Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Мамсуров, В. Р. Халилов, Индуцированный заряд вакуума безмассовых фермионов в кулоновском потенциале и потенциале Ааронова–Бома в $2 + 1$ измерениях, *ТМФ*, 2016, том 188, номер 2, 254–272

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9073>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 15:39:39

© 2016 г.

И. В. Мамсуров*, В. Р. Халилов*

ИНДУЦИРОВАННЫЙ ЗАРЯД ВАКУУМА БЕЗМАССОВЫХ ФЕРМИОНОВ В КУЛОНОВСКОМ ПОТЕНЦИАЛЕ И ПОТЕНЦИАЛЕ ААРОНОВА–БОМА В $2 + 1$ ИЗМЕРЕНИЯХ

Изучается поляризация вакуума заряженных фермионов нулевой массы в кулоновском потенциале и потенциале Ааронова–Бомы в $2 + 1$ измерениях. Для этого мы конструируем функцию Грина двумерного уравнения Дирака в рассматриваемой конфигурации полей и с ее помощью находим плотность индуцированного вакуумного заряда в так называемых докритической и сверхкритической областях. Функция Грина представлена через регулярные и сингулярные (в источнике) решения радиального уравнения Дирака для заряженного фермиона в кулоновском потенциале и потенциале Ааронова–Бомы в $2 + 1$ измерениях и удовлетворяет самосопряженным граничным условиям в источнике. В сверхкритической области функция Грина терпит разрыв, что связано с наличием сингулярностей на нефизическом листе комплексной плоскости “энергии”, которые обусловлены появлением бесконечного числа квазистационарных состояний с отрицательными энергиями. В конечном итоге эта ситуация отражает нестабильность нейтрального вакуума. На границе сверхкритической области индуцированный вакуумный заряд не зависит от параметра самосопряженного расширения. Мы надеемся, что полученные результаты будут способствовать более глубокому пониманию важных проблем квантовой электродинамики, а также найдут свое применение в задаче об экранировании кулоновской примеси вследствие поляризации вакуума в графене с учетом эффектов, связанных со спином электронов.

Ключевые слова: фермион, сверхкритический кулоновский потенциал, нестабильность вакуума, потенциал Ааронова–Бомы, поляризация вакуума, индуцированный заряд.

DOI: 10.4213/tmf9073

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема нестабильности вакуумного состояния квантовой теории в сверхкритическом кулоновском поле давно привлекает к себе внимание исследователей (см., например, статьи [1]–[5] и монографии [6]–[8]). Связанная с этой проблемой задача поляризации вакуума квантовой электродинамики кулоновским полем деталь-

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Физический факультет, Москва, Россия. E-mail: khalilov@phys.msu.ru

но изучалась в работах [6], [8]–[12]. Интерес к указанной теме возрос еще больше после выхода работ, посвященных проблеме кулоновских примесей в графене – монослое графита, в котором динамика электронов при низких энергиях описывается уравнением Дирака в $2 + 1$ измерениях для фермионов нулевой массы. Эффективная постоянная тонкой структуры в графене велика, что дает возможность изучения двумерной квантовой электродинамики в режиме сильной связи, т.е. по сути – в сверхкритическом кулоновском поле. Явление поляризации вакуума в таком кулоновском поле, вероятно, может стать доступным для экспериментального наблюдения благодаря существованию в графене заряженных квазичастиц.

Экранирование заряженных примесей в графене, возникающее за счет поляризации вакуума, было исследовано в работах [13]–[21], а также в обзорных статьях [22], [23]. Согласно этим исследованиям в докритическом случае распределение индуцированного вакуумного заряда имеет точечный характер и локализовано в центре кулоновского поля [14], [16], [19], в то время как плотность вакуумного заряда, индуцированного сверхкритическим кулоновским полем, зависит от расстояния до силового центра как c/r^2 [14], [15] и изменяет потенциал кулоновского поля не только вблизи, но и вдалеке от заряженной примеси. Подобное распределение вакуумного заряда вытекает также из соображений размерности, поскольку $\delta(r)$ и c/r^2 – суть единственные возможные виды распределения, допускаемые масштабной инвариантностью безмассового уравнения Дирака [23]. Напомним, что вблизи так называемых дираковских точек заряженные квазичастицы в кристаллической решетке графена представляют собой безмассовые фермионы, описываемые линейным законом дисперсии [22], [23], и поэтому одночастичная динамика электронов в графене подчиняется безмассовому уравнению Дирака для двухкомпонентных спиноров [14], [15], [21]–[25].

Важные результаты, связанные с экранированием в графене заряженных примесей, были получены в работах [15], [19]. Как оказалось, самосогласованное перераспределение зарядов приводит к тому, что электроны на больших расстояниях от силового центра не “чувствуют” эффективного сверхкритического поля и ведут себя так же, как и в докритическом (стабильном) режиме.

Отметим также удивительное явление, открытое в работе [26]: плотность индуцированного тока в графене в присутствии магнитного поля соленоида оказывается конечной периодической функцией величины магнитного потока. В работе [27] в рамках квантовой электродинамики в $2 + 1$ измерениях исследовался индуцированный ток поляризованного вакуума для массивных и безмассовых заряженных фермионов в присутствии поля Ааронова–Бома (АБ). Индуцированный ток, вызванный поляризацией вакуума в присутствии поля АБ, был обнаружен экспериментально в работе [28] при “квантовом туннелировании с использованием ионных структур в так называемых линейных ловушках Паули”.

Гамильтониан уравнения Дирака для заряженных фермионов в кулоновских потенциалах и потенциалах АБ в $2 + 1$ измерениях существенно сингулярен и требует дополнительного доопределения для того, чтобы рассматривать этот гамильтониан как самосопряженный квантово-механический оператор. Таким образом, сначала требуется описать класс самосопряженных гамильтонианов, а уже потом – корректно сконструировать функцию Грина уравнения Дирака в рассматриваемой конфигурации внешних полей.

Особенность сверхкритического и (при определенном значении параметров) докритического режимов состоит в том, что самосопряженный дираковский гамильтониан задается неоднозначно. Однопараметрическое семейство таких самосопряженных гамильтонианов можно определить путем задания дополнительного граничного условия в источнике (в точке сингулярности гамильтониана) [29], [30].

В настоящей работе изучается поляризация вакуума заряженных безмассовых фермионов, обусловленная кулоновским потенциалом и потенциалом АБ в $2 + 1$ измерениях. Впервые вычислена плотность индуцированного вакуумного заряда как в докритическом, так и в сверхкритическом случае с использованием функции Грина двумерного уравнения Дирака с кулоновским потенциалом и потенциалом АБ. Присутствие потенциала АБ в рассматриваемой физической модели дает возможность оценить эффекты, обусловленные взаимодействием спинового магнитного момента электрона и магнитного поля АБ, так как поведение волновых функций в начале координат зависит от того, будет ли потенциал взаимодействия носить характер притяжения или отталкивания в соответствии со знаком проекции спина электрона на направление магнитного поля в соленоиде с осью, перпендикулярной плоскости движения электрона.

В данной статье используется система единиц, в которой $c = \hbar = 1$.

2. ПЛОТНОСТЬ ИНДУЦИРОВАННОГО ЗАРЯДА ВАКУУМА

2.1. Волновые функции и функция Грина уравнения Дирака. Гамильтониан уравнения Дирака с параметром s для фермиона массы m и заряда $e = -e_0 < 0$ в кулоновском потенциале ($A_0(r) = a/e_0 r$, $A_r = 0$, $A_\varphi = 0$, $a > 0$) и потенциале АБ ($A_0 = 0$, $A_r = 0$, $A_\varphi = B/r$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctg(y/x)$) имеет вид

$$H_D = \sigma_1 P_2 - s \sigma_2 P_1 + \sigma_3 m - e_0 A_0(r), \quad (1)$$

где $P_\mu = -i\partial_\mu - eA_\mu$ – оператор обобщенного импульса фермиона (3-вектор), а алгебру γ^μ -матриц Дирака можно представить через двумерные матрицы Паули σ_j . Вместе с тем существует два сорта фермионов, соответствующих сигнатуре двумерных матриц Дирака [31]

$$s = \frac{i}{2} \text{Tr}(\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2) = \pm 1,$$

где два знака s отвечают двум неэквивалентным представлениям матриц Дирака:

$$\gamma^0 = \sigma_3, \quad \gamma^1 = i s \sigma_1, \quad \gamma^2 = i s \sigma_2.$$

Параметром $s = \pm 1$ можно охарактеризовать два значения спина фермиона (спин “вверх” и “вниз”) [32].

