Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Конштейн, И. В. Тютин, Идеалы, порожденные следами, в алгебре симплектических отражений $H_{1,\nu_1,\nu_2}(I_2(2m))$, *ТМФ*, 2016, том 187, номер 2, 297–309

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9072>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 14:20:23

© 2016 г.

С. Е. Конштейн^{*†}, И. В. Тютин^{*‡}

ИДЕАЛЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ СЛЕДАМИ, В АЛГЕБРЕ СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ОТРАЖЕНИЙ $H_{1,\nu_1,\nu_2}(I_2(2m))$

Ассоциативная алгебра симплектических отражений $\mathcal{H} := H_{1,\nu_1,\nu_2}(I_2(2m))$, основанная на группе, порожденной системой корней $I_2(2m)$, зависит от двух параметров ν_1 и ν_2 . При каждом значении этих параметров на алгебре имеется m -мерное пространство следов. След tr назовем вырожденным, если соответствующая ему билинейная симметричная форма $B_{\text{tr}}(x, y) = \text{tr}(xy)$ вырождена. Найдены все значения параметров ν_1 и ν_2 , при которых в пространстве следов имеются вырожденные следы, и, как следствие, алгебра $\mathcal{H}$ имеет двусторонний идеал. Оказалось, что линейная комбинация вырожденных следов также является вырожденным следом. Для значений параметров ν_1 и ν_2 , отвечающих вырожденным следам, определены размерности пространств вырожденных следов.

Ключевые слова: алгебры симплектических отражений, идеал, след, суперслед, группа Кокстера, групповая алгебра.

DOI: 10.4213/tmf9072

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Определения. Обозначим через $\mathcal{A}$ ассоциативную $\mathbb{Z}_2$ -градуированную алгебру с единицей и с четностью ε .

Линейная комплекснозначная функция tr на $\mathcal{A}$ называется *следом*, если $\text{tr}(fg - gf) = 0$ для любых элементов $f, g \in \mathcal{A}$. Линейная комплекснозначная функция str на $\mathcal{A}$ называется *суперследом*, если $\text{str}(fg - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)}gf) = 0$ для любых элементов $f, g \in \mathcal{A}$. Эти два определения могут быть объединены в одно следующим образом.

Работа частично поддержана РФФИ (грант № 14-02-01171, С. Е. Конштейн; грант № 14-01-00489, И. В. Тютин), а также частично поддержана Министерством образования и науки Республики Казахстан (грант 3106/ГФ4, С. Е. Конштейн).

^{*}Отделение теоретической физики им. И. Е. Тамма, Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия. E-mail: konsteyn@lpi.ru, tyutin@lpi.ru

[†]Научно-исследовательский институт экспериментальной и теоретической физики, КазНУ им. Аль-Фараби, Алматы, Казахстан

[‡]Томский государственный педагогический университет, Томск, Россия

Пусть $\varkappa = \pm 1$. Линейная комплекснозначная функция sp на $\mathcal{A}$ называется $\varkappa$ -следом, если $\text{sp}(fg - \varkappa^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)}gf) = 0$ для любых элементов $f, g \in \mathcal{A}$.

Каждому ненулевому (супер)следу sp можно сопоставить ненулевую (супер)симметричную билинейную форму $B_{\text{sp}}(f, g) := \text{sp}(fg)$.

Если эта билинейная форма вырождена, то множество ее нуль-векторов образует собственный идеал в $\mathcal{A}$. Будем называть (супер)след sp *вырожденным*, если вырождена билинейная форма B_{sp} .

1.2. Цель и содержание работы. В работе [1] показано, что ассоциативная алгебра наблюдаемых модели Калоджеро, основанной на системе корней $I_2(2m)$ (эта алгебра является также алгеброй симплектических отражений [2]), имеет m -мерное пространство следов и изоморфное ему пространство суперследов. Поэтому все факты, установленные для следов, легко переносятся на суперследы рассматриваемой алгебры.

Ранее в работах [3] и [4] были изучены алгебры $H_{1,\nu}(A_1)$ и $H_{1,\nu}(A_2)$ с одно- и двумерным пространством суперследов соответственно и были найдены дискретные множества значений параметра ν , при которых у алгебр появлялись идеалы, порожденные вырожденными суперследами. При прочих значениях параметров эти алгебры оставались простыми (про идеалы в $H_{1,\nu}(A_n)$ см. [5]; при нулевых параметрах ν все алгебры $H_{1,0}(G)$ просты, см. [6]).

Интересно посмотреть, как выглядит множество значений параметров ν_i , при которых у алгебр появляются идеалы, порожденные вырожденными (супер)следами (далее будем называть эти значения *особыми*), в случае, когда этих параметров два или более.

В настоящей работе мы рассмотрели простейшую из двухпараметрических алгебр симплектических отражений — $\mathcal{H} := H_{1,\nu_1,\nu_2}(I_2(2m))$, где $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{C}$, и показали, что множество особых значений образует на комплексной плоскости (ν_1, ν_2) четыре семейства параллельных комплексных прямых.

В разделах 2–6 даны необходимые определения и приведены основные факты, в разделе 7 получены уравнения на производящие функции следов и выписаны их решения, которые оказались мероморфными функциями своего параметра. В разделах 8, 9 доказано, что если след вырожден, то его производящие функции должны быть целыми, т. е. должны не иметь полюсов. Это требование выделило множество значений параметров ν_1 и ν_2 , при которых алгебра может иметь вырожденный след. Эти значения найдены в разделе 10. При всех найденных особых значениях параметров алгебра $\mathcal{H}$ имеет либо одномерное, либо двумерное пространство вырожденных следов.

2. ГРУППА $I_2(N)$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Группа $I_2(n)$ — это конечная подгруппа ортогональной группы $O(2, \mathbb{R})$, порожденная системой корней $I_2(n)$.

В этом разделе для удобства вместо $\mathbb{R}^2$ мы будем рассматривать $\mathbb{C}$.

