Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Кодама, Б. Г. Конопельченко, Вырождение гипергеометрических функций и интегрируемые системы гидродинамического типа, *ТМФ*, 2016, том 188, номер 3, 429–455

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9076>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 12:52:57

© 2016 г. Ю. Кодама*, Б. Г. Конопельченко[†]

ВЫРОЖДЕНИЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

Строится новый класс интегрируемых систем гидродинамического типа, определяющих динамику критических точек вырожденных функций типа Лауричеллы, заданных на конечномерном грассманиане $\text{Gr}(2, n)$, т. е. на множестве $(2 \times n)$ -матриц второго ранга. Указанные вырожденные функции удовлетворяют некоторым вырожденным уравнениям Эйлера–Пуассона–Дарбу. Показано, что в общем случае система гидродинамического типа, соответствующая вырожденной функции Лауричеллы, представляет собой интегрируемую и недиагонализруемую квазилинейную матричную систему жорданова вида. Подробно рассмотрены случаи грассманианов $\text{Gr}(2, 5)$ для двухкомпонентной системы и $\text{Gr}(2, 6)$ для трехкомпонентной системы.

Ключевые слова: функция Лауричеллы, вырождение, интегрируемая система.

DOI: 10.4213/tmf9076

1. ВВЕДЕНИЕ

Значительный интерес к системам квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка, в частности к системам гидродинамического типа, проявляющийся в последние десятилетия, обусловлен большим разнообразием соответствующих им математических структур и многочисленными физическими применениями (см., например, [1]–[5]). Недавно было обнаружено [6], что большой класс диагонализруемых систем гидродинамического типа можно также отнести к уравнениям,

Ю. Кодама благодарен NSF за частичную поддержку (грант DMS-1410267). Б. Г. Конопельченко выражает благодарность PRIN 2010/2011 за поддержку (грант 2010JJ4KBA_003).

*Department of Mathematics, Ohio State University, Columbus, USA.
E-mail: kodama@math.ohio-state.edu

[†]Dipartimento di Matematica e Fisica “Ennio De Giorgi”, Università del Salento and INFN, Sezione di Lecce, Lecce, Italy.
E-mail: Boris.Konopeltchenko@le.infn.it

определяющим динамику критических точек функций, удовлетворяющих линейной системе Дарбу для функции $\Psi(\mathbf{x})$ переменных $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$,

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_k} = A_{ik} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} + A_{ki} \frac{\partial \Psi}{\partial x_k}, \quad i \neq k, \quad i, k = 1, \dots, n, \quad (1.1)$$

где функции $A_{ik}(\mathbf{x})$ удовлетворяют нелинейной системе Дарбу, а значения переменных x_i в критических точках функции Ψ являются инвариантами Римана (см. также раздел 2). Простейшая система (1.1), а именно система уравнений Эйлера–Пуассона–Дарбу (ЭПД) с произвольными постоянными $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{1}{x_i - x_k} \left(\epsilon_k \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} - \epsilon_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} \right), \quad i \neq k, \quad i, k = 1, \dots, n, \quad (1.2)$$

дает семейство так называемых ϵ -систем [7], бездисперсионных связанных уравнений Кортевега–де Фриза (КдФ) [8] и т. д. Интегрируемые системы гидродинамического типа такого рода выражаются через инварианты Римана $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$,

$$\frac{\partial u_i}{\partial t_k} = \lambda_i^k(\mathbf{u}) \frac{\partial u_i}{\partial t_0}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

При $k = 1$ эта система сводится к обобщенной ϵ -системе, в которой $\lambda_i^1 = u_i + \sum_{j=1}^n \epsilon_j u_j$ [7]. Здесь переменные $\mathbf{u}(t_1, t_2, \dots)$ определяются критическими точками семейства обобщенных гипергеометрических функций [6] (см. также раздел 2). В статье [6] показано также, что уравнения ЭПД позволяют построить весьма нетривиальные решения системы Дарбу (1.1), связанные, например, с многофазными уравнениями Уизема для нелинейного уравнения Шредингера и уравнения КдФ [9], [4]. Этот факт демонстрирует важность уравнений ЭПД (1.2) для подхода, предложенного в работе [6]. Гипергеометрические функции и их обобщения появляются также в других контекстах при изучении интегрируемых систем гидродинамического типа (см., например, [10], [11]).

