Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Гельфонд, М. А. Васильев, Симметрии токов высших спинов в четырех измерениях, *ТМФ*, 2016, том 187, номер 3, 401–420

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9064>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 03:37:27

© 2016 г.

О. А. Гельфонд^{*†}, М. А. Васильев[†]

СИММЕТРИИ ТОКОВ ВЫСШИХ СПИНОВ В ЧЕТЫРЕХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Показано, что токовые взаимодействия безмассовых полей в четырех измерениях нарушают симметрию $\mathfrak{sp}(8)$ уравнений для свободных безмассовых полей произвольных спинов до конформной симметрии $\mathfrak{su}(2, 2)$. Это нарушение находится в согласии с формой нелинейных уравнений для полей высших спинов.

Ключевые слова: высшие симметрии, конформная симметрия, сохраняющиеся токи.

DOI: 10.4213/tmf9064

1. ВВЕДЕНИЕ

Имя Игоря Викторовича Тютина хорошо известно в мире прежде всего в связи с БРСТ-формализмом. Без сомнения, Тютин является одним из лидеров российской науки, он внес выдающийся вклад в релятивистскую квантовую теорию поля, выходящий далеко за рамки БРСТ-формализма как такового. Работая в одном коллективе с Игорем Викторовичем на протяжении многих лет, мы имели замечательную возможность в полной мере оценить как масштаб его научного потенциала, так и обаяние его личности. В том, посвященный 75-летию юбилею Игоря Викторовича Тютина, мы рады представить работу, в которой симметрии релятивистских систем изучаются методами развернутой динамики, во многом аналогичными БРСТ-подходу [1].

Как было показано Фронсдалом [2], бесконечные башни свободных безмассовых полей, появляющихся в четырехмерной калибровочной теории высших спинов (ВС) [3], обладают симметрией $\mathfrak{sp}(8)$, которая является расширением конформной симметрии $\mathfrak{su}(2, 2)$. Последняя действует на каждый спин $s = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$. Генераторы из $\mathfrak{sp}(8)/\mathfrak{su}(2, 2)$ смешивают поля различных спинов.

Настоящее исследование частично поддержано РФФИ (грант № 14-02-01172).

^{*}Научно-исследовательский институт системных исследований РАН, Москва, Россия

[†]Отделение теоретической физики им. И. Е. Тамма, Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия. E-mail: vasiliev@lpi.ru, gel@lpi.ru

Это наблюдение позволило построить явно $\mathfrak{sp}(8)$ -симметричную геометрическую реализацию полевых уравнений для свободных безмассовых полей всех спинов, рассматривавшуюся, например, в работах [4]–[13] (см. также содержащиеся там ссылки). Однако попытка введения взаимодействий ВС, предпринятая в [12], не увенчалась успехом. Полная нелинейная система уравнений ВС [14] обладает явной симметрией $\mathfrak{sp}(4)$, но не симметрией $\mathfrak{sp}(8)$. До сих пор не было ясно, является ли это свойством рассматриваемого формализма или симметрия $\mathfrak{sp}(8)$ с необходимостью нарушается взаимодействиями.

В настоящей статье мы покажем, что токовые взаимодействия ВС с необходимостью нарушают симметрию $\mathfrak{sp}(8)$ до конформной подалгебры $\mathfrak{su}(2, 2)$. Наш анализ основывается на подходе работы [15], в которой было показано, что токовые взаимодействия могут пониматься как деформация двух независимых линейных систем для полей первого и второго рангов, отвечающих соответственно безмассовым полям и сохраняющимся конформным токам в четырехмерном пространстве-времени. Хотя каждая из этих двух систем $\mathfrak{sp}(8)$ -симметрична, деформация, отвечающая за взаимодействия, эту симметрию нарушает. Подчеркнем, что наши результаты не ограничивают возможность введения других взаимодействий, на существование которых указывают результаты работ [16], [13], в которых были построены нетривиальные $\mathfrak{sp}(8)$ -инвариантные трехчастичные корреляторы.

Рассмотрение, приведенное в работе [15], было инвариантно относительно алгебры симметрий $\mathfrak{sp}(4)$ пространства AdS_4 . Однако важный вопрос о том, до какой степени эта деформация сохраняет симметрию $\mathfrak{sp}(8)$, в работе [15] не рассматривался. Как показано ниже, во взаимодействующей системе алгебра $\mathfrak{sp}(4)$ может быть расширена до четырехмерной конформной алгебры $\mathfrak{su}(2, 2)$, но не до всей $\mathfrak{sp}(8)$. Другими словами, токовое взаимодействие высших спинов нарушает симметрию $\mathfrak{sp}(8)$ до $\mathfrak{su}(2, 2)$. В частности, $\mathfrak{sp}(8)$ содержит оператор спиральности $\mathcal{H}$ такой, что его централизатор в $\mathfrak{sp}(8)$ совпадает с алгеброй $\mathfrak{u}(2, 2)$, порожденной генераторами конформной алгебры $\mathfrak{su}(2, 2)$ и самим оператором $\mathcal{H}$. Мы покажем, что симметрия $\mathfrak{u}(1)$, порожденная оператором $\mathcal{H}$, не поднимается до симметрии смешанной системы. Следовательно, то же справедливо для $\mathfrak{sp}(8)/\mathfrak{su}(2, 2)$.

Мы будем изучать систему в рамках развернутой формулировки [15] в секторе калибровочно-инвариантных 0-форм кривизны, свободном от сложностей, связанных с калибровочными симметриями. Один из основных результатов настоящей работы состоит в том, что достаточно неожиданно эта постановка оказывается явно конформно-инвариантной. Анализ в терминах 0-форм является более общим, чем в секторе калибровочных полей, где конформная инвариантность нарушается для безмассовых полей со спинами $s > 1$. Заметим, впрочем, что этого нарушения можно избежать на фоне пространства анти-де Ситтера [10].

Симметрия $\mathfrak{u}(1) \in \mathfrak{sp}(8)$, порождаемая оператором спиральности $\mathcal{H}$, описывает электромагнитную (ЭМ) дуальность. Напомним, что обобщенная на спины $s \geq 1$ ЭМ дуальность порождается оператором $\mathcal{H}$, по отношению к которому (анти)самодуальные решения обладают собственными значениями $(-)s$. В случае $s = 1$ это обычная ЭМ дуальность. Поскольку, как известно, токовые взаимодействия нарушают ЭМ дуальность, наши выводы не так уж неожиданны. Нарушение $\mathfrak{sp}(8)$ в секторе 0-форм, обсуждаемое в настоящей статье, не может быть восстановлено путем перехода в искривленное пространство в духе [10].

Наши результаты согласуются с формой нелинейных уравнений ВС [14], также нарушающей ЭМ дуальность. В действительности форма нелинейных уравнений ВС указывает на то, что это нарушение носит спонтанный характер в духе формализма тензора вложения в супергравитации [17], [18].

В разделе 2 мы напомним необходимые сведения из формализма развернутой динамики. В разделе 3 задача о токовых взаимодействиях будет сформулирована в терминах деформации модулей. Конформно-инвариантная постановка введена в разделе 4. Симметрии токовых взаимодействий проанализированы в разделе 5. Полученные результаты кратко обсуждаются в разделе 6.

2. РАЗВЕРНУТАЯ ДИНАМИКА

2.1. Развернутые уравнения. Для контроля симметрий той или иной системы удобно использовать формализм развернутой динамики. Идея этого подхода была предложена и применена к взаимодействующей калибровочной теории ВС в работах [19], [20] (подробности см. также в [3], [21], [22]).

Пусть M^d – d -мерное многообразие с координатами x^n , $n = 0, 1, \dots, d-1$. Развернутая формулировка линейной или нелинейной системы дифференциальных уравнений и/или связей в M^d означает ее переписывание в форме первого порядка:

$$dW^\Phi(x) = G^\Phi(W(x)). \quad (2.1)$$

Здесь $d = dx^n \frac{\partial}{\partial x^n}$ – внешнее дифференцирование на M^d , $W^\Phi(x)$ – некоторый набор дифференциальных форм степеней p_Φ , $G^\Phi(W)$ – некоторая функция степени $p_\Phi + 1$ от W^Ω :

$$G^\Phi(W) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{\Omega_1 \dots \Omega_n}^\Phi W^{\Omega_1} \wedge \dots \wedge W^{\Omega_n},$$

где $f_{\Omega_1 \dots \Omega_n}^\Phi$ – соответствующим образом (анти)симметризованные структурные коэффициенты, а G^Φ удовлетворяет обобщенному тождеству Якоби

$$G^\Omega(W) \wedge \frac{\partial G^\Phi(W)}{\partial W^\Omega} = 0. \quad (2.2)$$

Строго говоря, формальная совместность требует выполнения равенства (2.2) для $p_\Phi < d$, так как $(d+1)$ -формы обращаются в нуль на многообразии размерности d . Любое решение (2.2) определяет свободную дифференциальную алгебру [23], [24]. Развернутая система универсальна [21], если обобщенное тождество Якоби выполнено независимо от размерности d , т.е. W^Φ могут пониматься как координаты в некотором суперпространстве-мишени. Развернутые уравнения ВС, включая рассматриваемые в настоящей статье, универсальны.

Для универсальных систем уравнение (2.1) инвариантно относительно калибровочных преобразований

$$\delta W^\Phi(x) = d\varepsilon^\Phi(x) + \varepsilon^\Omega(x) \wedge \frac{\partial G^\Phi(W(x))}{\partial W^\Omega(x)}, \quad (2.3)$$

где калибровочный параметр $\varepsilon^\Phi(x)$ является $(p_\Phi - 1)$ -формой (равной нулю для 0-форм $W^\Phi(x)$). Локальные степени свободы содержатся в секторе 0-форм. Это является следствием леммы Пуанкаре, так как точные формы можно исключить по-

рядок за порядком с помощью калибровочных преобразований (2.3). Следует отметить, что на языке развернутых уравнений локальная эволюция полей определяется значениями 0-форм в той или иной фиксированной точке пространства-времени. Переход к стандартной задаче Коши связан с разделением полей на динамические и вспомогательные. Последние выражаются через производные динамических полей. Кроме того, развернутые уравнения налагают дифференциальные уравнения на динамические поля, такие как уравнения Клейна–Гордона, Дирака и другие релятивистские уравнения. Анализ динамического содержания развернутых уравнений осуществляется с помощью техники σ -когомологий, развитой в работе [25] (см. также [26]).