Система корней $I_2(n)$ состоит из $2n$ векторов $v_k = e^{i\pi k/n}$, где $k = 0, 1, \dots, 2n - 1$. Группа $I_2(n)$ имеет $2n$ элементов: n отражений R_k , действующих на $z \in \mathbb{C}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} R_k z &= -z^* v_k^2 R_k, \\ R_k z^* &= -z v_k^2 R_k, \quad k \in \mathbb{Z}_n, \end{aligned} \tag{2.1}$$

и n поворотов – элементов вида $S_k := R_k R_0$, причем S_0 является единицей в группе $I_2(n)$. Как легко получить из формул (2.1), эти элементы удовлетворяют соотношениям

$$R_k R_l = S_{k-l}, \quad S_k S_l = S_{k+l}, \quad R_k S_l = R_{k-l}, \quad S_k R_l = R_{k+l}.$$

Очевидно, что если n четно, то отражения R_{2k} лежат в одном классе сопряженности, а R_{2k+1} – в другом. Если n нечетно, то все отражения R_k лежат в одном классе сопряженности.

Повороты S_k и S_l лежат в одном классе сопряженности, если $k + l = n$.

В групповой алгебре $G := \mathbb{C}[I_2(n)]$ группы $I_2(n)$ удобно ввести следующий базис:

$$L_p := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{kp} R_k, \quad Q_p := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{-kp} S_k, \quad (2.2)$$

где $\lambda = e^{2\pi i/n}$, $p \in \mathbb{Z}_n$.

Далее мы будем рассматривать только случай четных n , $n = 2m$.

3. АЛГЕБРА СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ОТРАЖЕНИЙ $H_{1,\nu_0,\nu_1}(I_2(2M))$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Алгебра симплектических отражений $\mathcal{H} := H_{1,\nu_0,\nu_1}(I_2(2m))$ – это ассоциативная алгебра полиномов от образующих a^α, b^α , где $\alpha = 0, 1$, с коэффициентами в G , удовлетворяющих соотношениям¹⁾

$$\begin{aligned} R_k a^\alpha &= -\lambda^k b^\alpha R_k, & R_k b^\alpha &= -\lambda^{-k} a^\alpha R_k, \\ S_k a^\alpha &= \lambda^{-k} a^\alpha S_k, & S_k b^\alpha &= \lambda^k b^\alpha S_k, \\ [a^\alpha, b^\beta] &= \varepsilon^{\alpha\beta} (1 + m(\nu_0 + \nu_1)L_0 + m(\nu_0 - \nu_1)L_m), \\ [a^\alpha, a^\beta] &= \varepsilon^{\alpha\beta} (m(\nu_0 + \nu_1)L_1 + m(\nu_0 - \nu_1)L_{m+1}), \\ [b^\alpha, b^\beta] &= \varepsilon^{\alpha\beta} (m(\nu_0 + \nu_1)L_{-1} + m(\nu_0 - \nu_1)L_{m-1}), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\varepsilon^{\alpha\beta}$ – кососимметрическая форма, $\varepsilon^{01} = 1$.

Задавая четность на алгебре $\mathcal{H}$ соотношениями

$$\varepsilon(a^\alpha) = \varepsilon(b^\alpha) = 1, \quad \varepsilon(R_k) = \varepsilon(S_k) = 0,$$

мы превращаем эту алгебру в супералгебру.

Введем новые параметры алгебры $\mathcal{H}$:

$$\mu_0 := m(\nu_0 + \nu_1), \quad \mu_1 := m(\nu_0 - \nu_1) \quad (3.2)$$

¹⁾Это определение является частным случаем определения 1.1 в [7] при следующем соответствии образующих $x_{i\alpha}$ из [7] и a^α, b^α :

$$a^\alpha = x_{1\alpha} + ix_{2\alpha}, \quad b^\alpha = x_{1\alpha} - ix_{2\alpha}.$$

и перепишем соотношения между образующими алгебры $\mathcal{H}$ и элементами групповой алгебры G :

$$\begin{aligned}
 L_p a^\alpha &= -b^\alpha L_{p+1}, & L_p b^\alpha &= -a^\alpha L_{p-1}, \\
 Q_p a^\alpha &= a^\alpha Q_{p+1}, & Q_p b^\alpha &= b^\alpha Q_{p-1}, \\
 L_k L_l &= \delta_{k+l} Q_l, & L_k Q_l &= \delta_{k-l} L_l, \\
 Q_k L_l &= \delta_{k+l} L_l, & Q_k Q_l &= \delta_{k-l} Q_l, \\
 [a^\alpha, b^\beta] &= \varepsilon^{\alpha\beta} (1 + \mu_0 L_0 + \mu_1 L_m), \\
 [a^\alpha, a^\beta] &= \varepsilon^{\alpha\beta} (\mu_0 L_1 + \mu_1 L_{m+1}), \\
 [b^\alpha, b^\beta] &= \varepsilon^{\alpha\beta} (\mu_0 L_{-1} + \mu_1 L_{m-1}),
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

где $\delta_k := \delta_{k0}$.

В работе [1] показано, что алгебра $\mathcal{H}$ имеет m -мерное пространство следов и изоморфное ему пространство суперследов. Изоморфизм определяется оператором Клейна²⁾ $K := S_m \in \mathcal{H}$, а именно: если tr – некоторый след на $\mathcal{H}$, то линейная функция str , определяемая соотношениями $\text{str}(f) = \text{tr}(fK^{1+\varepsilon(f)})$, есть суперслед.

4. АЛГЕБРА ЛИ sl_2 ВНУТРЕННИХ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЙ

Рассмотрим элементы $T^{\alpha\beta} := (\{a^\alpha, b^\beta\} + \{b^\alpha, a^\beta\})/2$ алгебры $\mathcal{H}$ и внутренние дифференцирования, порождаемые ими:

$$T^{\alpha\beta}: f \rightarrow [f, T^{\alpha\beta}] \quad \text{для всех } f \in \mathcal{H}. \tag{4.1}$$

Легко убедиться, что эти дифференцирования линейно порождают алгебру Ли sl_2 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Будем называть *синглетом* всякий элемент $f \in \mathcal{H}$ такой, что $[f, T^{\alpha\beta}] = 0$ при любых α, β . Будем называть *подалгеброй синглетов* подалгебру $H^0 \subset \mathcal{H}$, состоящую из всех синглетов алгебры $\mathcal{H}$.

