \bigcup_{k \in \mathbb{T}^d} \{Z_{\mu}(K, k)\} \cup [E_{\min}(K), E_{\max}(K)].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы о спектре разложимых операторов (см. [14]) и структуры спектра оператора $h_{\mu}(K, k)$ вытекает доказательство леммы. ■

ТЕОРЕМА 4. *Имеет место равенство*

$$\sigma_{\text{essspec}}(H_{\mu}(K)) = \sigma(H_{\mu,\text{ch}}(K)).$$

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 2 работы [5].

ЛЕММА 2. *Для каждого $K \in \mathbb{T}^d$ имеет место неравенство*

$$\tau_{\text{essspec}}(H_{\mu}(K)) < \tau_{\text{essthree}}(H_{\mu}(K)) = E_{\min}(K),$$

где $\tau_{\text{essspec}}(H_{\mu}(K))$ определено в (3.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 1 для каждого $k \in \mathbb{T}^d$ оператор $h_{\mu}(k)$ имеет единственное собственное значение $e_{\mu}(k) < 2\varepsilon(k/2) = \mathcal{E}_{\min}(k)$. Следовательно, из (4.3) имеем

$$Z_{\mu}(K, k)|_{k=2K/3} = e_{\mu}\left(\frac{2K}{3}\right) + \varepsilon\left(\frac{K}{3}\right) < 2\varepsilon\left(\frac{K}{3}\right) + \varepsilon\left(\frac{K}{3}\right) = E_{\min}(K).$$

Отсюда и из определения $\tau_{\text{essspec}}(H_{\mu}(K))$ имеем

$$\tau_{\text{essspec}}(H_{\mu}(K)) = \inf_{k \in \mathbb{T}^d} Z_{\mu}(K, k) \leq e_{\mu}\left(\frac{2K}{3}\right) + \varepsilon\left(\frac{K}{3}\right) < E_{\min}(K).$$

Лемма доказана. ■

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть

$$E_{\min}(K, k) = \min_q E(K; k, q), \quad E_{\max}(K, k) = \max_q E(K; k, q).$$

Для каждого $k, K \in \mathbb{T}^d$, $d = 1, 2$, обозначим через $\Delta_\mu(K, k; z)$ функцию, регулярную в $\mathbb{C} \setminus [E_{\min}(K, k), E_{\max}(K, k)]$:

$$\Delta_\mu(K, k; z) = 1 + \mu \int_{\mathbb{T}^d} \frac{\eta(dq)}{E(K; k, q) - z}.$$

Пусть $L_\mu(K, z)$, $K \in \mathbb{T}^d$, $z < \tau_{\text{essspec}}(H_\mu(K))$, – самосопряженный оператор, определенный в $L^2(\mathbb{T}^d)$ по формуле

$$(L_\mu(K, z)w)(p) = -2\mu \int_{\mathbb{T}^d} \frac{\Delta_\mu^{-1/2}(K, p; z) \Delta_\mu^{-1/2}(K, q; z)}{E(K; p, q) - z} w(q) \eta(dq), \quad w \in L^2(\mathbb{T}^d).$$

Оператор $L_\mu(K, z)$ является решетчатым аналогом оператора Бирмана–Швингера, который был введен в работе [8] при исследовании эффекта Ефимова для трехчастичного дискретного оператора Шредингера $H_\mu(K)$.

Для ограниченного самосопряженного оператора A , действующего в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, и для некоторого $\gamma \in \mathbb{R}$ определим числа $n_+[\gamma, A]$ и $n_-[\gamma, A]$ следующим образом:

$$\begin{aligned} n_+[\gamma, A] &:= \max\{\dim \mathcal{H}_A^+(\gamma) : \mathcal{H}_A^+(\gamma) \subset \mathcal{H}; (A\varphi, \varphi) > \gamma, \varphi \in \mathcal{H}_A^+(\gamma), \|\varphi\| = 1\}, \\ n_-[\gamma, A] &:= \max\{\dim \mathcal{H}_A^-(\gamma) : \mathcal{H}_A^-(\gamma) \subset \mathcal{H}; (A\varphi, \varphi) < \gamma, \varphi \in \mathcal{H}_A^-(\gamma), \|\varphi\| = 1\}. \end{aligned}$$

Пусть некоторая точка существенного спектра оператора A больше (меньше) γ , тогда $n_+[\gamma, A]$ ($n_-[\gamma, A]$) равно бесконечности, и если $n_+[\gamma, A]$ ($n_-[\gamma, A]$) конечно, то оно равно числу собственных значений оператора A , которые больше (меньше), чем γ (см., например, лемму Глазмана [16]).