Степени свободы замкнутых p -форм, возникающие благодаря нетривиальной топологии, не считаются локальными.

Универсальная развернутая система может быть поднята в большее пространство посредством расширения

$$d = dx^a \frac{\partial}{\partial x^a} \longrightarrow \hat{d} = d\hat{x}^A \frac{\partial}{\partial \hat{x}^A} = dx^a \frac{\partial}{\partial x^a} + dz^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \quad (2.4)$$

где z^α – некоторые дополнительные координаты. Расширение универсальной развернутой системы из пространства M с координатами x^a в большее пространство $\hat{M}$ с координатами $\hat{x}^A$ остается формально совместным. Так как ограничение возникающей системы в $\hat{M}$ до исходной системы в M достигается путем ограничения $\hat{d}$ на d , локальные динамические содержания обеих систем эквивалентны. Действительно, начальные данные по-прежнему задаются значениями 0-форм в произвольной точке пространства $\hat{M}$, которую можно выбрать принадлежащей M . Дополнительные уравнения в $\hat{M}$ восстанавливают зависимость от z в терминах зависимости от x . (Разумеется, это верно лишь локально, и ситуация может измениться, если z^α удовлетворяет нетривиальным граничным условиям.) Допуская простые расширения в большие пространства, универсальные развернутые системы представляют собой эффективный инструмент, применявшийся, в частности, для расширения формулировки безмассовых полей в пространстве Минковского до лагранжева грассманиана в работе [6], где симметрия $\mathfrak{sp}(8)$ мультиплетов ВС действует геометрически.

2.2. Вакуум. Простейший класс универсальных свободных дифференциальных алгебр находится во взаимно однозначном соответствии с алгебрами Ли. Действительно, рассмотрим множество 1-форм w^α . В отсутствие других форм (например, если все остальные формы в большей системе могут быть положены равными нулю без нарушения совместности системы) наиболее общее выражение для $G^\alpha(w)$, которое должно быть 2-формой, имеет вид

$$G^\alpha(w) = -\frac{1}{2} f_{\beta\gamma}^\alpha w^\beta \wedge w^\gamma.$$

Условия совместности (2.2) и развернутые уравнения (2.1) налагают соответственно тождества Якоби на структурные коэффициенты $f_{\beta\gamma}^\alpha$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и условия нулевой кривизны на w^α

$$dw^\alpha + \frac{1}{2} f_{\beta\gamma}^\alpha w^\beta \wedge w^\gamma = 0. \quad (2.5)$$

Закон преобразования (2.3) дает обычное калибровочное преобразование связности w

$$\delta w^\alpha(x) = D\varepsilon^\alpha(x) := d\varepsilon^\alpha(x) + f_{\beta\gamma}^\alpha w^\beta(x)\varepsilon^\gamma(x). \quad (2.6)$$

Плоская связность $w(x)$ инвариантна относительно глобальных преобразований с ковариантно-постоянными параметрами

$$D\varepsilon^\alpha(x) = 0. \quad (2.7)$$

Это уравнение совместно в силу (2.5). Следовательно, локально оно восстанавливает $\varepsilon^\alpha(x)$ в терминах его значений $\varepsilon^\alpha(x_0)$ в произвольной фиксированной точке x_0 . Значения $\varepsilon^\alpha(x_0)$ являются модулями глобальной симметрии $\mathfrak{g}$, которая, как теперь понятно, является алгеброй стабильности данной плоской связности $w(x)$.

Этот пример поясняет, как $\mathfrak{g}$ -инвариантные вакуумные поля появляются в развернутой формулировке. Уточним, что под вакуумом понимается решение нелинейной системы, обладающее той или иной симметрией $\mathfrak{g}$, которое обычно описывается плоской связностью со значениями в представлении $\mathfrak{g}$. Как правило, развернутая система, содержащая 1-формы w^α , ассоциированные с некоторой алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, допускает плоскую связность w^α как ее $\mathfrak{g}$ -симметричное вакуумное решение. В пертурбативном анализе предполагается, что вакуумная связность w^α является решением некоторой нелинейной системы и имеет нулевой порядок малости. Такое описание фоновой геометрии координатно независимо. Явная форма $w^\alpha(x)$ не требуется до тех пор, пока не рассматриваются явные решения в конкретной системе координат.

2.3. Свободные поля и когомологии Шевалье–Эйленберга. Линеаризуем развернутую систему (2.1) около некоторой вакуумной плоской связности w , полагая

$$W^\Omega = w^\Omega + \omega^\Omega, \quad (2.8)$$

где w – плоская связность алгебры Ли $\mathfrak{g}$, удовлетворяющая условию (2.5), а ω^Ω – дифференциальные формы различных степеней, рассматриваемые как малые возмущения и в младшем порядке входящие в уравнения линейно. Сначала рассмотрим сектор форм $\omega^i(x)$ заданной степени p_i (например, 0-формы) среди всех форм $\omega^\Omega(x)$. Тогда G^i билинейны по w и ω , т. е. $G^i = -w^\alpha(T_\alpha)^i{}_j \wedge \omega^j$. В этом случае условие (2.2) означает, что матрицы $(T_\alpha)^i{}_j$ образуют представление T алгебры $\mathfrak{g}$ в векторном пространстве V , где принимают значения $\omega^i(x)$. Соответствующее уравнение (2.1) есть условие ковариантного постоянства

$$D_w \omega^i = d\omega^i + w^\alpha(T_\alpha)^i{}_j \wedge \omega^j = 0, \quad (2.9)$$

где $D_w \equiv d + w$ – ковариантная производная в $\mathfrak{g}$ -модуле V .

Уравнения (2.5) и (2.9) инвариантны относительно калибровочных преобразований (2.3) с

$$\delta \omega^i(x) = -\varepsilon^\alpha(x)(T_\alpha)^i{}_j \omega^j(x). \quad (2.10)$$

Если вакуумная связность фиксирована, то система (2.9) инвариантна относительно глобальной симметрии $\mathfrak{g}$ с параметрами, удовлетворяющими (2.7).

Этот простой анализ имеет полезные следствия. Прежде всего, разворачивание любой $\mathfrak{g}$ -инвариантной линейной системы дифференциальных уравнений означает

ее переформулировку в терминах $\mathfrak{g}$ -модулей. Развернутые уравнения вида (2.9) можно проинтегрировать в форме чистой калибровки

$$\omega^i(x) = g^i_j(x, x_0)\omega^j(x_0), \quad g^i_j(x, x_0) = \text{Pexp} - \int_{x_0}^x w^\alpha T_\alpha^i{}_j. \quad (2.11)$$

Если $\tilde{\mathfrak{g}}$ – бóльшая алгебра Ли, действующая в V , т.е. $\mathfrak{g} \subset \tilde{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{gl}(V)$, она тоже является симметрией (2.9) просто потому, что любая плоская $\mathfrak{g}$ -связность есть одновременно и $\tilde{\mathfrak{g}}$ -связность. В результате максимальной симметрией (2.9) оказывается алгебра Ли $\mathfrak{gl}(V)$ коммутаторов эндоморфизмов V .

Пусть $\omega^a(x)$ и $\omega^b(x)$ – формы различных фиксированных степеней p_a и p_b , скажем $p_a - p_b = k \geq 0$. В линейном приближении можно рассмотреть функцию G^Φ , полилинейную по вакуумным полям w^α , но линейную по динамическим полям ω

$$G^a(w, \omega) = -f_{\alpha_1 \dots \alpha_{k+1}, b}^a w^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge w^{\alpha_{k+1}} \omega^b. \quad (2.12)$$

Пусть ω^b – 0-форма. Уравнение на ω^b есть условие ковариантного постоянства (2.9). Условия совместности (2.2), примененные к (2.12), буквально означают, что $f_{\alpha_1 \dots \alpha_{k+1}, b}^a w^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge w^{\alpha_{k+1}}$ есть коцикл Шевалье–Эйленберга $\mathfrak{g}$ с коэффициентами в $V_l \otimes V_r^*$, где V_l – модуль, в котором принимает значения G^a , а модуль V_r^* дуален к модулю, в котором лежит ω^b . Кограницы динамически пусты, поскольку, как легко видеть, от них можно избавиться переопределением полей. Таким образом, в развернутой формулировке когомологии Шевалье–Эйленберга классифицируют возможные нетривиальные смешивания между полями, реализованными как дифференциальные формы различных степеней [10]. В частности, если как ω^a , так и ω^b – 0-формы, когомологии Шевалье–Эйленберга (2.12) описывают нетривиальные деформации прямой суммы модулей, ассоциированных с ω^a и ω^b . Этот случай наиболее тесно связан с анализом данной статьи, где токовые взаимодействия описываются как деформации прямой суммы модулей, ассоциированных с полями и токами.

В присутствии деформации (2.12) система остается инвариантной относительно глобальной симметрии $\mathfrak{g}$, которая по-прежнему является частью калибровочной симметрии, оставляющей инвариантными вакуумные поля w^α . Ее действие на ω^Φ , однако, деформируется в соответствии с (2.3), (2.12).

3. ПОЛЯ СТАРШИХ РАНГОВ, НЕЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА И ГОЛОГРАФИЯ

Рассмотрим некоторую свободную $\mathfrak{g}$ -симметричную полевую теорию. Ее развернутая формулировка всегда содержит набор 0-форм (описывающих поля материи и калибровочно-инвариантные комбинации производных калибровочных полей системы), которые образуют $\mathfrak{g}$ -модуль S . Будучи пространством всех локальных степеней свободы в системе, модуль S тесно связан с гильбертовым пространством $\mathcal{H}$ одночастичных состояний, являющимся пространством нормируемых (положительно частотных) решений свободных уравнений, в соответствующей свободной квантовой теории (обычно S комплексно эквивалентно $\mathcal{H}$ [6]). Тогда аналогом пространства

двухчастичных состояний является $\text{Sym } S \otimes S$, а пространство M всех мультичастичных состояний есть

$$M(S) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} S^r, \quad S^r = \text{Sym} \underbrace{S \otimes \cdots \otimes S}_r. \quad (3.1)$$

Пусть поля 0-формы $C^i(x)$ некоторой развернутой системы удовлетворяют условию вакуумного ковариантного постоянства

$$DC^i(x) = 0, \quad (3.2)$$

где D – вакуумная ковариантная производная в $\mathfrak{g}$ -модуле S . Назовем $C^i(x)$ полем ранга 1. Тогда поля $C^{i_1 \dots i_r}(x)$ ранга r принимают значения в S^r и удовлетворяют условиям

$$D_r C^{i_1 \dots i_r}(x) = 0, \quad (3.3)$$

где D_r – вакуумная ковариантная производная алгебры $\mathfrak{g}$ в S^r . В соответствии с п. 2.3 $\mathfrak{gl}(S^r)$ – максимальная симметрия уравнений ранга r .

