Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Саулин, О диссипативных эффектах в бесконечно-мерных гамильтоновых системах, *ТМФ*, 2017, том 191, номер 1, 78–99

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9062>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 09:04:06

© 2017 г.

С. М. Саулин*

О ДИССИПАТИВНЫХ ЭФФЕКТАХ В БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМАХ

Показано, что потенциальное взаимодействие классических механических систем (осциллятора и термостата), одна из которых (термостат) является линейной бесконечномерной, способно вызывать диссипацию энергии в конечномерной подсистеме (осцилляторе). Таким образом, при естественных предположениях финальная динамика осциллятора сводится к стремлению к положению равновесия. Д. В. Трещев ранее получил результаты, касающиеся динамики осциллятора с одной степенью свободы и квадратичным или при некоторых дополнительных предположениях полиномиальным потенциалом. Затем В. А. Дымов рассмотрел случай линейного осциллятора с произвольным (конечным) числом степеней свободы. Мы обобщаем эти результаты на случай термостата, состоящего из нескольких компонент и многомерного (линейного или нелинейного) осциллятора.

Ключевые слова: лагранжевы системы, системы с бесконечным числом степеней свободы, финальная динамика.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9062>

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача взаимодействия конечномерной и бесконечномерной гамильтоновых систем всегда привлекала внимание физиков и специалистов по динамике. В отличие от конечномерной динамики, несмотря на сохранение энергии, в таких системах обычно появляется некоторое эффективное трение. А именно, часть энергии становится “ненаблюдаемой” за счет того, что ее абсорбирует бесконечномерная система.

Задачи такого типа сложны, поэтому обычно приходится считать, что бесконечномерная система линейна. Ее можно моделировать как термостат [3], как струну (или в более общем случае как систему Клейна–Гордона) [4], [5] либо как электромагнитное поле (уравнения Максвелла) [6]. В квантовой механике рассматриваются

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 15-01-03747).

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: serega-saulin@mail.ru

схожие задачи, которые описываются моделью Калдейры–Леггетта [7]–[9]. Отметим, что постановки задач и методы в указанных статьях (см. также работы [10], [11]) сильно отличаются от тех, которые используются в настоящей работе. Основным инструментом в книге [3] является метод малого параметра, и соответствующие результаты имеют место на асимптотически больших, но конечных временах. Авторы статей [4]–[6] действуют методами теории дифференциальных уравнений в частных производных. Модель Калдейры–Леггетта, описывающая диффузию квантовой частицы через вещество, задается квантовым аналогом классического уравнения Ланжевена с использованием теории броуновского движения. Таким образом, в работах [7], [10], [12] взаимодействие термостата с частицей моделируется случайной силой (внешним воздействием), задаваемой белым шумом. Отметим, что далеко не во всех бесконечномерных гамильтоновых системах возникает эффективная диссипация, приводящая динамику некоторой конечномерной подсистемы к тривиальной. В работах [13]–[16] рассматриваются многочастичные системы типа бесконечного набора взаимодействующих нелинейных осцилляторов. Они играют важную роль в приложениях, в частности, моделируют взаимодействие оптических волноводов [15], а также параллельную работу системы микроволновых генераторов [16]. В таких системах могут возникать локализованные периодические решения (breathers), которые в ряде ситуаций оказываются линейно устойчивыми.

В настоящей работе мы имеем дело с бесконечномерной гамильтоновой системой и используем методы, основанные на свойствах специальных пространств обобщенных функций и их преобразований Фурье.

Термостатом мы называем систему, состоящую из конечного числа компонент, каждая из которых представляет собой континуум независимых осцилляторов. Конечномерная компонента может быть линейной или нелинейной (мы каждый раз будем оговаривать, какой именно случай рассматривается), размерность считается произвольной.

В данной работе предполагается, что полная энергия системы конечна. Метод, разработанный в статье [1] и который мы применяем, основан на том наблюдении, что конечномерная система должна осциллировать таким образом, чтобы в термостате не возникало резонансов (их возникновение противоречит конечности энергии). Это условие влечет некоторое ограничение, налагаемое на спектр Фурье конечномерной компоненты решения.

Благодаря этому удастся доказать теорему 3.4, из которой следует, что в случае если количество компонент термостата окажется не меньше количества степеней свободы осциллятора (в общем случае нелинейного), то при некоторых предположениях осциллятор стремится к положению равновесия при $t \rightarrow \pm\infty$. Также из теоремы 3.4 следует теорема 3.5, в которой рассматривается полиномиальный потенциал. Доказательство этой теоремы основано на применении аналога теоремы Титчмарша, доказанной в работе [17]. Теорема 3.7 является обобщением п. 1 теоремы 2.2 статьи [2].

Доказательство теорем 3.3–3.7 неочевидно и опирается на ряд вспомогательных утверждений. В разделе 4 мы доказываем теорему существования решения получившейся системы дифференциальных уравнений, что необходимо сделать, поскольку система является бесконечномерной. В разделе 5 мы доказываем теорему 3.2, с помощью которой мы проводим редукцию, исключив из рассмотрения бесконечномер-

ную компоненту. Теоремы 3.3–3.7 доказываются последовательно в разделах 6–10 соответственно. Полученные результаты обсуждаются после формулировок соответствующих утверждений.

Рассмотрим натуральную лагранжеву систему с n степенями свободы. Пусть $\mathcal{L}_0(x, \dot{x}) = T(x, \dot{x}) - V_0(x)$ – функция Лагранжа, $x = (x^1, \dots, x^n)^T \in M$ – обобщенные координаты, $\dot{x} = (\dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n)^T \in T_x M$ – обобщенные скорости, M считается гладким многообразием размерности n , на котором имеется кинетическая метрика $T(x, \dot{x}) = 1/2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \dot{x}_i \dot{x}_j = \langle A(x)x, x \rangle / 2$, где матрица $A(x)$ задает положительно определенную квадратичную форму, а $V_0(x)$ – потенциальная энергия. Систему с функцией Лагранжа $\mathcal{L}_0(x, \dot{x})$ будем называть *осциллятором*.

Определим бесконечномерную линейную лагранжеву систему, которую назовем термостатом. Будем считать, что бесконечномерная система с лагранжианом $\mathcal{L}_T$ представима в виде объединения конечного числа бесконечномерных подсистем¹⁾ $\mathcal{L}_{T_j}$:

$$\mathcal{L}_{T_j} = \int \frac{\rho_j(\nu_j)}{2} (\dot{\xi}_j^2(\nu_j, t) - \nu_j^2 \xi_j^2(\nu_j, t)) d\nu_j, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Тогда функция Лагранжа для термостата записывается как

$$\mathcal{L}_T = \sum_{j=1}^m \mathcal{L}_{T_j},$$

где $\rho_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\xi_j: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots, m$. Таким образом, уравнение движения j -го изолированного термостата принимает вид

$$\rho_j(\ddot{\xi}_j + \nu_j^2 \xi_j) = 0.$$

Теперь предположим, что системы осциллятор и термостат взаимодействуют с помощью потенциала

$$V_{\text{int}}(x, \xi) = - \sum_{j=1}^m \left\langle f(x), \int \kappa^j \xi_j d\nu_j \right\rangle = - \left\langle f(x), \int K \xi d\nu \right\rangle, \quad (1.1)$$

где

$$\begin{aligned} f(x) &= (f_1(x), \dots, f_n(x))^T, & f: M &\rightarrow \mathbb{R}^n, & f &\in C^\infty(M), \\ \int \kappa^j \xi_j d\nu_j &= \left(\int \kappa_1^j \xi_j d\nu_j, \dots, \int \kappa_n^j \xi_j d\nu_j \right)^T, & \kappa_l^j &:= \kappa_l^j(\nu_j), & \kappa^j &= (\kappa_1^j, \dots, \kappa_n^j)^T, \\ \kappa_l^j: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & \kappa^j: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n, & j &= 1, 2, \dots, m, & l &= 1, 2, \dots, n, \\ \xi(\nu, t) &= (\xi_1, \dots, \xi_m)^T, & \xi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Здесь K – прямоугольная матрица размера $n \times m$, столбцами которой являются векторы $\kappa^1, \kappa^2, \dots, \kappa^m$:

$$K = \begin{pmatrix} \kappa_1^1 & \dots & \kappa_1^m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \kappa_n^1 & \dots & \kappa_n^m \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

¹⁾Вместо $\int_{-\infty}^{+\infty}$ для краткости будем писать $\int$.

Матрицу K будем называть матрицей жесткости, а κ^j – вектором жесткости потенциала j -го термостата.

Тем самым мы получаем механическую систему с лагранжианом

$$\mathcal{L}(x, \xi, \dot{x}, \dot{\xi}) = \mathcal{L}_0(x, \dot{x}) + \mathcal{L}_T(\xi, \dot{\xi}) - V_{\text{int}}(x, \xi).$$

Уравнения движения системы с лагранжианом $\mathcal{L}$ имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \int K \xi d\nu, \quad (1.3)$$

$$\rho_j(\ddot{\xi}_j + \nu_j^2 \xi_j) = \langle f(x), \kappa^j \rangle, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (1.4)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \quad \xi_j(\nu_j, t_0) = \xi_{0j}, \quad \dot{\xi}_j(\nu_j, t_0) = \dot{\xi}_{0j}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (1.5)$$

причем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_l}{\partial x} &= \left(\frac{\partial f_l}{\partial x_1}, \frac{\partial f_l}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_l}{\partial x_n} \right)^\top, & \frac{\partial f}{\partial x_s} &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_s}, \frac{\partial f_2}{\partial x_s}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_s} \right)^\top, \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \left(\frac{\partial f_l}{\partial x_s} \right)_{l,s=1,2,\dots,n}. \end{aligned}$$

Т.е. $\partial f / \partial x$ – квадратная матрица, столбцами которой являются векторы $(\partial f_l / \partial x)$. Полная энергия получившейся системы записывается как

$$\begin{aligned} E(x, \xi, \dot{x}, \dot{\xi}) &= \frac{1}{2} \langle A \dot{x}, \dot{x} \rangle + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \int \rho_j \dot{\xi}_j^2 d\nu_j + \\ &+ V_0(x) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \int \rho_j \nu_j^2 \xi_j^2 d\nu_j - \left\langle f(x), \int K \xi d\nu \right\rangle. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Путем несложных преобразований E можно представить в удобном для дальнейшего исследования виде:

$$\begin{aligned} E(x, \xi, \dot{x}, \dot{\xi}) &= \frac{1}{2} \langle A \dot{x}, \dot{x} \rangle + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \int \rho_j \dot{\xi}_j^2 d\nu_j + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \int \rho_j \nu_j^2 \left(\xi_j - \left\langle f(x), \frac{\kappa^j}{\rho_j \nu_j^2} \right\rangle \right)^2 d\nu_j + V(x), \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $V(x) = V_0(x) - \langle \mathcal{K} f(x), f(x) \rangle / 2$ – приведенная потенциальная энергия, причем

$$\mathcal{K} = \sum_{j=1}^m \mathcal{K}^j, \quad \mathcal{K}^j = \left(\int \frac{\kappa_p^j \kappa_q^j}{\rho_j \nu_j^2} d\nu_j \right)_{p,q=1,2,\dots,n} = (\kappa_{pq}^j)_{p,q=1,2,\dots,n}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (1.8)$$

