Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. М. Галахов, А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов, $SU(2)/SL(2)$ -инварианты узлов и монодромии Концевича–Сойбельмана, *ТМФ*, 2016, том 187, номер 2, 263–282

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9068>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 17:27:46

© 2016 г.

Д. М. Галахов^{*†}, А. Д. Миронов^{*‡§¶},
А. Ю. Морозов^{*§¶}

$SU(2)/SL(2)$ -ИНВАРИАНТЫ УЗЛОВ И МОНОДРОМИИ КОНЦЕВИЧА–СОЙБЕЛЬМАНА

Дан обзор подхода Решетихина–Тураева к построению некомпактных инвариантов узлов, которые содержат R -матрицы, ассоциированные с бесконечномерными представлениями, в основном построенными из квантовых диалогарифмов Фаддеева. Соответствующие формулы можно получить из модулярных преобразований конформных блоков как их монодромии Концевича–Сойбельмана; результаты представляются в виде трансцендентных интегралов, для которых основной проблемой является работа с контурами интегрирования. Обсуждаются возможности выделить более явные и удобные выражения, которые можно сравнивать с обычными (компактными) полиномами узлов, приходящими из конечномерных представлений простых алгебр Ли, с их пределами и свойствами. В частности, квантовые A -полиномы и разностные уравнения для цветных полиномов Джонса те же самые, что и в компактном случае, но в некомпактном случае уравнения однородны, а для обычных полиномов Джонса они имеют нетривиальную правую часть.

Ключевые слова: теория Черна–Саймонса, монодромии Концевича–Сойбельмана, вильсоновские средние, R -матрица, модулярный дубль, квантовый A -полином.

DOI: 10.4213/tmf9068

Работа была представлена в Институте проблем передачи информации при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 14-50-00150).

^{*}New High Energy Theory Center, Department of Physics and Astronomy, Rutgers University, New Brunswick, NJ, USA. E-mail: galakhov@physics.rutgers.edu

[†]Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, Москва, Россия

[‡]Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия. E-mail: mironov@lpi.ru

[§]Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.

E-mail: galakhov@itep.ru, mironov@itep.ru, morozov@itep.ru

[¶]Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, Россия

1. ВВЕДЕНИЕ

На сегодняшний день наиболее эффективный способ получать формулы для инвариантов узлов/зацеплений [1], [2] из теории Черна–Саймонса [3], [4] состоит в использовании формализма Решетихина–Тураева (РТ) [5], [6]. Он возникает, к примеру, в темпоральной калибровке [7] и зависит от ориентированного зацепления $\mathcal{L}$ через его проекцию на двумерную плоскость. Эта проекция называется диаграммой зацепления $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$, и она имеет два типа вершин валентности $(2, 2)$. Формализм РТ позволяет получать ответы в виде произведения квантовых $\mathcal{R}$ -матриц и матриц “поворота”, которые действуют соответственно на пару линий и на одну линию в диаграмме. Независимость от выбора диаграммы (инвариантность Радмейстера) вытекает из общих свойств $\mathcal{R}$ -матриц и матриц поворота.

Таким образом, чтобы понять, какие инварианты можно получить в рамках формализма РТ, нужно перечислить имеющиеся числовые квантовые $\mathcal{R}$ -матрицы и проверить, можно ли найти следы их произведений. С этой целью, прежде всего, можно использовать числовые $\mathcal{R}$ -матрицы, получающиеся из квантовых универсальных $\mathcal{R}$ -матриц конечномерных компактных q -деформированных алгебр Ли в конечномерных неприводимых представлениях. Это немедленно приводит к инвариантам узлов, которые описываются конечными суммами, а именно к полиномам Лорана узлов как функциям от переменной q . Отсюда название “компактные инварианты”. Другой способ получить инварианты узлов – использовать $\mathcal{R}$ -матрицы для конечномерных некомпактных q -деформированных алгебр Ли в бесконечномерных неприводимых представлениях. В этом случае получаются инварианты узлов, представляющиеся интегралами. Мы называем эти инварианты некомпактными. Наконец, можно рассмотреть бесконечномерные алгебры Ли. Хотя мы получаем в этом случае хорошо определенные $\mathcal{R}$ -матрицы, неясно, как задать подходящие следы их произведений. Поэтому мы здесь ограничиваемся только первыми двумя возможностями.

Итак, мы рассматриваем $\mathcal{R}$ -матрицы, которые можно получить из универсальной формулы Дринфельда, и это лучший выбор для конечномерных представлений квантовой алгебры $SU_q(N)$. В некомпактном случае алгебры $SL_q(N)$ с бесконечномерными представлениями имеются по меньшей мере две интересные ассоциированные с этими представлениями квантовые $\mathcal{R}$ -матрицы. Одна из них – это матрица Фаддеева [8], построенная из квантовых дилогарифмов и получающаяся из триангуляций временных срезов [9], которая была недавно использована Хиками и Инойе для получения инвариантов узлов [10], а другая – это матрица, построенная из многогранников, которая использовалась раньше [11]. Эти матрицы зависят от разного числа переменных, но тесно связаны друг с другом.

Упомянутые $\mathcal{R}$ -матрицы выглядят очень похоже и, как мы объясним ниже, получаются из одной и той же квантовой алгебры $SL_q(N) \otimes SL_{\tilde{q}}(N)$, где $q = e^{\pi i b^2}$ и $\tilde{q} = e^{-\pi i b^{-2}}$ с некоторым параметром b . Более того, получить их можно тремя способами:

- 1) при помощи триангуляций [10] с монодромиями Концевича–Сойбельмана (КС) [9];
- 2) напрямую из дринфельдовского дубля;

3) путем добавления к алгебре $SL_q(N) \otimes SL_{\tilde{q}}(N)$ второго набора картановских генераторов, для того чтобы образовать гейзенберговский дубль, и последующего получения из него новой $\mathcal{R}$ -матрицы Дринфельда [12].

При этом первый и второй способы ведут к одной и той же $\mathcal{R}$ -матрице Фаддеева. Третий способ приводит к прямой сумме представлений алгебры $SL_q(N) \otimes SL_{\tilde{q}}(N)$, и, чтобы получить инварианты узлов, нужно наложить условие монодромии [11] и тем самым фиксировать представление.

В настоящей работе мы рассматриваем простейший случай групп ранга 1, так что компактные инварианты ассоциированы с квантовой алгеброй $SU_q(2)$, а некомпактные инварианты – с произведением двух квантовых алгебр $SL_q(2) \otimes SL_{\tilde{q}}(2)$. Это соотносится с тем, что, как отмечено в статье [13], некомпактный инвариант связан с алгеброй $SL(2, \mathbb{C})$, но этот вопрос находится вне рамок нашей работы. Мы в основном используем примеры простейших узлов: трилистника 3_1 , узла-восьмерки 4_1 (и иногда других твистованных узлов для иллюстрации). Большинство представленных результатов известно, мы просто собрали их в одном обзоре.

Введем необходимые обозначения. На протяжении всего текста мы используем символы Похгаммера и квантовый дилогарифм, определенные как

$$(z|q)_k = \prod_{n=0}^{k-1} (1 - zq^n), \quad (z|q)_\infty = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - zq^n)$$

и

$$\Phi_b(z) = \frac{(e^{2\pi b(z+iQ/2)}|q^2)_\infty}{(e^{2\pi b^{-1}(z-iQ/2)}|\tilde{q}^2)_\infty},$$

где

$$q = e^{\pi i b^2}, \quad \tilde{q} = e^{-\pi i b^{-2}}, \quad Q = b + b^{-1}, \quad \hbar = i\pi b^2.$$

Мы также используем q -биномиальные коэффициенты

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q \equiv \frac{(q^2|q^2)_n}{(q^2|q^2)_k (q^2|q^2)_{n-k}} = \frac{[n]!}{[k]! [n-k]!}, \quad \text{где} \quad [n] \equiv \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}},$$

и обозначение $\{x\} \equiv x - 1/x$.

2. ИНВАРИАНТЫ УЗЛОВ В СЛУЧАЕ АЛГЕБР $SU_q(2)$ И $SL_q(2)$

Как уже было объяснено выше, и компактные, и некомпактные инварианты одинаково удобно исследовать. Хотя для нас основной интерес представляют некомпактные инварианты, мы вкратце описываем в настоящем разделе оба случая и объясняем, какие способы имеются для получения компактных инвариантов. Оставшиеся разделы посвящены различным способам получения некомпактных инвариантов.

2.1. $SU_q(2)$ -инварианты и конформная теория поля.