Пусть кососимметрический тензор $\varepsilon_{\alpha\beta}$ нормирован так, что $\varepsilon_{01} = 1$. Пусть

$$\mathfrak{s} := \frac{1}{4i} (\{a^\alpha, b^\beta\} - \{b^\alpha, a^\beta\}) \varepsilon_{\alpha\beta}.$$

Несложно доказать следующий факт.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Подалгебра синглетов H^0 алгебры $\mathcal{H}$ есть алгебра полиномов от элемента $\mathfrak{s}$ с коэффициентами в групповой алгебре $\mathbb{C}[I_2(2m)]$.

Далее нам понадобятся коммутационные соотношения синглета $\mathfrak{s}$ с образующими алгебры $\mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}
 [\mathfrak{s}, Q_p] &= [\mathfrak{s}, S_k] = [T^{\alpha\beta}, \mathfrak{s}] = 0, & \mathfrak{s} L_p &= -L_p \mathfrak{s}, & \mathfrak{s} R_k &= -R_k \mathfrak{s}, \\
 (\mathfrak{s} - i(\mu_0 L_0 + \mu_1 L_m)) a^\alpha &= a^\alpha (\mathfrak{s} + i + i(\mu_0 L_0 + \mu_1 L_m)).
 \end{aligned}$$

²⁾Элемент $K \in \mathcal{A}$ называется *оператором Клейна*, если $\varepsilon(K) = 0$, $K^2 = 1$, $Kf = (-1)^{\varepsilon(f)} fK$ для любого элемента $f \in \mathcal{A}$ с фиксированной четностью.

5. ЗНАЧЕНИЯ СЛЕДОВ НА $\mathbb{C}[I_2(2m)]$

У группы $I_2(2m)$ имеются m классов сопряженности, не имеющих в спектре собственного значения $+1$:

$$\{S_p, S_{n-p}\}, \quad \text{где } p = 1, \dots, m-1, \quad \text{а также } \{S_m\}.$$

В силу теоремы 2.3 из работы [7] значения следа на этих классах сопряженности

$$s_k := \text{tr}(S_k), \quad \text{где } s_{2m-k} = s_k, \quad k = 1, \dots, 2m-1,$$

полностью определяют след на всей алгебре $\mathcal{H}$, и поэтому размерность пространства следов равна m .

У группы $I_2(2m)$ имеются два класса сопряженности, имеющих по одному собственному значению $+1$ в спектре:

$$\{R_{2l} \mid l = 0, \dots, m-1\}, \quad \{R_{2l+1} \mid l = 0, \dots, m-1\},$$

и один класс сопряженности, имеющий два собственных значения $+1$ в спектре: $\{S_0\}$.

Следы на классах сопряженности с собственным значением $+1$ в спектре вычисляются при помощи *вакуумных условий* (называемых в [7] и [8] *Ground Level Conditions*)

$$\text{tr}([a^0, b^1]S_0) = 0, \quad \text{tr}([c_k^0, c_k^1]R_k) = 0,$$

где $c_k^\alpha := a^\alpha - \lambda^k b^\alpha$ – собственные векторы R_k , $R_k c_k^\alpha = c_k^\alpha R_k$. Из этих вакуумных условий следует, что

$$\begin{aligned} \text{tr}(R_{2l}) &= -2\nu_2 X_1 - 2\nu_1 X_2, \\ \text{tr}(R_{2l+1}) &= -2\nu_1 X_1 - 2\nu_2 X_2, \end{aligned} \quad l = 0, 1, \dots, m-1, \quad (5.1)$$

$$\text{tr}(S_0) = 2(\nu_1^2 + \nu_2^2)mX_1 + 4\nu_1\nu_2mX_2, \quad (5.2)$$

где

$$X_1 := \sum_{l=1}^{m-1} s_{2l} \sin^2 \frac{\pi l}{m}, \quad X_2 := \sum_{l=0}^{m-1} s_{2l+1} \sin^2 \frac{\pi(2l+1)}{2m}.$$

Заметим также, что

$$\begin{aligned} \text{tr}(L_0) &= -\frac{\mu_0}{m}(X_1 + X_2), \quad \text{tr}(L_m) = -\frac{\mu_1}{m}(X_1 - X_2), \quad \text{tr}(L_p) = 0 \quad \text{при } p \neq 0, m, \\ \text{tr}(S_0) &= -\mu_0 \text{tr}(L_0) - \mu_1 \text{tr}(L_m). \end{aligned}$$

6. ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ СЛЕДОВ

Пусть $\mathcal{L} := \mu_0 L_0 + \mu_1 L_m$. Для каждого следа tr на $\mathcal{H}$ определим следующий набор производящих функций, позволяющий при помощи дифференцирования в нуле по параметру t находить следы любых элементов из H^0 :

$$\begin{aligned} F_p(t) &:= \text{tr}(e^{t(\mathfrak{s}-i\mathcal{L})}Q_p), \\ \Psi_p(t) &:= \text{tr}(e^{t\mathfrak{s}}L_p), \end{aligned} \quad (6.1)$$

где $p = 0, \dots, 2m - 1$, $p \in \mathbb{Z}_{2m}$. Из равенства $\mathfrak{s}L_p = -L_p\mathfrak{s}$ и определения следа вытекает, что

$$\Psi_p(t) = \Psi_p(0).$$

Так как $L_0Q_p = 0$ при $p \neq 0$ и $L_mQ_p = 0$ при $p \neq m$, из определения (6.1) следует, что

$$\begin{aligned} F_p(t) &= \operatorname{tr}(e^{t\mathfrak{s}}Q_p), \quad p \neq 0, m, \\ F_0(t) &= \operatorname{tr}(e^{t(\mathfrak{s}-i\mu_0L_0)}Q_0), \\ F_m(t) &= \operatorname{tr}(e^{t(\mathfrak{s}-i\mu_1L_m)}Q_m). \end{aligned}$$