Заметим, что кулоновским потенциалом в $2 + 1$ измерениях мы называем потенциал, убывающий с увеличением расстояния от источника как $1/r$, имея в виду, что в физической ситуации (например, в графене), хотя электроны движутся в плоскости, их кулоновские взаимодействия с внешним полем точечной заряженной примеси происходят в физическом (трехмерном) пространстве и напряженность электрического поля примеси – трехмерный (а не двумерный) вектор. Поэтому имеет место зависимость $A^0(r) \sim 1/r$ (а не $A^0(r) \sim \ln r$, как это было бы в $2 + 1$ измерениях) и потенциал $A^0(r)$ не удовлетворяет двумерному уравнению Пуассона с точечным источником в начале координат. Аналогично, в реальном физическом пространстве B

характеризует поток $\Phi = 2\pi B$ магнитного поля АБ $\mathbf{H} = (0, 0, H) = \nabla \times \mathbf{A} = B\pi\delta(\mathbf{r})$ и приводит к потенциалу взаимодействия спинового магнитного момента электрона с магнитным полем вида $-seB\delta(r)/r$.

Гамильтониан (1) необходимо определить как самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве квадратично-интегрируемых спиноров $\Psi(\mathbf{r}), \mathbf{r} = (x, y)$. Собственные значения оператора полного момента импульса

$$J = -i\partial/\partial\varphi + s\sigma_3/2 \equiv L_z + s\sigma_3/2$$

являются сохраняющимися величинами (оператор J коммутирует с H_D).

Собственные функции гамильтониана (1) запишем в следующем виде (см. статьи [33], [34]):

$$\Psi(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} f(r) \\ g(r)e^{is\varphi} \end{pmatrix} \exp(-iEt + il\varphi),$$

где E – энергия фермиона, а l – целое квантовое число. Волновая функция Ψ является собственной функцией оператора J с собственным значением $j = \pm(l + s/2)$, выраженным через значение момента импульса l , а

$$\check{h}F(r) = EF(r), \quad F(r) = \begin{pmatrix} f(r) \\ g(r) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где

$$\check{h} = is\sigma_2 \frac{d}{dr} + \sigma_1 \frac{l + \mu + s/2}{r} + \sigma_3 m - \frac{a}{r}, \quad \mu \equiv e_0 B. \quad (3)$$

Отметим, что в $2 + 1$ измерениях безмассовые фермионы не обладают степенью свободы, связанной со спином [35], тем не менее решения уравнения Дирака в присутствии потенциала АБ содержат введенный нами спиновый параметр благодаря потенциалу взаимодействия $-seB\delta(r)/r$, влияющему на поведение этих решений в начале координат.

Плотность индуцированного тока, возникающего из-за поляризации вакуума, задается 3-вектором $j_\mu(\mathbf{r})$, который выражается через одночастичную функцию Грина уравнения Дирака:

$$j_\mu(\mathbf{r}) = -\frac{e}{2} \int_C \frac{dE}{2\pi i} \text{tr} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E)|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'} \gamma_\mu, \quad (4)$$

где C – контур в комплексной плоскости E , включающий все сингулярности, расположенные вдоль действительной оси E , и зависящий от выбора поверхности Ферми E_F . Функцию Грина G можно разложить по собственным функциям оператора J . Поскольку плотность индуцированного вакуумного заряда (4) содержит расходимости, формула (4) нуждается в регуляризации (перенормировке). Регуляризацию удобнее провести для физической модели с заряженными массивными фермионами. В такой модели радиальные составляющие (дублеты) указанных собственных функций должны удовлетворять двумерному уравнению Дирака (2). Радиальная функция Грина $G_l(r, r'; E)$ задается (подобно случаю $3 + 1$ измерений [8]) следующим образом:

$$G_l(r, r'; E)\gamma^0 = \frac{1}{W(E)} [\Theta(r' - r)F_R(r)F_l^\dagger(r') + \Theta(r - r')F_l(r)F_R^\dagger(r')], \quad (5)$$

где $W(E)$ – не зависящий от r вронскиан, определяемый через дублеты V и U посредством выражения $\text{Wr}(V, U) = V i \sigma_2 U = (v_1 u_2 - u_1 v_2)$, в котором индексами 1, 2 обозначены соответственно верхние и нижние компоненты дублетов, а $F_R(r)$ и $F_I(r)$ – суть регулярное и сингулярное решения радиального уравнения Дирака $(\hbar - E)F(r) = 0$, т. е. решения, интегрируемые при $r \rightarrow 0$ ($r \rightarrow \infty$).

Поскольку исходный радиальный оператор Дирака определен как самосопряженный оператор не однозначно, область его определения можно задать так называемыми самосопряженными граничными условиями на концах интервала для функций из области определения с помощью действительного параметра ξ (параметра самосопряженного расширения) [29], [30]. Таким образом, функцию Грина следует представить через корректные решения самосопряженного радиального гамильтониана $\hat{h}$ в гильбертовом пространстве дублетов $F(r)$, квадратично-интегрируемых в области $[0, \infty)$, для каждого $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, а также s и произвольных a, B . В рассматриваемой нами конфигурации полей любой корректный дублет $F(r)$ гильбертового пространства должен удовлетворять самосопряженному граничному условию на левой границе интервала (в источнике) [29], [30], [34], [36]:

$$(F^\dagger(r) i \sigma_2 F(r))|_{r=0} = (\bar{f}g - g\bar{f})|_{r=0} = 0. \quad (6)$$

С физической точки зрения самосопряженные граничные условия означают, что в начале координат плотность тока вероятности равна нулю.

В качестве решений радиального уравнения Дирака (3) используем дублеты, найденные в статье [33], которые здесь удобнее представить в виде

$$F_R = \begin{pmatrix} f_R(r, \gamma, E) \\ g_R(r, \gamma, E) \end{pmatrix}, \quad F_I = \begin{pmatrix} f_I(r, \gamma, E) \\ g_I(r, \gamma, E) \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} f_R(r, \gamma, E) &= \frac{\sqrt{m+E}}{x} (A_R M_{aE/\lambda+s/2, \gamma}(x) + C_R M_{aE/\lambda-s/2, \gamma}(x)), \\ g_R(r, \gamma, E) &= \frac{\sqrt{m-E}}{x} (A_R M_{aE/\lambda+s/2, \gamma}(x) - C_R M_{aE/\lambda-s/2, \gamma}(x)), \\ \frac{C_R}{A_R} &= \frac{s\gamma - aE/\lambda}{\nu + ma/\lambda}, \\ f_I(r, \gamma, E) &= \frac{\sqrt{m+E}}{x} (A_I W_{aE/\lambda+s/2, \gamma}(x) + C_I W_{aE/\lambda-s/2, \gamma}(x)), \\ g_I(r, \gamma, E) &= \frac{\sqrt{m-E}}{x} (A_I W_{aE/\lambda+s/2, \gamma}(x) - C_I W_{aE/\lambda-s/2, \gamma}(x)), \\ \frac{C_I}{A_I} &= \left(\frac{ma}{\lambda} - s\nu \right)^s. \end{aligned}$$

Здесь $x = 2\lambda r$, $\lambda = \sqrt{m^2 - E^2}$, $\gamma = \sqrt{\nu^2 - a^2}$, $\nu = |l + \mu + s/2|$, A_R, A_I, C_R, C_I – численные коэффициенты, а функции Уиттекера $M_{a,b}(x)$ и $W_{c,d}(x)$ представляют собой регулярное и сингулярное решения.

При $a^2 \leq \nu^2$ величина γ является действительной, а при $a^2 > \nu^2$ справедливо равенство $\gamma = i\sqrt{a^2 - \nu^2} \equiv i\sigma$, т. е. γ является мнимой. Величины $q = \sqrt{\nu^2 - \gamma^2}$ и $q_c = \nu \Leftrightarrow \gamma = 0$ называются соответственно эффективным и критическим зарядами. Полезно также ввести обозначение $q_u = \sqrt{\nu^2 - 1/4} \Leftrightarrow \gamma = 1/2$.