Положим

$$\hat{a}^j = \frac{\kappa^j}{\sqrt{\rho_j}} = \left(\frac{\kappa_1^j}{\sqrt{\rho_j}}, \dots, \frac{\kappa_n^j}{\sqrt{\rho_j}} \right)^\top, \quad \hat{a}_l^j = \frac{\kappa_l^j}{\sqrt{\rho_j}}, \quad (1.9)$$

$$\hat{w}_{ls}^j = \frac{2\pi \hat{a}_l^j \hat{a}_s^j}{i\nu_j}, \quad \hat{w}_l^j = (\hat{w}_{l1}^j, \dots, \hat{w}_{ln}^j)^\top, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad l, s = 1, 2, \dots, n, \quad (1.10)$$

и пусть

$$\widehat{W}^j = (\hat{w}_{ls}^j)_{l,s=1,2,\dots,n}, \quad \widehat{W} = \sum_{j=1}^m \widehat{W}^j. \quad (1.11)$$

Как в работах [1], [2], будем считать C_b пространством равномерно непрерывных ограниченных на $\mathbb{R}$ функций, $C_0^\pm \subset C_b$ – пространством равномерно непрерывных ограниченных функций, стремящихся к нулю при $t \rightarrow \pm\infty$. Положим $C_0 = C_0^+ \cap C_0^-$. Пространство C_b является банаховым пространством с L_∞ -нормой: $\|\phi\| = \sup |\phi|$. Более того, C_b – ассоциативная коммутативная банахова алгебра: для любых $\phi, \psi \in C_b$ произведение $\phi\psi \in C_b$ и $\|\phi\psi\|_\infty \leq \|\phi\|_\infty \|\psi\|_\infty$. Пространства $C_0^\pm \subset C_b$ – замкнутые векторные подпространства, причем $C_0^\pm$, C_0 – идеалы в C_b , т. е. $C_0^\pm \cdot C_b \subset C_0^\pm$ и $C_0 \cdot C_b \subset C_0$.

Определим пространство C_b^n , состоящее из элементов $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)^T$, где $\phi_l \in C_b$. Аналогичным образом определяются пространства C_0^n , $C_0^{\pm n}$.

Пусть $\mathcal{M}$ – пространство плотностей конечных комплексных счетно-аддитивных мер Радона на $\mathbb{R}$. Пространство $\mathcal{M} \subset C_b^*$ состоит из обобщенных функций таких, что для любой плотности $\mu \in \mathcal{M}$ мера $\mu(\tau) d\tau$ есть конечная комплексная счетно-аддитивная мера Радона. Пусть $\mu(\phi) = \int \phi(\tau) \mu(\tau) d\tau$, $\phi \in C_b$, $\mu \in \mathcal{M}$, тогда $\mathcal{M}$ – банахово пространство с нормой $\|\mu\|_{\mathcal{M}} = \sup_{\|\phi\|_\infty=1} \mu(\phi)$. Очевидно, что $L_1(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}$.

Крышкой будем обозначать преобразование Фурье, которое определяется следующим образом:

$$\mathcal{F}(\psi) = \hat{\psi}(\lambda) = \int e^{-i\lambda\tau} \psi(\tau) d\tau, \quad \mathcal{F}^{-1}(\hat{\psi}) = \psi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i\lambda\tau} \hat{\psi}(\lambda) d\lambda.$$

Напомним стандартные формулы преобразования Фурье для произведения:

$$2\pi \mathcal{F}(\phi\psi) = \mathcal{F}\phi * \mathcal{F}\psi, \quad \mathcal{F}^{-1}(\hat{\phi}\hat{\psi}) = \mathcal{F}^{-1}\hat{\phi} * \mathcal{F}^{-1}\hat{\psi}.$$

Определим

$$\widehat{\mathcal{M}} = \mathcal{F}(\mathcal{M}), \quad w_{ls}^j = \mathcal{F}^{-1}(\hat{w}_{ls}^j), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad l, s = 1, 2, \dots, n. \quad (1.12)$$

Можно показать, что $\widehat{\mathcal{M}} \subset C_b$ (см. книгу [18]). Теорема Римана–Лебега утверждает, что $\mathcal{F}(L_1) \subset C_0$. Подробнее о свойствах пространств $\widehat{C}_b$, $\widehat{C}_0^\pm$, $\widehat{\mathcal{M}}$ можно прочитать, например, в статьях [1], [2].

Положим

$$w_{\diamond ls}^{\pm j}(\tau) = \begin{cases} \pm \frac{w_{ls}^j(\tau) - w_{ls}^j(-\tau)}{2}, & \pm\tau > 0, \\ 0, & \pm\tau < 0. \end{cases} \quad (1.13)$$

Стандартными вычислениями можно показать, что²⁾

$$\hat{w}_{\diamond ls}^{\pm j}(\nu_j) = \pm \frac{1}{4} (\hat{w}_{ls}^j(\nu_j) - \hat{w}_{ls}^j(-\nu_j)) + \frac{1}{2\pi i} \text{V. p.} \int \frac{\lambda w_{ls}^j(\lambda)}{\nu_j^2 - \lambda^2} d\lambda. \quad (1.14)$$

²⁾Формула (1.14) доказана в разделе 5.

Положим по определению

$$\widehat{W}_{\diamond}^{*j} = (\widehat{w}_{\diamond ls}^{*j})_{l,s=1,2,\dots,n}, \quad \widehat{W}_{\diamond}^* = \sum_{j=1}^m \widehat{W}_{\diamond}^{*j}, \quad * \in \{+, -\}. \quad (1.15)$$

Пусть

$$\hat{\phi} = (\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_n)^T \in \widehat{C}_b^n, \quad \hat{\phi}_l \in \widehat{C}_b, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Будем говорить, что $\lambda \in \text{sing supp}^+(\hat{\phi}_l)$, если и только если для любого интервала $I \subset \mathbb{R}$, содержащего точку λ , найдется такое $\hat{\mu} \in \widehat{\mathcal{M}}$, $\text{supp } \hat{\mu} \subset I$, что $\hat{\mu}\hat{\phi}_l \notin \widehat{C}_0^+$. Аналогично определяется множество $\text{sing supp}^-(\hat{\phi}_l)$. Определим множество

$$\text{sing supp}(\hat{\phi}_l) = \text{sing supp}^+(\hat{\phi}_l) \cup \text{sing supp}^-(\hat{\phi}_l).$$

Положим по определению $\text{sing supp}(\hat{\phi}) = \bigcup_{l=1}^n \text{sing supp}(\hat{\phi}_l)$.

ПРИМЕР 1. Покажем, что $\text{sing supp } \delta(\lambda - a) = \{a\}$. Действительно, для любой функции $\hat{\mu} \in \widehat{\mathcal{M}}$ выполнено равенство $\hat{\mu}\delta(\lambda - a) = \hat{\mu}(a)\delta(\lambda - a)$. Пусть $\hat{\mu}(a) \neq 0$. Так как

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{\mu}(a)\delta(\lambda - a)) = \frac{\hat{\mu}(a)}{2\pi} e^{ita} \notin C_0,$$

то $\text{sing supp } \delta(\lambda - a) = \{a\}$.

2. ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. Будем считать, что $A(x)$, $V_0(x)$, $f(x)$ гладко зависят от x . Матрица $A(x)$ задает положительно определенную квадратичную форму, ρ_j и κ_l^j – непрерывные функции. Плотности ρ_j неотрицательны, и при фиксированном номере $j = 1, 2, \dots, m$ имеет место вложение $\text{supp } \kappa_l^j \subset \text{supp } \rho_j$ для всех $l = 1, 2, \dots, n$.

Доопределим функции κ_l^j/ρ_j на $\mathbb{R} \setminus \text{supp } \rho_j$ нулем.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. Верно неравенство

$$\int \frac{(\kappa_l^j)^2}{\rho_j \nu_j^2} d\nu_j < \infty$$

для всех $l = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3. Приведенный потенциал $V(x) = V_0(x) - \langle \mathcal{K}f(x), f(x) \rangle / 2$ ограничен снизу. Без ограничения общности будем считать, что $V \geq 0$. Также будем считать, что либо f – ограниченная функция, либо $V \rightarrow \infty$ при $|f| \rightarrow \infty$, а множество $M_E = \{x \in M : V \leq E\}$ компактно.

В частности, отсюда следует неотрицательность энергии (1.7).

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 4. Верно неравенство

$$\int \rho_j (\xi_{0j}^2 + \nu_j^2 \xi_{0j}^2) d\nu_j < \infty$$

при $j = 1, 2, \dots, m$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Из предположений 2 и 4 следует, что $E(x_0, \xi_0, \dot{x}_0, \dot{\xi}_0) < \infty$. Действительно, в силу неравенства Коши–Буняковского

$$\left(\int \kappa_l^j \xi_{0j} d\nu_j \right)^2 \leq \int \frac{(\kappa_l^j)^2}{\rho_j \nu_j^2} d\nu_j \int \rho_j \nu_j^2 \xi_{0j}^2 d\nu_j < \infty.$$

Из данной оценки и (1.6) вытекает требуемое.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 5. Справедливы включения $\hat{a}_l^j, \hat{w}_{ls}^j \in \widehat{\mathcal{M}}, j = 1, 2, \dots, m, l, s = 1, 2, \dots, n$.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть справедливы предположения 1–4. Тогда существует решение $x(t)$, $\xi(\nu, t)$ уравнений (1.3)–(1.5). Оно определено при всех $t \in \mathbb{R}$, причем $E < \infty$ на решении и функции

$$\begin{aligned} \psi(t) &:= f(x(t)) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t))^T, \\ \varepsilon(t) &= \sum_{j=1}^m \varepsilon_j(t) = \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} \int \rho_j(\nu_j) (\dot{\xi}_j^2(\nu_j, t) + \nu_j^2 \xi_j^2(\nu_j, t)) d\nu_j \end{aligned} \quad (3.1)$$

ограничены.

Отметим, что при $m = 1$ теорема 3.1 совпадает с теоремой 2.1 статьи [1]. Функция $\varepsilon(t)$ является полной энергией термостата, а $\varepsilon_j(t)$ – энергия j -й компоненты термостата.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть верны предположения 1–5. Тогда функции $\psi(t) = f(x(t))$, $\phi_j(t) = \int \kappa^j \xi_j d\nu_j$ ограничены и справедливы следующие условия:

А. $\langle \hat{a}^j, \hat{\psi} \rangle \in L_2$, $\langle \hat{w}_l^j, \hat{\psi} \rangle \in L_1$, $j = 1, 2, \dots, m, l = 1, 2, \dots, n$.

