Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Е. Брандышев, Спонтанная компактификация одиннадцатимерной супергравитации с учетом поправок высших порядков по кривизне, *ТМФ*, 2016, том 188, номер 1, 158–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9069>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 15:28:41

© 2016 г.

П. Е. Брандышев*

СПОНТАННАЯ КОМПАКТИФИКАЦИЯ ОДИННАДЦАТИМЕРНОЙ СУПЕРГРАВИТАЦИИ С УЧЕТОМ ПОПРАВОК ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ПО КРИВИЗНЕ

Исследуется механизм спонтанной компактификации Фройнда–Рубина–Энглера. Рассматривается низкоэнергетическое эффективное действие для супермембраны в одиннадцати измерениях с учетом членов четвертого порядка по кривизне. Из данного действия получены уравнения движения для бозонного сектора одиннадцатимерной $N = 1$ супергравитации. Найдены вакуумные решения космологического типа, соответствующие закону Хаббла.

Ключевые слова: одиннадцатимерная супергравитация, спонтанная компактификация, космология.

DOI: 10.4213/tmf9069

1. ВВЕДЕНИЕ

Механизм спонтанной компактификации в теориях типа теории Калуцы–Клейна заключается в следующем (см., например, [1], [2]). В D -мерном пространстве-времени M рассматриваются уравнения движения, описывающие гравитационное поле. Ищется вакуумное решение этих уравнений, отвечающее представлению D -мерного многообразия в виде $M = M^4 \times K$, где M^4 – четырехмерное пространство-время (обычно в качестве M^4 рассматривается пространство де Ситтера, анти-де Ситтера или Минковского), K – компактное (внутреннее) многообразие, в качестве которого обычно выбирается пространство Эйнштейна. Представление многообразия M в виде прямого произведения двух подпространств индуцирует блочно-диагональный вид вакуумной метрики

$$g_{MN} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & g_{mn} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

*Ивановский государственный университет, Иваново, Россия.
E-mail: petr.brandyshev@mail.ru

где $g_{\mu\nu}$ и g_{mn} – компоненты метрического тензора g_{MN} , определенные на подпространствах $\mathbb{M}^4$ и $\mathbb{K}$ соответственно. В свою очередь, блочное представление метрики g_{MN} совместно с уравнениями гравитационного поля в D -мерном пространстве-времени, которые имеют вид

$$R_{MN} - \frac{1}{2}g_{MN}R = T_{MN}. \quad (2)$$

2. ВАКУУМНЫЕ РЕШЕНИЯ И ЗАПРЕЩАЮЩАЯ (NO-GO) ТЕОРЕМА

Рассмотрим механизм Фройнда–Рубина–Энглера [3], [4] спонтанной компактификации $N = 1$ супергравитации в одиннадцать измерений [5]. Уравнения движения для бозонных полей этой теории можно записать в виде

$$\begin{aligned} R_{MN} - \frac{1}{2}g_{MN}R &= 12(8F_{MPQR}F_N{}^{PQR} - g_{MN}F_{SPQR}F^{SPQR}), \\ \nabla_M F^{MNPQ} &= -\frac{\sqrt{2}}{48}\epsilon^{NPQM_1\dots M_8}F_{M_1M_2M_3M_4}F_{M_5M_6M_7M_8}. \end{aligned} \quad (3)$$

Сигнатура метрики здесь и ниже $(-+++ \dots +)$, через ∇_M здесь обозначена ковариантная производная относительно символов Кристоффеля, а $\epsilon^{M_1\dots M_k}$ обозначает полностью антисимметричный тензор k -го ранга, удовлетворяющий равенству $\epsilon^{123\dots k} = 1/\sqrt{|g|}$, где $|g|$ – модуль определителя матрицы, составленной из компонент метрического тензора g_{MN} .

Простейшее решение уравнений движения (3) (решение Фройнда–Рубина), совместное с блочным видом g_{MN} , получается, если выбрать анзац

$$F_{\mu\nu\sigma\lambda} = \rho\epsilon_{\mu\nu\sigma\lambda}, \quad (4)$$

где ρ – постоянная, $\epsilon_{0123} = \pm\sqrt{|g_4|}$, и положить остальные компоненты F_{MNPQ} равными нулю. Более сложное решение, допускающее ненулевые компоненты F_{mnpq} (решение Энглера) получается, если в качестве $\mathbb{K}$ выбрать пространство аффинной связности с кручением S_{mnp} , которое определяет компоненты 3-формы калибровочного потенциала A_{mnp} и напряженности F_{mnpq} равенствами

$$A_{mnp} = \lambda S_{[mnp]}, \quad F_{mnpq} = \lambda \nabla_{[q} S_{mnp]}. \quad (5)$$

