Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Самохин, Об уравнении Бюргерса с периодическими граничными условиями на интервале, *ТМФ*, 2016, том 188, номер 3, 470–476

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9075>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 13:51:33

© 2016 г.

А. В. Самохин*

ОБ УРАВНЕНИИ БЮРГЕРСА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ИНТЕРВАЛЕ

Исследуются асимптотики уравнения Бюргерса на конечном интервале с периодическим возмущением на границе. Уравнение описывает диссипативную среду, поэтому начальный постоянный профиль переходит в волну с уменьшающейся амплитудой. В случае малой вязкости асимптотический профиль выглядит, как пила (с периодическими разрывами производной), наподобие известного решения Фейя для полупрямой, однако имеет некоторые новые свойства.

Ключевые слова: пилообразные решения, инвариантные решения, начально-граничная задача, асимптотики.

DOI: 10.4213/tmf9075

1. ВВЕДЕНИЕ

Решения уравнения Бюргерса в течение десятилетий были предметом интенсивного изучения, однако задачи ставились на прямой или полупрямой (для пространственной переменной) [1]–[3]. В последнее время исследования сосредоточились на таких аспектах, как критические точки, градиентные катастрофы, разрывы и т. п. [4]–[6].

В настоящей работе исследуются свойства решений уравнения Бюргерса

$$u_t = \varepsilon^2 u_{xx} - 2uu_x$$

на конечном интервале $x \in [0, L]$. В этом случае начально-граничные условия выглядят следующим образом:

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [a, b], \quad u(a, t) = l(t), \quad u(b, t) = r(t). \quad (1)$$

В частности, начально-граничная модель для периодического возмущения на левом конце интервала имеет вид

$$u(x, 0) = u_0, \quad u(0, t) = a + b \sin(\omega t), \quad u_x(L, t) = 0.$$

*Московский государственный технический университет гражданской авиации, Москва, Россия. E-mail: samohinalexey@gmail.com

Рис. 1. Решение уравнения Бюргерса на полупрямой при $\varepsilon = 0.2$, $t = 25$ (а) и при $\varepsilon = 0.15$, $t = 25$ (б).

При $L = \infty$ асимптотика решения этой задачи совпадает с хорошо известным решением Фея [1]. В частности, $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = a$, что равно среднему значению решения на полупрямой $x > 0$.

Мы показываем, что это не так при $L < \infty$. Решение сохраняет пилообразный вид, но его среднее по интервалу $[0, L]$ отличается от a и зависит также от амплитуды возмущения b . Кроме того, обсуждается взаимодействие между возмущениями с различающимися частотами.

2. ПИЛООБРАЗНЫЕ ВОЛНЫ

Для задачи на полупрямой $x \geq 0$ и периодического возмущения в точке $x = 0$ вида $u(0, t) = u_0 + b \sin(\omega t)$ асимптотика соответствующего решения такова [1]:

$$u = \frac{a}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{R \operatorname{sh}(n(1 + X)/2)};$$

здесь R – число Рейнольдса, $\theta = \omega(t - x/u_0)$. График такого решения обычно имеет форму, подобную представленной на рис. 1а. Можно заметить два эффекта вязкости. Во-первых, амплитуда колебаний экспоненциально убывает и $\lim_{x \rightarrow \infty} u = u_0$. Во-вторых, разрывы производной u_x сконцентрированы в окрестности источника возмущения (вблизи $x = 0$) и быстро исчезают при больших x .

Такие нелинейные эффекты широко применяются на практике (например, в медицине, где пилообразные волны используются для разрушения почечных камней).

2.1. Развитие пилообразных решений. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} u_t &= \varepsilon^2 u_{xx} - 2uu_x, \\ u(x, 0) &= 1, \quad u(0, t) = 1 + 2 \sin(2\pi t), \quad u_x(L, t) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

Рис. 2. Решение уравнения Бюргерса на интервале $[0, L]$ при $t = 0.5$ (а), при $t = 5$ (б), при $t = 15$ (в) и при $t = 20$ (г).