Рассмотрим также функции $\Phi_p(t) := \operatorname{tr}(e^{t(\mathfrak{s}+i\mathcal{L})}Q_p)$, которые, как легко установить, разложив экспоненту в ряд, связаны с функциями F_p соотношениями

$$\Phi_p(t) = F_p(t) + 2i\Delta_p(t), \quad \text{где} \quad \Delta_p(t) = \delta_p \sin(\mu_0 t) \operatorname{tr}(L_0) + \delta_{m-p} \sin(\mu_1 t) \operatorname{tr}(L_m).$$

7. УРАВНЕНИЯ НА ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ

Продифференцируем производящую функцию F_p :

$$\frac{d}{dt}F_p(t) = \operatorname{tr}(e^{t(\mathfrak{s}-i\mathcal{L})}(\mathfrak{s}-i\mathcal{L})Q_p) = \operatorname{tr}(e^{t(\mathfrak{s}-i\mathcal{L})}(-ia^\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} b^\beta + i)Q_p).$$

Второе равенство в этой формуле справедливо, так как

$$\mathfrak{s} = -ia^\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} b^\beta + i(1 + \mathcal{L}).$$

Далее,

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(e^{t(\mathfrak{s}-i\mathcal{L})}(-ia^\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} b^\beta)Q_p) &= \operatorname{tr}(a^\alpha e^{t(\mathfrak{s}+i\mathcal{L})}(-i\varepsilon_{\alpha\beta} b^\beta)Q_p) = \\ &= \operatorname{tr}(e^{t(\mathfrak{s}+i+i\mathcal{L})}(-i\varepsilon_{\alpha\beta} b^\beta a^\alpha)Q_{p+1}) = \operatorname{tr}(e^{t(\mathfrak{s}+i+i\mathcal{L})}(\mathfrak{s}+i+i\mathcal{L})Q_{p+1}) = \\ &= \frac{d}{dt}(e^{it}\Phi_{p+1}(t)). \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем систему уравнений на производящие функции:

$$\frac{d}{dt}F_p - e^{it}\frac{d}{dt}F_{p+1} = iF_p + ie^{it}F_{p+1} + 2i\frac{d}{dt}(e^{it}\Delta_{p+1}). \quad (7.1)$$

Чтобы решить систему (7.1), рассмотрим ее преобразование Фурье. Пусть

$$\begin{aligned} \lambda &:= e^{i\pi/m}, \\ G_k &:= \sum_{p=0}^{2m-1} \lambda^{kp} F_p, \quad k = 0, \dots, 2m-1, \\ \tilde{\Delta}_k &:= \sum_{p=0}^{2m-1} \lambda^{kp} \Delta_{p+1} = \lambda^{-k} (\sin(\mu_0 t) \operatorname{tr}(L_0) + \lambda^{km} \sin(\mu_1 t) \operatorname{tr}(L_m)), \\ &k = 0, \dots, 2m-1. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Тогда для функций G_k мы получаем уравнения

$$\frac{d}{dt}G_k = i\frac{\lambda^k + e^{it}}{\lambda^k - e^{it}}G_k + \frac{2i}{\lambda^k - e^{it}}\frac{d}{dt}(e^{it}\tilde{\Delta}_k)$$

с начальными условиями

$$G_k(0) = s_k, \quad (7.3)$$

где мы дополнительно ввели обозначение $s_0 := \text{tr}(S_0)$. Величина s_0 линейно зависит от s_k , где $k = 1, \dots, m$ (см. формулу (5.2)).

Решение уравнения на G_k имеет вид

$$G_k(t) = \frac{e^{it}f_k(t)}{(e^{it} - \lambda^k)^2}, \quad (7.4)$$

где

$$\begin{aligned} f_k(t) = & \frac{2\lambda^k}{m}X_+[1 - \cos(t\mu_0)] + (-1)^k\frac{2\lambda^k}{m}X_-[1 - \cos(t\mu_1)] + (1 - \lambda^k)^2s_k + \\ & + \frac{2i}{m}(e^{it} - \lambda^k)[\mu_0X_+\sin(t\mu_0) + (-1)^k\mu_1X_-\sin(t\mu_1)]. \end{aligned} \quad (7.5)$$

В последнем выражении мы использовали обозначения $X_{\pm} := X_1 \pm X_2$.

При $k = 1, \dots, 2m - 1$ начальные условия (7.3) выполняются очевидным образом, а при $k = 0$ имеет место равенство $\lim_{t \rightarrow 0} G_0(t) = s_0$.

8. УСЛОВИЯ ВЫРОЖДЕННОСТИ СЛЕДА

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.1. След tr на алгебре $\mathcal{H}$ вырожден тогда и только тогда, когда функции G_k (7.2) имеют вид

$$G_k(t) = \sum_{i=1}^{i_k} e^{t\omega_{i,k}}\psi_{i,k}(t), \quad (8.1)$$

где $\psi_{i,k} \in \mathbb{C}[t]$, $\omega_{i,k} \in \mathbb{C}$.

Очевидно, что функции G_k имеют вид (8.1) тогда и только тогда, когда такой же вид имеют функции F_p , определенные формулой (6.1).