Тогда бозонный сектор одиннадцатимерной супергравитации может рассматриваться [6] как чистая гравитация с кручением, если представить $\mathbb{K}$ в виде пространства с абсолютным параллелизмом. Для получения решений используется подход Гюрши–Цзе [7], [8] (см. также [9]), согласно которому пространство $\mathbb{K}$ вкладывается в алгебру октонионов (чисел Кэли) $\mathbb{K} = \{x \in \mathbb{O} \mid n(x) = r\}$ и представляется в виде сферы $\mathbb{S}^7$ постоянного радиуса r , а тензор кручения связывается со структурными константами алгебры октонионов

$$\begin{aligned} S_{mnp} &= kh_m^{(i)}h_n^{(j)}h_p^{(k)}c_{ijk}, \\ S_{[mn}^t S_{pq]t} &= k^2 h_m^{(i)}h_n^{(j)}h_p^{(k)}h_q^{(l)}c_{ijkl}, \end{aligned} \quad (6)$$

где k – вещественная константа, $h_m^{(i)}$ – ортонормированная септада, задающая касательное расслоение (i – номер вектора, m – номер компоненты этого вектора), c_{ijk} и c_{ijkl} – константы, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{aligned} c_{ijkl} &= \delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl} + c_{nij}c_{nkl}, \\ c_{ijkl} &= c_{n[ij}c_{kl]n}, \\ 24c_{ijk} &= \varepsilon_{ijkmnpq}c_{mnpq}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\varepsilon_{ijkmnpq}$ – полностью антисимметричный символ Леви-Чевиты, удовлетворяющий равенству $\varepsilon_{123...7} = -1$. Отличные от нуля структурные константы $c_{123} = c_{246} = c_{435} = c_{367} = c_{651} = c_{572} = c_{714} = 1$. Тогда тензор напряженности удовлетворяет тождеству

$$F_{mnpq} = \lambda S_{[mn}^t S_{pq]t}. \quad (8)$$

Используя соотношения (4)–(8), легко получить решения уравнений движения (3)

$$\lambda k(6\sqrt{2}\rho + k) = 0, \quad (9)$$

$$R_{mn} = 6k^2 g_{mn}, \quad R_{\mu\nu} = -10k^2 g_{\mu\nu}, \quad (10)$$

где

$$2\lambda^2 = \frac{1}{(12k)^2}, \quad k = \pm \frac{1}{r}. \quad (11)$$

Отсюда видно, что уравнения имеют решения только в случае, когда $\mathbb{M}^4$ является пространством постоянной отрицательной кривизны $R_4 < 0$ (пространством де Ситтера второго рода). Решения космологического типа ищутся в виде пространства де Ситтера первого рода, которое наиболее просто реализуется в виде многообразия с метрикой Робертсона–Уокера

$$ds^2 = a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) - dt^2 \quad (12)$$

и масштабным фактором, удовлетворяющим закону Хаббла

$$\dot{a} = ha. \quad (13)$$

Тогда тензор Риччи должен удовлетворять тождеству

$$R_{\mu\nu} = 3h^2 g_{\mu\nu}. \quad (14)$$

Таким образом, чтобы найти решения, соответствующие данным наблюдений, необходимо в качестве $\mathbb{M}^4$ рассматривать пространство постоянной положительной кривизны. Однако в классической одиннадцатимерной $N = 1$ супергравитации получить такие решения невозможно вследствие теоремы запрета (по-го теоремы [10], [11]). Наиболее простой способ решения проблемы – включение в лагранжиан Λ -члена или скалярного поля. Причем если в лагранжиан входит потенциал скалярного поля $V(\varphi)$, то вакуумное решение $\varphi = \text{const}$ эквивалентно введению Λ -члена (который обычно ассоциируется с темной энергией). Интересно рассмотреть возможности получения решений без эффективного Λ -члена, которые обсуждались в работе [1]:

- 1) учет членов высших порядков по тензору кривизны;
- 2) гипотеза о существовании дополнительных временных измерений [12];
- 3) радиационные поправки или духовые поля [13], которые появляются для гипермультиплетов, содержащих некомпактные пространства.

3. МЕМБРАННЫЕ ПОПРАВКИ К ДЕЙСТВИЮ ОДИННАДЦАТИМЕРНОЙ СУПЕРГРАВИТАЦИИ

Известно, что теория одиннадцатимерной $N = 1$ супергравитации является низкоэнергетическим пределом более фундаментальной М-теории [14]–[18]. Классические уравнения одиннадцатимерной $N = 1$ супергравитации могут быть получены из действия для супермембраны (действия для мирового объема), если потребовать, чтобы это действие было инвариантно относительно локальных преобразований κ -симметрии Зигеля [19], [20]. Если учесть члены высших порядков по кривизне [21]–[27], то низкоэнергетическое эффективное действие для супермембраны в одиннадцати измерениях (действие для фоновых полей) запишется в виде

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_1, \quad (15)$$

где $\mathcal{S}_0$ – классическое действие одиннадцатимерной $N = 1$ супергравитации [5] (бозонный сектор)

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0 = \int d^{(11)}x \sqrt{-g} [& R - 24F^{SPQR}F_{SPQR} - \\ & - \frac{\sqrt{2}}{3}\epsilon^{CFTSPQRIJKL}A_{CFT}F_{SPQR}F_{IJKL}], \end{aligned} \quad (16)$$