2.1.1. Минимальные модели. Используя плетеночные представления узлов и матрицы модулярных преобразований в минимальных моделях конформной теории, можно построить $SU_q(2)$ -инварианты узлов $\text{Mn}(K, r)$ [9], [14]. С этой целью рассмотрим модулярное преобразование четырехточечного сферического конформного

блока $B_k[j_1, j_2, j_3, j_4](x)$, содержащего вырожденные поля $V_{(1, j+1)}$ минимальной модели [15]. Он задается с помощью модулярной S -матрицы:

$$B_k[j_1, j_2, j_3, j_4](x) = \sum_l S_{kl} \begin{bmatrix} j_2 & j_3 \\ j_1 & j_4 \end{bmatrix} B_l[j_2, j_3, j_4, j_1](1-x). \quad (1)$$

Если одно из вырожденных полей есть (1, 2), эта матрица имеет вид

$$S \begin{bmatrix} 1 & j_3 \\ j_1 & j_4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Gamma(\frac{j_1+1}{b^2} + 2) \Gamma(-\frac{b^2+j_3+1}{b^2})}{\Gamma(\frac{2b^2+j_1-j_3+j_4+1}{2b^2}) \Gamma(-\frac{1-j_1+j_3+j_4}{2b^2})} & \frac{\Gamma(\frac{j_1+1}{b^2} + 2) \Gamma(\frac{b^2+j_3+1}{b^2})}{\Gamma(\frac{2b^2+j_1+j_3-j_4+1}{2b^2}) \Gamma(\frac{4b^2+j_1+j_3+j_4+3}{2b^2})} \\ \frac{\Gamma(-\frac{j_1+1}{b^2}) \Gamma(-\frac{b^2+j_3+1}{b^2})}{\Gamma(-\frac{j_1+j_3-j_4+1}{2b^2}) \Gamma(-\frac{2b^2+j_1+j_3+j_4+3}{2b^2})} & \frac{\Gamma(-\frac{j_1+1}{b^2}) \Gamma(\frac{b^2+j_3+1}{b^2})}{\Gamma(-\frac{j_1-j_3+j_4+1}{2b^2}) \Gamma(\frac{2b^2-j_1+j_3+j_4+1}{2b^2})} \end{pmatrix},$$

где матричные элементы нумеруются индексами 0 и 2. Для произвольных значений всех четырех полей матрица определяется из рекуррентного соотношения

$$S_{q,q'} \begin{bmatrix} r+1 & j_3 \\ j_1 & j_4 \end{bmatrix} = \sum_{s,p} S_{r+1,s} \begin{bmatrix} 1 & q \\ r & j_1 \end{bmatrix} S_{q,p} \begin{bmatrix} 1 & j_3 \\ s & j_4 \end{bmatrix} S_{s,q'} \begin{bmatrix} r & p \\ j_1 & j_4 \end{bmatrix} S_{p,r+1} \begin{bmatrix} r & 1 \\ q' & j_3 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Аналогично, имеется второе модулярное преобразование, определяющееся диагональной матрицей T [9], [14] с элементами

$$T_{2k,2k}[r, r] = (-1)^{k+1} q^{k(k+1)-(r+1)^2-1}.$$

Можно построить полиномы от этих матриц, которые ассоциированы с соответствующими инвариантами узлов:

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(3_1, r) &= \sum_{k=0}^r S_{0,2k} \begin{bmatrix} r & r \\ r & r \end{bmatrix} (T_{2k,2k}[r, r])^3 S_{2k,0} \begin{bmatrix} r & r \\ r & r \end{bmatrix}, \\ \mathbb{M}(4_1, r) &= \sum_{k=0}^r \sum_{k'=0}^r S_{0,2k} \begin{bmatrix} r & r \\ r & r \end{bmatrix} (T_{2k,2k}[r, r])^2 S_{2k,2k'} \begin{bmatrix} r & r \\ r & r \end{bmatrix} (T_{2k',2k'}[r, r])^{-2} S_{2k',0} \begin{bmatrix} r & r \\ r & r \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2.1.2. Теория ВЗВН. Подобным образом можно рассмотреть модулярные преобразования в $\widehat{SU(2)}_k$ -теории ВЗВН и найти соответствующие S - и T -матрицы [16], чтобы построить полиномы ВЗВН $\text{Ind}(K, \rho)$ [17]. Матрица S дается просто квантовыми коэффициентами Рака (6j-символами) для алгебры $SU_q(2)$ [18], [19] и в интересующем нас случае равна

$$\Sigma_{2k,2k'} \begin{bmatrix} r & r \\ r & r \end{bmatrix} = \frac{\int_1^\infty d_q x x^{k-k'-r-2} {}_2\phi_1 \left[\begin{matrix} -k & -k \\ -2k \end{matrix} \right] (x^{-1}) {}_2\phi_1 \left[\begin{matrix} -k' & -k' \\ -2k' \end{matrix} \right] (x)}{\int_1^\infty d_q x x^{-2(k'+1)} {}_2\phi_1 \left[\begin{matrix} -k' & -k' \\ -2k' \end{matrix} \right] (x)^2}. \quad (3)$$

Заметим, что $\Sigma \neq S$.

Полиномы ВЗВН определены так же, как и выше:

$$\begin{aligned} \mathbb{I}(3_1, r) &= \sum_{k=0}^r \Sigma_{0,2k} \begin{bmatrix} r & r \\ r & r \end{bmatrix} (T_{2k,2k}[r, r])^3 \Sigma_{2k,0} \begin{bmatrix} r & r \\ r & r \end{bmatrix}, \\ \mathbb{I}(4_1, r) &= \sum_{k=0}^r \sum_{k'=0}^r \Sigma_{0,2k} \begin{bmatrix} r & r \\ r & r \end{bmatrix} (T_{2k,2k}[r, r])^2 \Sigma_{2k,2k'} \begin{bmatrix} r & r \\ r & r \end{bmatrix} (T_{2k',2k'}[r, r])^{-2} \Sigma_{2k',0} \begin{bmatrix} r & r \\ r & r \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2.1.3. *Полиномы Джонса и замкнутые косы.* Канонически инварианты узлов, связанные с группой $SU(2)$, представляют собой полиномы Джонса [2], [4], которые наиболее просто определить при помощи скейн-соотношений [20] в фундаментальном представлении с последующим каблированием [21] в представлениях со старшим спином. Другая возможность – использовать процедуру РТ для замкнутой косы, задавая группу кос с помощью $SU_q(2)$ - R -матрицы [5], [6] (о конформных блоках и вычислениях с помощью процедуры РТ см. работы [22]).

Цветные редуцированные полиномы Джонса $\mathbb{J}(K, r)$ имеют вид

$$\mathbb{J}(3_1, r) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j q^{j(j+3)} \prod_{i=1}^j (q^{r+1-i} - q^{-(r+1-i)})(q^{r+1+i} - q^{-(r+1+i)}), \quad (4)$$

$$\mathbb{J}(4_1, r) = \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{i=1}^j (q^{r+1-i} - q^{-(r+1-i)})(q^{r+1+i} - q^{-(r+1+i)}), \quad (5)$$

$$\mathbb{J}(5_2, r) = \sum_{n=0}^{r-1} \frac{\prod_{j=-n}^n \{r-1+j\}}{\{r-1\}} (-1)^n \sum_{k=0}^n q^{k^2-k(3n+2)+n(3n+5)} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q. \quad (6)$$

Для общего k -го твистованного узла полином Джонса равен [23], [24]

$$\mathbb{J}_{r-1}^{(k)} = \frac{1}{[r+1]} \sum_{s=0}^{r-1} F_s^{(k)} \prod_{j=-s}^s \{q^{r+j}\}, \quad (7)$$

где

$$F_s^{(k)} = q^{s(s+3)/2} \sum_{j=0}^s \frac{\{q^{2j+1}\} \{q^{j+1}\}^{2jk}}{\prod_{i=j-1}^{j-1+s} \{q^{i+2}\}}.$$

2.1.4. *Полиномы Джонса и исчисление конформных блоков.* С наивной точки зрения перечисленные выше три типа полиномов не обязательно должны совпадать. К примеру, матрицы S и Σ в минимальной модели и в теории ВЗВН различны:

$$\Sigma = USU^\dagger,$$

где матрица U диагональна [9]. Оказывается, однако, что полиномы совпадают, и диагональная матрица U выпадает из всех ответов, т. е. $\mathbb{M}(K, r) = \mathbb{I}(K, r)$.