Далее в этом разделе мы докажем достаточность. Допустим, что

$$F_p(t) = \sum_{j=1}^{j_p} e^{t\omega_{j,p}}\varphi_{j,p}(t). \quad (8.2)$$

При этом, поскольку мы рассматриваем нетривиальные следы, $F_p \neq 0$ хотя бы для одного p . Тогда существуют такие полиномы $D_p \in \mathbb{C}[x]$, что $D_p(\frac{d}{dt})F_p = 0$ для каждого p . При этом полиномы D_0 и D_m могут быть выбраны четными. Выберем

$$D_p(x) := x \prod_{j=1}^{j_p} (x - \omega_{j,p})^{1+\deg \varphi_{j,p}}, \quad p \neq 0, m,$$

$$D_0(x) := x^2 \prod_{j=1}^{j_0} (x^2 - \omega_{j,0}^2)^{1+\deg \varphi_{j,0}},$$

$$D_m(x) := x^2 \prod_{j=1}^{j_m} (x^2 - \omega_{j,m}^2)^{1+\deg \varphi_{j,m}}.$$

Пусть полиномы $\tilde{D}_0$ и $\tilde{D}_m$ определены равенствами

$$\tilde{D}_0(x^2) = D_0(x), \quad \tilde{D}_m(x^2) = D_m(x).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.2. Если $F_p \neq 0$ для некоторого $p \neq 0, m$, то элемент $D_p(\mathfrak{s})Q_p \in \mathcal{H}$ является нуль-вектором билинейной формы B_{tr} .

Если $F_0 \neq 0$, то элемент $\tilde{D}_0(\mathfrak{s}^2 - \mu_0^2)Q_0 \in \mathcal{H}$ является нуль-вектором билинейной формы B_{tr} .

Если $F_m \neq 0$, то элемент $\tilde{D}_m(\mathfrak{s}^2 - \mu_1^2)Q_m \in \mathcal{H}$ является нуль-вектором билинейной формы B_{tr} .

Действительно, если $f \in \mathcal{H}$ принадлежит несинглетному неприводимому sl_2 -модулю, то $\text{tr}(D_p(\mathfrak{s})Q_p f) = 0$ при любом значении p , а если $f \in H^0$, то $f = \sum_q (f_q(\mathfrak{s})Q_q + g_q(\mathfrak{s})L_q)$ и

$$\text{tr}(D_p(\mathfrak{s})Q_p f) = \text{tr}(D_p(\mathfrak{s})Q_p f_p) = f_p \left(\frac{d}{dt} \right) D_p \left(\frac{d}{dt} \right) F_p|_{t=0} = 0 \quad \text{при } p \neq 0, m.$$

Далее, разложим полиномы f_0 и f_m в сумму четных и нечетных полиномов:

$$f_0(\mathfrak{s}) = f_0^+(\mathfrak{s}^2) + \mathfrak{s}f_0^-(\mathfrak{s}^2), \quad f_m(\mathfrak{s}) = f_m^+(\mathfrak{s}^2) + \mathfrak{s}f_m^-(\mathfrak{s}^2).$$

Так как $\text{tr}(\mathfrak{s}^k Q_0) = \text{tr}(\mathfrak{s}^k Q_m) = 0$ при нечетном k ³⁾, и

$$\left(\frac{d}{dt} \right)^2 e^{t(\mathfrak{s} - i\mu_0 L_0 - i\mu_1 L_m)} = e^{t(\mathfrak{s} - i\mu_0 L_0 - i\mu_1 L_m)} (\mathfrak{s}^2 - \mu_0^2 Q_0 - \mu_1^2 Q_m),$$

то

$$\begin{aligned} \text{tr}(\tilde{D}_0(\mathfrak{s}^2 - \mu_0^2)Q_0 f) &= \text{tr}(\tilde{D}_0(\mathfrak{s}^2 - \mu_0^2)Q_0 f_0^+(\mathfrak{s}^2)) = \\ &= f_0^+ \left(\left(\frac{d}{dt} \right)^2 + \mu_0^2 \right) \tilde{D}_0 \left(\left(\frac{d}{dt} \right)^2 \right) F_0|_{t=0} = 0, \\ \text{tr}(\tilde{D}_m(\mathfrak{s}^2 - \mu_1^2)Q_m f) &= \text{tr}(\tilde{D}_m(\mathfrak{s}^2 - \mu_1^2)Q_m f_m^+(\mathfrak{s}^2)) = \\ &= f_m^+ \left(\left(\frac{d}{dt} \right)^2 + \mu_1^2 \right) \tilde{D}_m \left(\left(\frac{d}{dt} \right)^2 \right) F_m|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

Тем самым доказана достаточность условий предложения 8.1.

³⁾ Действительно,

$$\text{tr}(\mathfrak{s}^k Q_0) = \text{tr}(\mathfrak{s}^k L_0 L_0) = \text{tr}(L_0 \mathfrak{s}^k L_0) = \text{tr}((-1)^k \mathfrak{s}^k L_0 L_0) = \text{tr}((-1)^k \mathfrak{s}^k Q_0).$$

Аналогично, $\text{tr}(\mathfrak{s}^k Q_m) = \text{tr}((-1)^k \mathfrak{s}^k Q_m)$.

9. НУЛЬ-ВЕКТОРЫ ФОРМЫ B_{tr}

Теперь докажем необходимость условий предложения 8.1, т.е. утверждение о том, что если след tr вырожден, то существуют такие полиномы $D_p \in \mathbb{C}[x]$, что $D_p(\frac{d}{dt})F_p = 0$ для $p = 0, \dots, 2m - 1$, и, следовательно, производящие функции F_p имеют вид (8.2).

Пусть $\mathcal{I}$ – идеал алгебры $\mathcal{H}$ и пусть $\mathcal{I}_0 := \mathcal{I} \cap H^0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.1. $\mathcal{I}_0 \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства рассмотрим ненулевой элемент $f \in \mathcal{I}$. Действие алгебры sl_2 на этот элемент f порождает инвариантное подпространство $\mathcal{F} \subset \mathcal{I}$, которое можно разложить в сумму инвариантных подпространств $\mathcal{F} = \bigoplus_s \mathcal{F}^s$, где $\mathcal{F}^s \subset \mathcal{I}$ и является прямой суммой неприводимых sl_2 -модулей спина s (размерности $2s + 1$).