а поправка $\mathcal{S}_1$ представляет собой $\mathbb{R}^4$ -суперинвариант

$$\mathcal{S}_1 = \kappa T \int d^{(11)}x \sqrt{-g} \left(U - \frac{1}{4!}E - \sqrt{2}V \right), \quad (17)$$

$$U = t_{M_1 M_2 \dots M_8} t^{N_1 N_2 \dots N_8} R^{M_1 M_2}_{N_1 N_2} \dots R^{M_7 M_8}_{N_7 N_8}, \quad (18)$$

$$E = \epsilon_{ADSM_1 M_2 \dots M_8} \epsilon^{ADSN_1 N_2 \dots N_8} R^{M_1 M_2}_{N_1 N_2} \dots R^{M_7 M_8}_{N_7 N_8}, \quad (19)$$

$$V = 6\epsilon^{SFTIJKLMNPQ} A_{SFT} J_{IJKLMNPQ}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} J_{IJKLMNPQ} = & 4R^A{}_{BIJ}R^B{}_{CKL}R^C{}_{DMN}R^D{}_{APQ} - \\ & - R^{AB}{}_{IJ}R_{ABKL}R^{CD}{}_{MN}R_{CDPQ}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$T = \frac{1}{2\pi l_{11}^3}, \quad \kappa = \frac{\pi l_{11}^9}{3^2 2^{12}}, \quad (22)$$

T – натяжение мембраны, l_{11} – планковская длина для $D = 11$, $\epsilon^{M_1 M_2 \dots M_k}$ – полностью антисимметричный тензор, отличные от нуля компоненты которого определяются соотношением $\epsilon^{0123\dots k} = 1/\sqrt{-g}$. Тензор $t^{N_1 N_2 \dots N_8}$ определяется следующим образом [27]:

$$\begin{aligned} t^{MNPQIJKL} = & -2(g^{MP}g^{NQ}g^{IK}g^{JL} + g^{MI}g^{NJ}g^{PK}g^{QL} + g^{MK}g^{NL}g^{PI}g^{QJ}) + \\ & + 8(g^{NP}g^{QI}g^{JK}g^{LM} + g^{NI}g^{JP}g^{QK}g^{LM} + g^{NI}g^{JK}g^{LP}g^{QM}). \end{aligned} \quad (23)$$

В таком случае свертка (18) приобретает вид [28]

$$\begin{aligned} U = & 12[(R^{MNPQ}R_{MNPQ})^2 + 2R_{KLMN}R^{MNPQ}R_{PQIJ}R^{IJKL} - \\ & - 16R_{QMNP}R^{LMNP}R^{QIJK}R_{LIJK} + 16R_{IMNJ}R^{KMNL}R_{KPQL}R^{IPQJ} - \\ & - 8R_{IJMN}R_{KL}{}^{MN}R^{IK}{}_{PQ}R^{JLPQ} + 32R_{LMNK}R_P{}^{MN}{}_Q R^L{}_{IJ}{}^Q R^{PIJK}]. \end{aligned} \quad (24)$$

Вариацию данного выражения запишем в виде

$$\delta U = 4(U_M{}^{NPQ}\delta R^M{}_{NPQ} - U^{IJ}\delta g_{IJ}) \quad (25)$$

(явный вид тензоров U^{MNPQ} и U^{MN} приведен в приложении А). Интегрируя выражение (25) по частям, легко показать, что

$$\begin{aligned} \delta \int d^{(11)}x \sqrt{-g}U &= \frac{1}{2} \int (Ug^{IJ} - 8U^{IJ})\delta g_{IJ}\sqrt{-g} d^{(11)}x + \\ &+ 4 \int \nabla_K \nabla_L (U^{IK[LJ]} + U^{IJ[LK]} + U^{KI[JL]})\delta g_{IJ}\sqrt{-g} d^{(11)}x. \end{aligned} \quad (26)$$

Аналогичным образом можно вычислить вариации:

$$\begin{aligned} \delta \int d^{(11)}x \sqrt{-g}E &= \frac{1}{2} \int (Eg^{MN} - 8E^{MN})\delta g_{MN}\sqrt{-g} d^{(11)}x + \\ &+ 8 \int \nabla_P \nabla_Q E^{MPQN}\delta g_{MN}\sqrt{-g} d^{(11)}x, \\ \delta \int d^{(11)}x \sqrt{-g}V &= 8 \int \nabla_P \nabla_Q V^{MPQN}\delta g_{MN}\sqrt{-g} d^{(11)}x, \end{aligned} \quad (27)$$