Система (1.2) играет фундаментальную роль в совершенно другом случае. Она является центральной системой уравнений в теории многомерных гипергеометрических функций, созданной Аппеллем ($n = 2$) [12] и Лауричеллой [13] (произвольное значение n). Позже теория таких функций была обобщена [14]–[17] и изучены различные связанные с ней задачи (см., например, [18]–[22]). Одним из важных результатов, полученных в процессе исследований, является демонстрация того, что конечномерные грассманианы являются весьма подходящими объектами для изучения указанных обобщенных гипергеометрических функций [14]–[17], [21]. В частности, было показано [16], [22], что в такой постановке классический процесс вырождения гипергеометрических функций Гаусса

$$\begin{array}{ccccc} & & \nearrow & \text{Hermite} & \searrow \\ \text{Gauss} & \longrightarrow & \text{Kummer} & & \text{Airy} \\ & & \searrow & \text{Bessel} & \nearrow \end{array}$$

можно непосредственно обобщить на многомерные гипергеометрические функции (см. раздел 3).

В общем случае многомерные гипергеометрические функции являются частными решениями системы ЭПД (1.2). Соответствующие интегрируемые системы гидродинамического типа построены в работе [6] (в частности, см. уравнение (58) в указанной работе, в котором характеристические скорости равны $\lambda_i = (1/\epsilon_i)(\partial F_D/\partial u_i)$, а $F_D(u_1, \dots, u_n)$ – гипергеометрическая функция Лауричеллы). Итак, естественным образом возникает вопрос, как представленный выше процесс вырождения влияет на системы гидродинамического типа, связанные с соответствующими вырожденными функциями типа Лауричеллы. Этой проблеме посвящена настоящая работа.

Сначала мы изучаем процесс вырождения функций Лауричеллы на грассманианах $\text{Gr}(2, n+3)$, следуя работам [16], [22]. В верхней клетке эти функции Лауричеллы являются решениями системы ЭПД (1.2) с произвольными $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$, а также функция Лауричеллы имеет особые точки $\{0, 1, 1/x_1, 1/x_2, \dots, 1/x_n, \infty\}$. Вырождение означает, что одна или несколько регулярных особых точек каким-то образом устремляются к бесконечности $1/x_i \rightarrow \infty$, например $x_i = \delta x_i^*$, $\epsilon_i = \epsilon_i^*/\delta$ при $\delta \rightarrow 0$, а произведение $x_i \epsilon_i$ при этом остается конечным. Система линейных уравнений в частных производных для наиболее вырожденного случая, когда все точки $1/x_i \rightarrow \infty$, получена в работе [16],

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_l^*} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^* \partial x_j^*} \quad \text{для всех } i + j = l. \quad (1.4)$$

Эта система является вырожденной системой Гельфанда–Капранова–Зелевинского [14]–[17]. В промежуточном случае основная система линейных уравнений в частных производных является смесью вырожденных уравнений ЭПД (уравнений Дарбу специального вида (1.1)) и уравнений (1.4). Важно то, что в процессе вырождения число независимых переменных x_i^* остается неизменным.

Как было показано, динамика критических точек $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ в семействах функций типа Лауричеллы определяется интегрируемыми иерархиями систем гидродинамического типа (см., например, [6] и раздел 2 ниже). В настоящей статье мы обобщаем эти результаты на вырожденные функции типа Лауричеллы. В частности, деформации критических точек функций, удовлетворяющих системе (1.4), описываются недиагонализруемыми системами (имеющими сильно нестрогую гиперболичность)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t_k} = \mathbf{A}_k(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t_0} \quad \text{для } k = 1, 2, \dots, \quad (1.5)$$

где $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, и, в частности, при $k = 1$ имеем жорданов $(n \times n)$ -блок,

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & u_1 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Замена переменных x_i в уравнении (1.2) и переход к соответствующему пределу $\delta \rightarrow 0$ переводят n -мерную систему ЭПД в уравнения (1.4), а обобщенные ϵ -системы (1.3) – в систему (1.5).

Функции $u(t)$ в системе (1.5) не являются инвариантами Римана, а по форме система (1.4) отличается от системы Дарбу (1.1). Следовательно, система (1.4) свидетельствует о том, что метод критических точек, рассмотренный в работе [6], применим к более широкому классу уравнений в частных производных, чем системы Дарбу (1.1). Система (1.5) не разрешима обобщенным методом годографа Царева. Тем не менее она интегрируема в том смысле, что обладает бесконечным набором коммутирующих потоков, и соответствующие уравнения годографа имеют матричный вид, рассмотренный в работе [23] (см. также раздел 6).