Рассмотрим далее старший вектор $f \in \mathcal{F}^s$ и множество элементов идеала $\{fQ_p\}$ для $p = 0, \dots, 2m - 1$. Не все эти элементы равны нулю, так как $\sum_p fQ_p = f$. Пусть $fQ_p \neq 0$ и имеет степень N . Рассмотрим часть полинома fQ_p старшей степени, которая имеет вид $f_Q Q_p + f_L L_p$, где f_Q и f_L – однородные полиномы от a^α, b^α степени N . Можно считать, что $f_Q \neq 0$ (в противном случае можно взять элемент $(f_L L_p)L_{-p} = f_L Q_{-p} \neq 0$) и рассмотреть $\mathfrak{s}f_Q + f_Q \mathfrak{s}$. Старшая степень этого полинома имеет вид

$$\sum_{k=0}^{2s} c_k (a^1)^k (b^1)^{2s-k} \mathfrak{s}^{(N+2)/2-s} Q_p,$$

где $N + 2$ – степень однородного полинома $\mathfrak{s}f_Q + f_Q \mathfrak{s}$. Пусть $c_k \neq 0$. Рассмотрим элемент $(b^0)^k (a^0)^{2s-k} (\mathfrak{s}f_Q + f_Q \mathfrak{s})$ идеала и порождаемое им инвариантное относительно действия алгебры sl_2 подпространство. Оно содержит ненулевое подпространство синглетов. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.1. Для каждого $p = 0, \dots, 2m - 1$ определим идеалы $\mathcal{J}_p$ и $\mathcal{J}^p$ в пространстве $\mathbb{C}[\mathfrak{s}]$, положив

$$\mathcal{J}_p := \{f \in \mathbb{C}[\mathfrak{s}] : f(\mathfrak{s})Q_p \in \mathcal{I}\}, \quad \mathcal{J}^p := \{f \in \mathbb{C}[\mathfrak{s}] : f(\mathfrak{s})L_p \in \mathcal{I}\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.2. $\mathcal{J}_p = \mathcal{J}^{-p}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из тождеств $f(\mathfrak{s})Q_p L_{-p} = f(\mathfrak{s})L_{-p}$ и $f(\mathfrak{s})L_{-p} L_p = f(\mathfrak{s})Q_p$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.3. $\mathcal{J}_p \neq 0$ для любого $p = 0, \dots, 2m - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим ненулевой элемент $f \in \mathcal{I}_0$. В силу предложения 4.1 $f = \sum_p (\phi_p(\mathfrak{s})Q_p + \psi_p(\mathfrak{s})L_{-p})$. Очевидно, существует такое p , что либо $\phi_p \neq 0$, либо $\psi_p \neq 0$. Поэтому не равен нулю хотя бы один из элементов $\mathfrak{s}Q_p f + Q_p f \mathfrak{s} = 2\mathfrak{s}\phi_p(\mathfrak{s})Q_p \in \mathcal{I}_0$ и $\mathfrak{s}Q_p f - Q_p f \mathfrak{s} = 2\mathfrak{s}\psi_p(\mathfrak{s})L_{-p} \in \mathcal{I}_0$.

Таким образом, $\mathcal{J}_p \neq 0$. Далее докажем, что если $\mathcal{J}_p \neq 0$, то $\mathcal{J}_{p+1} \neq 0$, а значит, $\mathcal{J}_k \neq 0$ при $k = 0, 1, \dots, 2m - 1$.

Пусть $g \in \mathcal{J}_p, g \neq 0$. Тогда $gQ_p \in \mathcal{I}$ и элемент $\tilde{g} := \varepsilon_{\alpha\beta} b^\alpha gQ_p a^\beta \in \mathcal{I}$ также отличен от нуля.

В силу соотношения (3.3) $\tilde{g} = \varepsilon_{\alpha\beta} b^\alpha g a^\beta Q_{p+1}$, причем $\tilde{g} \in \mathcal{I}_0$, и поэтому в силу предложения 4.1 $\tilde{g} = \sum_k (\phi_k(\mathfrak{s})Q_k + \psi_k(\mathfrak{s})L_{-k})$. Поскольку, как можно проверить,

$0 \neq \mathfrak{s}\tilde{g}Q_{p+1} + \tilde{g}Q_{p+1}\mathfrak{s} \in \mathcal{I}_0$, мы имеем $\mathfrak{s}\phi_{p+1}(\mathfrak{s}) \neq 0$, $\mathfrak{s}\phi_{p+1}(\mathfrak{s})Q_{p+1} \in \mathcal{I}_0$, т. е. $\mathfrak{s}\phi_{p+1}(\mathfrak{s}) \in \mathcal{J}_{p+1} \neq 0$.

Продолжая рассмотрение, получим утверждение предложения. ■

Поскольку $\mathbb{C}[\mathfrak{s}]$ – кольцо главных идеалов, справедливо

СЛЕДСТВИЕ 9.1. *Для любого $p = 0, \dots, 2m - 1$ существует такой ненулевой полином $\phi_p^0 \in \mathbb{C}[\mathfrak{s}]$, что $\mathcal{J}_p = \phi_p^0 \mathbb{C}[\mathfrak{s}]$.*

Теперь докажем необходимость условий предложения 8.1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.4. *Если идеал $\mathcal{I} \subset \mathcal{H}$ состоит из нуль-векторов билинейной формы B_{tr} , то производящие функции (6.1) имеют вид (8.2).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p \neq 0, m$. Тогда

$$0 \equiv \text{tr}(\phi_p^0(\mathfrak{s})Q_p e^{t\mathfrak{s}}) = \phi_p^0\left(\frac{d}{dt}\right)F_p(t)$$

и, следовательно, функция F_p имеет вид (8.2).