где введены следующие обозначения:

$$E^{MN} = \epsilon^M{}_{QCDM_1M_2\dots M_7}\epsilon^{QCDN_1N_2\dots N_8}R^{M_1M_2}{}_{N_1N_2}\dots R^{M_7N}{}_{N_7N_8}, \quad (28)$$

$$E^{MNPQ} = \epsilon^{MN}{}_{ADSM_1M_2\dots M_6}\epsilon^{ADSN_1N_2\dots N_6}R^{M_1M_2}{}_{N_1N_2}\dots R^{M_5M_6}{}_{N_5N_6}, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} V^{ABCD} &= 6\epsilon^{SFTIJKLMNCD}A_{SFT}(4R^B{}_{PIJ}R^P{}_{QKL}R^{QA}{}_{MN} - \\ &- R^P{}_{QIJ}R^Q{}_{PKL}R^{BA}{}_{MN}). \end{aligned} \quad (30)$$

Используя выражения (26), (27), из действия (15) получим уравнения

$$\begin{aligned} R^{MN} - \frac{1}{2}Rg^{MN} + \frac{\kappa T}{2} \left[8U^{(MN)} - Ug^{MN} - 8\nabla_P \nabla_Q W^{P(MN)Q} - \right. \\ \left. - \frac{1}{4!}(8E^{(MN)} - Eg^{MN} - 16\nabla_P \nabla_Q E^{P(MN)Q}) + 16\sqrt{2}\nabla_P \nabla_Q V^{P(MN)Q} \right] = \\ = 12(8F^{MPQR}F^N{}_{PQR} - g^{MN}F^2), \end{aligned} \quad (31)$$

$$W^{KIJL} = U^{IK[LJ]} + U^{IJ[LK]} + U^{KI[JL]}. \quad (32)$$

Варьируя действие (15) по A_{MNP} , получим уравнения для антисимметричного поля:

$$\nabla_Q F^{QMNP} = -\frac{\sqrt{2}}{48}\epsilon^{MNP M_1\dots M_8}F_{M_1M_2M_3M_4}F_{M_5M_6M_7M_8} - \frac{\sqrt{2}}{8}\kappa T J^{MNP}, \quad (33)$$

$$J^{MNP} = \epsilon^{MNP IJKLMNCD}J_{IKLABCD}. \quad (34)$$

4. КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Решение типа Энглерта можно получить, если в качестве $\mathbb{M}^4$ и $\mathbb{K}$ рассмотреть пространство Эйнштейна

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \gamma(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}), \quad (35)$$

$$R_{mnpq} = k^2(g_{mp}g_{nq} - g_{mq}g_{np}), \quad (36)$$

где γ – постоянная. Тогда, с учетом равенств (4)–(8), уравнения движения (31) и (33) сводятся к следующим алгебраическим уравнениям (см. приложение Б):

$$3^2 2^{13} 7 \lambda^2 k^4 = 2^8 (3\gamma + 17k^2) + l_{11}^6 (8\gamma^4 + 161k^8 + 840\gamma k^6), \quad (37)$$

$$48 l_{11}^6 \gamma^4 = 2^8 3 (15\gamma + 50k^2) + l_{11}^6 (2520\gamma k^6 + 2772\gamma^2 k^4), \quad (38)$$

$$6\sqrt{2}\rho = -k. \quad (39)$$

Очевидно, что если пренебречь поправками (положить $l_{11} = 0$), то мы получим решение

$$3\gamma = -10k^2, \quad 3^2 2^4 \lambda^2 \gamma = -5, \quad (40)$$

совпадающее с решением Энглерта (10), (11). Теперь рассмотрим $\mathbb{M}^4$ в виде пространства постоянной положительной кривизны с масштабным фактором, удовлетворяющим равенству (13), и представим пространство-время в виде прямого произведения

$$\mathbb{M} = dS_4 \times \mathbb{S}^7. \quad (41)$$

Тогда многообразие dS_4 удовлетворяет равенству (35), если положить $\gamma = h^2$. Для выполнения условия ненаблюдаемости дополнительных измерений необходимо, чтобы радиус внутреннего пространства имел порядок планковской длины. Тогда из уравнения (38) видно, что если $r \approx l_{11}$, то постоянная Хаббла $h \approx l_{11}^{-1}$ (используется система единиц $\hbar = c = 1$). Величины l_{11} и l_4 связаны соотношением

$$l_{11}^9 = \mathcal{V} l_4^2, \quad (42)$$

где $\mathcal{V} \sim r^7$ – объем внутреннего пространства $\mathbb{S}^7$, $l_4 \approx 1.616 \cdot 10^{-33}$ см – планковская длина для $D = 4$. Таким образом, при условии малости радиуса дополнительных измерений мы сталкиваемся с проблемой большой постоянной Хаббла. Заметим, однако, что на ранней стадии инфляции постоянная Хаббла, вообще говоря, не обязательно должна быть малой величиной. Поэтому данное решение может соответствовать начальной стадии инфляции. С другой стороны, полученное решение совместимо с малым значением h при условии больших дополнительных измерений. Известно, что существуют модели, допускающие большой (и даже бесконечный) размер дополнительных измерений, например известная модель Аркани-Хамеда–Димопулоса–Двали [29]–[31]. Безусловно, эта модель сыграла значительную роль в формировании представлений о пространстве-времени, но данная модель не выглядит правдоподобной, и маловероятно, что Вселенная устроена именно так.