Б. $\hat{\phi}_j = \widehat{W}_{\diamond}^{+j} \hat{\psi} + \hat{\vartheta}^{+j} = \widehat{W}_{\diamond}^{-j} \hat{\psi} + \hat{\vartheta}^{-j}$ для некоторых $\vartheta^{\pm j} \in C_0^{\pm n}$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Далее в этом разделе мы считаем, что $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) \equiv x$, а матрица A является постоянной. Тогда $\psi(t) = x(t)$, а уравнения движения (1.3), (1.4) в силу теоремы 3.2 принимают вид

$$A\ddot{\psi} + V'_0(\psi) = \phi, \quad (3.2)$$

$$\hat{\phi} = \widehat{W}_{\diamond}^{+} \hat{\psi} + \hat{\vartheta}^{+} = \widehat{W}_{\diamond}^{-} \hat{\psi} + \hat{\vartheta}^{-}, \quad \phi = \sum_{j=1}^m \phi_j, \quad \hat{\vartheta}^{\pm} \in \widehat{C}_0^{\pm n}. \quad (3.3)$$

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть верны предположения 1–5 и $\text{sing supp}(\hat{x}) \subset \{0\}$, а также непрерывно дифференцируемы в нуле функции $\hat{w}_{ls}^j$, $j = 1, 2, \dots, m, l, s = 1, 2, \dots, n$. Тогда существуют пределы $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = x_{\pm}$, где $x_{\pm}$ – критические точки приведенной потенциальной энергии $V(x) = V_0(x) - \langle Kx, x \rangle / 2$.

Назовем спектром j -го термостата множество $\sigma^j = \{s \in \mathbb{R} : \hat{a}^j(s) \neq \vec{0}\}$, $j = 1, 2, \dots, m$, а спектром термостата – множество $\sigma = \bigcup_{j=1}^m \sigma^j$.

Если $m \geq n$, введем в рассмотрение множество

$$\Omega_n = \{s \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \text{rank } K(s) = n\}.$$

То есть для любого $s \in \Omega_n$ найдется n линейно независимых векторов жесткости. Тогда верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть верны предположения 1–5 и $m \geq n$. Тогда справедливы утверждения

- 1) $\Omega_n \cap \text{sing supp } \hat{x} = \emptyset$;
- 2) $\Omega_n \cap \text{sing supp } \widehat{\frac{\partial V_0}{\partial x}} = \emptyset$ ³⁾.

Утверждение 1 теоремы 3.4 означает, что преобразование Фурье функции $\hat{x}$ регулярно на множестве Ω_n , если количество компонент термостата не меньше количества степеней свободы осциллятора. Ключевую роль в доказательстве теоремы 3.4 играет л. А теоремы 3.2. Утверждения теоремы 3.2, дополненные л. 1 теоремы 3.4, являются многомерным аналогом теоремы 2.2 статьи [1]. Действительно, при $m = n = 1$ множество Ω_n совпадает с σ . В этом случае матрица K состоит из одного элемента.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть $m \geq n$ и справедливы предположения 1–5. Если $\Omega_n = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и все функции $\dot{w}_{ls}^j$ непрерывно дифференцируемы в нуле, то $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = x_{\pm}$, где $x_{\pm}$ – критические точки приведенной потенциальной энергии $V(x) = V_0(x) - \langle Kx, x \rangle / 2$.

Следствие 3.1 есть прямое обобщение теоремы 3.3 статьи [1]. Доказательство основано на покомпонентном применении этой теоремы к уравнению (3.2).

Рассмотрим потенциал

$$V_0(x) = \sum_{s=1}^n p_s x_s^{q_s} + \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_q} p_{\alpha} x^{\alpha}, \quad (3.4)$$

где

$$x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad \mathcal{A}_q = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n : |\alpha| < \min_{1 \leq s \leq n} q_s\},$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad q_s \in 2\mathbb{N}, \quad p_{\alpha}, p_s \in \mathbb{R}, \quad q_s > 2, \quad p_s \neq 0, \quad s = 1, 2, \dots, n.$$

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть

- 1) верны предположения 1–5;
- 2) $m \geq n$;
- 3) множество $\mathbb{R} \setminus \Omega_n = [-\nu_0, \nu_0]$, $\nu_0 \geq 0$;
- 4) потенциальная энергия осциллятора имеет вид (3.4).

Тогда $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = x_{\pm}$, где $x_{\pm}$ – критические точки приведенной потенциальной энергии $V(x) = V_0(x) - \langle Kx, x \rangle / 2$.

Теорема 3.5 позволяет понять динамику термостата в случае, когда множество Ω_n не покрывает $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Доказательство теоремы 3.5 основано на применении аналога теоремы Титчмарша, доказанной в работе [17], и полиномиальности потенциальной энергии.

³⁾В этом пункте утверждается, что, во-первых, имеет место включение $\partial V_0 / \partial x \in C_b$, а во-вторых, верно равенство $\Omega_n \cap \text{sing supp } \widehat{\frac{\partial V_0}{\partial x}} = \emptyset$.

Если $m < n$, определим множество $\Omega_m = \{s \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \text{rank } K(s) = m\}$. Т.е. все векторы жесткости $\kappa^1(s), \dots, \kappa^m(s)$ линейно независимы в каждой точке $s \in \Omega_m$.

Определим матрицы $\widehat{V}^*(\lambda) = A\lambda^2 + \widehat{W}_\diamond^*(\lambda) - B$, где A – положительно определенная квадратная матрица, участвующая в определении кинетической энергии осциллятора, матрицы $\widehat{W}_\diamond^*$ определены по формуле (1.15), а знак $*$ $\in \{+, -\}$.

ТЕОРЕМА 3.6. Пусть

- 1) верны предположения 1–5;
- 2) потенциальная энергия осциллятора является квадратичной формой:

$$V_0(x) = \frac{1}{2} \langle Bx, x \rangle;$$

3) на множестве Ω_m у уравнения $\det \widehat{V}^*(\lambda) = 0$ есть только изолированные нули первого порядка⁴⁾;

4) на множестве $\Omega_m \cap \{\lambda \in \mathbb{R} : \det \widehat{V}^*(\lambda) = 0\}$ имеем $\text{Ker } K^T(\lambda) \cap \text{Ker } \widehat{V}^*(\lambda) = \vec{0}$. Тогда $\Omega_m \cap \text{sing supp } \hat{x} = \emptyset$.

Отметим, что теорема 3.6 в совокупности с теоремой 3.2 является аналогом теоремы 2.2 статьи [2].

ТЕОРЕМА 3.7. Пусть

- 1) верны предположения 1–5;
- 2) потенциальная энергия осциллятора является квадратичной формой:

$$V_0(x) = \frac{1}{2} \langle Bx, x \rangle;$$

3) на множестве σ уравнение $\det \widehat{V}^*(\lambda) = 0$ имеет только изолированные нули первого порядка;

4) для любой точки $\lambda \in \sigma$: $\det \widehat{V}^*(\lambda) = 0$, найдется индекс $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ такой, что $\hat{a}^j(\lambda) \notin \text{Im } \widehat{V}^*(\lambda)$.

Тогда $\sigma \cap \text{sing supp } \hat{x} = \emptyset$.

Теорема 3.7 является прямым обобщением п. 1 теоремы 2.2 статьи [2].

Физический смысл множества Ω_m состоит в следующем. Из утверждений теорем 3.4 и 3.6 следует, что преобразование Фурье $\hat{x}$ решения конечномерной компоненты регулярно на Ω_m . Дополнение к множеству σ состоит из тех частот термостата, которые не влияют на осциллятор, и поэтому можно их не рассматривать.

Дальнейший текст статьи организован следующим образом. В разделе 4 получены априорные оценки, которые следуют из сохранения энергии, и доказана теорема 3.1. В разделе 5 показано, что сохранение энергии влечет равномерную ограниченность L_2 -нормы функции⁵⁾ $\langle \hat{a}^j, \hat{\psi}^t \rangle$ (следствие 5.1). Это утверждение позволяет доказать п. А теоремы 3.2. Из утверждений 5.2–5.4 следует доказательство п. Б теоремы 3.2. В разделе 6 доказывается теорема 3.3, из которой вытекает утверждение о простоте динамики термостата, если $\Omega_m = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Теорема 3.4 доказана в разделе 7. В разделе 8 доказана теорема 3.5, в которой потенциал осциллятора

⁴⁾Если $m > n$, то множество Ω_m стоит заменить на множество Ω_n .

⁵⁾Функция $\hat{\psi}^t$ есть преобразование Фурье функции $\psi^t = \chi_{[0,t]} \psi$, где $\chi_{[0,t]}$ – характеристическая функция отрезка $[0, t]$.

имеет вид полинома. Пользуясь относительным вариантом теоремы Титчмарша, удастся доказать, что $\text{sing supp } \hat{x}$ может состоять только лишь из одной точки $\lambda = 0$. В разделах 9 и 10 потенциальная энергия осциллятора рассматривается в виде квадратичной формы. Это сильно упрощает уравнение (3.2), что позволяет доказать теоремы 3.6, 3.7.

4. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1

Справедливы следующие утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. *Если $E < \infty$ на решении уравнений (1.3)–(1.5), то верны неравенства $|\psi_l(t)| \leq c_1(E)$, $l = 1, 2, \dots, n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Если $f(x)$ неограничена, то из предположения 3 следует, что V неограничена. Из (1.7) получаем, что $E = \infty$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.2. *Если $E < \infty$, то $|\langle f(x), \int K \xi d\nu \rangle| \leq c_2(E)$ на решении системы (1.3)–(1.5).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала оценим $|\langle f(x), \int \kappa^j \xi_j d\nu_j \rangle|$:

$$\left(\int \kappa_l^j \xi_j d\nu_j \right)^2 = \left(\int \frac{\kappa_l^j}{\sqrt{\rho_j} \nu_j} \sqrt{\rho_j} \nu_j \xi_j d\nu_j \right)^2 \leq \kappa_{ll}^j \int \rho_j \nu_j^2 \xi_j^2 d\nu_j.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left| \langle f(x), \int \kappa^j \xi_j d\nu_j \rangle \right|^2 &\leq \sum_{l=1}^n f_l^2(x) \sum_{s=1}^n \left(\int \kappa_s^j \xi_j d\nu_j \right)^2 \leq \sum_{l=1}^n f_l^2(x) \sum_{s=1}^n \kappa_{ss}^j \int \rho_j \nu_j^2 \xi_j^2 d\nu_j, \\ \left| \langle f(x), \int K \xi d\nu \rangle \right|^2 &\leq n \langle f(x), f(x) \rangle \sum_{j=1}^m \text{tr } \mathcal{K}^j \int \rho_j \nu_j^2 \xi_j^2 d\nu_j. \end{aligned}$$

Из предположения 2 следует, что $\kappa_{ss}^j < \infty$, $s = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$. Из (1.6) вытекает, что $\sum_{j=1}^m \int \rho_j \nu_j^2 \xi_j^2 d\nu_j \leq 2(E + \langle f(x), \int K \xi d\nu \rangle)$. Из данных оценок получаем оценку

$$\left| \langle f(x), \int K \xi d\nu \rangle \right|^2 \leq 2n \text{tr } \mathcal{K} \left(E + \langle f(x), \int K \xi d\nu \rangle \right) \langle f(x), f(x) \rangle.$$

Это неравенство эквивалентно неравенству

$$\left(\langle f(x), \int K \xi d\nu \rangle - n \text{tr } \mathcal{K} \langle f(x), f(x) \rangle \right)^2 \leq 2nE \langle f(x), f(x) \rangle \text{tr } \mathcal{K} + (n \text{tr } \mathcal{K} \langle f(x), f(x) \rangle)^2.$$

Учитывая утверждение 4.1, получаем требуемое.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.3. *Если $E < \infty$ на решении системы (1.3)–(1.5), то энергия термостата (3.1) такова, что $\varepsilon \leq c_3(E)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем оценку

$$\varepsilon - \langle f(x), \int K \xi d\nu \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathcal{K} f(x), f(x) \rangle \leq E.$$

Требуемое следует из (1.7) и утверждений 4.1, 4.2.