Базис в S^r образуется *чистыми* полями, являющимися произведениями полей ранга 1

$$A_{i_1, \dots, i_r} C^{i_1}(x) \cdots C^{i_r}(x). \quad (3.4)$$

(Заметим, что, в отличие от бислокального формализма [27], [28], в данном случае произведение берется в одной и той же точке x , но для различных значений индекса i_k , маркирующего базис в S .) Пространство S^r инвариантно относительно алгебры $\mathfrak{gl}(S)$, отвечающей главному вложению в $\mathfrak{gl}(S^r)$, т.е. действующей на каждое поле в произведении (3.4).

Развернутые уравнения для калибровочно-инвариантных напряженностей безмассовых полей всех спинов в четырехмерном пространстве Минковского имеют вид [20]

$$DC(y, \bar{y} | x) := dx^{\alpha\beta'} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha\beta'}} + \frac{\partial^2}{\partial y^\alpha \partial \bar{y}^{\beta'}} \right) C(y, \bar{y} | x) = 0. \quad (3.5)$$

Здесь y^α и $\bar{y}^{\beta'}$ – вспомогательные взаимно сопряженные коммутирующие переменные, несущие двухкомпонентные спинорные индексы $\alpha, \beta = 1, 2$, $\alpha', \beta' = 1, 2$, а $x^{\alpha\beta'}$ – координаты в пространстве Минковского в терминах двухкомпонентных спиноров.

Обобщение (3.5) на ранг r есть

$$D_r C^{(r)}(y, \bar{y} | x) := dx^{\alpha\beta'} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha\beta'}} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^\alpha \partial \bar{y}_j^{\beta'}} \eta_{ij} \right) C^{(r)}(y, \bar{y} | x) = 0, \quad (3.6)$$

где $C^{(r)}(y, \bar{y} | x) = C(y_1, \dots, y_r, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_r | x)$, а η_{ij} – некоторая невырожденная $(r \times r)$ -матрица. В соответствии с анализом раздела 2 система (3.6) $\mathfrak{sp}(8)$ -симметрична просто потому, что алгебра $\mathfrak{sp}(8)$ порождается операторами

$$\left\{ Y_j^A, \frac{\partial}{\partial Y_j^B} \right\}, \quad \frac{\partial^2}{\partial Y_i^A \partial Y_j^B} \eta_{ij}, \quad Y_i^A Y_j^B \eta^{ij} \quad (Y_j^A = (y_j^\alpha, \bar{y}_j^{\beta'})), \quad (3.7)$$

действующими на функции $C^{(r)}(y, \bar{y})$.

Как показано в работе [26], развернутая формулировка условия сохранения токов – это система ранга 2, а обычные токи получаются из билинейной подстановки (3.4). Построение токов в форме CC в четырехмерном пространстве Минковского подробно обсуждалось в работе [29]. Полная токовая деформация уравнений на поля BC включает в себя деформацию калибровочных 1-форм ω . Правые части их полевых уравнений содержат сохраняющиеся токи, аналогично тензору энергии-импульса в правой части уравнений Эйнштейна. Основная часть обычных токовых взаимодействий содержится именно в этом секторе. 0-формы C ранга 1 описывают калибровочно-инвариантные комбинации пространственно-временных производных ω . Токовая деформация уравнений на калибровочные поля ω индуцирует деформацию уравнений на C . Хотя эта часть деформаций менее привычна, в определенном смысле она проще, будучи свободной от осложнений, обусловленных калибровочными симметриями. Поэтому в настоящей статье мы рассматриваем сектор 0-форм.

В отсутствие взаимодействия поля C и токи J удовлетворяют независимым развернутым полевым уравнениям

$$DC = 0, \quad D_2 J = 0 \quad (3.8)$$

с ковариантными производными D (3.5) и D_2 (3.6). Обе эти системы $\mathfrak{sp}(8)$ -инвариантны. Поэтому они совместны для любой плоской $\mathfrak{sp}(8)$ -связности в $D = d + w$. Взаимодействующая система схематически имеет вид

$$DC = F(w, J), \quad D_2 J = 0, \quad (3.9)$$

где $F(w, J)$ описывает взаимодействия, при которых ток J реализован как билинейная комбинация C . В работе [15] токовые взаимодействия четырехмерных безмассовых полей описывались как $\mathfrak{sp}(4)$ -инвариантная линейная система, смешивающая безмассовые поля C ранга 1 и токовые поля J ранга 2. С точки зрения теории групп развернутая система из работы [15] описывает деформацию прямой суммы $\mathfrak{sp}(4)$ -модулей S безмассовых полей и S^2 сохраняющихся токов в неразложимый $\mathfrak{sp}(4)$ -модуль $S^{1,2}$, ассоциированный с точной последовательностью¹⁾

$$0 \longrightarrow S^2 \longrightarrow S^{1,2} \longrightarrow S \longrightarrow 0. \quad (3.10)$$

Здесь S^2 – подмодуль $S^{1,2}$ и $S = S^{1,2}/S^2$.

В работе [15] было проверено, что последовательная токовая деформация уравнений свободных полей описывает $\mathfrak{sp}(4)$ -модуль, где действие алгебры $\mathfrak{sp}(4) \subset \mathfrak{sp}(8)$ ассоциировано с AdS_4 -симметрией. Однако существование $\mathfrak{sp}(4)$ -инвариантной деформации системы (3.8) в систему (3.9) не означает, что деформированное действие $\mathfrak{sp}(4)$ может быть поднято до действия $\mathfrak{sp}(8)$, т.е. не гарантировано, что уравнения (3.9) могут быть непротиворечиво сформулированы для произвольной плоской $\mathfrak{sp}(8)$ -связности w . Может случиться, что система (3.9) имеет смысл только для связностей ω , принимающих значения в некоторой подалгебре $\mathfrak{h}$ алгебры симметрий $\mathfrak{g}$ системы (3.8), образуя $\mathfrak{h}$ -модуль, но не $\mathfrak{g}$ -модуль. В настоящей работе мы покажем, что деформация остается совместной для $\mathfrak{su}(2, 2)$ -расширения алгебры $\mathfrak{sp}(4)$, но не

¹⁾В работе [10] поля C^i интерпретировались как коэффициенты $C = C^i t_i$ в модуле с базисными элементами t_i . Как всегда, для дуальных модулей стрелки меняются на обратные.

более, т.е. взаимодействия сохраняют конформную симметрию, но не сохраняют всю алгебру $\mathfrak{sp}(8)$.

Сделаем несколько замечаний.

Предложенная конструкция не только правильно описывает полевые уравнения безмассовых полей в присутствии токов, но также дает полезный инструмент для восстановления функций Грина (по крайней мере, в калибровочно-инвариантном секторе 0-форм). Действительно, в секторе 0-форм, смешивающем безмассовые 0-формы C с токовыми 0-формами J , деформированные полевые уравнения имеют форму уравнений ковариантного постоянства (2.9) для некоторого представления симметрии пространства Минковского или AdS_4 . Таким образом, в секторе 0-форм деформированные уравнения могут быть решены в чистой калибровочной форме (2.11). Представление является неразложимым (оно имеет треугольную форму), так как J дает вклад в уравнение для C , но не наоборот. Оператор g^i_j (2.11) также имеет треугольную форму, он содержит внедиагональный член, отображающий J в C , но не наоборот. Следовательно, для данного J форма C восстанавливается в виде

$$C = G(J) + C_0, \quad (3.11)$$

где C_0 – произвольное решение недеформированного уравнения для C . Ясно, что G – функция Грина, восстанавливающая зависимость решений безмассовых уравнений от токов по их правой части. (Более точно, это калибровочно-инвариантная функция Грина, восстанавливающая калибровочно-инвариантные напряженности безмассовых полей.) Интересно было бы воспользоваться этим методом для практического вычисления.

Токовая деформация уравнений свободных полей, получающаяся из пертурбативного разложения нелинейных уравнений ВС [20], [14] (см., однако, [30], [31] в связи с возможными трудностями такого вывода), имеет более общую форму, чем (3.9), так как содержит также калибровочные связности ВС $\omega(y, \bar{y}|x)$:

$$DC + \omega \star C - C \star \tilde{\omega} = F(w, C), \quad D_2 J = 0, \quad (3.12)$$

$$D^{\text{ad}} \omega + \omega \star \omega = G(w, C), \quad (3.13)$$

где билинейные комбинации C должны быть отождествлены с током J , $\star$ – вейлевское звездочное произведение, действующее на функциях от y и $\bar{y}$, D^{ad} – присоединенная ковариантная производная, а $\tilde{\omega}(y, \bar{y}|x) := \omega(-y, \bar{y}|x)$ (более подробно см. [20], [3]). Простой, но важный факт, следующий из анализа [20], состоит в том, что зависящие от ω члены в левой части и члены в правой части уравнения (3.12) вносят вклад в разные секторы уравнений. Именно, пусть s – спин поля C в левой части уравнения (3.12), а s_1 и s_2 – спины полей, содержащихся в $J \sim CC$. Тогда при $s \neq 0$ член F отличен от нуля при

$$s \geq s_1 + s_2 \quad (3.14)$$

(другими словами, калибровочно-инвариантные токи J , построенные из 0-форм C , имеют спин s , удовлетворяющий (3.14)). Зависящие от ω члены в (3.12) с ω и C , несущими спины s_1 и s_2 , дают вклад в уравнение на поле C спина $s < s_1 + s_2$. Заметим, что этот факт согласуется с результатами работы [32], где токи спинов, не удовлетворяющих условию (3.14), были построены из калибровочных связностей ω .