Подобным образом можно проверить совпадение с полиномами Джонса. Например, поскольку

$$\begin{aligned} \Sigma_{2k,0} \begin{bmatrix} r & r \\ r & r \end{bmatrix} &= (-1)^{k-1} \frac{[k]!^2 [s+1+k]! [s-k]!}{[2k]! [s+1]!^2}, \\ \Sigma_{0,2k} \begin{bmatrix} r & r \\ r & r \end{bmatrix} &= (-1)^{k-1} \frac{[2k+1]! [s]!^2}{[k]!^2 [s-k]! [s+1+k]!}, \end{aligned}$$

мы имеем

$$\mathbb{I}(3_1, r) = \frac{q^{3s(s+1)}}{[s+1]^2} \sum_{k=0}^s [2k+1] (-1)^k q^{-3k(k-1)},$$

и можно легко установить, что $\mathbb{I}(3_1, r) = \mathbb{J}(3_1, r)$ и аналогично $\mathbb{I}(4_1, r) = \mathbb{J}(4_1, r)$.

2.2. $SL_q(2)$ -инварианты. Оказывается, что $SL_q(2)$ -инварианты, которые получаются тремя разными способами, упомянутыми во введении, совпадают; мы обозначаем их как $H(K, \rho)$. Они являются моделями интегралов по состояниям (см., например, работы [10], [11], [13], [25]):

$$H(3_1, x) = e^{3x^2/\hbar + i\pi x/\hbar}, \quad (8)$$

$$H(4_1, x) = \int dy \frac{\Phi_b(x-y)}{\Phi_b(y)} e^{2\pi i x(2y-x)}, \quad (9)$$

$$H(5_2, x) = \int dz \frac{e^{\pi i(z^2-x^2)}}{\Phi_b(z)\Phi_b(z-x)\Phi_b(x+z)}. \quad (10)$$

3. R -МАТРИЦЫ ДЛЯ АЛГЕБРЫ $SL_q(2)$

Теперь объясним, как можно получить некомпактные инварианты узлов из п. 2.2 в рамках формализма РТ. Первый ингредиент наших рассуждений – это $\mathcal{R}$ -матрица. В этом разделе мы кратко опишем три способа получения $\mathcal{R}$ -матриц, упомянутые во введении.

3.1. R -матрица, полученная с помощью монодромий КС. Первый способ получения некомпактной $\mathcal{R}$ -матрицы подробно обсуждался в работе [9], где мы объяснили, как можно сконструировать $\mathcal{R}$ -матрицу для косы из n нитей из монодромий КС. Процедура в своей основе состоит из нескольких шагов.

ШАГ 1. Прежде всего нужно построить спектральную кривую

$$\lambda^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{c_2(R_i)}{(z-x_i)^2} + \frac{u_i}{z-x_i} \right).$$

Существуют соотношения между модулями u_i такие, что имеется $n-3$ свободных модулей для косы из n нитей. Но мы увеличиваем количество модулей. Это не должно влиять на решение задачи, в конце концов мы собираемся по ним проинтегрировать, и единственная информация, которую мы используем, состоит в том, что вычеты фиксированы на начальной стадии:

$$\oint_{x_i} \lambda = \pm \sqrt{c_2(R_i)}.$$

Далее мы следим за этой информацией в процессе эволюции косы. Поэтому практически мы стартуем со следующей кривой:

$$\lambda^2 = \frac{\prod_{j=1}^{2n+1} (z-p_j)}{\prod_{i=1}^n (z-x_i)^2}.$$

В конце концов мы увеличиваем количество модулей p_i на один (чтобы отклеить верхний и нижний кончики треугольников), так что кривая принимает вид

$$\lambda^2 = \frac{\prod_{j=1}^{2n+2} (z-p_j)}{\prod_{i=1}^n (z-x_i)^2}.$$

Если расположить все модули p_i на вещественной оси и отслеживать перестановку двух сингулярностей, получается картина преобразования линий ВКБ, изображенная на рис. 1.

Соответствующее преобразование триангуляций в случае двух нитей изображено на рис. 2.

ШАГ 2. Рассматривается “расширенное” пространство модулей $\mathcal{M}$ с координатами (x, u, b) .

ШАГ 3. Вводится флип триангуляции, который соответствует пересечению стенки, т. е. найдется $\gamma \in H_1(\Sigma)$ такая, что $\text{Im } b^{-1}\lambda|_\gamma = 0$. Этот флип можно построить в явном виде, он записывается либо как $\hat{\kappa}_\gamma \sim (\hat{w}_\gamma|q)_\infty$ в представлении Шредингера (фундаментальное действие), либо как $\hat{K}_\gamma O = \hat{\kappa}_\gamma^{-1} O \hat{\kappa}_\gamma$ в представлении Гейзенберга (присоединенное действие).

ШАГ 4. Инварианты КС строятся на основании условия плоскостности

$$\prod_{\substack{\leftarrow \\ \text{стягиваемые} \\ \text{петли}}} \hat{K}_\gamma = \hat{\mathbf{1}}.$$

Если разрезать эту петлю, то, к примеру, $\$ = \hat{K}_{\gamma_2} \hat{K}_{\gamma_1} = \hat{K}_{\gamma_1} \hat{K}_{\gamma_1 + \gamma_2} \hat{K}_{\gamma_2}$, т. е. $\$$ – инвариант при пересечении стенки маргинальной стабильности.

ШАГ 5. В рамках этого формализма можно описать узлы как монодромии КС. Фактически узел можно описать как некоторую монодромию конформных блоков [4]: рассматривается первоначальный конформный блок, точки которого эволюционируют, переставляясь с нетривиальной монодромией так, что в конце концов получается тот же самый конформный блок (возможно, с переставленными точками). Точка в пространстве $\mathcal{M}$ определяется конформным блоком. Таким образом, узел можно ассоциировать с некоторыми элементами из $\pi_1(\mathcal{M})$.

ШАГ 6. Конструируется элементарный строительный блок для простого флипа:

$$R \sim (\hat{w}_{\gamma_1}|q^2)_\infty (\hat{w}_{\gamma_2}|q^2)_\infty (\hat{w}_{\gamma_3}|q^2)_\infty (\hat{w}_{\gamma_4}|q^2)_\infty \in U(\text{Heisenberg}). \quad (11)$$

ШАГ 7. Путем простого склеивания получается весь элемент – $\mathcal{R}$ -матрица

$$\mathcal{R} = \prod_i R_i \in \pi_1(\mathcal{M}, U(\text{Heisenberg})).$$

Построенная таким образом $\mathcal{R}$ -матрица (11) совпадает с $\mathcal{R}$ -матрицей R^H , полученной Фаддеевым [8], Кашаевым [26] и позже Хиками и Инойе [10], которая зависит от двух дополнительных произвольных постоянных c', c'' (заметим, что в статье Хиками квантовый дилогарифм определен как обратный):

$$\begin{aligned} \langle x_1, x_2 | R^H | y_1, y_2 \rangle &= \frac{\Phi_b(x_1 - y_1 + iQ/2) \Phi_b(y_2 - x_2 + iQ/2)}{\Phi_b(x_1 - x_2) \Phi_b(y_2 - y_1)} \times \\ &\times e^{2\pi i[(iQ/2)(y_1 - y_2 - x_1 + x_2) + c'(y_2 - x_1) + c''(-y_1 + x_2) + (1+Q^2)/12 - (c' + c'')^2/2]}. \end{aligned} \quad (12)$$

Рис. 1. Эволюция линий ВКБ. Прозрачные точки отмечают нулям дискри-
минанта, а жирные – сингулярностям.

Рис. 2. Эволюция триангуляций. Ребра, обозначенные штриховыми линиями, отвечают первоначальным ребрам триангуляций, а обозначенные жирными линиями – ребрам после мутаций.