ЛЕММА 3. *Для каждого $z < \tau_{\text{essspec}}(H_\mu(K))$ оператор $L_\mu(K, z)$ является компактным и имеет место равенство*

$$n_-[z, H_\mu(K)] = n_+[1, L_\mu(K, z)].$$

Кроме того, для любых $\mu < 0$ и $K \in \mathbb{T}^d$ оператор $L_\mu(K, z)$ является непрерывным по $z \in (-\infty, \tau_{\text{essspec}}(H_\mu(K)))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем равенство

$$n_-[z, H_\mu(K)] = n_+[1, -3\mu R_0^{1/2}(K, z) V R_0^{1/2}(K, z)]. \quad (5.1)$$

Пусть $u \in \mathcal{H}_{H_\mu(K)}^-(z)$, что равносильно $((H_0(K) - z)u, u) < -3\mu(Vu, u)$. Тогда

$$(y, y) < (-3\mu R_0^{1/2}(K, z) V R_0^{1/2}(K, z)y, y), \quad y = (H_0(K) - z)^{1/2}u,$$

где $R_0(K, z)$ – резольвента оператора $H_0(K)$. Следовательно,

$$n_-[1, H_\mu(K)] \leq n_+[1, -3\mu R_0^{1/2}(K, z) V R_0^{1/2}(K, z)].$$

Заменяя аргументы, получим обратное неравенство, что доказывает (5.1).

Ненулевые собственные значения операторов $R_0^{1/2}(K, z)V^{1/2}$ и $V^{1/2}R_0^{1/2}(K, z)$ совпадают с учетом алгебраических и геометрических кратностей.

Следовательно, мы имеем

$$n_+[1, -3\mu R_0^{1/2}(K, z)V R_0^{1/2}(K, z)] = n_+[1, -3\mu V^{1/2}R_0(K, z)V^{1/2}].$$

Теперь покажем, что имеет место равенство

$$n_+[1, -3\mu V^{1/2}R_0(K, z)V^{1/2}] = n_+[1, L_\mu(K, z)].$$

Для каждого $u \in \mathcal{H}_{-3\mu V^{1/2}R_0(K, z)V^{1/2}}^+(1)$ выполняется неравенство

$$(u, u) < -3\mu(V^{1/2}R_0(K, z)V^{1/2}u, u),$$

откуда получаем

$$((I + \mu V^{1/2}R_0(K, z)V^{1/2})u, u) < -2\mu(V^{1/2}R_0(K, z)V^{1/2}u, u).$$

Так как при $z < \tau_{\text{essspec}}(H_\mu(K))$ оператор $I + \mu V^{1/2}R_0(K, z)V^{1/2}$ положителен и обратим, существует оператор

$$W_\mu^{1/2}(K, z) = (I + \mu V^{1/2}R_0(K, z)V^{1/2})^{-1/2}.$$

Вводя обозначение $y = (I + \mu V^{1/2}R_0(K, z)V^{1/2})^{1/2}$, имеем

$$(y, y) < -2\mu(W_\mu^{1/2}(K, z)V^{1/2}R_0(K, z)V^{1/2}W_\mu^{1/2}(K, z)y, y).$$

Так как $W_\mu^{1/2}(K, z)$ является оператором умножения на функцию $\Delta_\mu^{-1/2}(K, p; z)$, имеем неравенство $(y, y) < (L_\mu(K, z)y, y)$, поэтому

$$n_+[1, -3\mu V^{1/2}R_0(K, z)V^{1/2}] \leq n_+[1, L_\mu(K, z)].$$

Аналогично можно получить неравенство

$$n_+[1, L_\mu(K, z)] \leq n_+[1, -3\mu V^{1/2}R_0(K, z)V^{1/2}].$$

Отметим, что для каждого $z < \tau_{\text{essspec}}(H_\mu(K))$ оператор $L_\mu(K, z)$ компактен и непрерывен по z . ■