2.2. Индуцированный вакуумный заряд. Докритическая область. В докритической области при $q \leq q_u$, $\gamma \geq 1/2$ в качестве регулярных решений можно выбрать только дублеты $F_R(r)$, исчезающие при $r = 0$; а при $0 < \gamma < 1/2$ ($q_u < q < q_c$) регулярные решения $U_R(r)$ удовлетворяют самосопряженному граничному условию (6) и должны быть выбраны в виде линейной комбинации функций $F_R(r)$ и $F_I(r)$ [30], [34]:

$$U_R(r) = F_R(r) + \xi F_I(r).$$

Вронскиан легко вычисляется и равен

$$\text{Wr}(F_R, F_I) \equiv W(E, \gamma) = (g_R f_I - f_R g_I) = -2A_R A_I \frac{\Gamma(2\gamma)}{\Gamma(\gamma + 1/2 - s/2 - aE/\lambda)} \frac{s\gamma}{\nu + ma/\lambda},$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция [37]. Таким образом, в докритической области одночастичная функция Грина полностью определена. Можно показать, что вклад в регуляризованную (перенормированную) плотность индуцированного вакуумного заряда от области $0 < \gamma < 1/2$ мал для любого ξ . Поэтому в докритической области достаточно рассмотреть случай $\xi = 0$. В итоге в качестве регулярных решений выбираем функции $F_R(r)$ для всех $\gamma > 0$ и находим, что

$$\text{tr } G_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E)|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'} \gamma^0 = \sum_{s=\pm 1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{f_l f_R + g_l g_R}{2\pi s W(E, \gamma)}.$$

После несложных вычислений получаем соотношение

$$\begin{aligned} \text{tr } G_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E)|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'} \gamma^0 &= \frac{1}{2\pi\lambda^2 r^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma - aE/\lambda)}{\Gamma(2\gamma + 1)} \times \\ &\times \left[\left(\frac{m^2 a}{\lambda} + E \left(x - \frac{2aE}{\lambda} - 1 \right) \right) M_{aE/\lambda+1/2, \gamma}(x) W_{aE/\lambda+1/2, \gamma}(x) + \right. \\ &+ \frac{m^2 a}{\lambda} \left(\gamma - \frac{aE}{\lambda} \right) M_{aE/\lambda-1/2, \gamma}(x) W_{aE/\lambda-1/2, \gamma}(x) + \\ &\left. + Ex \frac{d}{dx} \left(M_{aE/\lambda+1/2, \gamma}(x) W_{aE/\lambda+1/2, \gamma}(x) \right) \right]. \end{aligned}$$

Здесь и далее до конца п. 2.2 $\gamma = \sqrt{\nu^2 - a^2}$, $\nu = l + \mu + 1/2$.

Отметим, что в случае $m \neq 0$ функция Грина $G_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E)$ содержит параметр $\lambda = \sqrt{m^2 - E^2}$ и сингулярности на вещественной оси комплексной плоскости E , которые характеризуются двумя разрезами $(-\infty, -m]$ и $[m, \infty)$, связанными с непрерывным спектром $|E| \geq m$, и простыми полюсами, определяющими дискретный спектр в области $-m < E < m$ [38]. Связанные состояния (если они существуют) расположены на физическом листе λ .

В монографии [8] показано, что при интегрировании по E следа функции Грина в кулоновском поле в $3 + 1$ измерениях контур интегрирования C в комплексной плоскости E удобно деформировать так, чтобы он состоял из трех контуров:

$$C = C_- + C_p + C_+,$$

где C_- – контур, идущий вдоль отрицательной действительной полуоси E ($\text{Re } E < 0$) от $-\infty$ до 0 и обратно и поворачивающий вокруг точки $E = 0$ против часовой стрелки, C_p – замкнутая кривая, окружающая сингулярности, отвечающие связанным состояниям в области $-m < E < 0$ (если выбрать $E_F = -m$), а C_+ – контур вдоль положительной действительной полуоси E ($\text{Re } E > 0$), идущий от ∞ до 0 и обратно, но поворачивающий вокруг точки $E = 0$ по часовой стрелке [8]. В рассматриваемом нами случае $2 + 1$ измерений контур интегрирования C допускает точно такую же деформацию [27].

Можно показать, что контур интегрирования C по переменной E в конечном итоге можно деформировать так, чтобы он совпадал с мнимой полуосью [8]. Тогда получаем, что

$$j_0(\mathbf{r}) = -e \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{2\pi} \text{tr } G_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{r}', iE)|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'} \gamma^0.$$

Используя интегральное представление [37]

$$M_{aE/\lambda \pm 1/2, \gamma}(x) W_{aE/\lambda \pm 1/2, \gamma}(x) = \frac{x \Gamma(2\gamma + 1)}{\Gamma(1/2 + \gamma - aE/\lambda \mp 1/2)} \times \\ \times \int_0^\infty e^{-x \text{ch } s} \left(\text{cth } \frac{s}{2} \right)^{2aE/\lambda \pm 1} I_{2\gamma}(x \text{sh } s) ds,$$

удобно представить плотность индуцированного вакуумного заряда в виде

$$j_0(r) = -\frac{2e}{\pi^2 r} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty dE \int_0^\infty dt e^{-2\lambda r \text{ch } t} \left[2a \cos\left(\frac{2aE}{\lambda}\right) \text{ch } t I_{2\gamma}\left(\frac{2\lambda r}{\text{sh } t}\right) - \right. \\ \left. - \frac{2Er}{\text{sh } t} \sin\left(\frac{2aE}{\lambda}\right) I'_{2\gamma}\left(\frac{2\lambda r}{\text{sh } t}\right) \right].$$

Здесь и ниже в п. 2.2 $\lambda = \sqrt{m^2 + E^2}$, а $I_\mu(z)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода, штрих означает производную функции по ее аргументу.

Запишем равенство

$$\mu = [\mu] + \eta \equiv n + \eta, \quad (7)$$

где $[\mu] \equiv n$ – целая часть μ , т. е. $n \leq \mu$, $1 > \eta \geq 0$. Отсюда следует, что $n = 0, 1, 2, \dots$ для $\mu > 0$ и $n = -1, -2, -3, \dots$ для $\mu < 0$. Поскольку знаки e и B фиксированы, достаточно рассмотреть только случай $\mu > 0$. Тогда, введя обозначения

$$\nu_+ = l + \eta + \frac{1}{2}, \quad \nu_- = l - \eta + \frac{1}{2}, \quad \gamma_+ = \sqrt{\nu_+^2 - a^2}, \quad \gamma_- = \sqrt{\nu_-^2 - a^2}$$

(причем здесь и далее $l \equiv l + n$), можно записать плотность индуцированного заряда в виде

$$j_0(r) = -\frac{2e}{\pi^2 r} \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^\infty dE \int_0^\infty dt e^{-2\lambda r \text{ch } t} \left\{ 2a \cos\left(\frac{2aE}{\lambda}\right) \text{ch } t \left[I_{2\gamma_+}\left(\frac{2\lambda r}{\text{sh } t}\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + I_{2\gamma_-}\left(\frac{2\lambda r}{\text{sh } t}\right) \right] - \frac{2Er}{\text{sh } t} \sin\left(\frac{2aE}{\lambda}\right) \left[I'_{2\gamma_+}\left(\frac{2\lambda r}{\text{sh } t}\right) + I'_{2\gamma_-}\left(\frac{2\lambda r}{\text{sh } t}\right) \right] \right\}.$$

Заметим, что j_0 нечетно по отношению к заряду e . Выражение для плотности индуцированного заряда вакуума содержит расходимость, и его необходимо регуляризовать. Благодаря ненулевой массе m регуляризацию можно провести как в массивной квантовой электродинамике, причем технически это удобно сделать в импульсном представлении:

$$\begin{aligned} j_0(\beta) &\equiv \rho(\beta) = \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} j_0(r) = \\ &= \frac{2e}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} dy \frac{\text{sh } t}{2b} e^{-y \text{ch } t} J_0 \left[\beta y \frac{\text{sh } t}{2b} \right] f(y, t), \\ f(y, t) &= \frac{xy}{b} \sin(k't) (I'_{2\gamma_+}(y) + I'_{2\gamma_-}(y)) - 2a \text{cth } t \cos(k't) (I_{2\gamma_+}(y) + I_{2\gamma_-}(y)). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $\beta = |q|/m$, $x = E/m$, $b = \sqrt{1+x^2}$, $y = 2bmr/\text{sh } t$, $k' = 2ax/b$.