3.2. R -матрица, полученная на основе представления РТ. В рамках второго подхода (см. введение) строится та же $\mathcal{R}$ -матрица для квантовой алгебры $SL_q(2) \otimes SL_{\bar{q}}(2)$ [27]. Универсальное выражение для $\mathcal{R}$ -матрицы имеет вид

$$\mathcal{R} = q^{H \otimes H} g_b (4(\sin \pi b^2)^2 E \otimes F) q^{H \otimes H}, \quad (13)$$

где

$$g_b(x) := - \int_{\mathbb{R}+i0} \frac{dt}{t} \frac{e^{tQ/2} x^{t/2\pi i b}}{(1 - e^{bt})(1 - e^{t/b})}.$$

Представления алгебры $SL_q(2) \otimes SL_{\bar{q}}(2)$ нумеруются двумя спинами (m, n) или одним комплексным лиувилевским импульсом $\alpha_{m,n} = i(m+1)b + i(n+1)/b$. Если рассматривать синглет по второму фактору $SL_{\bar{q}}(2)$, остается обычная $SL_q(2)$ - $\mathcal{R}$ -матрица Дринфелда

$$\mathcal{R} = q^{H \otimes H} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{(n^2-n)/2}}{[n]_q!} ((q - q^{-1})E \otimes F)^n q^{H \otimes H}. \quad (14)$$

Можно ввести представление непрерывного “спина” s на пространстве $L^2(\mathbb{R})$ функций от x :

$$\rho_s(E) = e^{\pi b x} \frac{\operatorname{ch} \pi b(p-s)}{\sin \pi b^2} e^{\pi b x}, \quad \rho_s(F) = e^{-\pi b x} \frac{\operatorname{ch} \pi b(p+s)}{\sin \pi b^2} e^{-\pi b x}, \quad \rho_s(q^H) = e^{-\pi b p},$$

где $[p, x] = (2\pi i)^{-1}$. Заметим, что тривиальное (скалярное) представление возникает при $s = -iQ/2$. Впоследствии мы можем взять проекцию $\mathcal{R}$ -матрицы на представление $s_2 \otimes s_1$ и построить ее действие на представителе $\psi(x_2, x_1)$. Это позволяет

записать $\mathcal{R}$ -матрицу в форме ядра интегрального оператора:

$$R_{s_2, s_1} = (\rho_{s_2} \otimes \rho_{s_1}) \mathcal{R},$$

$$(R_{s_2, s_1} \psi)(x_2, x_1) = \int dy_1 dy_2 R_{s_2, s_1} \begin{bmatrix} y_2 & y_1 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix} \psi(y_2, y_1).$$

Явное выражение для этого интегрального ядра приведено в работе [27]:

$$R_{s_2, s_1} \begin{bmatrix} y_2 & y_1 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix} = e^{2i\pi(Q^2/4 + (iQ/2)(-x_1 + x_2 - y_1 + y_2) + s_1(y_1 - x_1) + s_2(x_2 - y_2) + s_1 s_2)} \times$$

$$\times \frac{G_b(Q/2 + i(s_1 + s_2)/2 + i(x_2 - x_1)) G_b(Q/2 - i(s_1 + s_2)/2 + i(y_2 - y_1))}{G_b(Q/2 + i(s_1 - s_2)/2 + i(x_2 - x_1)) G_b(Q - i(s_1 - s_2)/2 + i(y_2 - y_1))}, \quad (15)$$

где

$$G_b(x) \sim \frac{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i b^{-1}(x - nb^{-1})})}{\prod_{n=0}^{\infty} (1 - e^{2\pi i b(x + nb)})} = \frac{1}{\Phi_b(i(x - Q/2))}.$$

Сравнивая выражение (15) с формулой (12), заключаем, что

$$R_{s_2, s_1} \begin{bmatrix} y_1 + s_1/2 & y_2 - s_2/2 \\ x_2 - s_1/2 & x_1 + s_2/2 \end{bmatrix} = e^{(i\pi/6)(2Q^2 + 6s_1^2 + 6s_2^2 - 1)} \langle x_1, x_2 | R^H | y_1, y_2 \rangle \Big|_{\substack{c'=s_1, \\ c''=s_2}}. \quad (16)$$

Выражение для $\mathcal{R}$ -матрицы в импульсном пространстве имеет вид [27]

$$R_{s_2, s_1} \begin{bmatrix} p_2 & p_1 \\ k_2 & k_1 \end{bmatrix} = \delta(p_2 + p_1 - k_2 - k_1) \frac{e^{-i\pi(p_1 k_2 + p_2 k_1)}}{G_b(Q + i(p_1 - k_1))} \frac{w_b(s_1 + k_1)}{w_b(s_1 + p_1)} \frac{w_b(s_2 - k_2)}{w_b(s_2 - p_2)}. \quad (17)$$

Аналогично

$$R_{s_2, s_1}^{-1} \begin{bmatrix} p_2 & p_1 \\ k_2 & k_1 \end{bmatrix} = \delta(p_2 + p_1 - k_2 - k_1) \frac{e^{-\pi Q(p_1 - k_1) + i\pi(p_1 p_2 + k_1 k_2)}}{G_b(Q + i(p_1 - k_1))} \frac{w_b(s_1 + k_1)}{w_b(s_1 + p_1)} \frac{w_b(s_2 - k_2)}{w_b(s_2 - p_2)},$$

где

$$w_b(x) = e^{(\pi i/2)(Q^2/4 + x^2)} G_b\left(\frac{Q}{2} - ix\right).$$

Поэтому соотношение между $\mathcal{R}$ -матрицей и обратной к ней имеет вид

$$\int dk'_1 dk'_2 R_{s_1, s_2} \begin{bmatrix} k'_1 & k'_2 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} R_{s_1, s_2}^{-1} \begin{bmatrix} k''_1 & k''_2 \\ k'_1 & k'_2 \end{bmatrix} = \delta(k_1 - k'_1) \delta(k_2 - k'_2). \quad (18)$$

3.3. $\mathcal{R}$ -матрица и модулярный дубль. Наконец, третий способ получения $\mathcal{R}$ -матрицы с целью генерировать с ее помощью некомпактные инварианты узлов был предложен Кашаевым [12]. Он состоит в том, что мы добавляем еще один картановский генератор $\bar{H}$, получая гейзенберговский дубль, и затем строим из него стандартный элемент $\mathcal{R}$ -матрицы Дринфельда. Общая конструкция выглядит следующим образом.

Пусть имеется алгебра Хопфа $\mathcal{A}$, которая порождается базисом $\{e_\alpha\}$, умножение $e_\alpha e_\beta = m_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma$ задано структурными константами $m_{\alpha\beta}^\gamma$, а коумножение задано как $\Delta(e_\alpha) = \mu_\alpha^{\beta\gamma} e_\beta \otimes e_\gamma$. Можно также рассмотреть дуальную алгебру $\mathcal{A}^*$ с соответствующими структурами. Эта алгебра разлагается по дуальным генераторам $\{e^\alpha\}$.

Два этих базиса можно объединить в одну алгебру, называемую гейзенберговским дублем $H(\mathcal{A})$. Она определяется следующими соотношениями:

$$e_\alpha e_\beta = m_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma, \quad e^\alpha e^\beta = \mu_\gamma^{\alpha\beta} e^\gamma, \quad e_\alpha e^\beta = m_{\rho\gamma}^\beta \mu_\alpha^{\gamma\sigma} e^\rho e_\sigma.$$

Существует канонический элемент $S = e_\alpha \otimes e^\alpha$, который удовлетворяет *тождеству пентагона*

$$S_{12}S_{13}S_{23} = S_{23}S_{12}.$$

Заметим, что в этом случае коумножение нельзя расширить до всей алгебры Гейзенберга. Однако для того, чтобы получить дринфельдовский дубль, можно погрузить ее в произведение двух гейзенберговских дублей. Действительно, умножим $H(\mathcal{A})$ на гейзенберговский дубль дуальной алгебры $H(\mathcal{A}^*)$, определенный как

$$\tilde{e}_\alpha \tilde{e}_\beta = m_{\alpha\beta}^\gamma \tilde{e}_\gamma, \quad \tilde{e}^\alpha \tilde{e}^\beta = \mu_\gamma^{\alpha\beta} \tilde{e}^\gamma, \quad \tilde{e}^\beta \tilde{e}_\alpha = \mu_\alpha^{\sigma\gamma} m_{\gamma\rho}^\beta \tilde{e}_\sigma \tilde{e}^\rho.$$

Канонический элемент в этой алгебре есть $\tilde{S} = \tilde{e}_\alpha \otimes \tilde{e}^\alpha$. Тогда можно построить ассоциативную алгебру $D(\mathcal{A})$, называемую дринфельдовским дублем, которая порождена элементами $\{E_\alpha, E^\beta\}$:

$$E_\alpha E_\beta = m_{\alpha\beta}^\gamma E_\gamma, \quad E^\alpha E^\beta = \mu_\gamma^{\alpha\beta} E^\gamma, \quad \mu_\alpha^{\sigma\gamma} m_{\rho\gamma}^\beta E_\sigma E^\rho = m_{\rho\gamma}^\beta \mu_\alpha^{\gamma\sigma} E_\sigma E^\rho.$$

Канонический элемент $R = E_\alpha \otimes E^\alpha$ дринфельдовского дубля удовлетворяет *уравнению Янга–Бакстера*