где $\varepsilon = 0.5$ и $L = 75$. Рис. 2 демонстрируют шаги перехода от постоянного начального условия к пилообразному профилю. Вязкость, соответствующая $\varepsilon = 0.5$, довольно велика, и зубья пилы видны лишь в непосредственной близости от источника возмущения на левом конце интервала; по мере того как нарастает пространственное угасание, формируется уединенная ударная волна, движущаяся к правому концу.

Рис. 1 иллюстрирует случай $\varepsilon = 0.2$ для начально-граничной задачи (2). Для меньшей вязкости пилообразная форма решения сохраняется на большем интервале значений x , что видно на рис. 1б, который отвечает $\varepsilon = 0.15$ и следующим начально-граничным условиям:

$$u(x, 0) = 2, \quad u(0, t) = 2 + 3 \sin(2\pi t), \quad u_x(75, t) = 0.$$

График на рис. 1а дает зрительное представление о процессе постепенной трансформации острых зубьев с почти вертикальными передними краями в гладкие покатые осцилляции.

3. ОЦЕНКИ ДЛЯ АСИМПТОТИК АМПЛИТУД И СКОРОСТИ

Поскольку уравнение Бюргерса может быть переписано в форме закона сохранения $u_t = (\varepsilon^2 u_x - u^2)_x$, мы имеем

$$\oint_{\partial \mathcal{D}} [u dx + (\varepsilon^2 u_x - u^2) dt] = 0,$$

где $\mathcal{D}$ – прямоугольник $\{0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T\}$, при этом интеграл можно переписать таким образом:

$$\begin{aligned} \int_0^L u(x, 0) dx + \int_0^T [\varepsilon^2 u_x(L, t) - u^2(L, t)] dt + \\ + \int_L^0 u(x, T) dx + \int_T^0 (\varepsilon^2 u_x(0, t) - u^2(0, t)) dt = 0. \end{aligned}$$

Пусть A обозначает среднее значение решения на отрезке $[0, L]$; из-за гасящего эффекта вязкости при достаточно больших L и T решение становится постоянным, $u(L, T) = A$. Используя условие $u_x(L, t) = 0$, выводим

$$u_0 L - A^2 T - AL - \int_0^T (\varepsilon^2 u_x(0, t) - u^2(0, t)) dt = 0.$$

Поделив на T , получаем квадратное уравнение для A :

$$-A^2 - A \frac{L}{T} - \frac{1}{T} \int_0^T (\varepsilon^2 u_x(0, t) - u^2(0, t)) dt + u_0 \frac{L}{T} = 0.$$

Поскольку интегралы от синуса и косинуса по периоду равны нулю, для $T \gg 0$ получим

$$\frac{1}{T} \int_0^T (\varepsilon^2 u_x(0, t) - u^2(0, t)) dt + u_0 \frac{L}{T} \approx -u_0^2 - \frac{a^2}{2},$$

откуда

$$-A^2 - Ak + u_0^2 + \frac{a^2}{2} + u_0 k = 0,$$

где $k = L/T$. Таким образом, $A = (-k + \sqrt{k^2 + 4u_0^2 + 2a^2 + 4u_0 k})/2$. В результате имеем

$$\lim_{T \rightarrow \infty} A = \lim_{k \rightarrow 0} A = \sqrt{u_0^2 + \frac{a^2}{2}}, \quad \lim_{L \rightarrow \infty} A = \lim_{k \rightarrow \infty} A = u_0,$$

как и должно быть для задачи на полупрямой.

Рис. 3. График возмущения $u(0, t) = 1 + 2 \sin(t) \sin(5\pi t)$ (а) и решение при $\varepsilon = 0.2$, $t = 25$ (б).

Как видно на рис. 2, в той области, где осцилляции угасают, возмущение представляет собой уединенную волну с постоянным профилем и постоянной скоростью, т. е. ведет себя подобно инвариантному по отношению к трансляционной симметрии решению вида

$$u = -\frac{b}{2f} - \varepsilon^2 f \operatorname{th}(c + fx + bt).$$

Скорость этой уединенной волны $V = -b/f$. С другой стороны, как можно видеть на графиках, сдвиг вверх для функции гиперболического тангенса равен $(A + u_0)/2$. Поэтому $V = A + u_0$ является оценкой скорости распространения сигнала в среде.