В приложении показано, что зависящие от ω члены в (3.12) не дают вклада в проверку совместности уравнения (3.12) в секторе (3.14).

В настоящей работе мы рассматриваем сектор полей, удовлетворяющих условию (3.14), пренебрегая зависящими от ω членами. Заметим, что вне рамок деформации низшего порядка ожидается, что все типы членов будут нетривиально перепутываться, т. е. при полном нелинейном рассмотрении вклад калибровочной связности ω не может быть отброшен ни в каком секторе.

Зависящая от ω часть деформации (3.9) допускает любопытную интерпретацию с точки зрения $\text{AdS}_4/\text{CFT}_3$ -дуальности. Как показано в [33], граничный предел четырехмерных 0-форм $C(y, \bar{y}|x)$ дает трехмерные конформные токи $\mathcal{J}$, являющиеся трехмерными полями ранга 2. В результате билинейный по C четырехмерный ток J голографически дуален $\mathcal{J}\mathcal{J}$. Следовательно, голографическая версия уравнения (3.9) имеет вид

$$\mathcal{D}\mathcal{J} = F(w, J(\mathcal{J})), \quad (3.15)$$

где $\mathcal{D}$ – $\mathfrak{sp}(4)$ -ковариантная производная на границе. Для $F = 0$ это дает развернутые условия сохранения тока на границе [33]. Для $F \neq 0$ условия сохранения токов деформируются. В работе [34] такая деформация была ассоциирована со “слегка нарушенной симметрией ВС”.

Следует подчеркнуть, однако, что деформированные уравнения ВС остаются симметричными относительно действия глобальной симметрии ВС, которая не нарушена и даже не деформирована, т. е. алгебра преобразований ВС не изменяется. Что изменяется, так это закон преобразований. Действительно, нелинейные уравнения ВС могут быть линеаризованы около произвольной связности ВС $w(Y|x)$, удовлетворяющей условиям нулевой кривизны $dw + w \star w = 0$. Так как полные нелинейные уравнения ВС формально совместны, их пертурбативное разложение вокруг w также совместно во всех порядках. Применение преобразований (2.3) к вакуумному полю w дает закон преобразований симметрии ВС на выбранном фоне (w можно положить равным его значению в пространстве AdS_4 после дифференцирования (2.3)). Сохранение глобальной симметрии ВС на нелинейном уровне не удивительно, поскольку это аналогично тому факту, что пертурбативное разложение любой общей координатно-инвариантной теории на фоне пространства Минковского сохраняет симметрии Пуанкаре.

До сих пор наше рассмотрение было следствием предыдущих работ [20], [15]. Новый результат этой работы состоит в том, что явная симметрия уравнения (3.15) оказывается больше, чем конформная симметрия на границе $\mathfrak{sp}(4)$. Неожиданно она расширяется до четырехмерной конформной симметрии $\mathfrak{su}(2, 2)$. Заметим, однако, что это симметрия уравнения (3.15), но не обязательно операторной алгебры на границе.

4. ФОНОВАЯ СВЯЗНОСТЬ $\mathfrak{u}(2, 2)$

Как суммировано в разделе 2, система $\mathfrak{g}$ -симметрична, если ее развернутые уравнения формально совместны для произвольной плоской $\mathfrak{g}$ -связности w .

В терминах двухкомпонентных спиноров связности в $\mathfrak{su}(2, 2) \sim \mathfrak{o}(4, 2)$ включают $h^{\alpha\alpha'}$, ω_{α}^{β} , $\bar{\omega}_{\alpha'}^{\beta'}$, b и $f_{\alpha\alpha'}$. Расширяя $\mathfrak{su}(2, 2)$ до $\mathfrak{u}(2, 2)$ с помощью центрального генератора спиральности с калибровочной связностью $\bar{b}$, получаем следующие условия

на плоскую связность $u(2, 2)$:

$$\begin{aligned} R^{\alpha\beta'} &:= dh^{\alpha\beta'} - \omega_\gamma^\alpha \wedge h^{\gamma\beta'} - \bar{\omega}_{\gamma'}^{\beta'} \wedge h^{\alpha\gamma'} = 0, \\ R_{\alpha\beta'} &:= df_{\alpha\beta'} + \omega_\alpha^\gamma \wedge f_{\gamma\beta'} + \bar{\omega}_{\beta'}^{\gamma'} \wedge f_{\alpha\gamma'} = 0, \\ R_\alpha^\beta &:= d\omega_\alpha^\beta + \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta - f_{\alpha\gamma'} \wedge h^{\gamma'\beta} = 0, \\ \bar{R}_{\alpha'}^{\beta'} &:= d\bar{\omega}_{\alpha'}^{\beta'} + \bar{\omega}_{\alpha'}^{\gamma'} \wedge \bar{\omega}_{\gamma'}^{\beta'} - f_{\gamma\alpha'} \wedge h^{\gamma\beta'} = 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Лоренцева связность описывается бесследовыми частями $\omega_\alpha^L{}^\beta$ и $\bar{\omega}_{\alpha'}^L{}^{\beta'}$ связностей ω_α^β и $\bar{\omega}_{\alpha'}^{\beta'}$ соответственно, тогда как их следы ассоциированы с калибровочными полями

$$b = \frac{1}{2}(\omega_\alpha^\alpha + \bar{\omega}_{\alpha'}^{\alpha'}), \quad \tilde{b} = \frac{1}{2}(\omega_\alpha^\alpha - \bar{\omega}_{\alpha'}^{\alpha'}). \quad (4.2)$$

Заметим, что в силу однокомпонентности b и $\tilde{b}$

$$b \wedge b = \tilde{b} \wedge \tilde{b} = 0. \quad (4.3)$$

Развернутые $u(2, 2)$ -инвариантные уравнения ранга r имеют вид

$$D_{r_u}^{\text{tw}} C^{(r)}(y, \bar{y}|x) = 0, \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} D_{r_u}^{\text{tw}} &:= d - \omega^{L\alpha\beta} y_{j\alpha} \partial_\beta^j - \bar{\omega}^{L\alpha'\beta'} \bar{y}_{j\alpha'} \bar{\partial}_{\beta'}^j + \\ &+ f_{\alpha\alpha'} y_i^{\alpha'} \bar{y}_j^{\alpha'} \eta^{ij} + h^{\alpha\alpha'} \partial_\alpha^i \bar{\partial}_{\alpha'}^j \eta_{ij} + b \mathcal{D}_r + \tilde{b} \mathcal{H}_r, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где

$$\mathcal{H}_r = \frac{1}{2}(y_j^\alpha \partial_\alpha^j - \bar{y}_j^{\alpha'} \bar{\partial}_{\alpha'}^j) \quad (4.6)$$

– оператор спиральности ранга r ,

$$\mathcal{D}_r = r + \frac{1}{2}(y_j^\alpha \partial_\alpha^j + \bar{y}_j^{\alpha'} \bar{\partial}_{\alpha'}^j) \quad (4.7)$$

– оператор дилатации ранга r ,

$$\eta_{ij} \eta^{kj} = \delta_i^k, \quad \partial_\beta^j = \frac{\partial}{\partial y_\beta^j}, \quad \bar{\partial}_{\alpha'}^j = \frac{\partial}{\partial \bar{y}_{\alpha'}^j}, \quad i, j, k = 1, \dots, r.$$

Уравнение ранга 1 $D_{1_u}^{\text{tw}} C(y, \bar{y}|x) = 0$ описывает $u(2, 2)$ -инвариантные уравнения для четырехмерных безмассовых полей в терминах обобщенных тензоров Вейля $C(y, \bar{y}|x)$.

Для произвольного ранга r конформная размерность Δ_r компонент поля равна собственному значению оператора $\mathcal{D}_r$. Конформная размерность примарного поля ранга r и спина s равна

$$\Delta_r = r + s. \quad (4.8)$$

Конформная ковариантная производная $D_{r_{su}}^{\text{tw}}$ совпадает с $D_{r_u}^{\text{tw}}$ (4.5) при $\tilde{b} = 0$:

$$D_{r_{su}}^{\text{tw}} = D_{r_u}^{\text{tw}}|_{\tilde{b}=0}. \quad (4.9)$$

Собственные значения $\mathcal{H}_r$ (4.6) описывают спиральности компонент поля. При $r = 1$ оператор $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$ есть обычный оператор спиральности. Конформная алгебра $\mathfrak{su}(2, 2)$ совпадает с подалгеброй $\mathfrak{sp}(8)$, натянутой на элементы, коммутирующие с $\mathcal{H} \in \mathfrak{sp}(8)$ (4.6). Точнее, централизатор $\mathcal{H}$ в $\mathfrak{sp}(8)$ совпадает с $\mathfrak{su}(2, 2) \oplus \mathfrak{u}(1)$, где $\mathfrak{u}(1)$ порождена оператором $\mathcal{H}$. Конформная алгебра $\mathfrak{su}(2, 2)$ и оператор $\mathcal{H}$ действуют на состояния с фиксированной спиральностью, тогда как $\mathfrak{sp}(8)$ смешивает разные спиральности.