Регуляризацию (перенормировку) плотности индуцированного заряда вакуума выполним, исходя из очевидного требования равенства нулю полного вакуумного заряда [19]. Этому требованию проще удовлетворить, если при проведении регуляризации мы сохраним массу фермиона m , так как плотность индуцированного заряда быстро уменьшается на расстояниях $r \gg 1/m$. При этом конечный результат перенормировки не зависит от порядка интегрирования и суммирования и, естественно, от параметра обрезания, а сама процедура регуляризации индуцированного заряда вакуума в рассматриваемой нами конфигурации внешнего поля вполне аналогична процедуре регуляризации заряда вакуума в сильном кулоновском поле в квантовой электродинамике в $3+1$ измерениях (см., например, работы [9], [10], [19], [39]).

Введем перенормированную плотность индуцированного заряда в импульсном представлении: $\tilde{\rho}(\beta) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} [\rho(\beta) - \lim_{\beta \rightarrow 0} \rho(\beta)]$ с ультрафиолетовым обрезанием $|E| < \Lambda$ [19], [39]. Поскольку масса фермиона m – это единственный размерный параметр в функции Грина, получающаяся безразмерная функция $\tilde{\rho}(\beta)$ может зависеть только от отношения $\beta = q/m$. В статьях [9], [10], [39] было показано, что формула для плотности индуцированного заряда вакуума в кулоновском потенциале $-a/r$ в $3+1$ измерениях как ряд по a для малых a содержит расходимости только в коэффициентах при членах, пропорциональных a и a^3 , которые ведут себя по-разному в пределе $\beta \rightarrow 0$. В рассматриваемой нами конфигурации полей выражение для плотности индуцированного заряда вакуума в $2+1$ измерениях также содержит расходимости в коэффициентах при членах, пропорциональных a , однако в отличие от случая $3+1$ измерений все слагаемые, пропорциональные a^3 при $\beta \rightarrow 0$, конечны. А именно, линейный по a член получается после вычитания из (8) соответствующего линейного по a асимптотического выражения формулы (8) при $\beta \rightarrow 0$; в терминах теории возмущений квантовой электродинамики этот (перенормированный) член соответствует диаграмме поляризационного оператора в низшем (однопетлевом) приближении теории возмущений. Члены, пропорциональные a^3 , соответствуют диаграммам типа рассеяния фотона на фотоне, как и в случае трехмерной квантовой электродинамики [9], [10], [39]; их регуляризация в рассматриваемой нами ситуации также необходима в силу требований калибровочной инвариантности, которыми в частности определяется поведение амплитуды и тензора рассеяния при малых β [7].

Вклады от потенциала АБ в коэффициенты при указанных членах зависят только от дробной части “относительного магнитного потока” (см. равенство (7)), представляют собой малые поправки к вкладам, возникающим в чисто кулоновском потенциале, и не изменяют характер поведения расходимостей. Вычисления для случая $a < 1/2$, $\eta \sim 0$ проводятся аналогично вычислениям, выполненным в работах [9], [10], [19], [39] для поляризации вакуума в чисто кулоновском поле в докритической области, а детали вычислений приведены в приложении к настоящей статье. Как показано в приложении, лидирующий член в выражении для плотности перенормированного индуцированного заряда вакуума $\tilde{\rho}(\beta)$ в пределе $m \rightarrow 0$ ($\beta \rightarrow \infty$) есть константа, которую обозначим $Q_{\text{ind}} = \lim_{m \rightarrow 0} \tilde{\rho}(\beta)$. Очевидно, что Q_{ind} – индуцированный заряд вакуума, локализованный в точке $\mathbf{r} = 0$ в координатном пространстве. Следовательно, плотность полного вакуумного заряда в координатном пространстве имеет вид

$$\tilde{\rho}(\mathbf{r}) = Q_{\text{ind}}\delta(\mathbf{r}) + \rho_{\text{dist}}(\mathbf{r}),$$

где $\rho_{\text{dist}}(\mathbf{r})$ – так называемая распределенная плотность заряда. Из требования равенства нулю полного вакуумного заряда $\int \tilde{\rho}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 0$ следует, что полный распределенный заряд равен $-Q_{\text{ind}}$. Выражение для распределенной плотности заряда весьма громоздко, и мы его не приводим, однако отметим, что на малых расстояниях от кулоновского центра $\rho_{\text{dist}}(\mathbf{r}) \sim m^2 \ln(1/mr)$, $mr \ll 1$; распределенная плотность заряда исчезает в пределе $m \rightarrow 0$.

Вклад в перенормированный индуцированный вакуумный заряд в первом порядке по a обозначим через Q_1 . Этот вклад соответствует диаграмме поляризационного оператора в однопетлевом приближении теории возмущений по a :

$$Q_1 = \frac{2ea}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\left(l + \frac{1}{2} + \eta \right) \psi' \left(l + \frac{1}{2} + \eta \right) + \left(l + \frac{1}{2} - \eta \right) \psi' \left(l + \frac{1}{2} - \eta \right) - \right. \\ \left. - 2 - \frac{l + 1/2}{(l + 1/2)^2 - \eta^2} \right], \quad (9)$$

где $\psi(z)$ – логарифмическая производная гамма-функции [37]. При $\eta \ll 1$ получаем, что

$$Q_1 = \frac{ea\pi}{4} + ea\pi \left(2 \ln 2 + 1 - \frac{\pi^2}{4} \right) \eta^2 \approx ea\pi (0.25 - 0.04\eta^2). \quad (10)$$

Первый член в (10) совпадает с результатом, полученным в статьях [15], [16], [19]. Отметим, что вклад в Q_1 , обусловленный потенциалом АБ, возникает только в присутствии кулоновского поля, зависит от дробной части магнитного потока, мал и имеет противоположный кулоновскому вкладу знак.

В докритической области удастся получить точное выражение перенормированного индуцированного заряда вакуума, локализованного в начале координат, в следующей форме (см. приложение к настоящей статье):

$$Q = Q_1 + Q_{\text{r}}, \quad (11)$$

где

$$Q_r = \frac{2e}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \operatorname{Im} \left[\ln(\Gamma(\gamma_+ - ia)\Gamma(\gamma_- - ia)) + \frac{1}{2} \ln((\gamma_+ - ia)(\gamma_- - ia)) - \right. \\ \left. - ((\gamma_+ - ia)\psi(\gamma_+ - ia) + (\gamma_- - ia)\psi(\gamma_- - ia)) + ia \frac{l + 1/2}{(l + 1/2)^2 - \eta^2} - \right. \\ \left. - ia \left\{ \left(l + \frac{1}{2} + \eta \right) \psi' \left(l + \frac{1}{2} + \eta \right) + \left(l + \frac{1}{2} - \eta \right) \psi' \left(l + \frac{1}{2} - \eta \right) \right\} \right]. \quad (12)$$

При $\eta = 0$ формулу (12) можно упростить и представить в форме, совпадающей с результатом, впервые полученным в работе [19]; отметим также, что коэффициент при члене, пропорциональном a^3 , был найден посредством теории возмущений в статье [16]. Индуцированный заряд вакуума Q , определенный формулой (11), отрицателен, поэтому в результате поляризации вакуума происходит экранирование исходного заряда кулоновского центра $a/e_0 > 0$.

2.3. Плотность индуцированного вакуумного заряда в сверхкритической области. В сверхкритической области $q > q_c$ ($\gamma = i\sigma$) сингулярность кулоновского потенциала в начале координат приводит к необходимости корректного определения решений самосопряженного дираковского гамильтониана, что можно сделать с помощью самосопряженных граничных условий (6). Теперь в радиальной функции Грина (5) в качестве регулярных решений $U_R(r)$, удовлетворяющих (6), следует взять линейную комбинацию функций $F_R(r)$ и $F_I(r)$. Заметим, что в сверхкритической области ($\gamma = i\sigma$) оба приведенных выше решения $F_R(r)$ и $F_I(r)$ становятся осциллирующими при $r \rightarrow 0$ (в точке сингулярности гамильтониана) за счет экспоненты с мнимым показателем. Поэтому в указанной области уместно использовать параметр самосопряженного расширения θ [34], [38], связанный с параметром ξ следующим образом:

$$\frac{A_R}{\xi A_I} = e^{2i\theta} \left(\frac{2\lambda}{E_0} \right)^{-2i\sigma} \frac{\nu + a(m + E)/\lambda + i\sigma}{\nu + a(m + E)/\lambda - i\sigma} \frac{\Gamma(2i\sigma)}{\Gamma(1/2 - s/2 - aE/\lambda + i\sigma)} - \\ - \frac{\Gamma(-2i\sigma)}{\Gamma(1/2 - s/2 - aE/\lambda - i\sigma)},$$

где $\pi \geq \theta \geq 0$, а постоянная E_0 больше нуля и задает энергетический масштаб.

