Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

У. А. Розиков, М. М. Рахматуллаев, О свободных энергиях модели Поттса на дереве Кэли, *ТМФ*, 2017, том 190, номер 1, 112–123

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9061>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 18:12:14

© 2017 г.

У. А. Розиков*, М. М. Рахматуллаев*

О СВОБОДНЫХ ЭНЕРГИЯХ МОДЕЛИ ПОТТСА НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Для модели Поттса на дереве Кэли получены некоторые явные формулы для свободных энергий и энтропий в случае векторнозначных граничных условий. Эти условия включают в себя трансляционно-инвариантные, периодические граничные условия, подобные граничным условиям Добрушина, а также граничные условия, соответствующие слабо периодическим мерам Гиббса.

Ключевые слова: дерево Кэли, модель Поттса, граничные условия, мера Гиббса, свободная энергия, энтропия.

DOI: 10.4213/tmf9061

1. ВВЕДЕНИЕ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

На дереве Кэли не только меры Гиббса, но и свободная энергия (и энтропия) зависят от граничных условий (ГУ). Эта зависимость изучалась в работе [1]. Было показано, что свободные энергии существуют для всех ранее известных ГУ. Позже в работе [2] была представлена конструкция новых мер Гиббса (названных переменными (alternating) мерами Гиббса) и приведены соответствующие им свободные энергии. Более того, было доказано, что свободная энергия некоторых переменных мер Гиббса может не существовать.

Цель настоящей статьи заключается в изучении свободных энергий модели Поттса на дереве Кэли. Дерево Кэли Γ^k (см. работу [2]) порядка $k \geq 1$ – это бесконечное дерево, т. е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k+1$ ребер. Пусть $\Gamma^k = (V, L, i)$, где V – множество вершин, L – множество ребер и i – функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру $l \in L$ его концевые точки $x, y \in V$. Если $i(l) = \{x, y\}$, то x и y называются *ближайшими соседними вершинами*, и мы пишем $l = \langle x, y \rangle$.

Расстояние между вершинами $x, y \in V$ на дереве Кэли определяется как минимальное число $d = d(x, y)$, для которого существует последовательность вершин $x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y$, являющихся ближайшими соседями, т. е.

$$\langle x_0, x_1 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle.$$

*Институт математики при Национальном университете Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан. E-mail: rozikovu@yandex.ru, mrahmatullaev@rambler.ru

Известно, что существует взаимно однозначное соответствие между множеством V вершин дерева Кэли порядка $k \geq 1$ и группой G_k свободных произведений $k+1$ циклических групп $\{e, a_i\}$, $i = 1, \dots, k+1$, второго порядка (т. е. $a_i^2 = e$) с образующими $a_1, \dots, a_{k+1}$.

Для фиксированного $x^0 \in V$ положим

$$W_n = \{x \in V: d(x, x^0) = n\}, \quad V_n = \{x \in V: d(x, x^0) \leq n\}, \\ L_n = \{l = \langle x, y \rangle \in L: x, y \in V_n\}.$$

Для $x \in W_n$ положим $S(x) = \{y \in W_{n+1}: d(x, y) = 1\}$. Пусть $S_1(x)$ – множество всех ближайших соседних вершин $x \in G_k$, т. е. $S_1(x) = \{y \in G_k: \langle x, y \rangle\}$, и $x_\downarrow$ обозначает единственный элемент множества $S_1(x) \setminus S(x)$.

Мы рассматриваем модели, в которых спин принимает значения из множества $\Phi = \{1, \dots, q\}$ с $q \geq 2$. Конфигурация σ задается как функция $x \in V \rightarrow \sigma(x) \in \Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega = \Phi^V$. Пусть $\Omega_n = \Phi^{V_n}$ обозначает пространство конфигураций, определенных на V_n . Гамильтониан модели Поттса имеет вид

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x, y \rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \quad (1.1)$$

где $J \in \mathbb{R}$ и δ_{uv} – символ Кронекера.

Рассмотрим множество $\Phi = \{\sigma_1, \dots, \sigma_q\}$, где $\sigma_i \in \mathbb{R}^{q-1}$; зададим скалярное произведение $\sigma_i \sigma_j$ как

$$\sigma_i \sigma_j = \begin{cases} -\frac{1}{q-1}, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Тогда мы имеем

$$\delta_{\sigma(x)\sigma(y)} = \frac{q-1}{q} \left(\sigma(x)\sigma(y) + \frac{1}{q-1} \right). \quad (1.2)$$

С помощью этой формулы гамильтониан модели Поттса может быть сведен к гамильтониану модели Изинга с q значениями спина:

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x, y \rangle \in L} \sigma(x)\sigma(y). \quad (1.3)$$