Геометрия пространства AdS_4 описывается лоренцевыми связностями $\omega^{L\alpha\beta}$, $\bar{\omega}^{L\alpha'\beta'}$ и тетрадой $e^{\alpha\alpha'}$ алгебры $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{su}(2, 2) \subset \mathfrak{sp}(8, \mathbb{R})$ с помощью подстановки

$$h^{\alpha\alpha'} = \lambda e^{\alpha\alpha'}, \quad f_{\alpha\alpha'} = \lambda e_{\alpha\alpha'}, \quad b = \tilde{b} = 0, \quad (4.10)$$

которая дает

$$D_{r\text{AdS}}^{\text{tw}} := d - \omega^{L\alpha\beta} y_{j\alpha} \partial_{\beta}^j - \bar{\omega}^{L\alpha'\beta'} \bar{y}_{j\alpha'} \bar{\partial}_{\beta'}^j + \lambda e_{\alpha\alpha'} y_i^{\alpha} \bar{y}_j^{\alpha'} \eta^{ij} + \lambda e^{\alpha\alpha'} \partial_{\alpha}^i \bar{\partial}_{\alpha'}^j \eta_{ij}. \quad (4.11)$$

Двухкомпонентные индексы поднимаются и опускаются симплектическими формами $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и $\varepsilon_{\alpha'\beta'}$:

$$A_{\beta} = A^{\alpha} \varepsilon_{\alpha\beta}, \quad A_{\beta'} = A^{\alpha'} \varepsilon_{\alpha'\beta'}, \quad A^{\alpha} = A_{\beta} \varepsilon^{\alpha\beta}, \quad A^{\alpha'} = A_{\beta'} \varepsilon^{\alpha'\beta'}. \quad (4.12)$$

5. СИММЕТРИИ ТОКОВЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

5.1. Структура токовой деформации. Как показано в работе [15], в подходе развернутой динамики взаимодействие четырехмерных бесследовых полей всех спинов с токами отвечает линейной задаче, описывающей смешивание систем ранга 1 (безмассовые частицы) и ранга 2 (токи).

Чтобы установить связь с [15], положим $\eta_{ij} = \delta_{ij}$, $\eta^{ij} = \delta^{ij}$ и введем новые переменные

$$\sqrt{2}y^{\pm\alpha} = y_1^{\alpha} \pm iy_2^{\alpha}, \quad \sqrt{2}\bar{y}^{\pm\alpha'} = \bar{y}_1^{\alpha'} \pm i\bar{y}_2^{\alpha'}, \quad \partial_{\pm\alpha} = \frac{\partial}{\partial y^{\pm\alpha}}, \quad \bar{\partial}_{\pm\alpha'} = \frac{\partial}{\partial \bar{y}^{\pm\alpha'}}. \quad (5.1)$$

В этих переменных ковариантная производная ранга 2 (4.5) принимает вид

$$\begin{aligned} D_{2u}^{\text{tw}} = & d - (\omega^{\alpha\beta} y_{\alpha}^{+} \partial_{+\beta} + \bar{\omega}^{\alpha'\beta'} \bar{y}_{\alpha'}^{+} \bar{\partial}_{+\beta'} + \omega^{\alpha\beta} y_{\alpha}^{-} \partial_{-\beta} + \bar{\omega}^{\alpha'\beta'} \bar{y}_{\alpha'}^{-} \bar{\partial}_{-\beta'}) + \\ & + f_{\alpha\alpha'} (y^{+\alpha} \bar{y}^{-\alpha'} + y^{-\alpha} \bar{y}^{+\alpha'}) + h^{\alpha\alpha'} (\partial_{+\alpha} \bar{\partial}_{-\alpha'} + \partial_{-\alpha} \bar{\partial}_{+\alpha'}) + \\ & + \frac{1}{2} b (4 + y^{j\alpha} \partial_{j\alpha} + \bar{y}^{j\alpha'} \bar{\partial}_{j\alpha'}) + \frac{1}{2} \tilde{b} (y^{j\alpha} \partial_{j\alpha} - \bar{y}^{j\alpha'} \bar{\partial}_{j\alpha'}), \end{aligned} \quad (5.2)$$

а оператор $D_{2\text{AdS}}^{\text{tw}}$ (4.11) получается из D_{2u}^{tw} (5.2) подстановкой (4.10). Сохраняющиеся токи $\mathcal{J}(y^{\pm}, \bar{y}^{\pm}|x)$ удовлетворяют уравнениям ранга 2 [35]

$$D_{2\text{AdS}}^{\text{tw}} \mathcal{J}(y^{\pm}, \bar{y}^{\pm}|x) = 0. \quad (5.3)$$

Очевидно, система (5.3) распадается на подсистемы

$$D_{2\text{AdS}}^{\text{tw}} \mathcal{J}_h(y^{\pm}, \bar{y}^{\pm}|x) = 0, \quad \mathcal{H}_2 \mathcal{J}_h(y^{\pm}, \bar{y}^{\pm}|x) = h \mathcal{J}_h(y^{\pm}, \bar{y}^{\pm}|x), \quad (5.4)$$

характеризующиеся различными собственными значениями оператора спиральности ранга 2 $\mathcal{H}_2$ (4.6).

Деформированная система (3.9) в пространстве AdS_4 имеет вид [15]

$$DC(y, \bar{y}|x) + \{e^{\alpha\alpha'} y_\alpha \mathcal{F}_{\alpha'} \mathcal{J}(y^\pm, \bar{y}^\pm|x) + e^{\alpha\alpha'} \bar{y}_{\alpha'} \bar{\mathcal{F}}_{\alpha'} \mathcal{I}(y^\pm, \bar{y}^\pm|x)\}|_{y^\pm=\bar{y}^\pm=0} = 0, \quad (5.5)$$

$$D_2 \mathcal{J}(y^\pm, \bar{y}^\pm|x) = 0, \quad D_2 \mathcal{I}(y^\pm, \bar{y}^\pm|x) = 0$$

с $D = D_{1\text{AdS}}^{\text{tw}}$ (4.11), $D_2 = D_{2\text{AdS}}^{\text{tw}}$ и

$$\mathcal{F}_{\alpha'} = \sum_h \mathcal{F}_{h\alpha'}, \quad \mathcal{F}_{h\alpha'} = (F_h^+ \bar{\partial}_{+\alpha'} - F_h^- \bar{\partial}_{-\alpha'}), \quad (5.6)$$

$$\bar{\mathcal{F}}_{\alpha} = \sum_h \bar{\mathcal{F}}_{h\alpha}, \quad \bar{\mathcal{F}}_{h\alpha} = (\bar{F}_h^+ \partial_{+\alpha} - \bar{F}_h^- \partial_{-\alpha}), \quad (5.7)$$

$$F_h^\pm = \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_\pm} \sum_{n=0}^{2h} a_{n,2h} (\mathcal{N}_+)^n (\mathcal{N}_-)^{2h-n} \sum_{k \geq 0} \frac{(\bar{\mathcal{N}}_+ \mathcal{N}_- + \bar{\mathcal{N}}_- \mathcal{N}_+)^k}{k!(k+2h+1)!}, \quad (5.8)$$

$$\mathcal{N}_\pm = y^\alpha \partial_{\pm\alpha}, \quad \bar{\mathcal{N}}_\pm = \bar{y}^{\alpha'} \bar{\partial}_{\pm\alpha'}.$$

Здесь $\mathcal{J}$ и $\mathcal{I}$ могут быть независимыми полями ранга 2. Комплексно-сопряженные уравнения аналогичны.

Коэффициенты $a_{n,2h}$ остаются произвольными. Их модули отображают произвол в нормировке токов различных спинов, а фазы могут пониматься как результат преобразований типа ЭМ дуальности для различных спинов. Разные фазы отвечают разным моделям. Произвол в выборе этой фазы был впервые обнаружен в работе [20] при анализе взаимодействий ВС в том же порядке, что и в настоящей статье. Однако, поскольку анализ, проведенный в работе [20], обладал симметриями ВС, последние выражали фазы различных спинов в терминах единственного фазового параметра $\eta = e^{i\varphi}$, который остается и в полной нелинейной теории ВС [14].

Заметим, что операторы склейки $\mathcal{F}$ и $\bar{\mathcal{F}}$ в (5.5) таковы, что вклад в деформацию дают только компоненты $\mathcal{J}_h$ тока $\mathcal{J}$, обладающие спиральностями ранга 2, удовлетворяющими неравенству $h \geq -1$. Аналогично только $\mathcal{I}_h$ с $h \leq 1$ дают вклад в (5.5). Например, для полей ранга 1 определенной спиральности $\mathcal{H}_1 C_h = h C_h$ из (5.5) для $h \geq 0$ следует

$$D_{\text{AdS}}^{\text{tw}} C_h(y, \bar{y}|x) + e^{\alpha\alpha'} y_\alpha \mathcal{F}_{h\alpha'} \mathcal{J}_{h-1}|_{y^\pm=\bar{y}^\pm=0} = 0,$$

$$D_{\text{AdS}}^{\text{tw}} C_{-h}(y, \bar{y}|x) + e^{\alpha\alpha'} \bar{y}_{\alpha'} \bar{\mathcal{F}}_{h\alpha} \mathcal{I}_{1-h}|_{y^\pm=\bar{y}^\pm=0} = 0, \quad (5.9)$$

$$D_{\text{AdS}}^{\text{tw}} C_0(y, \bar{y}|x) + e^{\alpha\alpha'} y_\alpha \mathcal{F}_{0\alpha'} \mathcal{J}_{-1}|_{y^\pm=\bar{y}^\pm=0} + e^{\alpha\alpha'} \bar{y}_{\alpha'} \bar{\mathcal{F}}_{0\alpha} \mathcal{I}_1|_{y^\pm=\bar{y}^\pm=0} = 0,$$

где $\mathcal{F}_{s\alpha'}$ и $\bar{\mathcal{F}}_{s\alpha}$ определены в (5.6) и (5.7) соответственно.

Для дальнейшего нам потребуются следующие простые формулы вместе с комплексно-сопряженными к ним:

$$[A(\mathcal{N}, \bar{\mathcal{N}}), y^{j\mu}] = y^\mu \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_j} A(\mathcal{N}, \bar{\mathcal{N}}), \quad \left[\frac{\partial}{\partial y^\mu}, A(\mathcal{N}, \bar{\mathcal{N}}) \right] = \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_j} A(\mathcal{N}, \bar{\mathcal{N}}) \frac{\partial}{\partial y^{j\mu}}, \quad (5.10)$$

$$A(\mathcal{N}, \bar{\mathcal{N}}) y_\alpha^k B(y^\pm)|_{y^\pm=\bar{y}^\pm=0} = y_\alpha \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_k} A(\mathcal{N}, \bar{\mathcal{N}}) B(y^\pm)|_{y^\pm=\bar{y}^\pm=0} \quad \forall A, B.$$

Как показано в [15], $F^\pm = \sum_h F_h^\pm$ (5.8) удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_-} F^+ + \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_+} F^- &= 0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_+ \partial \bar{\mathcal{N}}_-} + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_- \partial \bar{\mathcal{N}}_+} - 1 \right) F^\pm = 0, \\ \left\{ 2 + \mathcal{N}_k \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_k} \right\} \left(\frac{\partial F^+}{\partial \mathcal{N}_-} + \frac{\partial F^-}{\partial \mathcal{N}_+} \right) - \mathcal{N}_- F^- - \mathcal{N}_+ F^+ &= 0, \\ \left\{ 2 + \mathcal{N}_k \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_k} \right\} \frac{\partial F^\pm}{\partial \bar{\mathcal{N}}_\pm} - \mathcal{N}_\mp F^\pm &= 0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

$\bar{F}^\pm = \sum_h \bar{F}_h^\pm$ удовлетворяют сопряженным соотношениям.