Функция Грина терпит разрыв, связанный с тем, что ее сингулярности при $q > q_c$ расположены на втором (нефизическом) листе $\operatorname{Re} E < 0$, $\operatorname{Im} E < 0$ в комплексной плоскости переменной E . Эти сингулярности определяются комплексными корнями уравнения $W(E, i\sigma) = 0$ и описывают бесконечное число квазистационарных (резонансных) состояний с комплексными “энергиями” $E = |E|e^{i\tau}$. Для безмассовых фермионов ($m = 0$) и $\sigma \ll 1$ энергетический спектр был найден в работе [38]:

$$E_{k,\theta,s} \equiv \operatorname{Re} E = E_0 \cos(\tau) \exp \left(-\frac{k}{2}\sigma + \frac{\theta}{\sigma} + \pi \operatorname{cth} \frac{\pi a}{2a} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (13)$$

где $\tau \approx -(1 + s)/4a + \operatorname{Im} \psi(ia) + \pi/2$. Формула (13), как видно, содержит существенную сингулярность. Причем энергии возникших квазилокализованных резонансов

отрицательны, так как все они расположены в секторе дырок. При $\sigma \ll 1$ мнимая часть $\text{Im } E = \text{tg } \tau E_{k,\theta,s} \ll \text{Re } E$, т. е. очень мала. Поэтому указанные резонансы представляют собой практически стационарные состояния [38]. К примеру, при $a = 1/2$, $s = 1$ справедлива оценка $\tau \approx (1 + 0.04)\pi$.

Вклад в плотность индуцированного вакуумного заряда от появляющихся резонансных состояний можно учесть, просто выполняя интегрирование по E от $-\infty$ до 0 по контуру S , огибающему сингулярности на втором (нефизическом) листе римановой поверхности. После несложных вычислений плотность индуцированного (электронного) заряда (4) можно представить как сумму вкладов докритической и сверхкритической областей, которые следует рассмотреть отдельно:

$$\begin{aligned} j_0(r) &= -e \int \frac{dE}{8\pi^2 i} \text{tr } G_\nu(r, r'), E)|_{r=r'} \gamma^0 = \\ &= -e \int_C \frac{dE}{8\pi^2 i} \sum_{s=\pm 1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{f_l(r, \gamma, E) f_R(r, \gamma, E) + g_l(r, \gamma, E) g_R(r, \gamma, E)}{sW(E, \gamma)} - \\ &- e \int_S \frac{dE}{8\pi^2 i} \sum_{l,s: \nu < a} \frac{\xi(f_l^2(r, i\sigma, E) + g_l^2(r, i\sigma, E))}{sW(E, i\sigma)} = j_{\text{sub}}(r) + j_{\text{sup}}(r). \end{aligned} \quad (14)$$

В сверхкритической области $\gamma = i\sigma$, $0 \geq \theta \geq \pi$, а сумма во втором слагаемом j_{sup} берется по таким l , что $a^2 > (l + \mu + s/2)^2$. В таком случае контуры C , S можно деформировать так, чтобы они совпадали с мнимой осью в комплексной плоскости переменной E .

Первое слагаемое в формуле (14) уже было вычислено и представлено в п. 2.2. Второе слагаемое представляет собой сходящийся интеграл, и его вклад в плотность индуцированного вакуумного заряда можно оценить при $m = 0$. Проведя несложные вычисления, приводим j_{sup} к виду

$$\begin{aligned} j_{\text{sup}}(r) &= \frac{e}{8\pi^2 r^2} \sum_{l,s: \nu < a} \frac{s\nu^{s+1}}{\sigma \Gamma(2i\sigma) \Gamma(-2i\sigma)} \int_{-\infty}^0 \frac{dE}{E\omega(\sigma)} \Gamma\left(i\sigma + \frac{1-s}{2} - \frac{iaE}{|E|}\right) \times \\ &\times \Gamma\left(-i\sigma + \frac{1-s}{2} - \frac{iaE}{|E|}\right) W_{iaE/|E|+s/2, i\sigma}(2|E|r) W_{iaE/|E|-s/2, i\sigma}(2|E|r), \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\omega(\sigma) = 1 - e^{2i\theta} \left(\frac{2|E|}{E_0}\right)^{-2i\sigma} \frac{\nu + iaE/|E| + is\sigma}{\nu + iaE/|E| - is\sigma} \frac{\Gamma(2i\sigma)}{\Gamma(-2i\sigma)} \frac{\Gamma(-i\sigma + (1-s)/2 - iaE/|E|)}{\Gamma(i\sigma + (1-s)/2 - iaE/|E|)}. \quad (16)$$

Перепишем $(2|E|/E_0)^{-2i\sigma}$ как $\exp(-2i\sigma \ln(|E|/E_0))$. Поскольку подинтегральное выражение (15) экспоненциально убывает при $|E| \gg 1/r$ и сильно осциллирует при $|E| \rightarrow 0$, основной вклад в интеграл по E дает область $|E| \sim 1/r$. Поэтому, чтобы оценить j_{sup} , заменим $|E|$ на $1/r$ в логарифмически-периодическом множителе подинтегрального выражения (16). Тогда получим, что

$$\begin{aligned} j_{\text{sup}}(r) &= -\frac{e}{8\pi^2 r^2} \sum_{l,s: \nu < a} \frac{s\nu^{s+1} \Gamma(i\sigma + (1-s)/2 + ia)}{\sigma \omega_-(\sigma) \Gamma(2i\sigma) \Gamma(-2i\sigma)} \Gamma\left(-i\sigma + \frac{1-s}{2} + ia\right) \times \\ &\times \int_0^\infty \frac{dE}{E} W_{-ia+s/2, i\sigma}(2Er) W_{-ia-s/2, i\sigma}(2Er), \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\omega_-(\sigma) = 1 - e^{2i\theta + 2i\sigma \ln(E_0 r)} \frac{\nu - ia + i\sigma}{\nu - ia - i\sigma} \frac{\Gamma(2i\sigma)}{\Gamma(-2i\sigma)} \frac{\Gamma(-i\sigma + (1-s)/2 + ia)}{\Gamma(i\sigma + (1-s)/2 + ia)}.$$

Из-за комплексных сингулярностей, расположенных на нефизическом листе при $q > q_c$, функция Грина и $j_{\text{sup}}(r)$ также комплексны, хотя при $\sigma \ll 1$ их мнимые части малы. С физической точки зрения комплексность функции Грина, вероятно, связана с тем, что выбранный нами для построения этой функции Грина нейтральный вакуум нестабилен при $q > q_c$ (см. также книгу [8]).

Проведем интегрирование в (17), используя формулу [37]

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{dE}{E} W_{-ia+s/2, i\sigma}(2Er) W_{-ia-s/2, i\sigma}(2Er) = \\ = \frac{\pi}{s \sin(2\pi i\sigma)} \left[\frac{1}{\Gamma((1-s)/2 + ia + i\sigma) \Gamma((1+s)/2 + ia - i\sigma)} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\Gamma((1-s)/2 + ia - i\sigma) \Gamma((1+s)/2 + ia + i\sigma)} \right]. \end{aligned}$$

После небольших преобразований окончательно получаем плотность индуцированного заряда в сверхкритической области в виде

$$j_{\text{sup}}^r(r) = \frac{e}{2\pi^2 r^2} \sum_{l, s: \nu < a} \text{Re} \frac{\sigma}{\omega_-(\sigma)}. \quad (18)$$

Таким образом, индуцированный заряд вакуума невзаимодействующих безмассовых фермионов в сверхкритическом режиме есть степенная функция расстояния от источника ($\sim c/r^2$), причем коэффициент в этом выражении представляет собой логарифмически-периодическую функцию этого расстояния. В докритическом же режиме индуцированный вакуумный заряд локализован в начале координат. Следовательно, в сверхкритическом режиме индуцированный заряд вакуума должен приводить к модификации кулоновского потенциала на больших расстояниях. В качестве примера исследуем формулу (18) при $1/2 - \eta < a < 3/2 + \eta$, $1 \gg \eta > 0$, когда даже слагаемые, отвечающие самым малым значениям $l + n$, s , находятся в сверхкритической области. Получим, что

$$j_{\text{sup}}^r(r) = \frac{e}{2\pi^2 r^2} \sum_{\sigma=\sigma_{\pm}} \sigma \text{Re} \frac{2 - Aze^{2i\theta + 2i\sigma \ln(E_0 r)}}{1 - Aze^{2i\theta + 2i\sigma \ln(E_0 r)} + A^2[(a - \sigma)/(a + \sigma)]e^{4i\theta + 4i\sigma \ln(E_0 r)}}, \quad (19)$$

где

$$A = \frac{\Gamma(2i\sigma)\Gamma(-i\sigma + ia)}{\Gamma(-2i\sigma)\Gamma(i\sigma + ia)}, \quad z = 2 \frac{a - \sigma}{a}, \quad \nu_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \eta, \quad \sigma_{\pm} = a^2 - \nu_{\pm}^2.$$

Отметим, что выражение для плотности индуцированного вакуумного заряда (19) имеет сходство с выражением для локальной плотности состояний, в котором также возникают резонансы при отрицательных энергиях [38].