Докажем локальную теорему существования. Затем воспользуемся конечностью энергии и докажем глобальную теорему. Покроем компакт

$$M_E = \{x \in M : V(x) \leq E\} \subset M$$

конечным числом карт. Теорему существования и единственности достаточно доказать в единичном шаре $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, x \rangle \leq 1\}$ с центром в нуле.

Будем считать, что выполнены следующие условия: для любых $l, s = 1, 2, \dots, n$ существуют $A^{-1}(x)$, $A'(x)$, $f_l(x)$, $(\partial f_l / \partial x_s)(x)$, $(\partial V_0 / \partial x_s)(x)$, они равномерно ограничены и липшицевы. Положим

$$\xi_{j\pm} = e^{\mp i\nu_j t} (\dot{\xi}_j \pm i\nu_j \xi_j), \quad \mathbf{p} = A\dot{x}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Заметим, что $\xi_{j+} = \bar{\xi}_{j-}$, $\xi_j = (e^{i\nu_j t} \xi_{j+} - e^{-i\nu_j t} \xi_{j-}) / 2i\nu_j$. Тогда уравнения движения (1.3), (1.4) можно переписать в следующем виде:

$$\dot{\xi}_{j\pm} = e^{\mp i\nu_j t} \left\langle f(x), \frac{\kappa^j}{\rho_j} \right\rangle, \quad \dot{x} = A^{-1}\mathbf{p}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (4.1)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{1}{2} \langle G\mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle - V'_0 + \frac{\partial f}{\partial x} \int \frac{K}{2i\nu} (e^{i\nu t} \xi_+ - e^{-i\nu t} \xi_-) d\nu, \quad (4.2)$$

где

$$\int \frac{K}{2i\nu} (e^{i\nu t} \xi_+ - e^{-i\nu t} \xi_-) d\nu = \sum_{j=1}^m \int \frac{\kappa^j}{2i\nu_j} (e^{i\nu_j t} \xi_{j+} - e^{-i\nu_j t} \xi_{j-}) d\nu_j.$$

Скалярное произведение $\langle G\mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle$ следует понимать как вектор, компонентами которого являются скалярные произведения

$$\left\langle A^{-1} \frac{\partial A}{\partial x_l} A^{-1} \mathbf{p}, \mathbf{p} \right\rangle.$$

Система (4.1), (4.2) определена в некотором множестве U гильбертова пространства $\mathbb{H}$ с элементами $\mathbf{z} = (\xi_+, \xi_-, x, \mathbf{p})$, где $x, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, $\xi_{\pm} = (\xi_{1\pm}, \xi_{2\pm}, \dots, \xi_{m\pm}) \in \mathbb{R}^m$, причем $\xi_{j+} = \bar{\xi}_{j-}$, $j = 1, 2, \dots, m$. Скалярное произведение и норма определены по формулам

$$(\mathbf{z}, \mathbf{z})_{\mathbb{H}} = \langle A^{-1}\mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle + \langle x, x \rangle + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \int \rho_j (|\xi_{j+}|^2 + |\xi_{j-}|^2) d\nu_j, \quad \|\mathbf{z}\| := \sqrt{(\mathbf{z}, \mathbf{z})_{\mathbb{H}}}.$$

Так как

$$\frac{1}{2} (\mathbf{z}, \mathbf{z})_{\mathbb{H}} - E = \frac{1}{2} \langle x, x \rangle - V + \left\langle f(x), \int K \xi d\nu \right\rangle - \frac{1}{2} \langle \mathcal{K}f(x), f(x) \rangle,$$

используя предположение 3 и утверждения 4.1, 4.2, получаем, что $(\mathbf{z}, \mathbf{z})_{\mathbb{H}} < \infty$ при $x \in B$. Таким образом, можно считать, что $U \subset \mathbb{H}$ ограничено.

Отметим, что система (4.1), (4.2) имеет вид $\dot{\mathbf{z}} = L(\mathbf{z})$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.4. *Отображение $L: U \rightarrow \mathbb{H}$ липшицево.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольные точки $z_1, z_2 \in U$ такие, что $z_q = (\xi_+^q, \xi_-^q, x^q, p^q)$, $q = 1, 2$. Тогда $\|L(z_1) - L(z_2)\|^2 \leq \sum_{s=1}^5 \Delta_s^2$, где

$$\begin{aligned}\Delta_1^2 &= \langle A^{-1}(Q_1 - Q_2), (Q_1 - Q_2) \rangle, \quad Q_q = \frac{1}{2} \langle G(x^q), p^q, p^q \rangle, \quad q = 1, 2, \\ \Delta_2^2 &= \langle A^{-1}(V'_0(x^1) - V'_0(x^2)), V'_0(x^1) - V'_0(x^2) \rangle, \\ \Delta_3^2 &= \langle A^{-1}(P_1 - P_2), P_1 - P_2 \rangle, \quad P_q = \frac{\partial f}{\partial x}(x^q) \int \frac{K}{2i\nu} (e^{i\nu t} \xi_+^q - e^{-i\nu t} \xi_-^q) d\nu, \quad q = 1, 2, \\ \Delta_4^2 &= \langle A^{-1}(p^1 - p^2), p^1 - p^2 \rangle, \\ \Delta_5^2 &= \langle f(x^1) - f(x^2), f(x^1) - f(x^2) \rangle \sum_{j=1}^m \int \rho_j \left\langle \frac{\kappa_j^j}{\rho_j}, \frac{\kappa_j^j}{\rho_j} \right\rangle d\nu_j.\end{aligned}$$

Так как $f_j(x)$ липшицевы, $|f_j(x^1) - f_j(x^2)| \leq \text{const} \|x^1 - x^2\|$, $j = 1, 2, \dots, m$. Используя это обстоятельство и предположение 2, получаем, что существуют постоянные c_1, c_2 такие, что

$$\Delta_5^2 \leq c_1 \|z_1 - z_2\|^2 \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^n \int \frac{(\kappa_l^j)^2}{\rho_j^2} d\nu_j \leq c_2 \|z_1 - z_2\|^2.$$

Так как $\|A^{-1}\| < \infty$, имеет место оценка

$$\Delta_4^2 \leq c_3 \|z_1 - z_2\|^2.$$

Аналогично

$$\Delta_1^2 \leq c_4 \|z_1 - z_2\|^2, \quad \Delta_2^2 \leq c_5 \|z_1 - z_2\|^2.$$

Оценим Δ_3^2 :

$$\begin{aligned}\Delta_3^2 &\leq c_6 \|z_1 - z_2\|^2 \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^m \left(\int \frac{\kappa_l^j}{\nu_j \sqrt{\rho_j}} \sqrt{\rho_j} |\xi_{j+}^2 - \xi_{j-}^2| d\nu_j \right)^2 + \\ &\quad + c_7 \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|^2 \left(\sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^m \int \frac{\kappa_l^j}{\nu_j \sqrt{\rho_j}} \sqrt{\rho_j} (|\xi_{j+}^1 - \xi_{j+}^2| + |\xi_{j-}^1 - \xi_{j-}^2|) d\nu_j \right)^2 \leq \\ &\leq c_8 \|z_1 - z_2\|^2.\end{aligned}$$

Учитывая утверждение 4.4 и используя локальную теорему существования и единственности решения для обыкновенных дифференциальных уравнений [19], получаем, что решение системы (4.1), (4.2) существует локально для любых начальных данных из U . Следовательно, для любых начальных данных решение определено на интервале времени $[-t_0, t_0]$, при котором $x \in B$. Так как энергия сохраняется, мы можем продолжить решение на любой промежуток времени.

Применение утверждений 4.1–4.4 завершает доказательство теоремы 3.1.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Непосредственно из предположения 2 следует, что

$$\frac{\hat{a}_l^j}{\nu_j} \in L_2, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad l = 1, 2, \dots, n.$$

Определим индикатор ориентированного интервала $(a, b) \subset \mathbb{R}$:

$$\chi_{(a,b)}(t) = \begin{cases} 1, & a < t < b, \\ 0, & (a-t)(t-b) \leq 0, \\ -1, & b < t < a. \end{cases} \quad (5.1)$$

Пусть $(x(t), \xi(\nu, t)) = (x(t), \xi_1, \dots, \xi_m)$ – решение уравнений (1.3)–(1.5) с энергией $E < \infty$. Положим

$$\psi^t = \chi_{[0,t]} \psi, \quad \psi(t) = f(x(t)), \quad \hat{\psi}^t = \mathcal{F}(\psi^t),$$

т. е.

$$\psi_l^t = \chi_{[0,t]} \psi_l, \quad \psi_l(t) = f_l(x(t)), \quad \hat{\psi}_l^t = \mathcal{F}(\psi_l^t), \quad l = 1, 2, \dots, n.$$

Так как ψ_l^t принимают только действительные значения, верны равенства

$$\hat{\psi}_l^t(\lambda) = \overline{\hat{\psi}_l^t(-\lambda)}, \quad l = 1, 2, \dots, n. \quad (5.2)$$

Рассмотрим выражения (1.4), (1.5), предполагая, что функция $\psi^t = (\psi_1^t, \dots, \psi_n^t)^T$ известна. Иными словами, рассмотрим систему уравнений

$$\rho_j(\ddot{\xi}_j + \nu_j^2 \xi_j) = \langle \psi(t), \kappa^j \rangle, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (5.3)$$

$$\xi_j(\nu_j, t_0) = \xi_{0j}, \quad \dot{\xi}_j(\nu_j, t_0) = \dot{\xi}_{0j}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (5.4)$$