5.2. Конформная инвариантность деформации. Чтобы показать, что $\mathfrak{sp}(4)$ -инвариантная смешанная система, полученная в работе [15], конформна, рассмотрим деформированные уравнения (5.5) с $D = D_{1_{su}}^{\text{tw}}$, $D_2 = D_{2_{su}}^{\text{tw}}$ (4.9), $\bar{\mathcal{F}}_\alpha$ (5.6) и $\mathcal{F}_{\alpha'}$ (5.7). Для простоты положим $\mathcal{I} = 0$. Совместность этих уравнений налагает на деформацию следующие условия:

$$\begin{aligned} &bh^{\gamma\gamma'} y_\gamma \mathcal{F}_{\gamma'} \mathcal{J}(y^\pm, \bar{y}^\pm | x)|_{y^\pm = \bar{y}^\pm = 0} + bh^{\gamma\gamma'} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2} (y^\alpha \partial_\alpha + \bar{y}^{\alpha'} \bar{\partial}_{\alpha'}) \right) y_\gamma \mathcal{F}_{\gamma'} - \right. \\ &- y_\gamma \mathcal{F}_{\gamma'} \left(2 + \frac{1}{2} (y^{+\alpha} \partial_{+\alpha} + \bar{y}^{+\alpha'} \bar{\partial}_{+\alpha'} + y_\alpha^- \partial_{-\alpha} + \bar{y}_\alpha^{-\alpha'} \bar{\partial}_{-\alpha'}) \right) \Big\} \mathcal{J}(y^\pm, \bar{y}^\pm | x)|_{y^\pm = \bar{y}^\pm = 0} + \\ &+ h^{\gamma\gamma'} h^{\alpha\beta'} \{ \partial_\gamma \bar{\partial}_{\gamma'} y_\alpha \mathcal{F}_{\beta'} - y_\alpha \mathcal{F}_{\beta'} (\partial_{-\gamma} \bar{\partial}_{+\gamma'} + \partial_{+\gamma} \bar{\partial}_{-\gamma'}) \} \mathcal{J}(y^\pm, \bar{y}^\pm | x)|_{y^\pm = \bar{y}^\pm = 0} + \\ &+ f^{\gamma\gamma'} h^{\alpha\beta'} \{ y_\gamma \bar{y}_{\gamma'} y_\alpha \mathcal{F}_{\beta'} - y_\alpha \mathcal{F}_{\beta'} (\bar{y}_\gamma^+ y_{\gamma'}^- + \bar{y}_{\gamma'}^- y_\gamma^+) \} \mathcal{J}(y^\pm, \bar{y}^\pm | x)|_{y^\pm = \bar{y}^\pm = 0} = 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Заметим, что первый член в (5.12) возникает из $dh^{\gamma\gamma'}$ как следствие условий нулевой кривизны (4.1), выражая конформную размерность тетрады $h^{\gamma\gamma'}$.

Учитывая (5.8), (5.10) и разложение

$$\begin{aligned} h^{\alpha\alpha'} \wedge h^{\beta\beta'} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} \bar{H}^{\alpha'\beta'} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha'\beta'} H^{\alpha\beta}, \\ H^{\alpha\beta} &= h^\alpha_{\alpha'} \wedge h^{\beta\alpha'}, \quad \bar{H}^{\alpha'\beta'} = h_{\alpha'}^{\alpha'} \wedge h^{\alpha\beta'}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

замечаем, что обращение в нуль слагаемого в (5.12), пропорционального h^2 , требует

$$\begin{aligned} H^{\gamma'\beta'} \left(\bar{\partial}_{\gamma'} \left\{ 2 + \mathcal{N}_k \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_k} \right\} - \mathcal{N}_+ \bar{\partial}_{-\gamma'} - \mathcal{N}_- \bar{\partial}_{+\gamma'} \right) \mathcal{F}_{\beta'} &= 0, \\ H^{\mu\alpha} y_\alpha (\bar{\partial}_{\gamma'} \partial_\mu - (\partial_{-\mu} \bar{\partial}_{+\gamma'} + \partial_{+\mu} \bar{\partial}_{-\gamma'})) \mathcal{F}^{\gamma'} &= 0. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Эти условия выполнены в силу (5.11) и (5.6). Члены, пропорциональные fh , также равны нулю в силу (5.11) и (5.6):

$$2f^{\gamma\gamma'} h^{\alpha\beta'} y_\gamma \bar{y}_{\gamma'} y_\alpha \left\{ 1 - \left(\frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_-} \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_+} + \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_+} \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_-} \right) \right\} \mathcal{F}_{\beta'} \mathcal{J}(y^\pm, \bar{y}^\pm | x)|_{y^\pm = \bar{y}^\pm = 0} = 0. \quad (5.15)$$

Член, пропорциональный bh , обращается в нуль в силу (5.10):

$$bh^{\gamma\gamma'} y_\gamma \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(3 + \mathcal{N}_k \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_k} + \bar{\mathcal{N}}_k \frac{\partial}{\partial \bar{\mathcal{N}}_k} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(5 + \mathcal{N}_k \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_k} + \bar{\mathcal{N}}_k \frac{\partial}{\partial \bar{\mathcal{N}}_k} \right) \right\} \mathcal{F}_{\gamma'} \mathcal{J}|_{y^\pm = \bar{y}^\pm = 0} = 0. \quad (5.16)$$

Здесь важно, что первый член, учитывающий конформную размерность $h^{\gamma\gamma'}$, в точности компенсирует разницу между вакуумными конформными размерностями в рангах 1 и 2.

Это доказывает совместность конформной деформации в уравнениях (5.5) с $D = D_{1_{su}}^{\text{tw}}$ и $D_2 = D_{2_{su}}^{\text{tw}}$ (4.9) и, как следствие, конформную инвариантность этой системы.

5.3. Несовместность расширения на $\mathfrak{u}(2, 2)$. Теперь мы готовы доказать, что токовая деформация не является $\mathfrak{u}(2, 2)$ -инвариантной.

Рассмотрим уравнение (5.5) с $D = D_{1_u}^{\text{tw}}$, $D_2 = D_{2_u}^{\text{tw}}$ (4.5) и F^j (5.8). В дополнение к условию (5.12) его совместность требует в силу (5.10), чтобы выражение

$$\tilde{b}h^{\alpha\beta'} y_\alpha \left\{ \frac{1}{2} \left(1 + \mathcal{N}_k \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_k} - \bar{\mathcal{N}}_k \frac{\partial}{\partial \bar{\mathcal{N}}_k} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(-1 + \mathcal{N}_k \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_k} - \bar{\mathcal{N}}_k \frac{\partial}{\partial \bar{\mathcal{N}}_k} \right) \right\} \mathcal{F}_{\beta'} \mathcal{J}|_{y^\pm = \bar{y}^\pm = 0} + \\ + \tilde{b}h^{\alpha\beta'} \bar{y}_{\beta'} \left\{ \frac{1}{2} \left(-1 + \mathcal{N}_k \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_k} - \bar{\mathcal{N}}_k \frac{\partial}{\partial \bar{\mathcal{N}}_k} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(1 + \mathcal{N}_k \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_k} - \bar{\mathcal{N}}_k \frac{\partial}{\partial \bar{\mathcal{N}}_k} \right) \right\} \bar{\mathcal{F}}_\alpha \mathcal{I}|_{y^\pm = \bar{y}^\pm = 0} \quad (5.17)$$

равнялось нулю. В нем все члены сокращаются, за исключением вакуумных вкладов, которые не сокращаются ввиду того, что оператор спиральности считает разницу степеней по y и по $\bar{y}$, тогда как оператор $y_\alpha F^\pm \bar{\partial}_{\pm\beta'}$ пропорционален $y \frac{\partial}{\partial \bar{y}^\pm}$. (Заметим, что спиральность тетрады равна нулю.) В результате выражение (5.17) приобретает вид

$$\tilde{b}h^{\alpha\beta'} (y_\alpha \mathcal{F}_{\beta'} \mathcal{J} - \bar{y}_{\beta'} \bar{\mathcal{F}}_\alpha \mathcal{I})|_{y^\pm = \bar{y}^\pm = 0}. \quad (5.18)$$

Это, однако, нулю не равно. Действительно, разложение (5.9) приводит член (5.18) к виду

$$\tilde{b}h^{\alpha\beta'} \left\{ \sum_{h>0} (y_\alpha \mathcal{F}_{h\beta'} \mathcal{J}_{h-1} - \bar{y}_{\beta'} \bar{\mathcal{F}}_{h\alpha} \mathcal{I}_{1-h}) + y_\alpha \mathcal{F}_{0\beta'} \mathcal{J}_{-1} - \bar{y}_{\beta'} \bar{\mathcal{F}}_{0\alpha} \mathcal{I}_1 \right\} \Big|_{y^\pm = \bar{y}^\pm = 0}. \quad (5.19)$$

Поскольку члены $\mathcal{J}_{h-1}$ и $\mathcal{I}_{1-h}$ независимы при $h > 0$, они должны обращаться в нуль по отдельности, что означало бы тривиальность токовой деформации. При $h = 0$ оставшиеся два члена имеют разные полные спиральности (т. е. спиральности ранга 1) и, следовательно, снова должны обращаться в нуль по отдельности.