ЛЕММА 4. *Верны следующие утверждения.*

1. Пусть $f \in L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2]$ – решение уравнения $H_\mu(K)f = zf$, $z < \tau_{\text{essspec}}(H_\mu(K))$, тогда

$$\psi(p) = \Delta_\mu^{1/2}(K, p; z)\varphi(p), \quad \text{где } \varphi(p) = \int_{\mathbb{T}^d} f(p, t) \eta(dt) \in L^2(\mathbb{T}^d),$$

является решением уравнения $\psi = L_\mu(K, z)\psi$.

2. Пусть $\psi \in L^2(\mathbb{T}^d)$ – решение уравнения $\psi = L_\mu(K, z)\psi$, тогда

$$f(p, q) = \frac{\mu[\varphi(p) + \varphi(q) + \varphi(K - p - q)]}{E(K; p, q) - z} \in L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2], \quad (5.2)$$

где $\varphi(p) = \Delta_\mu^{-1/2}(K, p; z)\psi(p)$, является решением уравнения $H_\mu(K)f = zf$.

3. Для любых $\mu < 0$ и $K \in \mathbb{T}^d$ связанное состояние $f \in L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2]$ регулярно по $(p, q) \in (\mathbb{T}^d)^2$.

4. Для каждого $\mu < 0$ собственное значение $E_\mu(K) < \tau_{\text{essspec}}(H_\mu(K))$ оператора $H_\mu(K)$ и соответствующее связанное состояние $f \in L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2]$ регулярны по $K \in \mathbb{T}^d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть для некоторого $K \in \mathbb{T}^d$ и $z < \tau_{\text{essspec}}(H_\mu(K))$ уравнение

$$(H_\mu(K)\psi)(p, q) = z\psi(p, q),$$

т. е.

$$[E(K; p, q) - z]f(p, q) = -\mu \left[\int_{\mathbb{T}^d} f(p, t) \eta(dt) + \int_{\mathbb{T}^d} f(t, q) \eta(dt) + \int_{\mathbb{T}^d} f(K - p - q, t) \eta(dt) \right], \quad (5.3)$$

имеет нетривиальное решение $f \in L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2]$.

Вводя обозначение

$$\varphi(p) = \int_{\mathbb{T}^d} f(p, t) \eta(dt), \quad (5.4)$$

получим представление

$$f(p, q) = -\mu \frac{\varphi(p) + \varphi(q) + \varphi(K - p - q)}{E(K; p, q) - z} \in L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2]. \quad (5.5)$$

Тогда имеет место следующее уравнение относительно $\varphi \in L^2(\mathbb{T}^d)$:

$$\varphi(p) = -\mu \int_{\mathbb{T}^d} \frac{\varphi(p) + \varphi(t) + \varphi(K - p - t)}{E(K; p, t) - z} \eta(dt). \quad (5.6)$$

Так как функция $E(K; p, t)$ инвариантна относительно замены $K - p - t \rightarrow t$, имеем

$$\varphi(p) \left[1 + \mu \int_{\mathbb{T}^d} \frac{\eta(dq)}{E(K; p, q) - z} \right] = -2\mu \int_{\mathbb{T}^d} \frac{\varphi(q)}{E(K; p, q) - z} \eta(dq).$$

Вводя обозначение $\Delta_\mu^{1/2}(K, p; z)\varphi(p) = \psi(p)$ и учитывая, что $\Delta_\mu(K, p; z) \neq 0$ при $z < \tau_{\text{essspec}}(H_\mu(K))$, получим уравнение

$$\psi(p) = -2\mu \int_{\mathbb{T}^d} \frac{\Delta_\mu^{-1/2}(K, p; z)\Delta_\mu^{-1/2}(K, q; z)\psi(q)}{E(K; p, q) - z} \eta(dq). \quad (5.7)$$

2. Предположим, что для некоторого $z < \tau_{\text{essspec}}(H_\mu(K))$ функция $\psi \in L^2(\mathbb{T}^d)$ есть решение уравнения (5.7). Тогда $\varphi(p) = \Delta_\mu^{-1/2}(K, p; z)\psi(p)$ является решением уравнения (5.6). Следовательно, функция, определенная в (5.5), принадлежит пространству $L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2]$ и является решением уравнения $H_\mu(K)f = zf$.