Интегрируемые недиагонализующиеся системы гидродинамического типа изучались ранее различными способами [24]–[27]. Однако, в отличие от систем (1.5) с матрицей (1.6), собственные числа которых вырождены, а матрицы коэффициентов недиагонализующиеся, все рассмотренные там системы строго гиперболические, их собственные числа действительные и различны.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 дан обзор функций Лауричеллы и соответствующих систем гидродинамического типа. В разделе 3, опираясь на результаты статей [14], [15], [17], [22], мы рассматриваем обобщенные гипергеометрические функции на грассманиане $Gr(2, n+3)$ и их вырождение. Каждое вырождение можно параметризовать разбиением числа $n+3 = i_1 + \dots + i_m$, которое обозначим $n+3 = (i_1, \dots, i_m)$. В разделе 4 дан явный метод построения систем гидродинамического типа с двумя компонентами ($n=2$), соответствующих обобщенным функциям Лауричеллы, заданным на грассманиане $Gr(2, 5)$. Показано, что гидродинамическая система, соответствующая вырождению, заданному разбиением $5 = (5)$ (наиболее вырожденный случай), является сильно нестрогой гиперболической системой (см. (1.5)). В разделе 5 построены системы гидродинамического типа для $Gr(2, 6)$. В этом случае существуют три типа систем гидродинамического типа с тремя компонентами. Матрица коэффициентов этой системы либо диагональна, либо имеет форму жорданова (3×3) -блока, либо является смешанной матрицей с жордановым (2×2) -блоком. В частности, подробно обсуждается случай матрицы смешанного типа. В разделе 6 изучается случай наиболее сильного вырождения, т.е. $n+3 = (n+3)$, и построены соответствующие системы гидродинамического типа вида (1.5). Также приводятся решения типа годографа в матричной форме.

В настоящей статье рассмотрены системы гидродинамического типа с матрицей коэффициентов, имеющей один жорданов блок. Этот класс недиагонализующихся систем гидродинамического типа применительно к интегрируемым системам ранее не обсуждался. В дальнейшем мы расширим исследования до систем с произвольным числом жордановых блоков и рассмотрим системы, соответствующие вырождению обобщенных функций гипергеометрического типа на грассманиане $Gr(k, n)$.

2. ФУНКЦИИ ЛАУРИЧЕЛЛЫ И СИСТЕМЫ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

Начнем с дифференциала, называемого дифференциалом Лауричеллы [19]:

$$\eta(\mathbf{x}; z) dz = \prod_{j=1}^n (1 - x_j z)^{-\epsilon_j} dz, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, при этом $x_i \in \mathbb{C}$, а все $\epsilon_j \in \mathbb{C}$ являются фиксированными постоянными. Важным свойством дифференциала Лауричеллы является то, что функция $\eta(\mathbf{x}; z)$ удовлетворяет системе ЭПД (1.2),

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{x_i - x_j} \left(\epsilon_j \frac{\partial \eta}{\partial x_i} - \epsilon_i \frac{\partial \eta}{\partial x_j} \right).$$

Такое решение можно легко найти, предположив, что оно представимо в виде решения в разделенных переменных. Заметим также, что для любой функции $f(z)$ функция $\tilde{\eta} := f(z)\eta$ удовлетворяет системе ЭПД. Такую функцию $\tilde{\eta}$ назовем *функцией типа Лауричеллы*.

2.1. Системы гидродинамического типа, связанные с функциями типа Лауричеллы. Используя метод, развитый в работе [6], выясним, каким образом из функции Лауричеллы (2.1) строятся системы гидродинамического типа.

Сначала разложим функцию Лауричеллы $\eta(\mathbf{x}; z)$ по степеням z ,

$$\eta(\mathbf{x}; z) = \sum_{k=0}^{\infty} F^k(\mathbf{x}) z^k, \quad F^0(\mathbf{x}) = 1.$$

Несколько первых функций $F^k(\mathbf{x})$ в этом разложении имеют вид

$$\begin{aligned} F^1 &= \sum_{j=1}^n \epsilon_j x_j, & F^2 &= \sum_{j=1}^n \frac{\epsilon_j(\epsilon_j + 1)}{2} x_j^2 + \sum_{i < j} \epsilon_i \epsilon_j x_i x_j, \\ F^3 &= \sum_{j=1}^n \frac{\epsilon_j(\epsilon_j + 1)(\epsilon_j + 2)}{3!} x_j^3 + \\ &+ \sum_{i < j} \frac{\epsilon_i \epsilon_j}{2} \{(\epsilon_i + 1)x_i + (\epsilon_j + 1)x_j\} x_i x_j + \sum_{i < j < l} \epsilon_i \epsilon_j \epsilon_l x_i x_j x_l. \end{aligned}$$

Отметим, что каждая функция $F^k(\mathbf{x})$ является решением системы ЭПД (1.2).