Попытка скомпенсировать член, пропорциональный $\tilde{b}h$, в (5.19) с помощью дополнительного зависящего от $\tilde{b}$ деформационного члена $\tilde{b}G\tilde{\mathcal{J}}|_{y^\pm = \bar{y}^\pm = 0}$ с некоторым оператором G и полем $\tilde{\mathcal{J}}$ ранга 2 не удастся, потому что модифицированные условия совместности тогда требовали бы выполнения равенства

$$\tilde{b}h^{\alpha\beta'} (y_\alpha \mathcal{F}_{\beta'} \mathcal{J} - \bar{y}_{\beta'} \bar{\mathcal{F}}_\alpha \mathcal{I})|_{y^\pm = \bar{y}^\pm = 0} = \tilde{b}D_u^{\text{tw}} G\tilde{\mathcal{J}}|_{y^\pm = \bar{y}^\pm = 0} \equiv \tilde{b}D_{su}^{\text{tw}} G\tilde{\mathcal{J}}|_{y^\pm = \bar{y}^\pm = 0}. \quad (5.20)$$

Однако, если бы (5.20) допускало решение, то из-за тождества $\tilde{b} \wedge \tilde{b} = 0$ (4.3) это бы означало, что исходная $\mathfrak{su}(2, 2)$ -токовая деформация $h^{\alpha\beta'} y_\alpha \mathcal{F}_{\beta'} \mathcal{I}|_{y^\pm = \bar{y}^\pm = 0} + h^{\alpha\beta'} \bar{y}_{\beta'} \bar{\mathcal{F}}_\alpha \mathcal{I}|_{y^\pm = \bar{y}^\pm = 0}$ тривиальна, что неверно.

Таким образом, показано, что токовая деформация свободных полевых уравнений не допускает $\mathfrak{u}(2, 2)$ -симметричного расширения конформной деформации. Поскольку оператор спиральности $\mathcal{H}$ (4.6) является элементом Картана $\mathfrak{sp}(8)$, это означает, что $\mathfrak{sp}(8)$ -инвариантная форма токовых взаимодействий также невозможна, т. е. токовые взаимодействия ВС с необходимостью нарушают $\mathfrak{sp}(8)$ до $\mathfrak{su}(2, 2)$.

6. ОБСУЖДЕНИЕ

Показано, что токовая деформация уравнений ВС нарушает алгебру симметрии $\mathfrak{sp}(8)$ свободных безмассовых полевых уравнений до ее конформной подалгебры. Анализ выполнен в терминах калибровочно-инвариантных напряженностей полей. Чтобы исключить симметрию $\mathfrak{sp}(8)$, было достаточно показать, что симметрия спиральности $\mathfrak{u}(1)$, являющаяся подалгеброй $\mathfrak{sp}(8)$, несовместима с токовыми взаимодействиями. Это не удивительно, так как симметрия $\mathfrak{u}(1)$ преобразований спиральности описывает преобразования ЭМ дуальности, которая, как известно, нарушается токовыми взаимодействиями.

Наши выводы находятся в согласии со структурой полевых уравнений ВС [14], содержащих свободный фазовый параметр $\eta = e^{i\varphi}$, образующий одномерное представление алгебры преобразований спиральности $\mathfrak{u}(1)$, которое связывает неэквивалентные теории ВС, характеризующиеся различными значениями φ . Таким образом, симметрия $\mathfrak{u}(1)$ ЭМ дуальности не является симметрией теории ВС с фиксированным η , отображая одну теорию в другую. В этом отношении параметр η напоминает тензор вложения, предложенный в работах [17], [18] для описания различных моделей супергравитации. Было бы также интересно проверить его возможную связь с параметром ω -деформации в супергравитации в контексте теории Ахарони–Бергмана–Джеффериса–Малдасены [36], которая, как предполагается в [37], может играть важную роль в голографии ВС.

Полезная точка зрения состоит в трактовке параметра η как среднего значения для некоторого поля, неинвариантного относительно симметрии $\mathfrak{u}(1)$ ЭМ дуальности. Было бы интересно найти в нелинейной теории [14] поле, подобное полю Хиггса, нарушающее симметрию $\mathfrak{sp}(8)$ до конформной алгебры, позволяя трактовать симметрию $\mathfrak{sp}(8)$ теории ВС как спонтанно нарушенную. Дальнейшее развитие этих идей может привести к лучшему пониманию природы дуальных симметрий в теории ВС в духе обсуждения, приведенного в работе [38].

Заметим, что нелинейные уравнения [14], описываемые в терминах удвоенного числа осцилляторов $z_\alpha, y_\alpha, \bar{z}_{\dot{\alpha}}, \bar{y}_{\dot{\alpha}}$, действительно обладают спонтанно нарушенной симметрией $\mathfrak{sp}(8)$. Возможная связь между двумя симметриями $\mathfrak{sp}(8)$ не является, однако, прямой, поскольку та из них, которая связана с дополнительными осцилляторами $z_\alpha, \bar{z}_{\dot{\alpha}}$, не действует правильным образом на свободных полях, в то время как симметрия, нарушенная токовыми взаимодействиями, действует.

Также подчеркнем, что доказательство конформной инвариантности токовых взаимодействий было дано в секторе 0-форм, ассоциированном с калибровочно-инвариантными кривизнами ВС. Мы не думаем, что его можно обобщить на сектор

калибровочных полей в стандартной постановке. (Напомним, что линеаризованные уравнения Эйнштейна конформно-инвариантны в терминах метрического тензора, но возникающие как их следствие уравнения на тензор Вейля, конформно-инвариантны.) Однако возможно, этого удастся добиться в пространстве AdS_4 , используя подход работы [10].

Отметим, что $\mathfrak{sp}(8)$ -инвариантный формализм, распространенный в работе [10] на 1-формы связности ВС на уровне свободных полей, вовлекает удвоенный набор всех полей, включая калибровочные поля. В этом подходе ЭМ дуальность вращает поля дублета. Как хорошо известно, для удвоенного набора полей гораздо проще добиться ЭМ дуальности [39]–[43]. Следовательно, можно ожидать, что препятствие, выявленное в настоящей работе, можно обойти в рамках подхода работы [10]. К сожалению, нам не удалось продвинуться в этом направлении. По сути, трудность остается той же, что и в настоящей работе, если ток построен из 0-форм ранга 1 одинакового типа, т. е. $J^{ii} \sim C^{ii}C^{ii}$ с $i = 0, 1$ в обозначениях [10], тогда как другие варианты вообще не имеют четкого смысла с точки зрения сопоставления структуры левых и правых частей деформированных уравнений.

Другой интересный момент состоит в том, что, как показано в [40] (см. также [44] и содержащиеся там ссылки), в рамках подхода, подобного гамильтонову подходу, нарушающего явную симметрию Лоренца, ЭМ дуальность может быть реализована как явная симметрия даже на лагранжевом уровне. В настоящей работе отрицательный вывод о невозможности сохранения явной дуальной инвариантности был получен в явно лоренц-ковариантном формализме, т. е. было показано, что максимальная подалгебра $\mathfrak{sp}(8)$, содержащая подалгебру Лоренца $\mathfrak{sl}(2|\mathbb{C})$ и допускающая токовую деформацию, – это алгебра $\mathfrak{su}(2, 2)$, не содержащая генератор ЭМ дуальности. Остается вопрос, существует ли подалгебра $\mathfrak{h} \in \mathfrak{sp}(8)$, не содержащая $\mathfrak{sl}(2|\mathbb{C})$, но содержащая генератор спиральности $\mathcal{H}$ и допускающая деформацию токового типа.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Неравенства

Действие D на зависящие от ω члены в (3.12) дает в силу (3.13)

$$G(w, C) \star C - C \star \tilde{G}(w, C). \quad (\text{A.1})$$

В линейном приближении $G(w, C)$ есть

$$G(w, C)(y, \bar{y}) = \eta \bar{H}^{\gamma' \beta'} \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^{\gamma'} \partial \bar{y}^{\beta'}} C(0, \bar{y}) + \bar{\eta} H^{\alpha \beta} \frac{\partial^2}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} C(y, 0), \quad (\text{A.2})$$

где η – комплексный параметр. Для заданных спинов s_1 и s_2 первого и второго сомножителей C в (A.1) зависящая от η часть первого слагаемого в (A.1) пропорциональна

$$X = \int d\bar{s} d\bar{t} e^{i\bar{s}\alpha'} \bar{t}^{\alpha'} \bar{H}^{\alpha' \beta'} \bar{t}_{\alpha'} \bar{t}_{\beta'} C_{s_1}(0, \bar{y} + \bar{s}) C_{s_2}(y, \bar{y} + \bar{t}). \quad (\text{A.3})$$

Отсюда следует

$$2s_1 = \bar{N}_{\bar{y}_1} + \bar{N}, \quad 2s_2 = |-N_y + \bar{N}_{\bar{y}_2} + \bar{N} - 2|, \quad 2s = |-N_y + \bar{N}_{\bar{y}_2} + \bar{N}_{\bar{y}_1}|, \quad (\text{A.4})$$

где s – спин X , N_y – степень по y , $\bar{N}_{\bar{y}_1}$ и $\bar{N}_{\bar{y}_2}$ – степени по $\bar{y}$ первого и второго сомножителей C соответственно, $\bar{N}$ – степень по параметру интегрирования $\bar{s}$, равная степени по $\bar{t}$. Так как степень $\bar{H}^{\alpha'\beta'} \bar{t}_{\alpha'} \bar{t}_{\beta'}$ по $\bar{t}$ равна 2, получаем

$$\bar{N} \geq 2. \quad (\text{A.5})$$

Основной факт состоит в том, что X может быть отличным от нуля только в том случае, если

$$s < s_1 + s_2. \quad (\text{A.6})$$

Доказательство этого факта выполняется непосредственно.

Если

$$N_y \geq \bar{N}_{\bar{y}_2} + \bar{N} - 2, \quad N_y \leq \bar{N}_{\bar{y}_2} + \bar{N}_{\bar{y}_1}, \quad (\text{A.7})$$

то из (A.4) следует

$$2s_1 = \bar{N}_{\bar{y}_1} + \bar{N}, \quad 2s_2 = N_y - \bar{N}_{\bar{y}_2} - \bar{N} + 2, \quad 2s = \bar{N}_{\bar{y}_1} + \bar{N}_{\bar{y}_2} - N_y. \quad (\text{A.8})$$

В предположении $s \geq s_1 + s_2$ из (A.8) следует

$$\bar{N}_{\bar{y}_2} \geq N_y + 1, \quad (\text{A.9})$$

что в силу (A.7) дает $\bar{N} \leq 1$, а это противоречит (A.5).