Решение j -го уравнения системы (5.3), (5.4) представимо в виде суммы общего решения однородного дифференциального уравнения и частного решения неоднородного уравнения: $\xi_j(\nu_j, t) = \xi_{1j}(\nu_j, t) + \xi_{2j}(\nu_j, t)$, где

$$\xi_{2j}(\nu_j, t) := \xi_{0j}(\nu_j) \cos \nu_j t + \frac{1}{\nu_j} \dot{\xi}_{0j}(\nu_j) \sin \nu_j t = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{i\nu_j} \xi_{\bullet j} e^{i\nu_j t} \right), \quad \xi_{\bullet j} := i\nu_j \xi_{0j} + \dot{\xi}_{0j},$$

$$\begin{aligned} \xi_{1j} &= \left\langle \frac{\kappa^j}{\rho_j \nu_j}, \int_0^t \sin(\nu_j(t-\tau)) \psi(\tau) d\tau \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{\kappa^j}{2i\rho_j \nu_j}, \int_0^t (e^{i\nu_j(t-\tau)} - e^{-i\nu_j(t-\tau)}) \psi(\tau) d\tau \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{\kappa^j}{2i\rho_j \nu_j}, (e^{i\nu_j t} \hat{\psi}^t(\nu_j) - e^{-i\nu_j t} \hat{\psi}^t(-\nu_j)) \right\rangle = \\ &= \operatorname{Re} \left(\left\langle \frac{\kappa^j}{i\rho_j \nu_j}, \hat{\psi}^t(\nu_j) e^{i\nu_j t} \right\rangle \right), \quad j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Пусть $\|\cdot\|_{L_2}$ – норма в L_2 : $\|g\|_{L_2}^2 = \int |g(\nu)|^2 d\nu$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.1. *Функции $\varepsilon_j(t) = \varepsilon_j(\xi_j(\nu_j, t), \dot{\xi}_j(\nu_j, t))$ удовлетворяют равенствам*

$$\varepsilon_j(t) = \|\hat{a}^j, \hat{\psi}^t\| + \sqrt{\rho_j} \xi_{\bullet j} \|_{L_2}^2, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямым вычислением получаем, что для любого $j = 1, 2, \dots, m$

$$\varepsilon_j = \varepsilon_{22j} + \varepsilon_{21j} + \varepsilon_{11j},$$

где

$$\begin{aligned}\varepsilon_{22j}(t) &= \int \rho_j(\nu_j^2 \xi_{2j}^2 + \dot{\xi}_{2j}^2) d\nu_j = \varepsilon_j(0) = \|\sqrt{\rho_j} \xi_{\bullet j}\|_{L_2}^2, \\ \varepsilon_{21j}(t) &= \int \rho_j(\nu_j^2 \xi_{2j} \xi_{1j} + \dot{\xi}_{2j} \dot{\xi}_{1j}) d\nu_j = \int \langle \hat{a}^j, \hat{\psi}^t \rangle \overline{\sqrt{\rho_j} \xi_{\bullet j}} d\nu_j + \int \overline{\langle \hat{a}^j, \hat{\psi}^t \rangle} \sqrt{\rho_j} \xi_{\bullet j} d\nu_j, \\ \varepsilon_{11j}(t) &= \int \rho_j(\nu_j^2 \xi_{1j}^2 + \dot{\xi}_{1j}^2) d\nu_j = \|\langle \hat{a}^j, \hat{\psi}^t \rangle\|_{L_2}^2.\end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 5.1. *Имеют место оценки*

$$\varepsilon_j(t) < \infty, \quad \|\langle \hat{a}^j, \hat{\psi}^t \rangle\|_{L_2}^2 \leq c_4(E), \quad \|\sqrt{\rho_j} \xi_{\bullet j}\|_{L_2}^2 \leq c_5(E), \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из утверждений 4.3 и 5.1 следует, что

$$\varepsilon_j(t) = \|\langle \hat{a}^j, \hat{\psi}^t \rangle + \sqrt{\rho_j} \xi_{\bullet j}\|_{L_2}^2 < \infty.$$

Из предположения 4 вытекает, что $\sqrt{\rho_j} \xi_{\bullet j} \in L_2$. Остается воспользоваться утверждением 5.1, из которого с учетом сделанных оценок следует, что $\|\langle \hat{a}^j, \hat{\psi}^t \rangle\|_{L_2}^2 \leq c_4(E)$, $\|\sqrt{\rho_j} \xi_{\bullet j}\|_{L_2}^2 \leq c_5(E)$, $j = 1, 2, \dots, m$, где c_4, c_5 – некоторые константы.

Положим

$$\hat{\gamma}^j(\nu_j) = \frac{2\pi \kappa^j \xi_{\bullet j}(\nu_j)}{i\nu_j}. \quad (5.6)$$

Определим

$$\mathcal{A}_{0j}^+(t) = \int_t^\infty W^j(\tau) \psi(t - \tau) d\tau, \quad \mathcal{A}_{0j}^-(t) = - \int_{-\infty}^t W^j(\tau) \psi(t - \tau) d\tau, \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{0j}^*(t) &= (\mathcal{A}_{0j}^{*1}(t), \dots, \mathcal{A}_{0j}^{*n}(t))^T, \quad \hat{\gamma}^j = (\hat{\gamma}_1^j, \dots, \hat{\gamma}_n^j)^T, \\ \gamma^j &= \mathcal{F}^{-1}(\hat{\gamma}^j), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad * \in \{+, -\}.\end{aligned} \quad (5.8)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.2. *Справедливо включение $\hat{\gamma}_l^j \in L_1$, $j = 1, 2, \dots, m, l = 1, 2, \dots, n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из следствия 5.1 получаем, что $\sqrt{\rho_j} \xi_{\bullet j} \in L_2$. Из предположения 2 следует, что $\kappa_l^j / \sqrt{\rho_j} \nu_j \in L_2$. Тогда произведение, умноженное на $2\pi/i$, равно $\hat{\gamma}^j \in L_1$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.3. *Верно равенство $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_{0j}^{+l}(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \mathcal{A}_{0j}^{-l}(t) = 0$, $j = 1, 2, \dots, m, l = 1, 2, \dots, n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем равенство $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_{0j}^{+l}(t) = 0$, второе равенство доказывается аналогично. Справедливо неравенство

$$|\mathcal{A}_{0j}^{+l}(t)| = \left| \sum_{s=1}^n (\chi_{[t, +\infty)} w_{ls}^j)(t) * \psi_s \right| \leq \sum_{s=1}^n \|\chi_{[t, +\infty)} w_{ls}^j\|_{\mathcal{M}} \|\psi_s\|_{\infty}.$$

В следствии (8.1) в статье [1] утверждается, что

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|\chi_{[t, \pm\infty)} w_{ls}^j\|_{\mathcal{M}} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad l, s = 1, 2, \dots, n.$$

Из этой оценки получаем требуемое.

Пусть

$$\gamma^j = \mathcal{F}^{-1}(\hat{\gamma}^j), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (5.9)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.4. *Имеют место равенства*

$$\begin{aligned} \int \kappa^j \xi_j d\nu_j &= \mathcal{F}^{-1}(\widehat{W}_{\diamond}^{+j} \hat{\psi}) + \operatorname{Re}(\gamma^j(t) - \mathcal{A}_{0j}^+(t)) = \\ &= \mathcal{F}^{-1}(\widehat{W}_{\diamond}^{-j} \hat{\psi}) + \operatorname{Re}(\gamma^j(t) - \mathcal{A}_{0j}^-(t)), \quad j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\xi_j = \xi_{1j} + \xi_{2j}$, то $\int \kappa^j \xi_j d\nu_j = \int \kappa^j \xi_{1j} d\nu_j + \int \kappa^j \xi_{2j} d\nu_j$. Преобразуем каждое слагаемое, входящее в эту сумму:

$$\begin{aligned} \int \kappa^j \xi_{2j} d\nu_j &= \int \kappa^j \operatorname{Re} \left(\frac{1}{i\nu_j} \xi_{\bullet j} e^{i\nu_j t} \right) d\nu_j = \operatorname{Re} \int \frac{\kappa^j \xi_{\bullet j} e^{i\nu_j t}}{i\nu_j} d\nu_j = \\ &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int e^{i\nu_j t} \hat{\gamma}^j(\nu_j) d\nu_j = \operatorname{Re}(\gamma^j(t)), \\ \int \kappa^j \xi_{1j} d\nu_j &= \int \kappa^j \operatorname{Re} \left(\left\langle \frac{\kappa^j}{i\rho_j \nu_j}, \hat{\psi}^t(\nu_j) e^{i\nu_j t} \right\rangle \right) d\nu_j = \\ &= \operatorname{Re} \int \kappa^j \left\langle \frac{\kappa^j}{i\rho_j \nu_j}, \hat{\psi}^t(\nu_j) e^{i\nu_j t} \right\rangle d\nu_j = \operatorname{Re} \mathcal{A}_j(t), \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{A}_j(t) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i\nu_j t} \widehat{W}^j(\nu_j) \hat{\psi}^t(\nu_j) d\nu_j = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{W}^j \hat{\psi}^t)(t) = (W^j * \psi^t)(t),$$

$W^j * \psi^t$ – сверточное умножение матрицы на вектор. Получаем, что

$$\mathcal{A}_j(t) = \mathcal{A}_{1j}^{\pm}(t) - \mathcal{A}_{0j}^{\pm}(t),$$

где $\mathcal{A}_{0j}^{\pm}$ определены выше, а

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{1j}^+(t) &= (W^j * \psi^t)(t) + \int_t^{\infty} W^j(\tau) \psi(t - \tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} W^j(\tau) \psi(t - \tau) \chi_{[0, +\infty)}(\tau) d\tau = (\chi_{[0, +\infty)} W^j) * \psi(t). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\mathcal{A}_{1j}^-(t) = (\chi_{[0, -\infty)} W^j) * \psi(t).$$

Теперь докажем формулу (1.14) и завершим доказательство теоремы 3.2. Так как ψ^t – действительнoзначная функция, а w_{sl}^j – чисто мнимые, то

$$\overline{W}^j(\tau) = -W^j(-\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Тогда верна следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \mathcal{A}_{1j}^{\pm} &= \frac{1}{2} (\chi_{[0, \pm\infty)}(\tau) W^j(\tau) - \chi_{[0, \pm\infty)}(\tau) W^j(-\tau)) * \psi = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{W}_{\diamond}^{\pm j} \hat{\psi}), \\ \widehat{W}_{\diamond}^{\pm j} &= (\hat{w}_{\diamond sl}^{\pm j}), \\ \hat{w}_{\diamond sl}^{\pm j} &= \frac{1}{2} \mathcal{F}((w_{sl}^j(\tau) - w_{sl}^j(-\tau)) \chi_{[0, \pm\infty)}(\tau)) = \\ &= \frac{1}{4\pi} (\hat{\chi}_{[0, \pm\infty)}(\lambda) * (\hat{w}_{sl}^j(\lambda) - \hat{w}_{sl}^j(-\lambda))). \end{aligned}$$

Используя формулу (см. книгу [20])

$$\hat{\chi}_{[0, \pm\infty)}(\lambda) = \pm\pi\delta(\lambda) + \frac{1}{i} \text{V. p.} \frac{1}{\lambda},$$

получаем, что

$$\begin{aligned} \hat{w}_{\diamond sl}^{\pm j}(\nu_j) &= \pm \frac{1}{4}(\hat{w}_{sl}^j(\nu_j) - \hat{w}_{sl}^j(-\nu_j)) + \frac{1}{2\pi i} \text{V. p.} \int \frac{\lambda w_{sl}^j(\lambda)}{\nu_j^2 - \lambda^2} d\lambda, \\ j &= 1, 2, \dots, m, \quad s, l = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Если ввести функцию $\hat{\vartheta}^{\pm j} = \mathcal{F}(\mathcal{A}_{0j}^{\pm}(t)) + \hat{\gamma}^j(t)$, то из утверждений 5.2, 5.3 вытекает, что $\vartheta^{\pm j} \in C_0^{\pm n}$, $j = 1, 2, \dots, m$. Отсюда следует п. Б теоремы 3.2.