Тогда рассмотрим другое решение (решение типа Фройнда–Рубина), которое легко получить, если представить пространство-время в виде произведения

$$\mathbb{M} = dS_4 \times \mathbb{S}^4 \times \mathbb{S}^3. \quad (43)$$

Метрика имеет блочно-диагональный вид

$$g_{MN} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} & 0 & 0 \\ 0 & g_{mn} & 0 \\ 0 & 0 & g_{ab} \end{pmatrix}, \quad (44)$$

где $\mu\nu = 0, 1, 2, 3$, $m, n = 4, 5, 6, 7$, $a, b = 8, 9, 10$, $g_{\mu\nu}$ – метрика четырехмерного пространства-времени $\mathbb{M}^4$, g_{mn} – метрика на $\mathbb{S}^4$, g_{ab} – метрика на $\mathbb{S}^3$. Пространства $\mathbb{M}^4$, $\mathbb{S}^4$ и $\mathbb{S}^3$ являются пространствами Эйнштейна, и отличные от нуля компоненты тензора кривизны имеют вид

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\alpha\beta} &= h^2(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}), \\ R_{mnpq} &= \alpha^2(g_{mp}g_{nq} - g_{mq}g_{np}), \\ R_{abcd} &= \beta^2(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}). \end{aligned} \quad (45)$$

Тогда, используя анзац (4), уравнения (31) легко привести к виду

$$\begin{aligned} &2^8 3(h^2 + 2\alpha^2 + \beta^2) - l_{11}^6(8\alpha^8 + 3\beta^8 - 8h^8 + \\ &\quad + 24\alpha^4 h^4 + 12\beta^4 h^4 - 2^3 3^2 \alpha^4 \beta^2 h^2) = 3^2 2^{13} \rho^2, \\ &-2^8 3(2h^2 + \alpha^2 + \beta^2) + l_{11}^6(3\beta^8 - 8\alpha^8 + 8h^8 + \\ &\quad + 12\alpha^4 \beta^4 + 24\alpha^4 h^4 - 2^3 3^2 \alpha^2 \beta^2 h^4) = 3^2 2^{13} \rho^2, \\ &-2^8(6h^2 + 6\alpha^2 + \beta^2) + l_{11}^6[16\alpha^4 \beta^4 + 16\beta^4 h^4 - 2^3 3\alpha^4 h^4 - \\ &\quad - 2^4 3\alpha^4 \beta^2 h^2 - 2^4 3\alpha^2 \beta^2 h^4 + 8\alpha^8 - 5\beta^8 + 8h^8] = 3^2 2^{13} \rho^2. \end{aligned} \quad (46)$$

Здесь предполагается, что отличны от нуля только компоненты $F_{\mu\nu\alpha\beta}$, поэтому уравнения (33) выполняются автоматически. Обычно используется метрика Робертсона–Уокера

$$ds_1^2 = e^{2ht}(dx^2 + dy^2 + dz^2) - dt^2, \quad (47)$$

$$ds_2^2 = s^2 d\phi^2 + s^2 \sin^2 \phi d\Omega_3^2, \quad (48)$$

$$ds_3^2 = a^2 d\omega^2 + a^2 \sin^2 \omega (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (49)$$

где ds_1 – интервал в четырехмерном пространстве-времени $\mathbb{M}^4$, ds_2 – интервал в пространстве $\mathbb{S}^4$, ds_3 – интервал в пространстве $\mathbb{S}^3$, $d\Omega_3^2$ – метрика на трехмерной единичной сфере (такая метрика получится, если в (49) положить $a = 1$), s – радиус сферы $\mathbb{S}^4$, a – радиус сферы $\mathbb{S}^3$. Тогда постоянные $\alpha = 1/s$, $\beta = 1/a$. В данном случае l_{11} и l_4 связаны равенством

$$l_{11}^9 = \mathcal{V} l_4^2, \quad \mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \mathcal{V}_2, \quad \mathcal{V}_1 = 2\pi^2 a^3, \quad \mathcal{V}_2 = \frac{8}{3} \pi^2 s^4, \quad (50)$$

где $\mathcal{V}_1$ – объем сферы $\mathbb{S}^3$, $\mathcal{V}_2$ – объем $\mathbb{S}^4$, $\mathcal{V}$ – объем $\mathbb{K} = \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^4$. Данное решение представляется более интересным, так как оно совместимо со сколь угодно малыми значениями постоянной Хаббла при малых размерах дополнительных измерений (порядка планковских). Для того чтобы привести это решение в соответствие с данными наблюдений (чтобы оно было применимо для описания современной стадии инфляции), необходимо положить постоянную Хаббла h равной

$$h \approx (1.184 \pm 0.014) \cdot 10^{-61} l_4^{-1}, \quad (51)$$

тогда получим приближенное решение уравнений движения (46):

$$\alpha l_{11} \approx 2.217, \quad \beta l_{11} \approx 2.511, \quad (\rho l_{11})^2 \approx 0.04. \quad (52)$$