Зафиксируем базис $\{e_1, \dots, e_{q-1}\}$ в $\mathbb{R}^{q-1}$ так, что $e_i = \sigma_i$, $i = 1, 2, \dots, q-1$. Ясно, что

$$\sum_{i=1}^q \sigma_i = 0. \quad (1.4)$$

Заметим, что если $h = (h_1, \dots, h_{q-1})$, то

$$h\sigma_i = \begin{cases} \frac{q}{q-1}h_i - \frac{1}{q-1} \sum_{j=1}^{q-1} h_j, & \text{если } i = 1, \dots, q-1, \\ -\frac{1}{q-1} \sum_{j=1}^{q-1} h_j, & \text{если } i = q. \end{cases}$$

Определим конечномерное распределение вероятностной меры μ в объеме V_n как

$$\mu_n(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp \left\{ -\beta H_n(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_x \sigma(x) \right\}, \quad (1.5)$$

где $\sigma_n \in \Omega_n$, параметр $\beta = 1/T$, $T > 0$ – температура, $h_x \in \mathbb{R}^{q-1}$,

$$H_n(\sigma_n) = -J \sum_{\langle x, y \rangle \in L_n} \sigma(x) \sigma(y),$$

и Z_n^{-1} – нормировочный множитель,

$$Z_n = Z_n(\beta, h) = \sum_{\sigma_n \in \Omega_n} \exp \left(-\beta H_n(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_x \sigma(x) \right).$$

Совокупность векторов $h = \{h_x \in \mathbb{R}^{q-1}, x \in V\}$ задает (обобщенные) ГУ. Свободной энергией, соответствующей ГУ h называется следующий предел (если он существует):

$$E(\beta, h) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta |V_n|} \ln Z_n(\beta, h).$$

Говорят, что вероятностные распределения (1.5) являются согласованными, если для всех $n \geq 1$ и $\sigma_{n-1} \in \Phi^{V_{n-1}}$

$$\sum_{\sigma^{(n)} \in \Phi^{W_n}} \mu_n(\sigma_{n-1} \vee \sigma^{(n)}) = \mu_{n-1}(\sigma_{n-1}), \quad (1.6)$$

где $\sigma_{n-1} \vee \sigma^{(n)}$ – объединение конфигураций. В этом случае существует единственная мера μ на Φ^V такая, что для всех n и $\sigma_n \in \Phi^{V_n}$

$$\mu(\{\sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu_n(\sigma_n).$$

Такая мера называется *предельной мерой Гиббса*, соответствующей гамильтониану (1.3) и векторнозначной функции h_x , $x \in V$.

Следующее утверждение описывает условие на функцию h_x , обеспечивающее согласованность мер $\mu_n(\sigma_n)$.

ТЕОРЕМА 1. Меры (1.5) удовлетворяют условию (1.6) тогда и только тогда, когда для всех $x \in V \setminus \{x^0\}$ имеет место следующее уравнение:

$$h_x = \sum_{y \in S(x)} F(h_y, \theta), \quad (1.7)$$

где функция $F: h = (h_1, \dots, h_{q-1}) \in \mathbb{R}^{q-1} \rightarrow F(h, \theta) = (F_1, \dots, F_{q-1}) \in \mathbb{R}^{q-1}$ определяется формулами

$$F_i = \ln \frac{(\theta - 1) e^{h_i} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j} + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j}}, \quad \theta = e^{J\beta}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе [3] (см. с. 106) эта теорема была доказана для гамильтониана (1.1) (т.е. без изменений, выраженных формулой (1.2)). В настоящей работе мы доказываем соотношение (1.7) для гамильтониана (1.3), т.е. с учетом (1.2). Таким образом, формула, полученная в доказательстве, полезна для нахождения общего вида свободной энергии.

Подставляя выражение (1.5) в (1.6) с учетом (1.2), мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{Z_{n-1}}{Z_n} \sum_{\sigma^{(n)}} \exp \left\{ J\beta \sum_{x \in W_{n-1}} \left(\sum_{y \in S(x)} \sigma(x)\sigma(y) \right) + \sum_{x \in W_{n-1}} \left(\sum_{y \in S(x)} h_y \sigma(y) \right) \right\} = \\ = \exp \left\{ \sum_{x \in W_{n-1}} h_x \sigma(x) \right\}, \quad \sigma(x) \in \Phi. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{Z_{n-1}}{Z_n} \prod_{x \in W_{n-1}} \prod_{y \in S(x)} \sum_{\sigma(y)} e^{J\beta \sigma(x)\sigma(y) + h_y \sigma(y)} = \prod_{x \in W_{n-1}} e^{h_x \sigma(x)}, \quad \sigma(x) \in \Phi. \quad (1.8)$$