3. При всех $\mu < 0$, $K \in \mathbb{T}^d$ и $z < \tau_{\text{essspec}}(H_\mu(K))$ ядро

$$L_\mu(K, z; p, q) = -2\mu \frac{\Delta_\mu^{-1/2}(K, p; z)\Delta_\mu^{-1/2}(K, q; z)}{E(K; p, q) - z}$$

оператора $L_\mu(K, z)$ регулярно по $(p, q) \in (\mathbb{T}^d)^2$. Следовательно, для любых $\mu < 0$ и $K \in \mathbb{T}^d$ детерминант Фредгольма $D_\mu(K, z) = \det[I - L_\mu(K, z)]$, ассоциированный с $L_\mu(K, z; p, q)$, есть вещественнозначная и регулярная функция от переменной $z \in (-\infty, \tau_{\text{essspec}}(H_\mu(K)))$. Так как для любого $K \in \mathbb{T}^d$ функции $\Delta_\mu(K, p; z)$ и $E(K; p, q) - z > 0$ являются регулярными по $p \in \mathbb{T}^d$ и $(p, q) \in (\mathbb{T}^d)^2$, то решение ψ уравнения (5.7) и функция φ , определенная в (5.4), регулярны по $p \in \mathbb{T}^d$. Следовательно, связанное состояние (5.2) оператора $H_\mu(K)$, ассоциированное с собственным значением $z < \tau_{\text{essspec}}(H_\mu(K))$, также регулярно по $(p, q) \in (\mathbb{T}^d)^2$.

4. Из доказанного утверждения 2 настоящей леммы и теоремы Фредгольма вытекает, что множества собственных значений оператора $H_\mu(K)$ и нулей детерминанта $D_\mu(K, z)$ совпадают. Следовательно, из компактности тора $\mathbb{T}^d$ и из теоремы о неявной функции следует, что для любого $\mu < 0$ собственное значение $E_\mu(K)$ оператора $H_\mu(K)$ является вещественнозначной регулярной функцией по $K \in \mathbb{T}^d$, $d = 1, 2$.

Так как функции $\Delta_\mu(K, p; E_\mu(K))$ и $E(K; p, q) - E_\mu(K)$ являются вещественнозначными регулярными функциями по $K \in \mathbb{T}^d$, решение ψ уравнения (5.7) и функция φ , определенная в (5.4), являются регулярными в $\mathbb{T}^d$. Отсюда следует, что связанное состояние (5.5) оператора $H_\mu(K)$, соответствующее собственному значению $E_\mu(K) < \tau_{\text{essspec}}(H_\mu(K))$, также регулярно по $K \in \mathbb{T}^d$. Следовательно, векторнозначное отображение

$$f_\mu: \mathbb{T}^d \rightarrow L^2[\mathbb{T}^d, d\eta; L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2]], K \rightarrow f_{\mu,K}(\cdot, \cdot)$$

также регулярно в $\mathbb{T}^d$. ■

ЛЕММА 5. Пусть $d = 1, 2$. Для каждого $K \in U_\delta(0)$ существуют положительные константы C_1 и C_2 , зависящие от K , и окрестность $U_{\delta(K)}[p_\mu(K)]$ точки $p_\mu(K) \in \mathbb{T}^d$ такие, что при всех $p \in U_{\delta(K)}[p_\mu(K)]$ имеют место неравенства

$$C_1|p - p_\mu(K)|^2 \leq \Delta_\mu(K, p, \tau_{\text{essspec}}(H_\mu(K))) \leq C_2|p - p_\mu(K)|^2. \quad (5.8)$$

Доказательство аналогичной леммы приведено в работе [5].