Из доказанных утверждений следует, что $\langle \hat{a}^j, \hat{\psi}^t \rangle \in \widehat{C}_b$. Можно считать, что $\langle \hat{a}^j, \hat{\psi}^t \rangle$ – функционал из $\widehat{\mathcal{M}}$. Положим $\sum_{l=1}^n \hat{a}_l^j \hat{\psi}_l^+ := \sum_{l=1}^n \hat{a}_l^j \mathcal{F}(\chi_{[0, +\infty)} \psi_l)$, $j = 1, 2, \dots, m$. Покажем, что последовательность обобщенных функций $\langle \hat{a}^j, \hat{\psi}^t \rangle \in \widehat{C}_b$ стремится к $\langle \hat{a}^j, \hat{\psi}^+ \rangle$ при $t \rightarrow +\infty$, причем $\langle \hat{a}^j, \hat{\psi}^+ \rangle \in \widehat{C}_b$.

Из предположения 5 вытекает, что $a_l^j \in \mathcal{M}$, $j = 1, 2, \dots, m$, $l = 1, 2, \dots, n$. Так как $\mathcal{M}$ – сверточная алгебра, для любой функции $\hat{\phi} \in \widehat{\mathcal{M}}$ выполнено включение $a_l^j * \bar{\phi} \in \mathcal{M}$. Тогда верна следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} (\langle \hat{a}^j, \hat{\psi}^t \rangle, \hat{\phi}) &= 2\pi(\mathcal{F}^{-1}(\langle \hat{a}^j, \hat{\psi}^t \rangle), \phi) = 2\pi(\langle a^j * \psi^t \rangle, \phi) = 2\pi \int \langle a^j * \psi^t \rangle \bar{\phi} d\tau = \\ &= 2\pi \int \langle \psi^t, a^j * \bar{\phi} \rangle d\tau. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Следствие 8.1 в статье [1] утверждает, что при $t \rightarrow +\infty$ (5.11) стремится к

$$2\pi \int \langle \psi^+, a^j * \bar{\phi} \rangle d\tau = (\langle \hat{a}^j, \hat{\psi}^+ \rangle, \hat{\phi}).$$

Из этого следует, что $\lim_{t \rightarrow +\infty} \langle \hat{a}^j, \hat{\psi}^t \rangle = \langle \hat{a}^j, \hat{\psi}^+ \rangle$ при любом $j = 1, 2, \dots, m$. Поэтому $\langle \hat{a}^j, \hat{\psi}^+ \rangle$ можно считать функционалом на $\widehat{\mathcal{M}} \cap L_2$, L_2 -норма которого не превосходит $\sqrt{2c_2(E)}$. Так как $\widehat{\mathcal{M}} \cap L_2$ плотно в L_2 , по теореме Хана–Банаха функционал $\langle \hat{a}^j, \hat{\psi}^+ \rangle$ можно продолжить до функционала на L_2 с сохранением нормы. Этот функционал мы обозначим так же. По теореме Рисса его можно отождествить с некоторым элементом из L_2 . Аналогичным образом рассмотрим функционал $\langle \hat{a}^j, \hat{\psi}^- \rangle := \langle \hat{a}^j, \mathcal{F}(\chi_{[-\infty, 0]} \psi) \rangle \in L_2$. Из равенства $\hat{\psi}_l = \hat{\psi}_l^+ + \hat{\psi}_l^-$ вытекает, что $\langle \hat{a}^j, \hat{\psi} \rangle \in L_2$ при любом $j = 1, 2, \dots, m$.

Из замечания 5.1 и равенства (1.10) следует, что

$$\langle \hat{w}_l^j, \hat{\psi} \rangle = \sum_{s=1}^n \frac{2\pi \hat{a}_l^j \hat{a}_s^j}{i\nu_j} \hat{\psi}_s = \frac{2\pi \hat{a}_l^j}{i\nu_j} \langle \hat{a}^j, \hat{\psi} \rangle \in L_1.$$

Эти рассуждения и завершают доказательство теоремы.

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.3

Нам понадобится вспомогательное утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.1. *Справедливо равенство $\widehat{W}_{\diamond}^{\pm j}(0) = \mathcal{K}^j$, $j = 1, 2, \dots, m$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое следует из равенства (5.10) и определения (1.10).

Из леммы 8.6 статьи [1] вытекает, что компоненты вектор-функции ψ можно представить в виде $\psi_l = \psi_l^{\pm 0} + \psi_l^{\pm 1}$, где $\text{supp}(\hat{\psi}_l^{\pm 1})$ лежит в малой окрестности нуля,

$$\hat{\psi}_l^{\pm 0} \in \widehat{C}_0^{\pm}, \quad \hat{\psi}_l^{\pm 1} \in \widehat{C}_b, \quad \psi_l^{\pm 1} \in C^{\infty}, \quad \dot{\psi}_l^{\pm 1} = \frac{d}{d\tau} \psi_l^{\pm 1} \in C_0^{\pm}, \quad l = 1, 2, \dots, n.$$

Так как $\text{supp}(\hat{\psi}_l^{\pm 1})$ компактен, $\ddot{\psi}_l^{\pm 1} = \mathcal{F}^{-1}(-\lambda^2 \hat{\psi}_l^{\pm 1}) \in \widehat{C}_0^{\pm}$, $l = 1, 2, \dots, n$. Тогда для любого индекса $s = 1, 2, \dots, n$ найдутся функции $\hat{\vartheta}_0^{\pm} \in \widehat{C}_0^{\pm}$ такие, что

$$\sum_{l=1}^n a_{sl} \ddot{\psi}_l = \mathcal{F}^{-1} \left(-\lambda^2 \sum_{l=1}^n a_{sl} \hat{\psi}_l \right) = \mathcal{F}^{-1} \left(-\lambda^2 \sum_{l=1}^n a_{sl} \hat{\psi}_l^{\pm 1} + \hat{\vartheta}_0^{\pm} \right) \in C_0^{\pm}, \quad (6.1)$$

где a_{sl} – элементы постоянной матрицы A .

Поскольку функции $\hat{w}_{ls}^j$ являются C^1 -гладкими в нуле, функции $\hat{w}_{\diamond ls}^{\pm j}$ также C^1 -гладкие в нуле. Таким образом, получаем, что для любого $s = 1, 2, \dots, n$

$$\sum_{l=1}^n \hat{w}_{\diamond sl}^{\pm} \hat{\psi}_l = \sum_{l=1}^n (\hat{w}_{\diamond sl}^{\pm}(0) + \hat{\vartheta}_1^{\pm})(\hat{\psi}_l^{\pm 0} + \hat{\psi}_l^{\pm 1}) = \sum_{l=1}^n \hat{w}_{\diamond sl}^{\pm}(0) \hat{\psi}_l^{\pm 1} + \hat{\vartheta}_2^{\pm}, \quad \hat{\vartheta}_1^{\pm}, \hat{\vartheta}_2^{\pm} \in \widehat{C}_0^{\pm}. \quad (6.2)$$

Из равенства (6.2) и п. Б теоремы 3.2 следует, что

$$\hat{\phi}_s = \sum_{l=1}^n \hat{w}_{\diamond sl}^{\pm}(0) \hat{\psi}_l^{\pm 1} + \hat{\vartheta}_3^{\pm}, \quad \hat{\vartheta}_3^{\pm} \in \widehat{C}_0^{\pm}. \quad (6.3)$$

Из сказанного вытекает, что $\hat{\phi} \in \widehat{C}_b$. Из утверждения 6.1 получаем, что $\widehat{W}_{\diamond}^{\pm}(0) = \mathcal{K}$. Тогда уравнения движения (3.2) записываются в виде

$$V_0'(\psi^{\pm 1}) = \mathcal{K}\psi^{\pm 1} + \vartheta^{\pm}, \quad \vartheta^{\pm} \in C_0^{\pm n}.$$

Таким образом, при $t \rightarrow \pm\infty$ вектор-функция $\psi^{\pm 1}(t)$ может принимать значения только в малой окрестности множества $\text{Cr} := \{x: V_0'(x) = \mathcal{K}x\}$. Из этого следует, что существуют пределы $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \psi^{\pm 1}(t) = x_{\pm}$, $x_{\pm} \in \text{Cr}$, что доказывает теорему.

7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.4 И СЛЕДСТВИЯ 3.1

1) Пусть множество Ω_n не пусто, иначе теорема и следствие доказаны. Предположим, что найдется $\lambda_0 \in \text{sing supp } \hat{x} \cap \Omega_n$. Так как $\lambda_0 \in \Omega_n$, найдется набор из n векторов $\kappa^{s_1}, \dots, \kappa^{s_n}$, $s_j \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j = 1, 2, \dots, n$, линейно независимых в точке⁶⁾ λ_0 . Тогда, в частности для любого индекса $j = 1, 2, \dots, n$, найдется индекс $l_j \in \{1, 2, \dots, n\}$: $\kappa_{l_j}^{s_j}(\lambda_0) \neq 0$. Таким образом, функции $\kappa_{l_j}^{s_j}$ отличны от нуля в некоторой окрестности точки $\lambda_0 \in \Omega_n$, $j = 1, 2, \dots, n$.

⁶⁾ Отметим, что в каждой точке $\lambda_0 \in \Omega_n$ эти векторы могут быть разными, т.е. индексы $s_1, \dots, s_n$ зависят от точки λ_0 .