Зафиксируем $x \in W_{n-1}$ и запишем равенства (1.8) для $\sigma(x) = \sigma_i$, $i = 1, \dots, q-1$, и $\sigma(x) = \sigma_q$. Тогда, разделив каждое из первых $q-1$ равенств на последнее, мы получим

$$\prod_{y \in S(x)} \frac{\sum_{\sigma(y)} e^{(J\beta \sigma_i + h_y) \sigma(y)}}{\sum_{\sigma(y)} e^{(J\beta \sigma_q + h_y) \sigma(y)}} = \frac{e^{h_x \sigma_i}}{e^{h_x \sigma_q}}, \quad i = 1, 2, \dots, q-1. \quad (1.9)$$

Заметим, что $h_x \sigma_i - h_x \sigma_q = \frac{q}{q-1} h_{x,i}$, где $h_x = (h_{x,1}, \dots, h_{x,q-1})$. Теперь, произведя замену $\frac{q}{q-1} h_{x,i} \rightarrow h_{x,i}$, мы получим формулу (1.7). Для доказательства обратного утверждения см. работу [3].

Пусть $G_k/G_k^* = \{H_1, \dots, H_r\}$ – факторгруппа, где G_k^* – нормальная подгруппа индекса $r \geq 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Совокупность векторов $h = \{h_x, x \in G_k\}$ называется G_k^* -периодической, если $h_{yx} = h_x$ для любых $x \in G_k$ и $y \in G_k^*$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Совокупность векторов $h = \{h_x, x \in G_k\}$ называется G_k^* -слабо периодической, если $h_x = h_{ij}$ для $x \in H_i$ и если $x_{\downarrow} \in H_j$ для любого $x \in G_k$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Мера μ называется G_k^* -периодической (слабо периодической), если она соответствует G_k^* -периодической (слабо периодической) совокупности векторов h ; G_k -периодическая мера называется трансляционно-инвариантной.

В настоящей статье мы вычисляем свободные энергии, которые соответствуют трансляционно-инвариантным, периодическим, слабо периодическим и некоторым непериодическим ГУ (мерам Гиббса).

2. ФОРМУЛА ДЛЯ СВОБОДНОЙ ЭНЕРГИИ

Следующая теорема дает общий вид свободной энергии.

ТЕОРЕМА 2. *Для ГУ, удовлетворяющих условию (1.7), свободная энергия определяется следующим выражением:*

$$E(\beta, h) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|V_n|} \sum_{x \in V_n} a(x), \quad (2.1)$$

где

$$a(x) = \frac{1}{q\beta} \sum_{i=1}^q \ln \left(\sum_{u=1}^q e^{(J\beta\sigma_i + h_x)\sigma_u} \right). \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (1.9) имеем

$$\prod_{y \in S(x)} \sum_{u=1}^q e^{J\beta\sigma_i\sigma_u + \sigma_u h_y} = b(x) e^{\sigma_i h_x}, \quad i = 1, \dots, q.$$

Перемножая все эти равенства и используя формулу (1.4), мы получаем

$$b^q(x) = \prod_{i=1}^q \prod_{y \in S(x)} \sum_{u=1}^q e^{(J\beta\sigma_i\sigma_u + \sigma_u h_y)} = \prod_{y \in S(x)} \prod_{i=1}^q \sum_{u=1}^q e^{(J\beta\sigma_i + h_y)\sigma_u},$$

отсюда

$$b(x) = \prod_{y \in S(x)} \prod_{i=1}^q \left(\sum_{u=1}^q e^{(J\beta\sigma_i + h_y)\sigma_u} \right)^{1/q}.$$

Пусть $A_n = \prod_{x \in W_n} b(x)$. Ясно, что $Z_n = A_{n-1} Z_{n-1}$. Следовательно,

$$Z_n = \prod_{x \in W_{n-1}} b(x) Z_{n-1} = \prod_{x \in W_{n-1}} b(x) \prod_{x \in W_{n-2}} b(x) Z_{n-2} = \dots = \prod_{x \in V_{n-1}} b(x)$$

и

$$\ln Z_n = \sum_{x \in V_{n-1}} \ln b(x).$$

Отсюда мы получаем, что

$$a(x) = \frac{1}{q\beta} \sum_{i=1}^q \ln \left(\sum_{u=1}^q e^{(J\beta\sigma_i + h_x)\sigma_u} \right).$$

Теорема доказана.