Плотность энергии вакуума, определяемая величиной $\varepsilon = T^{00}$, равна

$$\varepsilon_2 = 3^2 2^5 \rho^2, \quad \varepsilon_2 l_{11}^2 \approx 11.638, \quad (53)$$

что существенно меньше плотности энергии вакуума, отвечающего представлению (41), так как из уравнений (37)–(39) следует, что плотность энергии должна составлять

$$\varepsilon_1 = 4k^2 + 3^2 2^5 7 \lambda^2 k^4, \quad \varepsilon_1 l_{11}^2 \approx 370.849. \quad (54)$$

Рассмотренные варианты компактификации, соответствующие представлениям (41) и (43), в принципе могут интерпретироваться как решения, описывающие разные стадии инфляции. Переход из одной стадии в другую может трактоваться как распад ложного вакуума, в процессе которого происходит туннелирование из одного локального минимума энергии вакуума в другой. Причем в результате перехода в состояние с меньшей энергией вакуум становится менее симметричным. Разумеется, множество вариантов компактификации не исчерпывается полученными в данной работе решениями. Может существовать множество классических вакуумов.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе был исследован механизм спонтанной компактификации Фройнда–Рубина–Энглера одиннадцатимерной супергравитации с учетом членов четвертого порядка по тензору кривизны. Были получены космологические решения в виде пространства де Ситтера первого рода dS_4 , описывающие экспоненциальное расширение трехмерного пространства в соответствии с законом Хаббла. Как известно, в теории одиннадцатимерной супергравитации, которая описывается стандартным действием [5], получение таких решений оказывается невозможным вследствие теоремы запрета [10], [11]. Отличительной чертой полученного в данной работе решения типа Энглера, построенного на семимерной сфере с кручением, является то, что оно предсказывает весьма большое значение постоянной Хаббла, соответствующее начальной стадии инфляции. Таким образом, очевидно, что эта модель неприменима, по крайней мере, для описания современной стадии инфляции. Также получены решения типа Фройнда–Рубина, совместимые с малыми значениями постоянной Хаббла при размерах дополнительных измерений порядка планковских, без эффективного Λ -члена и скалярных полей, что ранее считалось нетривиальной задачей. Преимуществом данного подхода может считаться то, что для получения космологических решений не вводится *ad hoc* предположений, таких, например, как гипотеза о существовании темной энергии, обладающей весьма экзотическими свойствами и пока не обнаруженной экспериментально. Поэтому есть надежда, что результаты, полученные в данной статье, могут представлять определенный интерес и расцениваться как некое, хотя и весьма незначительное, продвижение на пути к решению проблемы космологической постоянной.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

В локально геодезической системе координат вариации символов Кристоффеля и тензора Римана определяются равенствами

$$\begin{aligned} 2\delta\Gamma^M_{NP} &= g^{MK}\{\partial_N(\delta g_{PK}) + \partial_P(\delta g_{NK}) - \partial_K(\delta g_{NP})\}, \\ \delta R^M_{NPQ} &= \partial_P(\delta\Gamma^M_{QN}) - \partial_Q(\delta\Gamma^M_{PN}). \end{aligned} \quad (55)$$

Тогда в произвольной системе координат имеем

$$\begin{aligned} 2\delta\Gamma^M_{NP} &= g^{MK}\{\nabla_N(\delta g_{PK}) + \nabla_P(\delta g_{NK}) - \nabla_K(\delta g_{NP})\}, \\ \delta R^M_{NPQ} &= \nabla_P(\delta\Gamma^M_{QN}) - \nabla_Q(\delta\Gamma^M_{PN}), \\ \delta R^M_{NPQ} &= g^{MK}[\nabla_P\nabla_{[N}(\delta g_{K]Q}) + \nabla_{[P}\nabla_{Q]}(\delta g_{KN}) + \nabla_Q\nabla_{[K}(\delta g_{N]P})]. \end{aligned} \quad (56)$$

В таком случае вариационную производную действия (15) по g_{MN} легко получить, используя стандартное соотношение

$$\frac{\delta g_{IJ}(x)}{\delta g_{MN}(y)} = \delta_I^{(M} \delta_J^{N)} \delta^{(11)}(x - y), \quad (57)$$

где $\delta^{(11)}(x - y)$ – дельта-функция Дирака. Тензоры U^{MNPQ} и U^{MN} , определяющие вариацию (25), имеют вид