Используя известное представление

$$\text{Arg} \Gamma(x + iy) = y \left[-C + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{y} \arctg \frac{y}{x + n - 1} \right) \right],$$

где $C = 0.57721$ – постоянная Эйлера, окончательно получаем плотность индуцированного вакуумного заряда (19) в следующем виде:

$$j_{\text{sup}}^r(r) = \frac{e}{2\pi^2 r^2} \sum_{\sigma=\sigma_{\pm}} \sigma \times \\ \times \operatorname{Re} \frac{2 - |A| z e^{2i\theta + 2i\sigma \ln(E_0 r) + i\psi}}{1 - |A| z e^{2i\theta + 2i\sigma \ln(E_0 r) + i\psi} + |A|^2 [(a - \sigma)/(a + \sigma)] e^{4i\theta + 4i\sigma \ln(E_0 r) + 2i\psi}}. \quad (20)$$

Здесь

$$\psi \equiv \operatorname{Arg} A = -\pi - 2C\sigma + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\sigma}{n} - 2 \operatorname{arctg} \frac{2\sigma}{n} + \operatorname{arctg} \frac{2n\sigma}{n^2 + \nu^2} \right).$$

При малых $\sigma \ll 1$ формула (20) принимает более простой вид:

$$j_{\text{sup}}^r(r) = \frac{e(\sigma_+ + \sigma_-)}{2\pi^2 r^2}, \quad \sigma_{\pm} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{2} \pm \eta \right)^2}. \quad (21)$$

Знак $\pm$ перед η при фиксированном знаке самого η в действительности отвечает знаку проекции спина электрона в квазистационарном состоянии на ось соленоида в трехмерном пространстве. Видно, что $j_{\text{sup}}^r(r)$ нечетно по отношению к заряду фермиона e и четно по отношению к параметру η . Знак вклада в плотность индуцированного заряда от потенциала АБ противоположен знаку вклада от кулоновского потенциала. Интересно, что плотность индуцированного вакуумного заряда $j_{\text{sup}}^r(r)$ (21) при $\sigma \ll 1$ не содержит параметр самоспряженного расширения θ . С физической точки зрения изменение параметра a при его переходе через критическую точку ($\gamma = 0$) означает переход от докритического режима к сверхкритическому, который можно символически охарактеризовать заменой $\gamma \rightarrow \sigma$, и даже малое изменение σ , такое что $q > q_c$, приводит к качественному изменению характера самого физического явления: возникновению бесконечного числа резонансов с отрицательными энергиями. Иными словами, характер физического явления сам по себе должен быть связан только с физическими, а не математическими факторами. Отметим также, что выражение (21) (при $\eta = 0$) согласуется с результатом, полученным в работе [15], в которой исследовалась поляризация вакуума в сверхкритическом кулоновском поле примеси в графене.

3. ЭКРАНИРОВАНИЕ ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА КУЛОНОВСКОГО ЦЕНТРА

Обсудим кратко эффект экранирования точечного заряда кулоновского центра вследствие поляризации вакуума. Локализация индуцированного заряда в источнике в докритическом режиме подразумевает, что заряд кулоновского центра просто перенормировывается, а это в конечном итоге приводит только к замене $a \rightarrow a_{\text{eff}}$ в кулоновском потенциале, где a_{eff} – вещественные решения уравнения [19]

$$a_{\text{eff}} = a - e[Q_1(a_{\text{eff}}) + Q_r(a_{\text{eff}})],$$

в котором учитываются нелинейные по a эффекты. В частности, в работе [19] было показано, что для $a = e_0^2$ это уравнение не имеет решений $a_{\text{eff}} \geq 1/2$, т. е. суммарный заряд для таких значений a остается всегда меньше критического и переход

в сверхкритический режим невозможен. Поскольку в докритическом режиме вклад потенциала АБ при $\eta \ll 1$ в поляризацию вакуума мал, этот результат остается справедливым и для рассматриваемой нами конфигурации внешних полей. При $a = 2e_0^2$ и $a = 3e_0^2$ переход в сверхкритический режим возможен [19].

Если заряд кулоновского центра является сверхкритическим, то для оценки эффекта экранировки необходимо учесть вклад появляющихся в этом режиме квазистационарных состояний. Очевидно, что по крайней мере для малых $\sigma_{\pm}$ пробный заряд, находящийся на некотором расстоянии r от кулоновского центра, испытывает действие точечного кулоновского заряда минус индуцированный заряд внутри кольца с радиусами r_0 , r , $r_0 < r$. Индуцированный заряд внутри кольца $Q_{\pm}$ найдем посредством интегрирования формулы (21) по r отдельно для σ_+ и σ_- :

$$Q_{\pm}(r_{\pm}) = -\frac{e_0\sigma_{\pm}}{\pi} \ln \frac{r_{\pm}}{r_0}, \quad (22)$$

а затем рассмотрим $Q_{\pm}(r_{\pm})$ как эффективный точечный заряд $a_{\text{eff}}(r_{\pm})/e_0$. Так как логарифмический член представляет собой перенормировку заряда, возникающую из-за экранировки (сверхкритического) кулоновского заряда, вместо уравнения (22) можно написать дифференциальное уравнение, которое определяет самосогласованную перенормировку эффективной константы связи $a_{\pm} \equiv a_{\text{eff}}^{\pm}$ подобно дифференциальному уравнению группы перенормировок (см., например, статьи [15], [23]):

$$\frac{da_{\pm}}{d \ln(r_{\pm}/r_0)} = -\frac{e_0^2\sigma_{\pm}}{\pi}.$$

Отсюда видно, что эффективная константа связи $a_{\pm}$ стремится к постоянной $1/2$ на конечном расстоянии $r_{\pm} = r_0 e^{-(\pi/e_0^2) \ln[2a_{\pm} + \sqrt{4a_{\pm}^2 - 1}]}$ от кулоновского центра, поэтому независимо от величины (сверхкритического) кулоновского заряда вакуум квантовой системы перестраивается так, что электроны на больших расстояниях $r > r_{\pm}$ никогда не испытывают действия сверхкритического эффективного заряда.

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В данной статье мы исследовали поляризацию вакуума заряженными безмассовыми фермионами в комбинации кулоновского потенциала и потенциала АБ в $2+1$ измерениях. В частности, мы вычислили плотность индуцированного вакуумного заряда, используя функции Грина соответствующего уравнения Дирака. В докритической области индуцированный вакуумный заряд Q локализован в источнике (начале координат) и имеет экранирующий знак, что ведет к уменьшению эффективного заряда кулоновского центра. Вклад в точечный заряд Q от потенциала АБ мал, и его знак противоположен знаку кулоновского заряда. В сверхкритическом режиме, так же как и в докритическом, индуцированный вакуумный заряд экранирует заряд кулоновского центра, но ведет себя как степенная функция расстояния до источника, приводя к изменению потенциала точечного кулоновского заряда на больших расстояниях от центра. Критический заряд q_c в суперпозиции кулоновского потенциала и потенциала АБ зависит явным образом от спинного параметра s .

Поскольку одночастичная динамика электрона в графене описывается безмассовым двумерным уравнением Дирака, мы надеемся, что полученные в настоящей

работе результаты можно использовать в задаче об экранировании кулоновской смеси вследствие поляризации вакуума в графене с учетом эффектов, связанных со спином электронов, а также в общем будут способствовать более глубокому пониманию важных проблем квантовой электродинамики.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для вычисления индуцированного заряда Q_{ind} разделим его на две части, первая из которых равна вкладу Q_1 от слагаемых, пропорциональных a , вторая – вкладу Q_+ от всех остальных слагаемых, содержащих все последующие нечетные степени параметра a ; в этом мы следуем работе [39], в которой был вычислен индуцированный заряд вакуума в чисто кулоновском поле в трехмерной массивной квантовой электродинамике.