3. СВОБОДНЫЕ ЭНЕРГИИ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ НЕКОТОРЫМ ГУ

3.1. Трансляционно-инвариантный случай. Рассмотрим трансляционно-инвариантную совокупность векторов h_x , т. е. векторы, удовлетворяющие требованию $h_x = h = (h_1, \dots, h_{q-1}) \in \mathbb{R}^{q-1}$ для любого $x \in G_k$. Тогда из (1.7) мы получаем равенства

$$h_i = k \ln \frac{(\theta - 1) e^{h_i} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j} + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j}}, \quad i = 1, \dots, q-1. \quad (3.1)$$

Введя обозначения $z_i = e^{h_i}$ для $i = 1, \dots, q-1$, из (3.1) мы имеем

$$z_i = \left(\frac{(\theta - 1)z_i + \sum_{j=1}^{q-1} z_j + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} z_j} \right)^k, \quad i = 1, \dots, q-1. \quad (3.2)$$

Для $k = 2$ введем обозначения

$$\begin{aligned} x_1(m) &= \frac{\theta - 1 - \sqrt{(\theta - 1)^2 - 4m(q - m)}}{2m}, \\ x_2(m) &= \frac{\theta - 1 + \sqrt{(\theta - 1)^2 - 4m(q - m)}}{2m}, \end{aligned} \quad s = 1, 2, \dots, m, \quad (3.3)$$

где

$$\theta \geq \theta_m = 1 + 2\sqrt{m(q - m)}, \quad m = 1, \dots, q-1.$$

Легко увидеть, что $\theta_m = \theta_{q-m}$ и $\theta_1 < \dots < \theta_{[q/2]-1} < \theta_{[q/2]} \leq q+1$.

Пусть $k = 2$, $J > 0$; справедливы следующие утверждения [4].

1. Если $\theta < \theta_1$, то система (3.1) имеет единственное решение $h_0 = (0, \dots, 0)$.
2. Если $\theta_m < \theta < \theta_{m+1}$ при некотором $m = 1, \dots, [q/2] - 1$, то система (3.1) имеет решения

$$\begin{aligned} h_0 &= (0, \dots, 0), \quad h_{1i}(s), \quad h_{2i}(s), \quad i = 1, \dots, \binom{q-1}{s}, \\ &h'_{1i}(q-s), \quad h'_{2i}(q-s), \quad i = 1, \dots, \binom{q-1}{q-s}, \end{aligned}$$

где вектор $h_{ji}(s)$ (вектор $h'_{ji}(q-s)$) имеет s координат (соответственно $q-s$ координат), равных $2 \ln x_j(s)$ (соответственно равных $2 \ln x_j(q-s)$), а оставшиеся $q-s-1$ координат (соответственно $s-1$ координат) равны нулю (здесь $j = 1, 2$). Число таких решений равно

$$1 + 2 \sum_{s=1}^m \binom{q}{s}.$$

3. Если $\theta_{[q/2]} < \theta \neq q+1$, то система (3.1) имеет $2^q - 1$ решений.
4. Если $\theta = q+1$, то число решений системы (3.1) равно 2^{q-1} для нечетного q и равно $2^{q-1} - \binom{q-1}{q/2}$ для четного q .
5. Если $\theta = \theta_m$ для некоторого $m = 1, \dots, [q/2]$ (и $\theta_{[q/2]} \neq q+1$), то $h_{1i}(m) = h_{2i}(m)$. Число решений при этом равно

$$1 + \binom{q}{m} + 2 \sum_{s=1}^{m-1} \binom{q}{s}.$$

Таким образом, любое решение системы уравнений (3.1) имеет вид

$$h = (\underbrace{h_*, \dots, h_*}_m, 0, \dots, 0), \quad m \geq 0, \quad (3.4)$$

с точностью до перестановки координат.

В этом пункте мы найдем свободную энергию и энтропию $S(\beta, h) = -dE(\beta, h)/dT$ для совокупности трансляционно-инвариантных векторов $h_x = h$, где h задано формулой (3.4).

Случай $m = 0$. В этом случае $h = h_0 = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{q-1}$. Используя соотношение (2.1), находим свободную энергию:

$$\begin{aligned} E_{\text{ТИ}}(\beta, h_0) &= -a(x) = -\frac{1}{q\beta} \sum_{i=1}^q \ln \left(\sum_{u=1}^q e^{J\beta\sigma_i\sigma_u} \right) = \\ &= -\frac{1}{q\beta} \sum_{i=1}^q \ln(e^{J\beta} + (q-1)e^{\frac{J\beta}{1-q}}) = -\frac{q}{q\beta} \ln(e^{J\beta} + (q-1)e^{\frac{J\beta}{1-q}}) = \\ &= -J - \frac{1}{\beta} \ln(1 + (q-1)e^{\frac{Jq\beta}{1-q}}). \end{aligned}$$

Соответствующая энтропия имеет вид

$$S_{\text{ТИ}}(\beta, h_0) = -\frac{dE_{\text{ТИ}}(\beta, h_0)}{dT} = \ln(1 + (q-1)e^{\frac{Jq\beta}{1-q}}) + \frac{Jq\beta e^{\frac{Jq\beta}{1-q}}}{1 + (q-1)e^{\frac{Jq\beta}{1-q}}}.$$