$$\begin{aligned} U^{MNPQ} &= 12(R^{IJKL}R_{IJKL}R^{MNPQ} + 2R^{MNIJ}R_{IJKL}R^{KLPQ} - \\ &\quad - 16R^{MIJK}R_{LIJK}R^{LNPQ} + 16R_{LIJK}R^{MIJQ}R^{LNPQ} - \\ &\quad - 8R^{LM}{}_{IJ}R^{NKIJ}R_{KL}{}^{PQ} + 32R^Q{}_{IJK}R^{LIJM}R^{KNP}{}_L), \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} U^{IJ} &= 12(R^{MNPQ}R_{MNPQ}R^{IABC}R^J{}_{ABC} + 2R^{INPQ}R_{PQAB}R^{AB}{}_{KL}R^{KLJ}{}_N + \\ &\quad + 8R^I{}_{MNP}R^{KMNP}R_{KRST}R^{JRST} - 8R_{HMNP}R^{KMNP}R^I{}_{KST}R^{JHST} - \\ &\quad - 16R_{HMNP}R^{KMNP}R_{KRS}{}^IR^{HRSJ} + 16R_{HMNK}R^{PMNQ}R_P{}^ISQR^{HJSK} - \\ &\quad - 4R^H{}_{KMN}R_Q{}^{JMN}R^I{}_{HRS}R^{KQRS} + 4R^{HJ}{}_{MN}R^{QPMN}R_{PHRS}R^I{}_Q{}^{RS} - \\ &\quad - 8R_{HKMN}R_{QP}{}^{MN}R^{PHRI}R^K{}_Q{}^JR^J - 16R^H{}_{MNK}R^{PMNJ}R^I{}_{RSH}R^{KRS}{}_P + \\ &\quad + 16R^H{}_{MN}{}^JR^{PMN}{}_QR^Q{}_{RSH}R^{IRS}{}_P + 32R_{HMNK}R^{PMNQ}R_{QR}{}^{JH}R^{KRI}{}_P), \end{aligned} \quad (59)$$

Используя свойства тензора кривизны

$$R_{MNPQ} = -R_{NMPQ} = -R_{MNQP} = R_{PQMN}, \quad (60)$$

легко получить

$$\nabla_K\nabla_L W^{K(IJ)L} = 24\nabla_K\nabla_L Q^{K(IJ)L}, \quad (61)$$

где

$$\begin{aligned}
Q^{KIJL} = & R^{MNPQ} R_{MNPQ} R^{IKLJ} + 2R^{IKMN} R_{MN}{}^{PQ} R_{PQ}{}^{LJ} - \\
& - 8(R^{INPQ} R_{MNPQ} R^{MKLJ} + R^{INPQ} R_{MNPQ} R^{MJLK} + \\
& + R^{KNPQ} R_{MNPQ} R^{MIJL}) + 4(R^{INPJ} R_{MNPQ} R^{MKLQ} + \\
& + R_{MNPQ} R^{INPK} R^{MJLQ} + R_{MNPQ} R^{KNPL} R^{MIJQ} - \\
& - R_{MNPQ} R^{KNPJ} R^{MILQ} - R_{MNPQ} R^{INPL} R^{MKJQ} - \\
& - R_{MNPQ} R^{INPL} R^{MJKQ}) - 8R^{QI}{}_{MN} R^{KPMN} R_{PQ}{}^{LJ} + \\
& + 8(R^J{}_{MNP} R^{QMNI} R^{PKL}{}_Q + R^K{}_{MNP} R^{QMNI} R^{P JL}{}_Q + \\
& + R^L{}_{MNP} R^{QMNK} R^{PIJ}{}_Q - R^J{}_{MNP} R^{QMNK} R^{PIL}{}_Q - \\
& - R^L{}_{MNP} R^{QMNI} R^{PKJ}{}_Q - R^L{}_{MNP} R^{QMNI} R^{PJK}{}_Q). \quad (62)
\end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

С учетом (35) и (36) тензор Эйнштейна определяется равенствами

$$\begin{aligned}
2R^{\mu\nu} - Rg^{\mu\nu} &= -6(h^2 + 7k^2)g^{\mu\nu}, \\
2R^{mn} - Rg^{mn} &= -6(2h^2 + 5k^2)g^{mn}. \quad (63)
\end{aligned}$$

Если подставить (35) и (36) в (24) и (59), а затем в (19) и (28), то можно получить следующие выражения:

$$\begin{aligned}
8U^{(\mu\nu)} - Ug^{\mu\nu} &= -3^2 2^6 (8h^8 + 161k^8)g^{\mu\nu}, \\
8U^{(mn)} - Ug^{mn} &= 3^2 2^6 (8h^8 + 23k^8 - 36h^4 k^4)g^{mn}, \quad (64)
\end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned}
8E^{(\mu\nu)} - Eg^{\mu\nu} &= 3^4 2^{12} 35 h^2 k^6 g^{\mu\nu}, \\
8E^{(mn)} - Eg^{mn} &= 3^4 2^{12} 5 (3h^4 k^4 + 2h^2 k^6)g^{mn}. \quad (65)
\end{aligned}$$

Подставляя (35) и (36) в (58), (29), (30) и учитывая, что метрический тензор риманова многообразия является ковариантно-постоянным тензором, легко показать, что поправки с высшими производными равны нулю, а именно

$$\nabla_P \nabla_Q W^{P(MN)Q} = \nabla_P \nabla_Q E^{P(MN)Q} = \nabla_P \nabla_Q V^{P(MN)Q} = 0. \quad (66)$$

Подставляя (35) и (36) в (34), легко показать, что

$$J^{MNP} = 0. \quad (67)$$

Из тождеств (24)–(26) следуют выражения для тензора энергии-импульса

$$\begin{aligned}
8F^{\mu PQ R} F^\nu{}_{PQR} - g^{\mu\nu} F^2 &= -24(\rho^2 + 7\lambda^2 k^4)g^{\mu\nu}, \\
8F^{m PQ R} F^n{}_{PQR} - g^{mn} F^2 &= 24(\rho^2 + \lambda^2 k^4)g^{mn}. \quad (68)
\end{aligned}$$

Подставив (63)–(68) в уравнения гравитационного поля (31), легко получить уравнения (37)–(39). Аналогичным образом можно получить уравнения (46).