Сначала проведем вычисление вклада Q_1 . Для этой цели найдем $f(y, t)$ в первом приближении по a , обозначив это приближение $f_1(y, t)$:

$$f_1(y, t) = 2a \left[yt \left(\frac{x}{b} \right)^2 (I'_{2\nu_+}(y) + I'_{2\nu_-}(y)) - \text{cth } t (I_{2\nu_+}(y) + I_{2\nu_-}(y)) \right]. \quad (\text{П.1})$$

Выражение (П.1) следует подставить в (8) вместо $f(y, t)$. Видно, что при $\beta \rightarrow 0$ правая часть равенства (8) стремится к бесконечности. Действительно, с учетом формулы

$$\int_0^\infty dy I_{2\nu_\pm}(y) e^{-y \text{ch } t} = \frac{e^{-2\nu_\pm t}}{\text{sh } t} \quad (\text{П.2})$$

правая часть равенства (8) при $\beta = 0$ становится расходящимся выражением

$$-\frac{2ea}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^\infty dt \text{ch } t (e^{-2\nu_+ t} + e^{-2\nu_- t}).$$

Расходящийся вклад следует вычесть из правой части выражения (8). Тогда оно принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(\beta) = & \frac{2e}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^\infty dt \left(\int_0^\infty dy \int_0^\infty dx \frac{\text{sh } t}{2b} e^{-y \text{ch } t} J_0 \left(\beta y \frac{\text{sh } t}{2b} \right) f_1(y, t) + \right. \\ & \left. + a \text{ch } t (e^{-2\nu_+ t} + e^{-2\nu_- t}) \right). \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Далее, для вычисления Q_1 перейдем к безмассовому пределу $m \rightarrow 0$; в таком случае $b \rightarrow x$. Учитывая это обстоятельство, а также то, что при $x = b$

$$\int_0^\infty dt \int_0^\infty dy \frac{\text{sh } t}{2b} e^{-y \text{ch } t} f_1(y, t) = 0, \quad (\text{П.4})$$

перепишем (П.3) (подставляя Q_1 вместо $\tilde{\rho}(\beta)$) в следующем виде:

$$\begin{aligned} Q_1 = & \frac{2e}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^\infty dt \left(\int_0^\infty dy \int_0^\infty dx \frac{\text{sh } t}{2x} e^{-y \text{ch } t} f_1(y, t) \left[J_0 \left(y \text{sh } \frac{t}{x} \right) - J_0 \left(\frac{1}{x} \right) \right] + \right. \\ & \left. + a \text{ch } t (e^{-2\nu_+ t} + e^{-2\nu_- t}) \right). \end{aligned}$$

Интегрируя по x , получаем, что

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{2ea}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dt \left(\int_0^{\infty} dy \operatorname{sh} t \ln \left(\frac{1}{y} \operatorname{sh} t \right) e^{-y \operatorname{ch} t} \times \right. \\ &\quad \times \left[yt(I'_{2\nu+}(y) + I'_{2\nu-}(y)) - \operatorname{cth} t(I_{2\nu+}(y) + I_{2\nu-}(y)) \right] + a \operatorname{cth} t(e^{-2\nu+t} + e^{-2\nu-t}) \Big) = \\ &= \frac{ea}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dt \left(\int_0^{\infty} dy \ln \left(\frac{1}{y} \operatorname{sh} t \right) \left[t \operatorname{sh} t \frac{d}{dy} \left(ye^{-y \operatorname{ch} t} (I_{2\nu+}(y) + I_{2\nu-}(y)) \right) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{d}{dt} \left(t \operatorname{ch} t e^{-y \operatorname{ch} t} \right) (I_{2\nu+}(y) + I_{2\nu-}(y)) \right] + a \operatorname{cth} t(e^{-2\nu+t} + e^{-2\nu-t}) \Big). \end{aligned}$$

Последнее выражение проинтегрируем сначала по y , а затем по t . В итоге получаем формулу (9).

Определим теперь вторую часть вклада в индуцированный вакуумный заряд. Для этого в выражении (8) для плотности индуцированного вакуумного заряда из подинтегрального выражения, стоящего в правой части интеграла, следует вычесть $f_1(y, t)$. В таком случае в выражении для плотности индуцированного заряда останется только вклад слагаемых, пропорциональных a^3 , a^5 и всем последующим нечетным степеням параметра a . Заметим, что в отличие от случая $3+1$ измерений слагаемое, пропорциональное a^3 при $\beta \rightarrow 0$, конечно. Однако с целью регуляризации предельное значение этого слагаемого при $\beta \rightarrow 0$ следует вычесть из правой части (8). Обозначим $\tilde{\rho}_r$ перенормированную часть плотности индуцированного заряда вакуума, оставшуюся после вычитания слагаемого, пропорционального a . Учитывая все вышесказанное, ее можно представить в виде

$$\tilde{\rho}_r(\beta) = \frac{2e}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} dy \frac{\operatorname{sh} t}{2b} e^{-y \operatorname{ch} t} J_0 \left(\beta y \frac{\operatorname{sh} t}{2b} \right) (f(y, t) - f_1(y, t)) - \omega(l) \right], \quad (\text{П.5})$$

где

$$\omega(l) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} dy \frac{\operatorname{sh} t}{2b} e^{-y \operatorname{ch} t} J_0 \left(\beta y \frac{\operatorname{sh} t}{2b} \right) (f(y, t) - f_1(y, t)). \quad (\text{П.6})$$

Найдем $\omega(l)$. Используя (П.2) и учитывая, что при $\beta \rightarrow 0$ $J_0(\beta y \operatorname{sh} t/2b) \rightarrow 1$, проинтегрируем правую часть (П.6) по y . Затем перепишем получившееся выражение следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega(l) &= \int_0^{\infty} \frac{dx}{b} \int_0^{\infty} dt \left[-\frac{x}{2b} \sin(k't) \frac{d}{dt} \left((e^{-2\gamma+t} + e^{-2\gamma-t}) \operatorname{cth} t \right) - \right. \\ &\quad \left. - a \cos(k't) \operatorname{cth} t (e^{-2\gamma+t} + e^{-2\gamma-t}) + at \frac{x^2}{b^2} \frac{d}{dt} \left((e^{-2\nu+t} + e^{-2\nu-t}) \operatorname{cth} t \right) + \right. \\ &\quad \left. + a \operatorname{cth} t (e^{-2\nu+t} + e^{-2\nu-t}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

Проинтегрируем слагаемые с производной в правой части (П.7) по частям по переменной t , а затем проинтегрируем получившееся выражение по x . В результате

получаем соотношение

$$\omega(l) = \int_0^\infty dt \left[a(e^{-2\nu_+ t} + e^{-2\nu_- t}) - \frac{\sin(2at)}{2t} (e^{-2\gamma_+ t} + e^{-2\gamma_- t}) \right] \text{cth } t.$$

Далее, продифференцируем получившееся выражение по параметру a и используем формулу

$$\int_0^\infty dt e^{-2\nu t} \left(\frac{1}{t} - \text{cth } t \right) = \psi(\nu) - \ln(\nu) + \frac{1}{2\nu}. \quad (\text{П.8})$$

Затем, проведя проинтегрирование по параметру a и применяя очевидное граничное условие $\omega(l) = 0$ при $a = 0$, получаем окончательное выражение для $\omega(l)$:

$$\begin{aligned} \omega(l) = & -\text{Im} \left[\ln(\Gamma(\gamma_+ - ia)\Gamma(\gamma_- - ia)) + \frac{1}{2} \ln((\gamma_+ - ia)(\gamma_- - ia)) + \right. \\ & \left. + ia \left\{ \psi\left(l + \frac{1}{2} + \eta\right) + \psi\left(l + \frac{1}{2} - \eta\right) \right\} + ia \frac{l + 1/2}{(l + 1/2)^2 - \eta^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{П.9})$$