Случай $m \neq 0$. Используя представление (3.4), мы вычисляем свободную энергию:

$$\begin{aligned} E_{\text{ТИ}}(\beta, m, h_x) &= -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|V_n|} \sum_{x \in V_n} a(x) = -a(x) = \\ &= -\frac{1}{q\beta} \sum_{i=1}^q \ln \left(\sum_{u=1}^q e^{(J\beta\sigma_i + h_x)\sigma_u} \right) = \\ &= -\frac{q-m}{q\beta} \ln(m e^{-\frac{J\beta}{q-1} + \frac{q-m}{q-1}h_*} + e^{J\beta - \frac{m}{q-1}h_*} + (q-m-1)e^{-\frac{J\beta}{q-1} - \frac{m}{q-1}h_*}) - \\ &\quad - \frac{m}{q\beta} \ln((m-1)e^{-\frac{J\beta}{q-1} + \frac{q-m}{q-1}h_*} + e^{J\beta + \frac{q-m}{q-1}h_*} + (q-m)e^{-\frac{J\beta}{q-1} - \frac{m}{q-1}h_*}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Учитывая, что $h_* = 2 \ln x_j(m)$ (где $x_j(m)$ определяются формулой (3.3)), $j = 1, 2$, мы вычисляем соответствующую энтропию:

$$\begin{aligned} S_{\text{ТИ}}(\beta, m, h_x) &= -\frac{dE_{\text{ТИ}}(\beta, m, h_x)}{dT} = -E_{\text{ТИ}}(\beta, m, h_x)\beta + \\ &+ \frac{J\beta(q-m)}{q(m e^{-\frac{J\beta}{q-1} + \frac{q-m}{q-1}h_*} + e^{J\beta - \frac{m}{q-1}h_*} + (q-m-1)e^{-\frac{J\beta}{q-1} - \frac{m}{q-1}h_*})} \times \\ &\times [(1 + (q-m)A)e^{-\frac{J\beta}{q-1} + \frac{q-m}{q-1}h_*} + (1-q-mA)e^{J\beta - \frac{m}{q-1}h_*} + \\ &\quad + (q-m-1)(1-mA)e^{-\frac{J\beta}{q-1} - \frac{m}{q-1}h_*}] + \\ &+ \frac{J\beta m}{q((m-1)e^{-\frac{J\beta}{q-1} + \frac{q-m}{q-1}h_*} + e^{J\beta + \frac{q-m}{q-1}h_*} + (q-m)e^{-\frac{J\beta}{q-1} - \frac{m}{q-1}h_*})} \times \\ &\times [(m-1)(1 + (q-m)A)e^{-\frac{J\beta}{q-1} + \frac{q-m}{q-1}h_*} + ((m-q)A-1)e^{J\beta - \frac{m}{q-1}h_*} + \\ &\quad + (q-m)(1-mA)e^{-\frac{J\beta}{q-1} - \frac{m}{q-1}h_*}], \end{aligned} \quad (3.6)$$

где

$$A = \frac{2e^{J\beta}}{(q-1)(e^{J\beta} - 2me^{h_*/2} - 1)}.$$

Рис. 1. Свободная энергия $E_{\text{TI}}(\beta, h_0)$ – жирная сплошная линия (линия 1); свободная энергия $E_{\text{TI}}(\beta, (2 \ln x_1(1), 0))$ – тонкая сплошная линия (линия 2); свободная энергия $E_{\text{TI}}(\beta, (2 \ln x_2(1), 0))$ – пунктирная линия (линия 3); свободная энергия $E_{\text{TI}}(\beta, (2 \ln x_1(2), 2 \ln x_1(2)))$ – штриховая линия (линия 4); свободная энергия $E_{\text{TI}}(\beta, (2 \ln x_2(2), 2 \ln x_2(2)))$ – штрихпунктирная линия (линия 5). Здесь $q = 3$ и $x_i(m)$ для $i = 1, 2$ и $m = 1, 2$ определяются выражениями (3.3).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Энтропию для $2 \ln x_1(m)$ и $2 \ln x_2(m)$ можно вычислить с помощью формулы (3.6), заменяя h_* на $2 \ln x_1(m)$ и $2 \ln x_2(m)$ соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При любых перестановках координат вектора h_x свободная энергия и энтропия не меняются.

Графики свободных энергий (3.5) показаны на рис. 1.