Если

$$N_y \geq \bar{N}_{\bar{y}_2} + \bar{N} - 2, \quad N_y \geq \bar{N}_{\bar{y}_2} + \bar{N}_{\bar{y}_1}, \quad (\text{A.10})$$

из (A.4) следует

$$2s_1 = \bar{N}_{\bar{y}_1} + \bar{N}, \quad 2s_2 = N_y - \bar{N}_{\bar{y}_2} - \bar{N} + 2, \quad 2s = -\bar{N}_{\bar{y}_1} - \bar{N}_{\bar{y}_2} + N_y. \quad (\text{A.11})$$

Предположив, что $s \geq s_1 + s_2$ (A.11), получим противоречие $-\bar{N}_{\bar{y}_1} \geq 1$.

Если

$$N_y \leq \bar{N}_{\bar{y}_2} + \bar{N} - 2, \quad N_y \leq \bar{N}_{\bar{y}_2} + \bar{N}_{\bar{y}_1}, \quad (\text{A.12})$$

из (A.4) следует

$$2s_1 = \bar{N}_{\bar{y}_1} + \bar{N}, \quad 2s_2 = -N_y + \bar{N}_{\bar{y}_2} + \bar{N} - 2, \quad 2s = \bar{N}_{\bar{y}_1} + \bar{N}_{\bar{y}_2} - N_y. \quad (\text{A.13})$$

Для $s \geq s_1 + s_2$ получим $\bar{N} \leq 1$, что противоречит (A.5).

Если

$$N_y \leq \bar{N}_{\bar{y}_2} + \bar{N} - 2, \quad N_y \geq \bar{N}_{\bar{y}_2} + \bar{N}_{\bar{y}_1}, \quad (\text{A.14})$$

из (A.4) следует

$$2s_1 = \bar{N}_{\bar{y}_1} + \bar{N}, \quad 2s_2 = -N_y + \bar{N}_{\bar{y}_2} + \bar{N} - 2, \quad 2s = -\bar{N}_{\bar{y}_1} - \bar{N}_{\bar{y}_2} + N_y. \quad (\text{A.15})$$

При $s \geq s_1 + s_2$ это дает $N_y \geq \bar{N}_{\bar{y}_1} + \bar{N} + \bar{N}_{\bar{y}_2} - 1$, что противоречит (A.14). Это завершает доказательство неравенства (A.6). Доказательство для остальных членов (A.1) аналогично.

Благодарности. Авторы благодарны Н. Буланжеру, С. Джиомби, С. Николису, Е. Сезгину, Е. Скворцову, П. Санделу и Д. Сорокину за полезные комментарии.

Список литературы

- [1] O. A. Gelfond, M. A. Vasiliev, *Unfolding versus BRST and currents in $Sp(2M)$ invariant higher-spin theory*, arXiv: 1001.2585; *JHEP*, **12** (2009), 021. arXiv: 0901.2176.
- [2] C. Frønsdal, “Massless particles, ortosymplectic symmetry and another type of Kaluza–Klein theory”, *Essays on Supersymmetry*, Mathematical Physics Studies, **8**, eds. C. Frønsdal, M. Flato, T. Hirai, Reidel, Dordrecht, 1986, 163–265.
- [3] M. A. Vasiliev, “Higher spin gauge theories: star-product and AdS space”, *The Many Faces of the Superworld*, ed. M. A. Shifman, World Sci., Singapore, 2000, 533–610, arXiv: hep-th/9910096.
- [4] I. Bandos, J. Lukierski, *Modern Phys. Lett. A*, **14**:19 (1999), 1257–1272, arXiv: hep-th/9811022.
- [5] I. Bandos, J. Lukierski, D. Sorokin, *Phys. Rev. D*, **61**:4 (2000), 045002, 20 pp., arXiv: hep-th/9904109.
- [6] M. A. Vasiliev, *Phys. Rev. D*, **66**:6 (2002), 066006, 34 pp., arXiv: hep-th/0106149.
- [7] M. A. Vasiliev, “Relativity, causality, locality, quantization and duality in the $Sp(2M)$ invariant generalized space-time”, *Multiple Facets of Quantization and Supersymmetry*, eds. M. Olshanetsky, A. Vainshtein, World Sci., Singapore, 2002, 826–872, arXiv: hep-th/0111119.
- [8] V. E. Didenko, M. A. Vasiliev, *J. Math. Phys.*, **45**:1 (2004), 197–215, arXiv: hep-th/0301054.
- [9] M. Plyushchay, D. Sorokin, M. Tsulaia, “GL flatness of $OSp(1|2n)$ and higher spin field theory from dynamics in tensorial spaces”, arXiv: hep-th/0310297.
- [10] M. A. Vasiliev, *Nucl. Phys. B*, **793**:3 (2008), 469–526, arXiv: 0707.1085.
- [11] S. Fedoruk, J. Lukierski, *JHEP*, **02** (2013), 128, 20 pp., arXiv: 1210.1506.
- [12] I. Bandos, X. Bekaert, J. A. de Azcárraga, D. Sorokin, M. Tsulaia, *JHEP*, **05** (2005), 031, 42 pp., arXiv: hep-th/0501113.
- [13] I. Florakis, D. Sorokin, M. Tsulaia, *Nucl. Phys. B*, **890** (2014), 279–301, arXiv: 1408.6675.
- [14] M. A. Vasiliev, *Phys. Lett. B*, **285**:3 (1992), 225–234.
- [15] O. A. Gelfond, M. A. Vasiliev, *ЖЭТФ*, **147**:3 (2015), 550–577, arXiv: 1012.3143.
- [16] M. A. Vasiliev, V. N. Zaikin, *Phys. Lett. B*, **587**:3–4 (2004), 225–229, arXiv: hep-th/0312244.
- [17] B. de Wit, H. Samtleben, M. Trigiante, *Nucl. Phys. B*, **655**:1 (2003), 93–126, arXiv: hep-th/0212239.
- [18] B. de Wit, H. Samtleben, M. Trigiante, *JHEP*, **06** (2007), 049, 43 pp., arXiv: 0705.2101.
- [19] M. A. Vasiliev, *Phys. Lett. B*, **209**:4 (1988), 491–497.
- [20] M. A. Vasiliev, *Ann. Phys. (N. Y.)*, **190**:1 (1989), 59–106.
- [21] X. Bekaert, S. Cnockaert, C. Iazeolla, M. A. Vasiliev, *Nonlinear higher spin theories in various dimensions*, arXiv: hep-th/0503128.
- [22] V. E. Didenko, E. D. Skvortsov, *Elements of Vasiliev theory*, arXiv: 1401.2975.
- [23] D. Sullivan, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **47**:1 (1977), 269–331.
- [24] R. D’Auria, P. Fré, *Nucl. Phys. B*, **201**:1 (1982), 101–140; Erratum **206**:3 (1982), 496.
- [25] M. A. Васильев, О. В. Шейнкман, *ТМФ*, **123**:2 (2000), 323–344, arXiv: hep-th/0003123.
- [26] M. A. Васильев, О. А. Гельфонд, *ТМФ*, **145**:1 (2005), 35–65, arXiv: hep-th/0304020.
- [27] S. R. Das, A. Jevicki, *Phys. Rev. D*, **68**:4 (2003), 044011, 13 pp., arXiv: hep-th/0304093.
- [28] R. de Mello Koch, A. Jevicki, K. Jin, J. P. Rodrigues, *Phys. Rev. D*, **83**:2 (2011), 025006, 8 pp., arXiv: 1008.0633.
- [29] M. A. Васильев, О. А. Гельфонд, Е. Д. Скворцов, *ТМФ*, **154**:2 (2008), 344–353, arXiv: hep-th/0601106.
- [30] N. Boulanger, P. Kessel, E. D. Skvortsov, M. Taronna, *Higher spin interactions in four dimensions: Vasiliev vs. Fronsdal*, arXiv: 1508.04139.

- [31] E. D. Skvortsov, M. Taronna, *JHEP*, **11** (2015), 044, 35 pp., arXiv:1508.04764.
- [32] М. А. Васильев, П. А. Смирнов, *ТМФ*, **181**:3 (2014), 449–463, arXiv:1312.6638.
- [33] M. A. Vasiliev, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **46**:21 (2013), 214013, 47 pp., arXiv:1203.5554.
- [34] J. Maldacena, A. Zhiboedov, *Class. Quant. Grav.*, **30**:10 (2013), 104003, 37 pp., arXiv:1204.3882.
- [35] O. A. Gelfond, M. A. Vasiliev, *JHEP*, **03** (2009), 125, 37 pp., arXiv:0801.2191.
- [36] A. Borghese, Y. Pang, C.N. Pope, E. Sezgin, *JHEP*, **02** (2015), 112, 39 pp., arXiv:1411.6020.
- [37] C.M. Chang, S. Minwalla, T. Sharma, X. Yin, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **46**:21 (2013), 214009, 97 pp., arXiv:1207.4485.
- [38] E. Sezgin, P. Sundell, *JHEP*, **11** (1998), 016, 60 pp., arXiv:hep-th/9805125.
- [39] D. Zwanziger, *Phys. Rev. D*, **3**:4 (1971), 880–891.
- [40] S. Deser, C. Teitelboim, *Phys. Rev. D*, **13**:6 (1976), 1592–1597.
- [41] J.H. Schwarz, A. Sen, *Nucl. Phys. B*, **411**:1 (1994), 35–63, arXiv:hep-th/9304154.
- [42] P. Pasti, D. Sorokin, M. Tonin, *Phys. Lett. B*, **352**:1 (1995), 59–63, arXiv:hep-th/9503182.
- [43] P. Pasti, D. Sorokin, M. Tonin, *Phys. Rev. D*, **55**:10 (1997), 6292–6298, arXiv:hep-th/9611100.
- [44] C. Bunster, M. Henneaux, *Phys. Rev. D*, **83**:4 (2011), 045031, 7 pp., arXiv:1011.5889.

Поступила в редакцию 8.10.2015,
после доработки 24.12.2015