ЛЕММА 6. Пусть $K \in U_\delta(0)$. Оператор $L_\mu(K, z)$ представляется в виде суммы двух операторов:

$$L_\mu(K, z) = L_\mu^{(1)}(K, z) + L_\mu^{(2)}(K, z),$$

где $L_\mu^{(1)}(K, z)$, $z < \tau_{\text{essspec}}(H_\mu(K))$, есть оператор конечного ранга, а $L_\mu^{(2)}(K, z)$, $z \leq \tau_{\text{essspec}}(H_\mu(K))$, есть оператор Гильберта–Шмидта.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор $L_\mu(K, z)$ представим в виде суммы:

$$L_\mu(K, z) = L_\mu^{(1)}(K, z) + L_\mu^{(2)}(K, z),$$

где

$$\begin{aligned} [L_\mu^{(1)}(K, z)w](p) &= -2\mu \int_{\mathbb{T}^d} \frac{L_\mu^{(1)}(K, z; p, q)w(q) dq}{\Delta_\mu^{1/2}(K, p; z)\Delta_\mu^{1/2}(K, q; z)}, \\ [L_\mu^{(2)}(K, z)w](p) &= -2\mu \int_{\mathbb{T}^d} \frac{L_\mu^{(2)}(K, z; p, q)w(q) dq}{\Delta_\mu^{1/2}(K, p; z)\Delta_\mu^{1/2}(K, q; z)} \end{aligned} \quad (5.9)$$

– конечномерные операторы с ядрами

$$\begin{aligned} L_\mu^{(1)}(K, z; p, q) &= \frac{1}{E(K; p, p_\mu(K)) - z} + \\ &\quad + \frac{1}{E(K; p_\mu(K), q) - z} - \frac{1}{E(K; p_\mu(K), p_\mu(K)) - z}, \\ L_\mu^{(2)}(K, z; p, q) &= \frac{1}{E(K; p, q) - z} - L_\mu^{(1)}(K, z; p, q). \end{aligned}$$

Для каждого $z < \tau_{\text{essspec}}(H_\mu(K))$ ядро $L_\mu^{(2)}(K, z; p, q)$ оператора $L_\mu^{(2)}(K, z)$ является регулярной функцией в точке $(p_\mu(K), p_\mu(K))$ и $L_\mu^{(2)}(K, z; p_\mu(K), p_\mu(K)) = 0$.

Из леммы 2 вытекает, что для каждого $\mu < 0$ и для $K, p, q \in \mathbb{T}^d$ верно неравенство

$$E(K; p, q) - \tau_{\text{essspec}}(H_\mu(K)) \geq E_{\min}(K) - \tau_{\text{essspec}}(H_\mu(K)) > 0. \quad (5.10)$$

Поэтому из определения функции $E(K; p, q)$ имеем, что функция

$$[E(K; p, q) - \tau_{\text{essspec}}(H_\mu(K))]^{-1} - L_\mu^{(1)}(K, \tau_{\text{essspec}}(H_\mu(K)); p, q)$$

регулярна по $(p, q) \in (\mathbb{T}^d)^2$.

Поэтому согласно лемме 5 оператор $L_\mu^{(2)}(K, \tau_{\text{essspec}}(H_\mu(K)))$, $K \in U_\delta(0)$, принадлежит классу Гильберта–Шмидта. ■

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. 1. Воспользуемся дважды неравенством Вейля

$$n_+[\lambda_1 + \lambda_2, A_1 + A_2] \leq n_+[\lambda_1, A_1] + n_+[\lambda_2, A_2],$$

которое выполняется для компактных операторов A_1, A_2 и положительных чисел λ_1, λ_2 . Тогда при всех $z < \tau_{\text{essspec}}(H_\mu(K))$ имеем

$$\begin{aligned} n_+[1, L_\mu(K, z)] &\leq n_+\left[\frac{1}{3}, L_\mu^{(1)}(K, z)\right] + n_+\left[\frac{2}{3}, L_\mu^{(2)}(K, z)\right] \leq \\ &\leq n_+\left[\frac{1}{3}, L_\mu^{(1)}(K, z)\right] + n_+\left[\frac{1}{3}, L_\mu^{(2)}(K, \tau_{\text{essspec}}(H_\mu(K)))\right] + \\ &\quad + n_+\left[\frac{1}{3}, L_\mu^{(2)}(K, z) - L_\mu^{(2)}(K, \tau_{\text{essspec}}(H_\mu(K)))\right]. \end{aligned}$$