3.2. ГУ, не являющиеся трансляционно-инвариантными. В этом разделе мы изучаем ГУ (меры Гиббса), не являющиеся трансляционно-инвариантными. Эти меры были построены Ганиходжаевым в работе [5]. Рассматривается половина дерева, а именно, корень x^0 имеет k ближайших соседей. Рассмотрим бесконечный путь $\pi = \{x^0 = x_0 < x_1 < \dots\}$ (здесь $x < y$ означает, что пути от корня до y идут через x). Возьмем два разных решения h_*^1 и h_*^2 уравнения (3.1) (вида (3.4)). Сопоставим π совокупность h^π векторов, задаваемых условием

$$h_x^\pi = \begin{cases} h_*^1, & \text{если } x \prec x_n, x \in W_n, \\ h_*^2, & \text{если } x_n \preceq x, x \in W_n, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.7)$$

где $x \prec x_n$ ($x_n \prec x$) означает, что x находится слева (соответственно справа) от пути π . Для данного бесконечного пути π положим

$$\mathcal{W}_n^\pi = \{x \in W_n : x \prec x_n\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

ЛЕММА 1. Для любого пути π существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\mathcal{W}_n^\pi|}{|W_n|} = a^\pi. \quad (3.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\Delta_1^\pi = \mathcal{W}_1^\pi, \quad \Delta_n^\pi = \mathcal{W}_n^\pi \cap S(x_{n-1}), \quad n = 2, 3, \dots$$

Легко увидеть, что

$$|\mathcal{W}_n^\pi| = \sum_{i=1}^n |\Delta_i^\pi| \cdot |W_{n-i}|$$

и $0 \leq |\Delta_i^\pi| \leq k-1$ для всех i и любого пути π .

Пусть $a_n^\pi = |\mathcal{W}_n^\pi|/|W_n|$. Тогда, используя соотношение $|W_n| = k^{n-1}(k+1)$, мы получаем

$$a_{n+1}^\pi - a_n^\pi = \frac{|\mathcal{W}_{n+1}^\pi|}{|W_{n+1}|} - \frac{|\mathcal{W}_n^\pi|}{|W_n|} = \frac{\Delta_{n+1}^\pi}{k^n(k+1)} \geq 0,$$

т. е. последовательность $\{a_n^\pi\}$ монотонно не убывает. Нетрудно заметить, что $a_n^\pi < 1$. Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} (|\mathcal{W}_n^\pi|/|W_n|) = a^\pi$ существует и конечен. Лемма доказана.

Введем обозначение $V_n^l = \cup_{i=1}^n \mathcal{W}_i^\pi$. Согласно теореме Штольца–Цезаро (см., например, работу [6]) мы имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|V_n^l|}{|V_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\mathcal{W}_n^\pi|}{|W_n|} = a^\pi. \quad (3.9)$$

Найдем свободную энергию для совокупности векторов h_x^π . В силу (3.9) мы получаем

$$\begin{aligned} E_G(\beta, m, h_x^\pi) &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|V_n|} \sum_{x \in V_n} a(x) = \\ &= - \frac{1}{q\beta} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|V_n^l|}{|V_n|} \cdot \sum_{i=1}^q \ln \left(\sum_{u=1}^q e^{(J\beta\sigma_i + h_*^1)\sigma_u} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{q\beta} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{|V_n^l|}{|V_n|} \right) \cdot \sum_{i=1}^q \ln \left(\sum_{u=1}^q e^{(J\beta\sigma_i + h_*^2)\sigma_u} \right) = \\ &= a^\pi E_{\text{ТИ}}(\beta, m, h_*^1) + (1 - a^\pi) E_{\text{ТИ}}(\beta, m, h_*^2), \end{aligned} \quad (3.10)$$

где $E_{\text{ТИ}}(\beta, m, h)$ определяется в (3.5).

Используя выражения (3.6) и (3.10), мы получаем следующую формулу для энтропии:

$$S_G(\beta, m, h_x^\pi) = a^\pi S_{\text{ТИ}}(\beta, m, h_x^1) + (1 - a^\pi) S_{\text{ТИ}}(\beta, m, h_x^2).$$

3.3. Периодические ГУ. В этом пункте мы рассматриваем периодические ГУ и вычисляем для них свободные энергии.

Пусть $q = 3$. Известно (см. работу [7]), что существуют только $G_k^{(2)}$ -периодические меры Гиббса, где $G_k^{(2)}$ – совокупность всех слов четной длины. Соответствующая совокупность векторов $h = \{h_x \in \mathbb{R}^{q-1} : x \in G_k\}$ имеет вид

$$h_x = \begin{cases} \mathbf{h}^1, & \text{если } x \in G_k^{(2)}, \\ \mathbf{h}^2, & \text{если } x \in G_k \setminus G_k^{(2)}, \end{cases} \quad \mathbf{h}^1 = (h_1^1, h_2^1), \quad \mathbf{h}^2 = (h_1^2, h_2^2).$$