Из п. А теоремы 3.2 и вложения $L_1 \subset \widehat{C}_0$ следуют равенства

$$\langle \hat{w}_{l_j}^{s_j}, \hat{x} \rangle = 0 \pmod{\widehat{C}_0}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (7.1)$$

Пусть

$$\widehat{W}_{(l_1, \dots, l_n)}^{(s_1, \dots, s_n)} = \begin{pmatrix} \hat{w}_{l_1 1}^{s_1} & \dots & \hat{w}_{l_1 n}^{s_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{w}_{l_n 1}^{s_n} & \dots & \hat{w}_{l_n n}^{s_n} \end{pmatrix}$$

– квадратная матрица размера $n \times n$, строками которой являются векторы $\hat{w}_{l_j}^{s_j}$. Тогда равенства (7.1) можно переписать в матричном виде:

$$\widehat{W}_{(l_1, \dots, l_n)}^{(s_1, \dots, s_n)} \hat{x} = 0 \pmod{\widehat{C}_0^n}.$$

Из леммы 9.7 статьи [2] следует, что $\det \widehat{W}_{(l_1, \dots, l_n)}^{(s_1, \dots, s_n)}(\lambda_0) = 0$, поскольку $\lambda_0 \in \text{sing supp } \hat{x}$. Покажем, что это противоречит линейной независимости векторов $\kappa^{s_1}, \dots, \kappa^{s_n}$ в точке $\lambda_0 \in \Omega_n$.

Действительно, так как

$$\hat{w}_{l_j}^{s_j} = \frac{2\pi}{i\lambda\rho_j} \kappa_{l_j}^{s_j} \kappa^{s_j},$$

где κ^{s_j} – вектор-столбец, являющийся вектором жесткости s_j -го термостата, для любой точки $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ выполнено равенство

$$\det \widehat{W}_{(l_1, \dots, l_n)}^{(s_1, \dots, s_n)}(\lambda) = \left(\frac{2\pi}{i\lambda} \right)^n \frac{\kappa_{l_1}^{s_1}(\lambda) \dots \kappa_{l_n}^{s_n}(\lambda)}{\rho_{s_1}(\lambda) \dots \rho_{s_n}(\lambda)} \det K(\lambda). \quad (7.2)$$

Заметим, что в точке $\lambda_0 \in \Omega_n$ выполняются следующие свойства:

А) $\det K(\lambda_0) \neq 0$, поскольку векторы $\kappa^{s_1}, \dots, \kappa^{s_n}$ линейно независимы в каждой точке множества Ω_n ;

Б) $\kappa_{l_1}^{s_1}(\lambda_0), \dots, \kappa_{l_n}^{s_n}(\lambda_0)$ отличны от нуля из-за выбора индексов $l_1, \dots, l_n$;

В) в силу предположения 1 все $\rho_{s_1}(\lambda_0), \dots, \rho_{s_n}(\lambda_0)$ не равны нулю.

Выполнение этих условий и равенство (7.2) влекут неравенство нулю определителя матрицы $\det \widehat{W}_{(l_1, \dots, l_n)}^{(s_1, \dots, s_n)}(\lambda_0)$. Эти рассуждения завершают доказательство п. 1 теоремы 3.4.

2) Для $* \in \{+, -\}$ рассмотрим матрицы

$$\widehat{N}^*(\lambda) = A\lambda^2 + \widehat{W}_{\diamond}^*(\lambda), \quad (7.3)$$

где A – положительно определенная квадратная матрица, участвующая в определении кинетической энергии осциллятора, а матрица $\widehat{W}_{\diamond}^*$ определена по формуле (1.15). Тогда $\widehat{N}^*$ – квадратная матрица размера $n \times n$. Производя преобразование Фурье над уравнением (3.2), а также учитывая уравнение (3.3), получаем, что

$$\widehat{N}^* \hat{x} = \frac{\partial \widehat{V}_0}{\partial x} \pmod{\widehat{C}_0^{*n}}. \quad (7.4)$$

Так как выполнено равенство (3.2) и $\ddot{\psi} \in C_b$, $\phi \in \mathcal{M} * C_b \subset C_b$, справедливо включение $\partial V_0 / \partial x \in C_b$. Тогда множество $\text{sing supp } \frac{\partial V_0}{\partial x}$ определено.

Предположим, что нашлась точка $\lambda_0 \in \Omega_n \cap \text{sing supp } \widehat{\partial V_0}/\partial x$. Тогда из п. 1 теоремы 3.4 следует, что $\lambda_0 \notin \text{sing supp }^* \hat{x}$, т. е. найдется интервал $I \ni \lambda_0$ такой, что для любой меры $\hat{\mu} \in \widehat{\mathcal{M}}$, $\text{supp } \hat{\mu} \subset I$, выполнено включение $\hat{\mu} \hat{x} \in \widehat{C}_0^{*n}$, $*$ $\in \{+, -\}$. Умножим уравнение (7.4) на $\hat{\mu}$:

$$\widehat{N}^* \hat{\mu} \hat{x} = \hat{\mu} \frac{\widehat{\partial V_0}}{\partial x} \pmod{\widehat{C}_0^{*n}}.$$

Поскольку элементы матрицы $\widehat{N}^*$ принадлежат $\widehat{\mathcal{M}}$, это равенство эквивалентно уравнению

$$\hat{\mu} \frac{\widehat{\partial V_0}}{\partial x} = 0 \pmod{\widehat{C}_0^{*n}}.$$

Это и означает, что $\lambda_0 \notin \text{sing supp } \frac{\widehat{\partial V_0}}{\partial x}$. Таким образом, п. 2 теоремы 3.4 доказан.

Доказательство следствия 3.1 непосредственно следует из п. 1 теоремы 3.4. Действительно, так как $\Omega_n = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $\Omega_n \cap \text{sing supp } \hat{x} = \emptyset$, выполняется вложение $\text{sing supp } \hat{x} \subset \{0\}$. Применяя теорему 3.3, получаем требуемое.

8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.5

Как и в доказательстве п. 2 теоремы 3.4, рассмотрим матрицы (7.3). Применяя преобразование Фурье к уравнению (3.2), а также учитывая уравнение (3.3), получаем уравнение (7.4). В силу условия 4 теоремы 3.5 получаем, что

$$\frac{\widehat{\partial V_0}}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{p_1 q_1}{(2\pi)^{q_1-2}} \hat{x}_1^{*(q_1-1)} + \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_q} \frac{p_\alpha \alpha_1}{(2\pi)^{|\alpha|-2}} \hat{x}_1^{*(\alpha_1-1)} * \hat{x}_2^{*\alpha_2} * \dots * \hat{x}_n^{*\alpha_n} \\ \vdots \\ \frac{p_n q_n}{(2\pi)^{q_n-2}} \hat{x}_n^{*(q_n-1)} + \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_q} \frac{p_\alpha \alpha_n}{(2\pi)^{|\alpha|-2}} \hat{x}_1^{*\alpha_1} * \dots * \hat{x}_{n-1}^{*\alpha_{n-1}} * \hat{x}_n^{*(\alpha_n-1)} \end{pmatrix},$$

где $\hat{x}_s^{*l} = \underbrace{\hat{x}_s * \dots * \hat{x}_s}_l$. Из условия 3 и п. 1 теоремы 3.4 следует, что имеет место вложение $\text{sing supp } \hat{x} \subset [-\nu_0, \nu_0]$, $\nu_0 \geq 0$. Положим $\lambda_s = \max \text{sing supp } \hat{x}_s$, $s = 1, \dots, n$. Допустим, что⁷⁾ $\lambda_{s_0} = \max_{1 \leq s \leq n} \lambda_s > 0$. Рассмотрим уравнение с номером s_0 в системе (7.4):

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n (a_{s_0 l} \lambda^2 + \hat{w}_{\diamond s_0 l}^\pm) \hat{x}_l - \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_q} \frac{p_\alpha \alpha_{s_0}}{(2\pi)^{|\alpha|-2}} \hat{x}_1^{*\alpha_1} * \dots * \hat{x}_{s_0}^{*(\alpha_{s_0}-1)} * \dots * \hat{x}_n^{*\alpha_n} = \\ = \frac{p_{s_0} q_{s_0}}{(2\pi)^{q_{s_0}-2}} \hat{x}_{s_0}^{*(q_{s_0}-1)} + \hat{v}_{s_0}^\pm, \end{aligned} \quad (8.1)$$

где $\hat{v}_{s_0}^\pm$ – некоторые функции из пространства $\widehat{C}_0^\pm$. Теперь воспользуемся результатом работы [17], а именно теоремой 1. Она утверждает, что если имеет место цепочка $\lambda_{s_0} \in \text{sing supp } \hat{x}_{s_0} \subset (-\infty, \lambda_{s_0}]$, то $q \lambda_{s_0} \in \text{sing supp } \hat{x}_{s_0}^{*q} \subset (-\infty, q \lambda_{s_0}]$ при всех $q \in \mathbb{N}$.

⁷⁾Если $\max_{1 \leq s \leq n} \lambda < 0$, то рассмотрим $\lambda_{s_0} = \min_{1 \leq s \leq n} \lambda_s < 0$. Этот случай рассматривается аналогично.

Так как для любого $\alpha \in \mathcal{A}_q$ верна оценка $q_{s_0} > |\alpha|$, крайняя правая точка множества sing supp правой части равенства (8.1) равна $\lambda_{s_0}(q_{s_0} - 1) > 0$, поскольку все $q_s > 2$, $s = 1, 2, \dots, n$. Причем сокращений сингулярностей происходить не может из-за того, что крайняя правая точка множества sing supp левой части равенства (8.1) не превосходит $(|\alpha| - 1)\lambda_{s_0}$ (см. статью [17]). Следовательно, в силу того что $q_{s_0} > |\alpha|$, выполнено неравенство $\lambda_{s_0}(q_{s_0} - 1) > \lambda_{s_0}(|\alpha| - 1)$. Так как сокращений происходить не может, единственным вариантом для λ_{s_0} является равенство нулю, потому что уравнение (8.1) должно быть выполнено. Получаем, что $\lambda_{s_0} = 0$. Рассуждая аналогичным образом для левой граничной точки $\lambda_{s_1} = \min_{1 \leq s \leq n} \lambda_s < 0$, приходим к тому, что все $\lambda_s = 0$. Таким образом, мы заключаем, что $\text{sing supp } \hat{x} \subset \{0\}$. Тогда, применяя теорему 3.3, получаем требуемое.

9. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.6

Предположим, что найдется точка $\lambda_0 \in \Omega_m \cap \text{sing supp } \hat{x}$. Так как потенциальная энергия осциллятора является квадратичной формой по координатам, после того как мы применим преобразование Фурье, уравнения движения (3.2) с учетом уравнений (3.3) записываются в виде

$$\widehat{V}^* \hat{x} = 0 \pmod{\widehat{C}_0^{*n}}, \quad (9.1)$$

где $\widehat{V}^*(\lambda) = A\lambda^2 + \widehat{W}_{\diamond}^*(\lambda) - B$, $* \in \{+, -\}$. Поскольку $\lambda_0 \in \text{sing supp } \hat{x}$, используя лемму 9.7 из статьи [2], заключаем, что $\det \widehat{V}^*(\lambda_0) = 0$. По предположению $\lambda_0 \in \Omega_m$, поэтому λ_0 – нуль первого порядка. Из леммы 9.8 статьи [2] следует, что в некоторой окрестности точки λ_0 выполнено равенство

$$\hat{x} = \hat{\sigma} \hat{y} \pmod{\widehat{C}_0^{*n}}, \quad \hat{y} \in \widehat{C}_b, \quad \hat{\sigma} \in \widehat{\mathcal{M}}^n, \quad \hat{\sigma}(\lambda_0) \in \text{Ker } \widehat{V}^*(\lambda_0). \quad (9.2)$$

Аналогично предположению 7.3 из статьи [2] получаем, что $\lambda_0 \in \text{sing supp } \hat{y}$.