Из компактности $L_\mu^{(2)}(K, \tau_{\text{essspec}}(H_\mu(K)))$, $K \in U_\delta(0)$, вытекает, что

$$n_+\left[\frac{1}{3}, L_\mu^{(2)}(K, \tau_{\text{essspec}}(H_\mu(K)))\right] < \infty.$$

Оператор $L_\mu^{(2)}(K, z)$ непрерывен по $z \leq \tau_{\text{essspec}}(H_\mu(K))$ и сходится к оператору $L_\mu^{(2)}(K, \tau_{\text{essspec}}(H_\mu(K)))$ в равномерной операторной топологии. Поэтому при всех малых $|\tau_{\text{essspec}}(H_\mu(K)) - z|$ мы имеем

$$n_+\left[\frac{1}{3}, L_\mu^{(2)}(K, z) - L_\mu^{(2)}(K, \tau_{\text{essspec}}(H_\mu(K)))\right] = 0.$$

Ранг оператора $L_\mu^{(1)}(K, z)$, $z < \tau_{\text{essspec}}(H_\mu(K))$, не зависит от z и

$$n_+ \left[\frac{1}{3}, L_\mu^{(1)}(K, z) \right] < \infty.$$

Таким образом, в силу леммы 3 оператор $H_\mu(K)$, $K \in U_\delta(0)$, имеет конечное число собственных значений в интервале $(-\infty, \tau_{\text{essspec}}(H_\mu(K)))$.

2. Доказательство этого пункта вытекает из утверждений леммы 4. ■

Список литературы

- [1] K. Winkler, G. Thalhammer, F. Lang, R. Grimm J. H. Denschlag, A. J. Daley, A. Kantian, H. P. Büchler, P. Zoller, *Nature*, **441** (2006), 853–856.
- [2] Л. Д. Фаддеев, *Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц*, Тр. МИАН АН СССР, **69**, Изд-во АН СССР, М.-Л., 1963.
- [3] С. П. Меркурьев, Л. Д. Фаддеев, *Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц*, Наука, М., 1985.
- [4] S. Albeverio, S. N. Lakaev, K. A. Makarov, *Lett. Math. Phys.*, **43**:1 (1998), 73–85.
- [5] S. Albeverio, S. N. Lakaev, Z. I. Muminov, *Ann. Henri Poincaré*, **5**:4 (2004), 743–772.
- [6] S. Albeverio, S. N. Lakaev, A. M. Khalkhujayev, *Markov Process. Relat. Fields*, **18**:3 (2012), 387–420.
- [7] V. Efimov, *Phys. Lett. B*, **33**:8 (1970), 563–564.
- [8] С. Н. Лакаев, *Функц. анализ и его прил.*, **27**:3 (1993), 15–28.
- [9] A. V. Sobolev, *Commun. Math. Phys.*, **156**:1 (1993), 101–126.
- [10] H. Tamura, “Asymptotics for the number of negative eigenvalues of three-body Schrödinger operators with Efimov effect”, *Spectral Scattering Theory and Applications* (Tokyo Institute of Technology, Japan, June 30–July 3, 1992), Advanced Studies in Pure Mathematics, **23**, ed. K. Yajima, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1994, 311–322.
- [11] Д. Р. Яфаев, *Матем. сб.*, **94(136)**:4(8) (1974), 567–593.
- [12] С. А. Вугальтер, Г. М. Жислин, *ТМФ*, **55**:1 (1983), 66–77.
- [13] М. Э. Муминов, Н. М. Алиев, *ТМФ*, **171**:3 (2012), 387–403.
- [14] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 4: *Анализ операторов*, Мир, М., 1982.
- [15] С. Н. Лакаев, А. М. Халхужаев, Ш. С. Лакаев, *ТМФ*, **171**:3 (2012), 438–451.
- [16] A. A. Pankov, *Lecture Notes on Schrödinger Equations*, Nova Sci., New York, 2007.

Поступила в редакцию 28.09.2015