С учетом уравнения (1.7) мы имеем систему

$$\begin{aligned} h_1^1 &= k \ln \frac{\theta e^{h_1^2} + e^{h_2^2} + 1}{e^{h_1^2} + e^{h_2^2} + \theta}, & h_2^1 &= k \ln \frac{e^{h_1^2} + \theta e^{h_2^2} + 1}{e^{h_1^2} + e^{h_2^2} + \theta}, \\ h_1^2 &= k \ln \frac{\theta e^{h_1^1} + e^{h_2^1} + 1}{e^{h_1^1} + e^{h_2^1} + \theta}, & h_2^2 &= k \ln \frac{e^{h_1^1} + \theta e^{h_2^1} + 1}{e^{h_1^1} + e^{h_2^1} + \theta}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Известно (см. работу [8]), что для $k = 3$ и $J < 0$, если $0 < \theta < 1/4$, то система (3.11) имеет по крайней мере два решения вида $h = (h^1, h^1, h^2, h^2)$. Опишем свободные энергии для такой совокупности периодических векторов h_x . Из формулы (2.2) мы имеем

$$a(x) = \begin{cases} d(\mathbf{h}^1), & \text{если } x \in G_k^{(2)}, \\ d(\mathbf{h}^2), & \text{если } x \in G_k \setminus G_k^{(2)}, \end{cases}$$

где

$$d(\mathbf{h}) = \frac{1}{q\beta} \sum_{i=1}^q \sum_{u=1}^q e^{(J\beta\sigma_i + \mathbf{h})\sigma_u}. \quad (3.12)$$

Введем обозначения

$$V_{\text{even},n} = \{x \in V_n : x \in G_k^{(2)}\}, \quad V_{\text{odd},n} = \{x \in V_n : x \in G_k \setminus G_k^{(2)}\}.$$

Легко проверить, что для $n = 2p$

$$|V_{\text{even},2p}| = \frac{k^{2p+1} - 1}{k - 1}, \quad |V_{\text{odd},2p}| = \frac{k^{2p} - 1}{k - 1},$$

а для $n = 2p + 1$

$$|V_{\text{even},2p+1}| = \frac{k^{2p} - 1}{k - 1}, \quad |V_{\text{odd},2p+1}| = \frac{k^{2p+2} - 1}{k - 1},$$

кроме того,

$$|V_n| = \frac{(k+1)k^n - 2}{k - 1}.$$

Используя эти формулы, найдем свободную энергию:

$$\begin{aligned}
 E_{\text{PER}}(\beta, h_x) &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|V_{\text{even},n}|d(\mathbf{h}^1) + |V_{\text{odd},n}|d(\mathbf{h}^2)}{|V_n|} = \\
 &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{|V_{\text{even},2p}|d(\mathbf{h}^1) + |V_{\text{odd},2p}|d(\mathbf{h}^2)}{|V_{2p}|}, & \text{если } n = 2p, \\ \frac{|V_{\text{even},2p+1}|d(\mathbf{h}^1) + |V_{\text{odd},2p+1}|d(\mathbf{h}^2)}{|V_{2p+1}|}, & \text{если } n = 2p + 1, \end{cases} = \\
 &= - \frac{1}{k+1} \begin{cases} kd(\mathbf{h}^1) + d(\mathbf{h}^2), & \text{если } n = 2p, \\ d(\mathbf{h}^1) + kd(\mathbf{h}^2), & \text{если } n = 2p + 1, \end{cases} \quad p \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что если $d(\mathbf{h}^1) \neq d(\mathbf{h}^2)$, то для периодических ГУ свободная энергия не существует. Для $k = q = 3$ и фиксированного значения $\theta = 1/5$, используя компьютерный анализ, можно увидеть, что $d(\mathbf{h}^1) \neq d(\mathbf{h}^2)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Известно (см. работу [1]), что для периодических мер Гиббса модели Изинга на деревьях Кэли свободные энергии существуют. Мы доказали, что для модели Поттса свободная энергия периодических мер Гиббса может не существовать.

3.4. Слабо периодические ГУ. Построим слабо периодическое ГУ. Положим для $A \subset \{1, 2, \dots, k+1\}$

$$H_A = \left\{ x \in G_k : \sum_{j \in A} w_j(x) - \text{четное число} \right\},$$

где $w_j(x)$ – количество букв a_j в слове x ; пусть $G_k/H_A = \{H_A, G_k \setminus H_A\}$ – фактор-группа. Для простоты положим $H_0 = H_A$, $H_1 = G_k \setminus H_A$. H_A -слабо периодические совокупности векторов $h = \{h_x \in \mathbb{R}^{q-1} : x \in G_k\}$ имеют следующий вид:

$$h_x = \begin{cases} h_1, & \text{если } x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_0, \\ h_2, & \text{если } x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_1, \\ h_3, & \text{если } x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_0, \\ h_4, & \text{если } x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_1. \end{cases} \quad (3.13)$$