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}.$$

Можно построить отображение $\phi: D(\mathcal{A}) \rightarrow H(\mathcal{A}) \otimes H(\mathcal{A}^*)$, имеющее следующий явный вид:

$$\phi: E_\alpha \mapsto \mu_\alpha^{\beta\gamma} e_\beta \otimes \tilde{e}_\gamma, \quad E^\alpha \mapsto m_{\gamma\beta}^\alpha e^\beta \otimes \tilde{e}^\gamma.$$

Это отображение дает желаемую формулу факторизации четвертого порядка:

$$R_{12,34}^\phi = (\phi \otimes \phi)R = (S_{14}^{t_4})^{-1} S_{13} S_{24}^{t_2 t_4} (S_{23}^{t_2})^{-1}. \quad (19)$$

Рассмотрим теперь алгебру $SL_q(2)$. В этом случае в качестве алгебры $\mathcal{A}$ можно выбрать борелевскую подалгебру, тогда гейзенберговский дубль $H(\mathcal{A})$ задается генераторами $H, \bar{H}, E$ и F со следующими соотношениями (здесь $q = e^{-\hbar}$, $K = q^H$):

$$\begin{aligned} [H, \bar{H}] &= 1, & [E, \bar{H}] &= 0, & [H, E] &= E, \\ [H, F] &= -F, & [\bar{H}, F] &= \hbar F, & [E, F] &= (1 - q)K^{-1}. \end{aligned}$$

Соответствующие базисные векторы имеют вид

$$e_{m,n} = \frac{H^m E^n}{m! \prod_{j=1}^n (1 - q^j)}, \quad e^{m,n} = \bar{H}^m F^n, \quad m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Таким образом, канонический элемент записывается как¹⁾

$$S = \sum_{m,n=0}^{\infty} e_{m,n} \otimes e^{m,n} = e^{H \otimes \bar{H}} (E \otimes F | q)_\infty^{-1}. \quad (20)$$

¹⁾Заметим, что

$$(z|q)_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(n-1)/2}}{\prod_{j=0}^n (1 - q^j)} z^n, \quad (z|q)_\infty^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\prod_{j=0}^n (1 - q^j)} z^n.$$

Можно выбрать следующее представление нашей алгебры:

$$H = \frac{\hat{q}}{h}, \quad \bar{H} = \hat{p}, \quad E = q^{1/4} e^{\hat{p}}, \quad F = q^{1/4} e^{\hat{q}-\hat{p}},$$

где $[\hat{p}, \hat{q}] = -h$. Заметим, что этот выбор в действительности погружает нашу алгебру $SL_q(2)$ в $SL_q(2) \otimes SL_{\tilde{q}}(2)$. В самом деле, генераторы

$$\tilde{K} = e^{2\pi i H}, \quad \tilde{E} = E^{2\pi i/h}, \quad \tilde{F} = F^{2\pi i/h}$$

коммутируют с K , E и F и образуют представление алгебры $SL_q(2)$ с $\tilde{q} = e^{-4\pi^2/h}$.

В данном случае нетрудно выписать соответствующие базисы:

$$e_{m,n,k} = \frac{H^m E^n \tilde{E}^k}{m! \prod_{i=1}^n (1 - q^i) \prod_{j=1}^k (1 - \tilde{q}^j)}, \quad e^{m,n,k} = \bar{H}^m F^n \tilde{F}^k.$$

Таким образом, канонический элемент имеет вид

$$S = \sum_{m,n,k \geq 0} e_{m,n,k} \otimes e^{m,n,k} = e^{H \otimes \bar{H}} \frac{(\tilde{q}^{-1} \tilde{E} \otimes \tilde{F} | \tilde{q}^{-1})_{\infty}}{(E \otimes F | q)_{\infty}}.$$

Используя явное представление, получаем

$$S_{1,2} = e^{h^{-1} \hat{q}_1 \hat{p}_2} \Phi_h(\hat{p}_1 + \hat{q}_2 - \hat{p}_2), \quad (21)$$

где квантовый дилогарифм имеет вид (в области $\text{Re } h > 0$)

$$\Phi_h(x) = \frac{(\tilde{q}^{-1/2} e^{2\pi i x/h} | \tilde{q}^{-1})_{\infty}}{(q^{1/2} e^x | q)_{\infty}}. \quad (22)$$

Формулы (19), (22) определяют $\mathcal{R}$ -матрицу, которая использовалась в работах [11] при построении некомпактных инвариантов узлов, хотя она и отличается от $\mathcal{R}$ -матрицы Фаддеева (12).

4. ФОРМАЛИЗМ РТ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

После того как мы построили $\mathcal{R}$ -матрицы, можно перейти ко второму ключевому ингредиенту формализма РТ – к понятию взвешенного следа или, обобщенно, к оператору поворота. Напомним, что именно этот объект отсутствует к настоящему моменту в случае бесконечномерных алгебр Ли. В этом разделе мы определяем подходящий взвешенный след для некомпактной группы $SL_q(2) \otimes SL_{\tilde{q}}(2)$ и $\mathcal{R}$ -матрицы (17), рассмотренной выше, и объясняем, как построить инвариант узла с ее помощью.

4.1. Взвешенный след. Мы можем ввести взвешенный след, фиксируя второе движение Радмейстера:

$$\text{qTr}_z R_{s,s} \begin{bmatrix} y_2 & z \\ z & x_1 \end{bmatrix} \sim q^{\Omega_2(s)} \delta(x_1 - y_2). \quad (23)$$

Это проще делать в импульсном пространстве. Следуя работам [19], [7], мы запишем взвешенный след в виде $q\mathrm{Tr} \star = \mathrm{Tr} q^{-2H} \star$. Поскольку мы на самом деле работаем с модулярным дублем, необходимо добавить вторую копию:

$$q\mathrm{Tr} \star = \mathrm{Tr} q^{-2H} \tilde{q}^{-2\tilde{H}} \star.$$

В импульсном пространстве этот след имеет вид

$$q\mathrm{Tr} \star = \int dk_1 dk_2 \delta(k_1 - k_2) e^{-2\pi i Q k_1} \star(k_1, k_2).$$

Таким образом, подтвердить формулу (23) нетрудно:

$$\begin{aligned} \int dz e^{-2\pi i Q z} R_{s,s} \begin{bmatrix} p_2 & z \\ z & k_1 \end{bmatrix} &= \\ &= \delta(p_2 - k_1) \int dz e^{-2\pi i Q z} \frac{e^{-i\pi(k_1^2 + z^2)}}{G_b(Q + i(z - k_1))} \frac{w_b(k_1 + s)w_b(s - z)}{w_b(s - k_1)w_b(s + z)} = \\ &= \delta(p_2 - k_1) \frac{e^{i\pi(2k_1 s - k_1^2 + s^2)} \Phi_b(s - k_1)}{\Phi_b(k_1 + s)} \int dz e^{-2\pi i Q z} \frac{\Phi_b(k_1 + s + z)}{\Phi_b(-iQ/2 + 2s + z)\Phi_b(z - iQ/2)}. \end{aligned}$$

Как известно, интеграл в правой части является q -аналогом редуцированного интеграла от гипергеометрической функции в фиксированной точке (см. работу [25]), следовательно,

$$\int dz e^{-2\pi i Q z} \frac{\Phi_b(k_1 + s + z)}{\Phi_b(-iQ/2 + 2s + z)\Phi_b(z - iQ/2)} \sim \Phi_b(k_1 + s)\Phi_b(k_1 - s).$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\int dz e^{-2\pi i Q z} R_{s,s} \begin{bmatrix} p_2 & z \\ z & k_1 \end{bmatrix} = e^{2i\pi s^2} \delta(p_2 - k_1). \quad (24)$$

Коэффициенты Клебша–Гордана ($V_{\alpha_1} \otimes V_{\alpha_2} \rightarrow \int d\alpha_3 V_{\alpha_3}$) в импульсном пространстве имеют вид

$$\left[\begin{matrix} \alpha_3 \\ k_3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \alpha_2 & \alpha_1 \\ k_2 & k_1 \end{matrix} \right] = \delta(k_3 - k_2 - k_1) C_{\alpha_3} \left[\begin{matrix} \alpha_2 & \alpha_1 \\ k_2 & k_1 \end{matrix} \right].$$

Таким образом, можно построить оператор “шляпки”, действующий из $V_{\alpha_1} \otimes V_{\alpha_2}$ в $\mathbb{C}$, задающийся как

$$M_s(k_2, k_1) := \begin{bmatrix} 0 & s & s \\ 0 & k_2 & k_1 \end{bmatrix} = \delta(k_2 + k_1) C_0 \begin{bmatrix} s & s \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} = \delta(k_2 + k_1) e^{-\pi i Q k_1}.$$

При этом след строится с двумя “шляпками”:

$$q\mathrm{Tr} \star = \int dp dk dk' \begin{bmatrix} 0 & s & s \\ 0 & p & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & s & 0 \\ p & k' & 0 \end{bmatrix} \star(k, k') = \int dk dk' \delta(k - k') e^{-2\pi i Q k} \star(k, k').$$

Структура алгебры Хопфа задается коумножением

$$\Delta(E) = E \otimes K + K^{-1} \otimes E, \quad \Delta(F) = F \otimes K + K^{-1} \otimes F, \quad \Delta(K) = K \otimes K.$$

Рис. 3. Плоская диаграмма узла 4_1 .