Пусть $p = 0$. Рассмотрим нуль-вектор билинейной формы B_{tr} вида $\phi(\mathfrak{s}^2)Q_0$, где $\phi(\mathfrak{s}^2) := \phi_0^0(\mathfrak{s})\phi_0^0(-\mathfrak{s})$. Заметим, что

$$\frac{d^2}{dt^2}F_0 = \text{tr}(e^{t(\mathfrak{s}-i\mathcal{L})}(\mathfrak{s}-i\mathcal{L})^2Q_0) = \text{tr}(e^{t(\mathfrak{s}-i\mathcal{L})}(\mathfrak{s}^2 - \mu_0^2)Q_0),$$

поэтому

$$\text{tr}(e^{t(\mathfrak{s}-i\mathcal{L})}\mathfrak{s}^2Q_0) = \left(\frac{d^2}{dt^2} + \mu_0^2\right)F_0$$

и

$$0 \equiv \text{tr}(e^{t(\mathfrak{s}-i\mathcal{L})}\phi_0^0(\mathfrak{s})\phi_0^0(-\mathfrak{s})Q_0) = \text{tr}(e^{t(\mathfrak{s}-i\mathcal{L})}\phi(\mathfrak{s}^2)Q_0) = \phi\left(\frac{d^2}{dt^2} + \mu_0^2\right)F_0(t),$$

т. е. F_0 также имеет вид (8.2).

Случай $p = m$ аналогичен случаю $p = 0$. ■

10. ОСОБЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ

Найдем теперь, при каких значениях параметров μ_0 и μ_1 существует такой ненулевой след tr , т. е. такие значения s_k , не все равные нулю, что производящие функции (7.4) имеют вид (8.1).

Очевидно, необходимо, чтобы числитель выражения (7.4) содержал все нули знаменателя этого выражения. Знаменатель функции G_k равен $(e^{it} - \lambda^k)^2$ и обращается в нуль в точках

$$t_{k,l} = \frac{\pi}{m}k + 2\pi l, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Числитель имеет вид $e^{it}f_k(t)$, где функции $f_k(t)$ определены формулой (7.5).

Вначале мы найдем значения параметров μ_0 и μ_1 , при которых существуют такие значения $\text{tr}(S_k)$, не все равные нулю, что функции f_k имеют нули в точках $t_k := t_{k,0}$. При этом окажется, что при найденных значениях параметров μ_0, μ_1, s_k функции f_k имеют нули во всех точках $t_{k,l}$ и что все эти нули имеют кратность 2, т. е. $f_k(t_{k,l}) = \dot{f}_k(t_{k,l}) = 0$.

Так как $f_0(0) = 0$ тождественно при всех значениях s_k, μ_0, μ_1 , то мы рассматриваем систему $2m - 1$ линейных уравнений $f_k(\pi k/m) = 0$, где $k = 1, 2, \dots, 2m - 1$, на m неизвестных

$$s_1 = s_{2m-1}, \quad s_2 = s_{2m-2}, \quad \dots, \quad s_{m-1} = s_{m+1}, \quad s_m,$$

которую удобно записать в виде

$$\left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{m}k\mu_0\right)\right]X_+ + (-1)^k \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{m}k\mu_1\right)\right]X_- = -\frac{m(1-\lambda^k)^2}{2\lambda^k}s_k.$$

Правую часть можно представить в виде

$$2ms'_k, \quad \text{где } s'_k := \sin^2\left(\frac{\pi}{2m}k\right)s_k, \quad k = 1, \dots, 2m - 1, \quad s'_0 = 0.$$

Вспоминая определение величин $X_{\pm}$, выпишем все уравнения на s'_k в виде

$$\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{m}k\mu_0\right)\right)X_+ + (-1)^k \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{m}k\mu_1\right)\right)X_- = 2ms'_k, \quad (10.1)$$

$$k = 1, \dots, 2m - 1,$$

$$s'_{2m-k} = s'_k, \quad k = 1, \dots, m, \quad (10.2)$$

$$X_{\pm} = X_1 \pm X_2, \quad (10.3)$$

$$X_1 = \sum_{1 \leq l \leq m-1} s'_{2l}, \quad (10.4)$$

$$X_2 = \sum_{0 \leq l \leq m-1} s'_{2l+1}. \quad (10.5)$$

Из этих уравнений видно, что размерность пространства решений не превышает 2, а в качестве параметров, определяющих решение, можно взять величины X_1 и X_2 .

ТЕОРЕМА 10.1. Пусть $m \geq 3$. Тогда система уравнений (10.1)–(10.5) имеет ненулевые решения только при следующих значениях параметров μ_0 и μ_1 :

$$\mu_0 \in \mathbb{Z} \setminus m\mathbb{Z}, \quad \mu_1 \in \mathbb{Z} \setminus m\mathbb{Z}, \quad (10.6)$$

$$\mu_0 \in \mathbb{Z} \setminus m\mathbb{Z}, \quad \mu_1 \text{ любое}, \quad (10.7)$$

$$\mu_1 \in \mathbb{Z} \setminus m\mathbb{Z}, \quad \mu_0 \text{ любое}, \quad (10.8)$$

$$\mu_0 = \pm\mu_1 + m(2l+1), \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (10.9)$$

При этом:

а) в случае (10.6) система уравнений (10.1)–(10.5) имеет двухпараметрическое семейство решений;

б) в случае (10.7), если $\mu_1 \notin \mathbb{Z} \setminus m\mathbb{Z}$, то система уравнений (10.1)–(10.5) имеет однопараметрическое семейство решений с $X_- = 0$;

в) в случае (10.8), если $\mu_0 \notin \mathbb{Z} \setminus m\mathbb{Z}$, то система уравнений (10.1)–(10.5) имеет однопараметрическое семейство решений с $X_+ = 0$;

г) в случае (10.9), если $\mu_0, \mu_1 \notin \mathbb{Z} \setminus m\mathbb{Z}$, то система уравнений (10.1)–(10.5) имеет однопараметрическое семейство решений с $X_1 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство этой теоремы весьма громоздко, поэтому мы опишем только основные пункты доказательства.