Например, в случаях, представленных на рис. 2, мы имеем $u_0 = 1$, $a = 2$, $A \approx \sqrt{3}$ и $V \approx 1 + \sqrt{3}$, что хорошо согласуется с численными результатами.

Еще один пример имеет отношение ко взаимодействию между периодическими возмущениями различной частоты. Рассмотрим следующую задачу (здесь $\varepsilon = 0.2$):

$$u(0, t) = 1 + 2 \sin(t) \sin(5\pi t), \quad u(x, 0) = 1, \quad u_x(75, t) = 0. \quad (3)$$

Отметим, что $u(0, t)$ – это суперпозиция, $2 \sin(t) \sin(5\pi t) = \cos(t - 5\pi t) - \cos(t + 5\pi t)$ есть волновой пакет; он представлен на рис. 3а. Оценка для среднего значения при $t \rightarrow \infty$ в этом случае такова:

$$\sqrt{\frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\varepsilon^2 \frac{d}{dt} (1 + 2 \sin(t) \sin(5\pi t)) - (1 + 2 \sin(t) \sin(5\pi t))^2 \right) dt} \approx 1.41.$$

Заметим, что частота результирующего пилообразного решения, представленного на рис. 3б, является удвоенной по сравнению с огибающей пакета на рис. 3а (это легко увидеть из рис. 3б, поскольку $t = 25$ примерно соответствует семи периодам). Этому удвоению частоты есть объяснение: в вязкой среде дольше выживают

Рис. 4. Решения задач (3) – кривая 1 и (4) – кривая 2.

наибольшие пики, которые определяют профиль решения вдали от источника возмущения, но такие пики возникают в каждом пакете ширины π , в то время как период огибающей $1 + 2 \sin t$ есть 2π .

Однако решение на рис. 3 не стремится к решению, которое получится, если взять в качестве граничного возмущения гармонику с двойной (по отношению к огибающей пакета) частотой.

Решение задачи с начально-граничными условиями

$$u(x, 0) = 1, \quad u(0, t) = 1 + 2 \sin(2t), \quad u_x(75, t) = 0 \quad (4)$$

представлено на рис. 4 вместе с решением задачи (3). У последнего из решений более высокий пик, следовательно, возмущение распространяется быстрее: в нашем случае при $t = 25$ оно распространилось (примерно) до $x = 73$, в то время как первое – только до $x = 60$. Кроме того, оценка среднего при $t \rightarrow \infty$ в задаче (4) дает $A \approx \sqrt{3}$, что существенно отличается от $A \approx 1.41$. Подробный анализ подобного рода взаимодействий будет проведен в следующей работе.

4. ВЫВОДЫ И СООБРАЖЕНИЯ О ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТАХ

Численное моделирование дает нам бесценную возможность понимания подробностей формирования решений. Графики, приведенные в настоящей статье, были построены при помощи численных расчетов в пакете **Maple PDETools**; был использован метод Кранка–Николсона.

Следует отметить, что наличие точек разрыва производной внутренне присуще рассматриваемой модели. Однако стандартные численные методы, используемые с параметрами по умолчанию, легко могут терять устойчивость в таких точках. Такая неустойчивость приводит к мультиосцилляциям и общей потере точности. С этой проблемой мы по большей части справлялись, адаптируя (укорачивая) параметры *spacstep* и/или *timestep* пакета **PDETools**. Предметом наших последующих исследований будет качественный анализ взаимодействия периодических возмущений.

Список литературы

- [1] R. D. Fay, *J. Acoust. Soc. Amer.*, **3** (1931), 222–241.
- [2] D. F. Parker, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **369** (1980), 409–424.
- [3] О. В. Руденко, *УФН*, **165**:9 (1995), 1011–1035.
- [4] A. Samokhin, *J. Geom. Phys.*, **8** (2014), 177–184.
- [5] B. Dubrovin, M. Elaeva, *Russ. J. Math. Phys.*, **19**:4 (2012), 449–460, arXiv: 1301.7216.
- [6] B. Dubrovin, *Commun. Math. Phys.*, **267**:1 (2006), 117–139.