Поэтому есть более простой способ определить “шляпки”, используя структуру алгебры Хопфа:

$$\Delta_{k_2, k_1}(E)M(k_2, k_1) = 0,$$

$$\int dk_1 dk_2 \bar{M}(k_2, k_1) \Delta_{k_2, k_1}(E) \psi(k_2, k_1) = 0 \quad \text{для всех } \psi$$

и аналогично для F и H . Решение этих уравнений имеет вид

$$M_{s_1, s_2}(k_1, k_2) = \delta(k_1 + k_2) e^{-\pi Q k_1} \delta_{s_1 + s_2}. \quad (25)$$

4.2. Инварианты узлов. Теперь все готово для построения некомпактных инвариантов узлов. Для иллюстрации рассмотрим узел-восьмерку (см. рис. 3).

В соответствии с рисунком строится следующее выражение:

$$\begin{aligned} \langle 4_1 \rangle = & \int dk_1 \dots dk_8 e^{\pi Q(k_1 - k_2 - k_7 + k_8)} R_{-s, s}^{-1} \begin{bmatrix} k_4 & k_3 \\ k_2 & k_1 \end{bmatrix} R_{s, -s}^{-1} \begin{bmatrix} k_6 & k_5 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \times \\ & \times R_{-s, s} \begin{bmatrix} k_7 & -k_8 \\ -k_1 & k_6 \end{bmatrix} R_{-s, s} \begin{bmatrix} k_8 & -k_7 \\ k_5 & -k_2 \end{bmatrix} = \int dy \frac{\Phi_b(s - y)}{\Phi_b(y)} e^{2\pi i s(2y - s)}. \end{aligned}$$

Подобным образом можно построить инвариант узла из любой плоской диаграммы узла.

Та же процедура может быть применена к другой некомпактной $\mathcal{R}$ -матрице (см. соотношения (19), (22)). Однако в этом случае $\mathcal{R}$ -матрица зависит от двойного числа параметров, но не содержит никакой явной зависимости от спина s . Это

неудивительно, поскольку $\mathcal{R}$ -матрица действует на регулярном представлении [27]. Вместо этого имеется условие монодромии, которое фиксирует представление и которое реализуется как добавление еще одного интегрирования с дельта-функцией, иными словами, работает как дополнительное условие, наложенное на переменные (см. работы [11]).

5. УРАВНЕНИЯ (А-ПОЛИНОМЫ) ДЛЯ ИНВАРИАНТОВ УЗЛОВ

Обсудим теперь, что общего и в чем различие между компактными и некомпактными инвариантами узлов и, прежде всего, уравнения, которым они удовлетворяют. Мы снова рассмотрим два простейших примера трилистника и узла-восьмерки, при этом рассматриваемые уравнения суть разностные уравнения по спиновой переменной.

5.1. Трилистник. Начнем с полинома Джонса (4). Он удовлетворяет следующему разностному уравнению по спину представления $r = N - 1$ [23]:

$$\mathbb{J}_{N+1} + q^{6N+4} \frac{1 - q^{2N}}{1 - q^{2N+2}} \mathbb{J}_N = q^{2N} \frac{q^{4N+2} - 1}{q^{2N+2} - 1}. \quad (26)$$

Это уравнение может быть переписано в терминах операторов $\hat{L}$ и $\hat{M}$, заданных равенствами

$$\hat{L}\mathbb{J}_N(q) = \mathbb{J}_{N+1}(q), \quad \hat{M}\mathbb{J}_N(q) = q^N \mathbb{J}_N(q).$$

Имеем

$$[q^2 \hat{M}^6 (\hat{M}^2 - 1) + (q^2 \hat{M}^2 - 1) \hat{L}] \mathbb{J}_N(q) = q^{2N} \frac{q^{4N+2} - 1}{q^{2N+2} - 1}. \quad (27)$$

Можно переписать это уравнение как однородное разностное уравнение, но второго порядка:

$$\left[-\frac{1}{q^2 \hat{M}^2} \frac{1 - q^4 \hat{M}^2}{1 - q^4 \hat{M}^4} \hat{L}^2 - \left(\frac{1}{\hat{M}^2} \frac{1 - q^2 \hat{M}^2}{1 - q^2 \hat{M}^4} - q^4 \hat{M}^4 \frac{1 - q^2 \hat{M}^2}{1 - q^6 \hat{M}^2} \right) \hat{L} - q^4 \hat{M}^4 \frac{1 - \hat{M}^2}{1 - q^4 \hat{M}^2} \right] \mathbb{J}_N(q) = 0.$$

Оператор в левой части этого уравнения называется квантовым (или некоммутативным) А-полиномом, поскольку в “классическом” пределе $q \rightarrow 1$ он совпадает со стандартным А-полиномом [28] (частный случай АJ-гипотезы [29]).

Уравнение (27) можно переписать как уравнение относительно нередуцированного полинома Джонса $\mathbb{K}_N(q) = [N] \mathbb{J}_N(q)$:

$$(\hat{L} + q^3 \hat{M}^6) \mathbb{K}_N(q) = \frac{1 - q^{4N+2}}{1 - q^{2N}} q^{3N-1}. \quad (28)$$

Соответствующее однородное уравнение имеет простое решение, которое совпадает с (8) при отождествлении $N = x/\hbar$:

$$(\hat{L} + q^3 \hat{M}^6) \mathbb{H}_N(q) = 0 \implies \mathbb{H}_N(q) = e^{3\hbar N^2 + i\pi N} \implies \mathbb{H}(x) = e^{3x^2/\hbar + i\pi x/\hbar}.$$

Следовательно, компактный и некомпактный инварианты являются разными решениями одного и того же разностного уравнения второго порядка [13], [30]. Иными

словами, они представляют собой соответственно решения неоднородного и однородного разностных уравнений первого порядка. Между тем явные выражения для этих решений выглядят совершенно по-разному: сравните (4) и (8). Тем не менее можно попытаться рассматривать поведение в ведущем порядке для некомпактного инварианта как асимптотику компактного инварианта при больших спинах [31], [32].

5.2. Узел-восьмерка. Ситуация в точности аналогична и для узла-восьмерки. В этом случае полином Джонса (5) удовлетворяет неоднородному разностному уравнению второго порядка (или соответствующему однородному уравнению третьего порядка)

$$\begin{aligned} & [q^4 \hat{M}^4 (1 - \hat{M}^2) (1 - q^6 \hat{M}^4) - \\ & - (q^2 \hat{M}^2 + 1) (1 - q^2 \hat{M}^2 - q^2 \hat{M}^4 - q^6 \hat{M}^4 - q^6 \hat{M}^6 + q^8 \hat{M}^8) (1 - q^2 \hat{M}^2)^2 \hat{L} + \\ & + q^4 \hat{M}^4 (1 - q^2 \hat{M}^4) (1 - q^4 \hat{M}^2) \hat{L}^2] \mathbb{J}_N(q) = \\ & = q^{2N+2} (1 - q^{4N+6}) (1 - q^{4N+2}) (1 + q^{2N+2}); \end{aligned} \quad (29)$$

соответствующее уравнение для нередуцированного полинома имеет вид

$$\begin{aligned} & [q^3 \hat{M}^4 (1 - q^6 \hat{M}^4) - (1 - q^4 \hat{M}^4) (1 - q^2 \hat{M}^2 - q^2 \hat{M}^4 - q^6 \hat{M}^4 - q^6 \hat{M}^6 + q^8 \hat{M}^8) \hat{L} + \\ & + q^5 \hat{M}^4 (1 - q^2 \hat{M}^4) \hat{L}^2] \mathbb{K}_N(q) = \dots, \end{aligned} \quad (30)$$

где многоточием обозначена некоторая неоднородная часть, явный вид которой несуществен. Можно ожидать, что некомпактный инвариант (9) снова удовлетворяет соответствующему однородному уравнению. Это действительно так, хотя проверка данного утверждения требует некоторых усилий.