Здесь $h_i = (h_{i1}, h_{i2}, \dots, h_{iq-1})$ для $i = 1, 2, 3, 4$. Согласно уравнению (1.7) мы имеем систему

$$\begin{aligned}
 h_1 &= (k - |A|)F(h_1, \theta) + |A|F(h_2, \theta), \\
 h_2 &= (|A| - 1)F(h_3, \theta) + (k + 1 - |A|)F(h_4, \theta), \\
 h_3 &= (|A| - 1)F(h_2, \theta) + (k + 1 - |A|)F(h_1, \theta), \\
 h_4 &= (k - |A|)F(h_4, \theta) + |A|F(h_3, \theta).
 \end{aligned} \quad (3.14)$$

В работе [9] было показано, что в случае $|A| = k$, $k \geq 6$, система уравнений (3.14) имеет по крайней мере два (не являющихся трансляционно-инвариантными) решения, которые порождают совокупность векторов h_x вида (3.13), где все координаты

векторов h_i , $i = 1, 2, 3, 4$, одинаковы и векторы h_i и h_j различны при $i \neq j$. Найдем для таких слабо периодических совокупностей векторов h_x свободную энергию.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_n &= |\{(x, y) \in L_n : x \in H_0, y = x_{\downarrow} \in H_0\}|, \\ \mathcal{B}_n &= |\{(x, y) \in L_n : x \in H_0, y = x_{\downarrow} \in H_1\}|, \\ \mathcal{C}_n &= |\{(x, y) \in L_n : x \in H_1, y = x_{\downarrow} \in H_0\}|, \\ \mathcal{D}_n &= |\{(x, y) \in L_n : x \in H_1, y = x_{\downarrow} \in H_1\}|,\end{aligned}$$

где L_n – множество ребер в V_n . Известно [1], что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{A}_n}{|V_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{D}_n}{|V_n|} = \frac{1}{2(k+1)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{B}_n}{|V_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{C}_n}{|V_n|} = \frac{k}{2(k+1)}.$$

Используя эти формулы, мы вычисляем свободную энергию:

$$\begin{aligned}E_{\text{WP}}(\beta, q, h_x) &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|V_n|} (\mathcal{A}_n d(h_1) + \mathcal{B}_n d(h_2) + \mathcal{C}_n d(h_3) + \mathcal{D}_n d(h_4)) = \\ &= \frac{1}{2(k+1)} (E_{\text{TI}}(\beta, q-1, h_1) + k E_{\text{TI}}(\beta, q-1, h_2) + \\ &\quad + k E_{\text{TI}}(\beta, q-1, h_3) + E_{\text{TI}}(\beta, q-1, h_4)),\end{aligned}$$

где $E_{\text{TI}}(\beta, m, h_x)$ определена в (3.5). Теперь энтропия дается выражением

$$\begin{aligned}S_{\text{WP}}(\beta, q, h_x) &= \frac{1}{2(k+1)} (S_{\text{TI}}(\beta, q-1, h_1) + k S_{\text{TI}}(\beta, q-1, h_2) + \\ &\quad + k S_{\text{TI}}(\beta, q-1, h_3) + S_{\text{TI}}(\beta, q-1, h_4)),\end{aligned}$$

где $S_{\text{TI}}(\beta, m, h_x)$ задана в (3.6).

Список литературы

- [1] D. Gandolfo, M. M. Rakhmatullaev, U. A. Rozikov, J. Ruiz, “On free energies of the Ising model on the Cayley tree”, *J. Stat. Phys.*, **150**:6 (2013), 1201–1217.
- [2] D. Gandolfo, F. H. Haydarov, U. A. Rozikov, J. Ruiz, “New phase transitions of the Ising model on Cayley trees”, *J. Stat. Phys.*, **153**:3 (2013), 400–411.
- [3] U. A. Rozikov, *Gibbs Measures on Cayley Trees*, World Sci., Singapore, 2013.
- [4] C. Külske, U. A. Rozikov, R. M. Khakimov, “Description of the translation-invariant splitting Gibbs measures for the Potts model on a Cayley tree”, *J. Stat. Phys.*, **156**:1 (2014), 189–200, arXiv: 1310.6220.
- [5] Н. Н. Ганиходжаев, “О чистых фазах ферромагнитной модели Поттса с тремя состояниями на решетке Бете второго порядка”, *ТМФ*, **85**:2 (1990), 163–175.
- [6] S. H. Kung, “Sums of integer powers via the Stolz–Cesàro theorem”, *College Math. J.*, **40**:1 (2009), 42–44.
- [7] У. А. Розиков, Р. М. Хакимов, “Периодические меры Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли”, *ТМФ*, **175**:2 (2013), 300–312.
- [8] Р. М. Хакимов, “О существовании периодических мер Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли”, *Узбек. матем. журн.*, **3** (2014), 134–142.
- [9] М. М. Рахматуллаев, “Существование слабо периодических мер Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли”, *ТМФ*, **180**:3 (2014), 307–317.