Так как $\lambda_0 \in \Omega_m$, все векторы жесткости $\kappa^1(\lambda_0), \dots, \kappa^m(\lambda_0)$ линейно независимы. Тогда для любого индекса $j = 1, \dots, m$ найдется индекс $l_j \in \{1, \dots, n\}$ такой, что $\kappa_{l_j}^j \neq 0$ в некоторой окрестности точки λ_0 . Заметим, что в каждой точке индексы l_j могут быть различными.

Из п. А теоремы 3.2 и вложения $L_1 \subset \widehat{C}_0$ следуют равенства

$$\langle \hat{w}_{l_j}^j, \hat{x} \rangle = 0 \pmod{\widehat{C}_0}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (9.3)$$

Пусть

$$\widehat{W}_{(l_1, \dots, l_m)}(\lambda) = \begin{pmatrix} \hat{w}_{l_1 1}^1 & \dots & \hat{w}_{l_1 n}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{w}_{l_m 1}^m & \dots & \hat{w}_{l_m n}^m \end{pmatrix}$$

– матрица размера $m \times n$, строками которой являются векторы $\hat{w}_{l_j}^j$. Тогда равенства (9.3) можно переписать в матричном виде:

$$\widehat{W}_{(l_1, \dots, l_m)} \hat{x} = 0 \pmod{\widehat{C}_0^m}. \quad (9.4)$$

Подставим $\hat{x}$, выраженный по формуле (9.2), в (9.4). Получим, что

$$\widehat{W}_{(l_1, \dots, l_m)} \hat{\sigma} \hat{y} = 0 \pmod{\widehat{C}_0^{*m}}. \quad (9.5)$$

Пусть

$$\widehat{\Phi}(\lambda) = \widehat{W}_{(l_1, \dots, l_m)}(\lambda) \hat{\sigma}(\lambda),$$

т. е. $\widehat{\Phi} = (\widehat{\Phi}_1, \dots, \widehat{\Phi}_m)^T$ – вектор-столбец. Тогда систему уравнений (9.5) можно переписать в виде системы

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}_1 \hat{y} &= 0 \pmod{\widehat{C}_0^*}, \\ &\vdots \\ \widehat{\Phi}_m \hat{y} &= 0 \pmod{\widehat{C}_0^*}. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Так как $\lambda_0 \in \text{sing supp } \hat{y}$, применяя лемму 9.7 [2] к каждому уравнению системы (9.6), получаем, что $\widehat{\Phi}_1(\lambda_0) = \dots = \widehat{\Phi}_m(\lambda_0) = 0$. Следовательно,

$$\widehat{W}_{(l_1, \dots, l_m)}(\lambda_0) \hat{\sigma}(\lambda_0) = 0,$$

т. е. вектор $\hat{\sigma}(\lambda_0) \in \text{Ker } \widehat{W}_{(l_1, \dots, l_m)}(\lambda_0)$. Поскольку все $\kappa_{l_j}^j(\lambda_0) \neq 0$ и

$$\hat{w}_{l_j q}^j = \frac{2\pi}{i\nu\rho_j} \kappa_{l_j}^j \kappa_q^j, \quad j = 1, \dots, m, \quad q = 1, 2, \dots, n,$$

выполняется равенство $\text{Ker } K^T(\lambda_0) = \text{Ker } \widehat{W}_{(l_1, \dots, l_m)}(\lambda_0)$. В силу условия 5 теоремы 3.6 заключаем, что $\text{Ker } \widehat{W}_{(l_1, \dots, l_m)}(\lambda_0) \cap \text{Ker } \widehat{V}^*(\lambda_0) = \vec{0}$. Поэтому $\hat{\sigma}(\lambda_0) = \vec{0}$. Из (9.2) следует, что $\hat{x} \in \widehat{C}_0^{*n}$, т. е. $\text{sing supp } \hat{x} = \emptyset$. Мы получили противоречие. Это рассуждение завершает доказательство теоремы 3.6.

10. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.7

Доказательство почти дословно повторяет доказательство п. 1 теоремы 2.2 статьи [2]. Предположим, что найдется $\lambda_0 \in \sigma \cap \text{sing supp } \hat{x}$. В силу условия 2 уравнения движения (3.2) с учетом уравнений (3.3) записываются в виде (9.1). Так как $\lambda_0 \in \text{sing supp } \hat{x}$, используя лемму 9.7 статьи [2], заключаем, что $\det \widehat{V}^*(\lambda_0) = 0$. По предположению $\lambda_0 \in \sigma$, следовательно, λ_0 – нуль первого порядка. Из леммы 9.8 работы [2] вытекает, что в некоторой окрестности λ_0 выполнено равенство (9.2). Из предложения 7.3 работы [2] следует, что $\lambda_0 \in \text{sing supp } \hat{y}$.

Согласно условию 4 теоремы найдутся индексы $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ и $l \in \{1, 2, \dots, n\}$ такие, что $\hat{a}_l^j(\lambda_0) \neq 0$, где вектор $\hat{a}^j$ определен по формуле (1.9). Из п. А теоремы 3.2 и вложения $L_1 \subset \widehat{C}_0$ следует равенство

$$\langle \hat{w}_l^j, \hat{x} \rangle = 0 \pmod{\widehat{C}_0}. \quad (10.1)$$

Подставляя (9.2) в (10.1), получаем, что

$$\langle \hat{w}_l^j, \hat{\sigma} \rangle \hat{y} = 0 \pmod{\widehat{C}_0^*}. \quad (10.2)$$

Применим лемму 9.7 из статьи [2] к одномерной матрице $\langle \hat{w}_l^j, \hat{\sigma} \rangle$. Из (10.2) вытекает, что $\langle \hat{w}_l^j(\lambda_0), \hat{\sigma}(\lambda_0) \rangle = 0$, т. е. $\hat{w}_l^j(\lambda_0) \perp \hat{\sigma}(\lambda_0)$. Так как $\hat{\sigma}(\lambda_0) \in \text{Ker } \widehat{V}^*(\lambda_0)$, а ядро матрицы $\widehat{V}^*(\lambda_0)$ одномерно, верно соотношение $\hat{w}_l^j(\lambda_0) \perp \text{Ker } \widehat{V}^*(\lambda_0)$. Тогда

$$\hat{a}^j(\lambda_0) = \frac{i\lambda_0}{2\pi\hat{a}_l^j(\lambda_0)} \hat{w}_l^j(\lambda_0) \in \text{Im } \widehat{V}^*(\lambda_0),$$

$\hat{a}_l^j(\lambda_0) \neq 0$ в силу выбора индексов j и l . А это противоречит условию 4.

Благодарности. Автор выражает благодарность своему научному руководителю Д. В. Трещеву за постановку задачи и всестороннюю помощь в ее решении. Кроме того, автор благодарен А. В. Дымову за тщательное прочтение работы и ценные замечания.

Список литературы

- [1] D. Treschev, “Oscillator and thermostat”, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **28**:4 (2010), 1693–1712.
- [2] А. В. Дымов, “Диссипативные эффекты в одной лагранжевой механической системе с бесконечным числом степеней свободы”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **76**:6 (2012), 45–80.
- [3] Н. Н. Боголюбов, “Элементарный пример установления статистического равновесия в системе, связанной с термостатом”, *О некоторых статистических методах в математической физике*, Изд-во АН УССР, Киев, 1945, 115–137.
- [4] А. И. Комеч, “О стабилизации взаимодействия струны с нелинейным осциллятором”, *Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1991, № 6, 35–41.
- [5] A. I. Komech, H. Spohn, M. Kunze, “Long-time asymptotics for a classical particle interacting with a scalar wave field”, *Commun. Partial Differ. Equations*, **22**:1–2 (1997), 307–335.
- [6] A. I. Komech, H. Spohn, “Long-time asymptotics for a coupled Maxwell–Lorentz equations”, *Commun. Partial Differ. Equations*, **25**:3–4 (2000), 559–584.
- [7] A. O. Caldeira, A. J. Leggett, “Quantum tunnelling in a dissipative system”, *Ann. Phys.*, **149**:2 (1983), 374–456.
- [8] A. O. Caldeira, A. J. Leggett, “Influence of dissipation on quantum tunneling in macroscopic systems”, *Phys. Rev. Lett.*, **46**:4 (1981), 211–214.
- [9] A. O. Caldeira, A. J. Leggett, “Path integral approach to quantum Brownian motion”, *Phys. A*, **121**:3 (1983), 587–616; Erratum, **130**:1–2 (1985), 374.
- [10] F. M. Ramazanoglu, “Approach to thermal equilibrium in the Caldeira–Leggett model”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **42**:26 (2009), 265303, 15 pp., arXiv:0812.2520.
- [11] A. Cacheffo, M. H. Y. Moussa, M. A. de Ponte, “The double Caldeira–Leggett model: derivation and solutions of the master equations, reservoir-induced interactions and decoherence”, *Phys. A*, **389**:11 (2010), 2198–2217, arXiv:0903.2176.
- [12] V. Ayyar, B. Müller, “Approach to equilibrium in the Caldeira–Leggett model”, *Internat. J. Modern Phys. E*, **22**:3 (2012), 1350016, 18 pp., arXiv:1212.3538.
- [13] J. F. R. Archilla, R. S. MacKay, J. L. Marín, “Discrete breathers and Anderson modes: two faces of the same phenomenon”, *Phys. D*, **134**:4 (1999), 406–418.
- [14] R. S. MacKay, “Discrete breathers: classical and quantum”, *Phys. A*, **288**:1–4 (2000), 174–198.
- [15] V. Koukouloyannis, R. S. MacKay, “Existence and stability of 3-site breathers in a triangular lattice”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **38**:5 (2005), 1021–1030.
- [16] R. Yamapi, R. S. MacKay, “Stability of synchronisation in a shift-invariant ring of mutually coupled oscillators”, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, **10**:4 (2008), 973–996.
- [17] Е. А. Горин, Д. В. Трещёв, “Относительный вариант теоремы Титчмарша о свертке”, *Функц. анализ и его прил.*, **46**:1 (2012), 31–38.
- [18] В. И. Богачев, *Основы теории меры*, т. 1, РХД, М.–Ижевск, 2006.
- [19] L. Shwartz, *Cours d’analyse*, v. 2, Hermann, Paris, 1981.
- [20] В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1981.