5.2.1. Тождества Уорда. Начнем с некомпактного интегрального инварианта (9)

$$\mathbb{H}(x) = e^{-2\pi i x^2} \int dy e^{4\pi i x y} \frac{\Phi_b(x - y)}{\Phi_b(y)}. \quad (31)$$

Нам потребуются следующие тождества:

$$\Phi_b(z) = (1 + qe^{2\pi b z}) \Phi_b(z + ib), \quad \Phi_b(z) = (1 + q^{-1}e^{2\pi b z})^{-1} \Phi_b(z - ib). \quad (32)$$

Введем обозначение для “средних значений”:

$$A_{\pm}(U) = e^{-2\pi i x^2} \int dy e^{4\pi i x y} e^{\pm 2\pi b y} \frac{\Phi_b(x - y)}{\Phi_b(y)}.$$

Мы также определим операторы

$$\hat{L} := e^{ib \frac{d}{dx}}, \quad \hat{M} = e^{\pi b x}.$$

Прежде всего, можно легко получить тождество Уорда, ассоциированное со сдвигом переменной интегрирования $y \rightarrow y + ib$ в (31). После применения тождеств (32) для дилогарифмов получается уравнение

$$(1 + \hat{M}^2 - \hat{M}^4) \mathbb{H} + q^{-1} \hat{M}^2 A_- + q A_+ = 0. \quad (33)$$

Подобным образом можно получить уравнения для $A_+(x)$ и $A_-(x)$, делая соответственно сдвиги $x \rightarrow x + ib$, $y \rightarrow y + ib$ и $x \rightarrow x - ib$. В результате имеем

$$\hat{L}A_+ = q\mathbb{H} + A_-, \quad \hat{L}^{-1}A_- = q^2\hat{M}^{-4}A_+ + q\hat{M}^{-2}\mathbb{H}. \quad (34)$$

Система уравнений (33), (34) легко сводится к одному уравнению относительно функции $\mathbb{H}(x)$. После рескейлинга $\hat{L} \rightarrow q^{-1}\hat{L}$, который соответствует переходу от переменной $N = r + 1$ к переменной r , мы получаем А-полином, обращающийся в ноль некомпактный инвариант,

$$[q^3\hat{M}^4(1 - q^6\hat{M}^4) - (1 - q^4\hat{M}^4)(1 - q^2\hat{M}^2 - q^2\hat{M}^4 - q^6\hat{M}^4 - q^6\hat{M}^6 + q^8\hat{M}^8)\hat{L} + \\ + q^5\hat{M}^4(1 - q^2\hat{M}^4)\hat{L}^2]\mathbb{H}(q) = 0, \quad (35)$$

что совпадает с (30).

5.2.2. Компактные и некомпактные инварианты. Заметим, что, в отличие от случая узла-трилистника, компактный и некомпактный инварианты для узла-восьмерки выглядят более схожими по форме. Действительно, можно преобразовать интеграл (31) в сумму по счетному числу точек. С этой целью сначала нужно использовать свойство $\Phi_b(z)\Phi_b(-z) = e^{i\pi z^2}$ и заметить, что

$$\Phi_b(z) = \frac{\prod_{k=1}^{\infty}(1 + q^{2k}e^{2\pi bz})}{\prod_{k=-1}^{\infty}(1 + \tilde{q}^{2k}e^{2\pi b^{-1}z})} = \prod_{k=1}^{\infty}(1 + q^{2k}e^{2\pi bz})f_{ib}(z),$$

где $f_T(z)$ обозначает T -периодическую функцию от z . После замены переменных $x \rightarrow ibn$ и $y \rightarrow ibs$ интеграл (31) сводится к

$$\mathbb{H}(n) = q^{2n^2} \int ds q^{-4ns} \frac{(q^{2(n-s+1)}|q^2)_{\infty}}{(q^{2(s+1)}|q^2)_{\infty}} f_{ib}(s) \sim q^{2n^2} \sum_s q^{-4ns} \frac{(q^{2(n-s+1)}|q^2)_{\infty}}{(q^{2(s+1)}|q^2)_{\infty}}, \quad (36)$$

где последний переход описан в приложении и сделан с точностью до периодической функции. В то же время полином Джонса может быть переписан как

$$\mathbb{K}(n) \sim \sum_s q^{-2ns} \frac{(q^{2(n-s)}|q^2)_{\infty}}{(q^{2(n+s+1)}|q^2)_{\infty}}. \quad (37)$$

Эти два выражения схожи, но не совпадают в точности, хотя снова можно попытаться связать поведение в ведущем порядке для первого выражения с асимптотикой второго [31], [32]. С другой стороны, поскольку эти инварианты удовлетворяют одному и тому же уравнению с разными неоднородностями, можно смотреть на выражения (36), (37) просто как на разные решения одного и того же тождества Уорда, в котором обычно скрыта основная информация о системе.

Таким образом, можно задать вопрос, до какой степени компактный и некомпактный инварианты независимы, т. е. до какой степени они представляют собой разные инварианты? Ответ на этот вопрос, по-видимому, пока отсутствует.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вывод соотношения (36)

Рассмотрим общую функцию, заданную как интеграл по периодической мере μ :

$$\phi_\mu \left[\begin{smallmatrix} \alpha_1, \dots, \alpha_n \\ \beta_1, \dots, \beta_m \end{smallmatrix} \right] (\gamma, \lambda | z) = \int d\sigma \mu(\sigma) z^\sigma q^{\gamma\sigma^2 + \lambda\sigma} \frac{\prod_{i=1}^n (\alpha_i q^\sigma | q)_\infty}{\prod_{j=1}^m (\beta_j q^\sigma | q)_\infty}.$$

Эта функция удовлетворяет набору разностных уравнений

$$\phi_\mu \left[\begin{smallmatrix} \alpha_1, \dots, \alpha_n \\ \beta_1, \dots, \beta_m \end{smallmatrix} \right] (\gamma, \lambda | z) = z q^{\gamma + \lambda} T_z^{2\gamma} \frac{\prod_{j=1}^m (1 - \beta_j T_z)}{\prod_{i=1}^n (1 - \alpha_i T_z)} \phi_\mu \left[\begin{smallmatrix} \alpha_1, \dots, \alpha_n \\ \beta_1, \dots, \beta_m \end{smallmatrix} \right] (\gamma, \lambda | z),$$

$$T_{\alpha_i} \phi_\mu \left[\begin{smallmatrix} \alpha_1, \dots, \alpha_n \\ \beta_1, \dots, \beta_m \end{smallmatrix} \right] (\gamma, \lambda | z) = (1 - \alpha_i T_z)^{-1} \phi_\mu \left[\begin{smallmatrix} \alpha_1, \dots, \alpha_n \\ \beta_1, \dots, \beta_m \end{smallmatrix} \right] (\gamma, \lambda | z),$$

$$T_{\beta_j} \phi_\mu \left[\begin{smallmatrix} \alpha_1, \dots, \alpha_n \\ \beta_1, \dots, \beta_m \end{smallmatrix} \right] (\gamma, \lambda | z) = (1 - \beta_j T_z) \phi_\mu \left[\begin{smallmatrix} \alpha_1, \dots, \alpha_n \\ \beta_1, \dots, \beta_m \end{smallmatrix} \right] (\gamma, \lambda | z),$$

где T_x – оператор растяжения, $T_x F(x) = f(qx)$. Этим уравнениям также удовлетворяют ряды

$$F \left[\begin{smallmatrix} \alpha_1, \dots, \alpha_n \\ \beta_1, \dots, \beta_m \end{smallmatrix} \right] (\gamma, \lambda | z) = \sum_s z^s q^{\gamma s^2 + \lambda s} \frac{\prod_{i=1}^n (\alpha_i q^s | q)_\infty}{\prod_{j=1}^m (\beta_j q^s | q)_\infty}.$$

Таким образом, мы заключаем, что

$$\phi_\mu \left[\begin{smallmatrix} \alpha_1, \dots, \alpha_n \\ \beta_1, \dots, \beta_m \end{smallmatrix} \right] (\gamma, \lambda | z) = f_\mu \left[\begin{smallmatrix} \alpha_1, \dots, \alpha_n \\ \beta_1, \dots, \beta_m \end{smallmatrix} \right] (z) F \left[\begin{smallmatrix} \alpha_1, \dots, \alpha_n \\ \beta_1, \dots, \beta_m \end{smallmatrix} \right] (\gamma, \lambda | z),$$

где функция f не зависит от μ , хотя она является q -периодической по всем аргументам.