Благодарности. Автор благодарен своему научному руководителю Е. К. Логину за полезные советы.

Список литературы

- [1] И. Я. Арефьева, И. В. Волович, *УФН*, **146**:4 (1985), 655–681.
- [2] M. J. Duff, B. E. W. Nilsson, C. N. Pope, *Phys. Rept.*, **130**:1–2 (1986), 1–142.
- [3] P. G. O. Freund, M. A. Rubin, *Phys. Lett. B*, **97**:2 (1980), 233–235.
- [4] F. Englert, *Phys. Lett. B*, **119**:1–4 (1982), 339–342.
- [5] E. Cremmer, B. Julia, J. Scherk, *Phys. Lett. B*, **76**:4 (1978), 409–412.
- [6] I. Bars, S. W. MacDowell, *Phys. Lett. B*, **129**:3–4 (1983), 182–184.
- [7] F. Gürsey, C.-H. Tze, *Phys. Lett. B*, **127**:3–4 (1983), 191–196.
- [8] R. Dündarer, F. Gürsey, C.-H. Tze, *J. Math. Phys. (N. Y.)*, **25**:5 (1984), 1496–1506.
- [9] E. K. Loginov, *Phys. Rev. D*, **80**:12 (2009), 124009, 7 pp., arXiv:0912.1729.
- [10] J. Maldacena, C. Nunez, *Internat. J. Modern Phys. A*, **16**:5 (2001), 822–855, arXiv:hep-th/0007018.
- [11] N. Ohta, *Internat. J. Modern Phys. A*, **20**:1 (2008), 1–40.
- [12] И. Я. Арефьева, И. В. Волович, Б. Г. Драгович, *ТМФ*, **70**:3 (1987), 422–431.
- [13] И. Я. Арефьева, И. В. Волович, *ТМФ*, **64**:2 (1985), 329–336.
- [14] P. K. Townsend, *Phys. Lett. B*, **350**:2 (1995), 184–188, arXiv:hep-th/9501068.
- [15] E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **443**:1 (1995), 85–126, arXiv:hep-th/9503124.
- [16] M. J. Duff, *Internat. J. Modern Phys. A*, **11**:32 (1996), 5623–5641, arXiv:hep-th/9608117.
- [17] J. H. Schwarz, *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)*, **55**:2 (1997), 1–32, arXiv:hep-th/9607201.
- [18] P. K. Townsend, *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)*, **58** (1997), 163–175, arXiv:hep-th/9609217.
- [19] E. Bergshoeff, E. Sezgin, P. K. Townsend, *Phys. Lett. B*, **189**:1–2 (1987), 75–78.
- [20] С. В. Кетов, *Введение в квантовую теорию струн и суперструн*, Наука, Новосибирск, 1990.
- [21] J. G. Russo, A. A. Tseytlin, *Nucl. Phys. B*, **508**:1–2 (1997), 245–259, arXiv:hep-th/9707134.
- [22] M. B. Green, P. Vanhove, *Phys. Lett. B*, **408**:1–4 (1997), 122–134, arXiv:hep-th/9704145.
- [23] M. B. Green, P. Vanhove, *Phys. Lett. B*, **409**:1–4 (1997), 177–184.
- [24] E. Kiritsis, B. Pioline, *Nucl. Phys. B*, **508**:3 (1997), 509–534, arXiv:hep-th/9707018.
- [25] I. Antoniadis, S. Ferrara, R. Minasian, K. S. Narain, *Nucl. Phys. B*, **507**:3 (1997), 571–588, arXiv:hep-th/9707013.
- [26] A. A. Tseytlin, *Nucl. Phys. B*, **584**:1–2 (2000), 233–250, arXiv:hep-th/0005072.
- [27] T. W. Grimm, T. G. Pugh, M. Weibenbacher, *Phys. Lett. B*, **743** (2015), 284–289, arXiv:1408.5136.
- [28] M. T. Grisaru, D. Zanon, *Phys. Lett. B*, **177**:3–4 (1986), 347–351.
- [29] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, *Phys. Lett. B*, **429**:3–4 (1998), 263–272, arXiv:hep-ph/9803315.
- [30] I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, *Phys. Lett. B*, **436**:3–4 (1998), 257–263, arXiv:hep-ph/9804398.
- [31] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, *Phys. Rev. D*, **59**:8 (1999), 086004, 21 pp., arXiv:hep-ph/9807344.

Поступила в редакцию 18.10.2015,
после доработки 8.11.2015