Заметим, что уравнения (10.1) просто определяют s_k через X_1 и X_2 . Подставим значения s'_k , полученные из (10.1), в уравнения (10.4) и (10.5). Получим

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{2m}(m - \Sigma_0(\mu_0))(X_1 + X_2) + \frac{1}{2m}(m - \Sigma_0(\mu_1))(X_1 - X_2), \\ X_2 &= \frac{1}{2m}(m - \Sigma_1(\mu_0))(X_1 + X_2) - \frac{1}{2m}(m - \Sigma_1(\mu_1))(X_1 - X_2), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \Sigma_0(\mu_0)X_+ + \Sigma_0(\mu_1)X_- &= 0, \\ \Sigma_1(\mu_0)X_+ - \Sigma_1(\mu_1)X_- &= 0, \end{aligned} \tag{10.10}$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma_0(\mu) &:= \sum_{l=0}^{m-1} \cos\left(\frac{2\pi l}{m}\mu\right) = \begin{cases} m, & \text{если } \mu \in m\mathbb{Z}, \\ \frac{\sin(\pi\mu) \cos((m-1)\pi\mu/m)}{\sin(\pi\mu/m)}, & \text{если } \mu \notin m\mathbb{Z}, \end{cases} \\ \Sigma_1(\mu) &:= \sum_{l=0}^{m-1} \cos\left(\frac{\pi(2l+1)}{m}\mu\right) = \begin{cases} (-1)^{\mu/m}m, & \text{если } \mu \in m\mathbb{Z}, \\ \frac{\sin(2\pi\mu)}{2\sin(\pi\mu/m)}, & \text{если } \mu \notin m\mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Нулевое решение системы (10.10) соответствует нулевому следу tr , а ненулевое решение системы (10.10) существует, только если его определитель равен нулю.

Остальные соотношения, которым должны удовлетворять μ_0 и μ_1 , дают уравнения (10.2), если подставить в них значения s'_k из уравнений (10.1):

$$\begin{aligned} &\left(\cos\left(\frac{\pi}{m}k\mu_0\right) - \cos\left(2\pi\mu_0 - \frac{\pi}{m}k\mu_0\right)\right)X_+ + \\ &+ (-1)^k \left(\cos\left(\frac{\pi}{m}k\mu_1\right) - \cos\left(2\pi\mu_1 - \frac{\pi}{m}k\mu_1\right)\right)X_- = 0, \quad k = 1, \dots, m-1, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &\sin(\pi\mu_0) \sin\left(-\pi\mu_0 + \frac{\pi}{m}k\mu_0\right)X_+ + \\ &+ (-1)^k \sin(\pi\mu_1) \sin\left(-\pi\mu_1 + \frac{\pi}{m}k\mu_1\right)X_- = 0, \quad k = 1, \dots, m-1. \end{aligned} \tag{10.11}$$

Оказывается, если в системе (10.11) рассмотреть уравнения с $k = m-1$ и с $k = m-2$, то определитель этой пары уравнений равен

$$4(-1)^m \sin(\pi\mu_0) \sin(\pi\mu_1) \sin\left(\frac{\pi\mu_0}{m}\right) \sin\left(\frac{\pi\mu_1}{m}\right) \cos\left(\frac{\pi(\mu_0 + \mu_1)}{2m}\right) \cos\left(\frac{\pi(\mu_0 - \mu_1)}{2m}\right),$$

а равенство нулю этого определителя вместе с остальными уравнениями (10.11) и с уравнениями (10.10) позволяет найти решения, описываемые доказываемой теоремой. ■

Легко проверить, что при значениях μ и соответствующих им решениях, описанных теоремой 10.1, имеют место равенства

$$f_k(t_{k,l}) = \frac{df_k}{dt}(t_{k,l}) = 0 \quad \text{при всех } k, l.$$

Наконец, можно получить, что при значениях μ и соответствующих им решениях, описанных теоремой 10.1, производящие функции (7.4) имеют вид (8.1), причем все полиномы $\psi_{i,k}$ – константы.

Тем самым доказано, что при значениях μ , описанных теоремой 10.1, алгебра $\mathcal{H}$ имеет вырожденный след и содержит порожденный этим вырожденным следом идеал.

ЗАМЕЧАНИЕ 10.1. Доказательство теоремы 10.1 проведено при $m \geq 3$. Можно также рассмотреть случаи $m = 1$ и $m = 2$. При $m = 1$, 2 особые значения μ и соответствующие им решения по-прежнему описываются теоремой 10.1. При $m = 1$ из формул (10.9) и (3.2) следует, что хотя бы одна из величин ν_1, ν_2 является полупелой. Поскольку $H_{1,\nu_1,\nu_2}(I_2(2)) = H_{1,\nu_1}(A_1) \otimes H_{1,\nu_2}(A_1)$, то этот факт следует также из работ [3], в которых были найдены особые значения ν и идеалы в $H_{1,\nu}(A_1)$.

Список литературы

- [1] S. E. Konstein, R. Stekolshchik, *Jour. Nonlinear Math. Phys.*, **20**:2 (2013), 295–308.
- [2] P. Etingof, V. Ginzburg, *Inv. Math.*, **147**:2 (2002), 243–348.
- [3] М. А. Васильев, *Письма в ЖЭТФ*, **50**:8 (1990), 344–347; M. A. Vasiliev, *Internat. J. Modern Phys. A*, **6**:7 (1991), 1115–1135.
- [4] С. Е. Конштейн, *ТМФ*, **116**:1 (1998), 122–133.
- [5] I. Losev, *Selecta Math. (N. S.)*, **18**:1 (2012), 179–251, arXiv:1001.0239.
- [6] D. S. Passman, *Infinite Crossed Products*, Pure and Applied Mathematics, **135**, Academic Press, Boston, MA, 1989.
- [7] S. E. Konstein, I. V. Tyutin, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **20**:2 (2013), 271–294, arXiv:1211.6600; S. E. Konstein, *Supertraces on the superalgebra of observables of rational Calogero model based on the root system*, arXiv:math-ph/9904032.
- [8] S. E. Konstein, M. A. Vasiliev, *J. Math. Phys.*, **37**:6 (1996), 2872–2891.

Поступила в редакцию 19.10.2015