Список литературы

- [1] J. W. Alexander, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **30**:2 (1928), 275–306; J. H. Conway, “An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties”, *Computational Problems in Abstract Algebra* (Science Research Council Atlas Computer Laboratory, Oxford, 29 August – 2 September, 1967), ed. J. Leech, Pergamon Press, Oxford, New York, 1970, 329–358.
- [2] V. F. R. Jones, *Invent. Math.*, **72**:1 (1983), 1–25; *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)*, **12**:1 (1985), 103–111; *Ann. Math. (2)*, **126**:2 (1987), 335–388.
- [3] S.-S. Chern, J. Simons, *Ann. Math. (2)*, **99**:1 (1974), 48–69.
- [4] E. Witten, *Commun. Math. Phys.*, **121**:3 (1989), 351–399.
- [5] E. Guadagnini, M. Martellini, M. Mintchev, “Chern–Simons field theory and quantum groups”, *Quantum Groups*, Proceedings of the 8th International Workshop on Mathematical Physics (Clausthal, Germany, July 19–26, 1989), Lecture Notes in Physics, **370**, eds. H. D. Doebner, J. D. Hennig, World Sci., Singapore, 1990, 307–317; N. Yu. Reshetikhin, V. G. Turaev, *Commun. Math. Phys.*, **127**:1 (1990), 1–26.
- [6] A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov, *JHEP*, **03** (2012), 034, 33 pp., arXiv: 1112.2654; H. Itoyama, A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **27**:3–4 (2012), 1250009, 85 pp., arXiv: 1204.4785; **28**:3–4 (2013), 1340009, 81 pp., arXiv: 1209.6304; A. C. Анохина, A. A. Морозов, *ТМФ*, **178**:1 (2014), 3–68, arXiv: 1307.2216; A. Anokhina, A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov, *Nucl. Phys. B*, **868**:1 (2013), 271–313, arXiv: 1207.0279; A. Anokhina, A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov, *Adv. High. Energy Phys.*, **2013** (2013), 931830, 12 pp., arXiv: 1304.1486.
- [7] A. Morozov, A. Smirnov, *Nucl. Phys. B*, **835**:3 (2010), 284–313, arXiv: 1001.2003; A. Smirnov, *Notes on Chern–Simons theory in the temporal gauge*, arXiv: 0910.5011.

- [8] L. D. Faddeev, “Modular double of a quantum group”, *Conférence Moshé Flato 1999: Quantization, deformation, and symmetries*, v. I (Dijon, France, September 5–8, 1999), Mathematical Physics Studies, **21**, eds. G. Dito, D. Sternheimer, Kluwer, Dordrecht, 2000, 149–156, arXiv: math/9912078.
- [9] D. Galakhov, A. Mironov, A. Morozov, *ЖЭТФ*, **147**:3 (2015), 623–663, arXiv: 1410.8482.
- [10] K. Hikami, R. Inoue, *J. Knot Theory Ramifications*, **23**:1 (2014), 1450006, 33 pp., arXiv: 1212.6042; *Algebr. Geom. Topol.*, **15**:4 (2015), 2175–2194, arXiv: 1304.4776; *J. Phys. A: Math. Theor.*, **47**:47 (2014), 474006, 21 pp., arXiv: 1404.2009.
- [11] K. Hikami, *Internat. J. Modern Phys. A*, **16**:19 (2001), 3309–3333, arXiv: math-ph/0105039; *J. Geom. Phys.*, **57**:9 (2007), 1895–1940, arXiv: math/0604094.
- [12] R. M. Kashaev, *Алгебра и анализ*, **8**:4 (1996), 63–74, arXiv: q-alg/9503005.
- [13] T. Dimofte, S. Gukov, J. Lenells, D. Zagier, *Commun. Number Theory Phys.*, **3**:2 (200), 363–443, arXiv: 0903.2472.
- [14] D. Galakhov, D. Melnikov, A. Mironov, A. Morozov, A. Sleptsov, *Nucl. Phys. B*, **899** (2015), 194–228, arXiv: 1502.02621.
- [15] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **241**:2 (1984), 333–380; V. Dotsenko, V. Fateev, *Nucl. Phys. B*, **240**:3 (1984), 312–348.
- [16] L. Alvarez-Gaumé, C. Gomez, S. Sierra, *Phys. Lett. B*, **220**:1–2 (1989), 142.
- [17] R. K. Kaul, T. R. Govindarajan, *Nucl. Phys. B*, **380**:1–2 (1992), 293–333, arXiv: hep-th/9111063; P. Ramadevi, T. R. Govindarajan, R. K. Kaul, *Nucl. Phys. B*, **402**:1–2 (1993), 548–566, arXiv: hep-th/9212110; *Nucl. Phys. B*, **422**:1–2 (1994), 291–306, arXiv: hep-th/9312215; P. Ramadevi, T. Sarkar, *Nucl. Phys. B*, **600**:3 (2001), 487–511, arXiv: hep-th/0009188; Zodinmawia, P. Ramadevi, *Nucl. Phys. B*, **870**:1 (2013), 205–242, arXiv: 1107.3918; *Reformulated invariants for non-torus knots and links*, arXiv: 1209.1346.
- [18] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 3: *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, М., 1974.
- [19] A. N. Kirillov, N. Yu. Reshetikhin, *Representations of the algebra $U_q(sl(2))$, q -orthogonal polynomials and invariants of links*, Preprint LOMI E-9-88, LOMI, Leningrad, 1988.
- [20] H. R. Morton, S. G. Lukac, *J. Knot Theory Ramifications*, **12**:3 (2003), 395–416, arXiv: math.GT/0108011.
- [21] C. C. Adams, *The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*, W. H. Freeman, New York, 1994.
- [22] S. Nawata, P. Ramadevi, Zodinmawia, *J. Knot Theory Ramifications*, **22**:13 (2013), 1350078, 58 pp., arXiv: 1302.5144; D. Galakhov, D. Melnikov, A. Mironov, A. Morozov, A. Sleptsov, *Phys. Lett. B*, **743** (2015), 71–74, arXiv: 1412.2616; A. Mironov, A. Morozov, A. Sleptsov, *JHEP*, **07** (2015), 069, 34 pp., arXiv: 1412.8432; S. Nawata, P. Ramadevi, V. K. Singh, *Colored HOMFLY polynomials can distinguish mutant knots*, arXiv: 1504.00364; A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov, P. Ramadevi, V. K. Singh, *JHEP*, **07** (2015), 109, 68 pp., arXiv: 1504.00371; A. Mironov, A. Morozov, *Nucl. Phys. B*, **899** (2015), 395–413, arXiv: 1506.00339; A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, A. Sleptsov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **30**:26 (2015), 1550169, 40 pp., arXiv: 1508.02870.
- [23] S. Garoufalidis, T. T. Q. Lê, *Geom. Topol.*, **9** (2005), 1253–1293, arXiv: math/0309214.
- [24] H. Itoyama, A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov, *JHEP*, **07** (2012), 131, 21 pp., arXiv: 1203.5978; A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov, *AIP Conf. Proc.*, **1562**:1 (2013), 123–155, arXiv: 1306.3197.
- [25] J. E. Andersen, R. Kashaev, *A TQFT from quantum Teichmüller theory*, arXiv: 1109.6295.
- [26] R. M. Kashaev, “On the spectrum of Dehn twists in quantum Teichmüller theory”, *Physics and Combinatorics* (Nagoya University, 21 – 26 August, 2000), eds. A. N. Kirillov, N. Liskova, World Sci., Singapore, 2001, 63–81, arXiv: math/0008148.
- [27] A. Bytsko, J. Teschner, *Commun. Math. Phys.*, **240** (2003), 171–196, arXiv: math/0208191.

- [28] D. Cooper, M. Culler, H. Gillet, D.D. Long, P.B. Shalen, *Invent. Math.*, **118**:1 (1994), 47–84.
- [29] S. Garoufalidis, “On the characteristic and deformation varieties of a knot”, *Proceedings of the Casson Fest* (Fayetteville, AR, USA, April 10–12, 2003; Austin, TX, USA, May 19–21, 2003), Geometry and Topology Monographs, **7**, eds. C. Gordon, Y. Rieck, Geometry and Topology Publ., Coventry, 2004, 291–309, arXiv:math/0306230.
- [30] T. Dimofte, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **17**:3 (2013), 479–599, arXiv:1102.4847.
- [31] K. Hikami, *Nucl. Phys. B*, **773**:3 (2007), 184–202, arXiv:math-ph/0407043.
- [32] Д. В. Галахов, А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов, А. В. Смирнов, *ТМФ*, **172**:1 (2012), 73–99, arXiv:1104.2589.

Поступила в редакцию 19.10.2015