Теперь перейдем к безмассовому пределу $m \rightarrow 0$ и вычислим интегралы, стоящие в правой части выражения (П.5). Учтем, что в безмассовом пределе $x = b$ и для $f_1(y, t)$ справедливо равенство (П.4). Очевидно, точно такое же равенство выполняется и для $f(y, t)$. В силу этого соотношение (П.5) можно переписать (заменяв $\tilde{\rho}_r(\beta)$ на Q_r) следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_r = & \frac{e}{\pi} \sum_{l=0}^\infty \left[\int_0^\infty dx \int_0^\infty dt \int_0^\infty dy \frac{\text{sh } t}{x} e^{-y \text{ch } t} \left\{ J_0\left(y \frac{\text{sh } t}{x}\right) - J_0\left(\frac{1}{x}\right) \right\} \times \right. \\ & \left. \times (f(y, t) - f_1(y, t)) - \omega(l) \right]. \end{aligned} \quad (\text{П.10})$$

Интеграл по x легко вычислить, учитывая, что

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} \left\{ J_0\left(\frac{a}{x}\right) - J_0\left(\frac{1}{x}\right) \right\} = \ln \frac{1}{a}, \quad a = y \text{sh } t.$$

Отметим также, что в безмассовом пределе ($x = b$) справедливо равенство

$$\begin{aligned} \text{sh } t e^{-y \text{ch } t} f(y, t) = & \frac{d}{dy} \left(\text{sh } t \sin(k't) y (I_{2\gamma_+}(y) + I_{2\gamma_-}(y)) e^{-y \text{ch } t} \right) - \\ & - \frac{d}{dt} \left(\text{ch } t \sin(k't) (I_{2\gamma_+}(y) + I_{2\gamma_-}(y)) e^{-y \text{ch } t} \right). \end{aligned}$$

Используя эту формулу, а также формулы (П.2) и (П.8), проинтегрируем (П.10) по y и по t . В итоге находим, что

$$\begin{aligned} Q_r = & -\frac{2e}{\pi} \sum_{l=0}^\infty \left[\text{Im} \left[(\gamma_+ - ia)\psi(\gamma_+ - ia) + (\gamma_- - ia)\psi(\gamma_- - ia) + ia \left\{ \psi\left(l + \frac{1}{2} + \eta\right) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \psi\left(l + \frac{1}{2} - \eta\right) \right\} + ia \left\{ \left(l + \frac{1}{2} + \eta\right) \psi'\left(l + \frac{1}{2} + \eta\right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(l + \frac{1}{2} - \eta\right) \psi'\left(l + \frac{1}{2} - \eta\right) \right\} \right] - \omega(l) \right]. \end{aligned}$$

Подставив в правую часть этой формулы $\omega(l)$ из (П.9), получаем выражение (12).

Список литературы

- [1] W. Pieper, W. Greiner, *Z. Phys.*, **218**:4 (1969), 327–340.
- [2] С. С. Герштейн, Я. Б. Зельдович, *ЖЭТФ*, **57**:2 (1969), 654–659.
- [3] Я. Б. Зельдович, В. С. Попов, *УФН*, **105**:3 (1971), 403–440.
- [4] J. Rafelski, L. P. Fulcher, A. Klein, *Phys. Rep.*, **38**:5 (1978), 227–361.
- [5] M. Soffel, B. Müller, W. Greiner, *Phys. Rep.*, **85**:2 (1982), 51–122.
- [6] А. Б. Мигдал, *Фермионы и бозоны в сильных полях*, Наука, М., 1978.
- [7] В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Теоретическая физика*, т. 4: *Квантовая электродинамика*, Наука, М., 1980.
- [8] W. Greiner, J. Reinhardt, *Quantum Electrodynamics*, Springer, Berlin, 2009.
- [9] E. Wichmann, N. M. Kroll, *Phys. Rev.*, **96**:1 (1954), 232–234; **101**:2 (1956), 843–859.
- [10] L. S. Brown, R. N. Cahn, L. D. McLerran, *Phys. Rev. Lett.*, **32**:10 (1974), 562–565; **33**:26 (1974), 1591–1593; *Phys. Rev. D*, **12**:2 (1975), 581–595.
- [11] M. Gyulassy, *Phys. Rev. Lett.*, **32**:24 (1974), 1393–1396; **33**:15 (1974), 921–925; *Nucl. Phys. A*, **244**:3 (1975), 497–525.
- [12] А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко, *Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях*, Энергоатомиздат, М., 1988.
- [13] M. I. Katsnelson, *Phys. Rev. B*, **74**:20 (2006), 201401, 3 pp.
- [14] V. M. Pereira, J. Nilsson, A. H. Castro Neto, *Phys. Rev. Lett.*, **99**:16 (2007), 166802, 4 pp.
- [15] A. V. Shytov, M. I. Katsnelson, L. S. Levitov, *Phys. Rev. Lett.*, **99**:23 (2007), 236801, 4 pp., arXiv: 0705.4663.
- [16] R. R. Biswas, S. Sachdev, D. T. Son, *Phys. Rev. B*, **76**:20 (2007), 205122, 5 pp., arXiv: 0706.3907.
- [17] M. M. Fogler, D. S. Novikov, B. I. Shklovskii, *Phys. Rev. B*, **76**:23 (2007), 233402, 4 pp.
- [18] K. Nomura, A. H. MacDonald, *Phys. Rev. Lett.*, **98**:7 (2007), 076602, 4 pp., arXiv: cond-mat/0606589.
- [19] I. S. Terekhov, A. I. Milstein, V. N. Kotov, O. P. Sushkov, *Phys. Rev. Lett.*, **100**:7 (2008), 076803, 4 pp.
- [20] V. N. Kotov, V. M. Pereira, B. Uchoa, *Phys. Rev. B*, **78**:7 (2008), 075433, 5 pp.
- [21] I. F. Herbut, *Phys. Rev. Lett.*, **104**:6 (2010), 066404, 4 pp.
- [22] A. H. Castro Neto, F. Guinea, N. M. R. Peres, K. S. Novoselov, A. K. Geim, *Rev. Modern Phys.*, **81**:1 (2009), 10–162.
- [23] V. N. Kotov, B. Uchoa, V. M. Pereira, F. Guinea, A. H. Castro Neto, *Rev. Modern Phys.*, **84**:3 (2012), 1067–1125, arXiv: 1012.3484.
- [24] K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, M. I. Katsnelson, I. V. Grigorieva, S. V. Dubonos, A. A. Firsov, *Nature*, **438**:7065 (2005), 197–200, arXiv: cond-mat/0509330.
- [25] Z. Jiang, Y. Zhang, H. L. Stormer, P. Kim, *Phys. Rev. Lett.*, **99**:10 (2007), 106802, 4 pp., arXiv: 0705.1102.
- [26] R. Jackiw, A. I. Milstein, S.-Y. Pi, I. S. Terekhov, *Phys. Rev. B*, **80**:3 (2009), 033413, 3 pp., arXiv: 0904.2046.
- [27] V. R. Khalilov, *Eur. Phys. J. C*, **74** (2014), 3061, 8 pp., arXiv: 1407.1134.
- [28] A. Noguchi, Y. Shikano, T. Kenji, U. Shinji, *Nature Commun.*, **5** (2014), 3868, 6 pp., arXiv: 1405.5052.
- [29] Б. Л. Воронов, Д. М. Гитман, И. В. Тютин, *ТМФ*, **150**:1 (2007), 41–84.
- [30] D. M. Gitman, I. V. Tyutin, B. L. Voronov, *Self-Adjoint Extensions in Quantum Mechanics. General Theory and Applications to Schrödinger and Dirac Equations with Singular Potentials*, Progress in Mathematical Physics, **62**, Springer, New York, 2012.
- [31] Y. Hosotani, *Phys. Lett. B*, **319**:1–3 (1993), 332–338.
- [32] C. R. Hagen, *Phys. Rev. Lett.*, **64**:5 (1990), 503–506.

- [33] В. Р. Халилов, *ТМФ*, **158**:2 (2009), 250–262.
- [34] V. R. Khalilov, K. E. Lee, *Modern Phys. Lett. A*, **26**:12 (2011), 865–883.
- [35] R. Jackiw, V. P. Nair, *Phys. Rev. D*, **43**:6 (1991), 1933–1942.
- [36] V. R. Khalilov, K.-E. Lee, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44**:20 (2011), 205303, 15 pp.
- [37] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, М., 1963.
- [38] В. Р. Халилов, *ТМФ*, **175**:2 (2013), 226–246.
- [39] А. И. Мильштейн, В. М. Страховенко, *ЖЭТФ*, **84**:4 (1983), 1247–1256.

Поступила в редакцию 21.10.2015,
после доработки 13.01.2016