Теперь введем функцию, которую назовем производящей функцией системы гидродинамического типа,

$$\Phi(\mathbf{t}; \mathbf{x}) := \sum_{k=0}^m t_k F^{k+1}(\mathbf{x}) \quad (2.2)$$

для произвольного $m > n$. Поскольку каждая функция $F^k(\mathbf{x})$ удовлетворяет системе ЭПД, то функция $\Phi(\mathbf{t}; \mathbf{x})$, будучи функцией переменных $\mathbf{x}$ с параметрами $\mathbf{t}$, также удовлетворяет системе ЭПД.

Критическая по $\mathbf{x}$ точка $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ функции $\Phi(\mathbf{t}; \mathbf{x})$ определяется уравнением

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{u}} = \sum_{k=0}^m t_k \left. \frac{\partial F^{k+1}}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{u}} = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.3)$$

откуда получим $\mathbf{u}$ как функцию от $\mathbf{t}$, т. е. $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{t})$. Будем использовать упрощенную запись

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{u}} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_j}, \quad \left. \frac{\partial F^k}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{u}} = \frac{\partial F^k}{\partial u_j}.$$

Взяв теперь производную критических уравнений по t_i , получим

$$\frac{\partial F^{i+1}}{\partial u_j} + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n t_k \frac{\partial^2 F^{k+1}}{\partial u_j \partial u_l} \frac{\partial u_l}{\partial t_i} = \frac{\partial F^{i+1}}{\partial u_j} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_l} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{u}} \frac{\partial u_l}{\partial t_i} = 0.$$

Система ЭПД (1.2) означает, что

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_l} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{u}} = \frac{1}{u_j - u_l} \left(\epsilon_l \frac{\partial \Phi}{\partial u_j} - \epsilon_j \frac{\partial \Phi}{\partial u_l} \right) = 0 \quad \text{при } j \neq l.$$

Следовательно, получим уравнение

$$\frac{\partial F^{k+1}}{\partial u_j} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j^2} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{u}} \frac{\partial u_j}{\partial t_k} = 0,$$

которое далее порождает иерархию систем гидродинамического типа для $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{t})$, представленную в виде уравнений на инварианты Римана,

$$\frac{\partial u_j}{\partial t_k} = \lambda_j^k(\mathbf{u}) \frac{\partial u_j}{\partial t_0}, \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, m. \quad (2.4)$$

Здесь $\lambda_j^k(\mathbf{u})$ – характеристическая скорость, которая имеет вид

$$\lambda_j^k = \frac{\partial F^{k+1}}{\partial u_j} \left(\frac{\partial F^1}{\partial u_j} \right)^{-1} = \frac{1}{\epsilon_j} \frac{\partial F^{k+1}}{\partial u_j} \quad (2.5)$$

(заметим, что $\lambda_j^0 = 1$). Система (2.4) при $k = 1$ – это не что иное, как обобщенная ϵ -система [7], т. е. имеем

$$\lambda_j^1(\mathbf{u}) = u_j + F^1(\mathbf{u}) = u_j + \sum_{i=1}^n \epsilon_i u_i.$$

Например, при $n = 2$ система гидродинамического типа имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t_1} &= ((1 + \epsilon_1)u_1 + \epsilon_2 u_2) \frac{\partial u_1}{\partial t_0}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t_1} &= (\epsilon_1 u_1 + (1 + \epsilon_2)u_2) \frac{\partial u_2}{\partial t_0}. \end{aligned}$$

В общем случае характеристическая скорость для t_k -го потока имеет вид

$$\lambda_j^k(\mathbf{u}) = \sum_{l+m=k} u_j^l F^m(\mathbf{u}).$$

Существует бесконечное семейство систем гидродинамического типа со всевозможными значениями параметров $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$. В частности, для $n = 2$ хорошо известны следующие случаи: 1) при $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1/2$ имеем бездисперсионное нелинейное уравнение Шредингера и его высшие потоки; 2) при $\epsilon_1 = \epsilon_2 = -1/2$ получим бездисперсионную цепочку Тоды; 3) при $\epsilon_1 = -\epsilon_2 = -1/2$ имеем смесь дисперсионных нелинейных уравнений Шредингера и уравнений Тоды (см. (49) в работе [6]); 4) при $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1/6$ получим бездисперсионное уравнение Бусинеска.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие совместности системы (2.4), $\partial^2 u_j / \partial t_k \partial t_l = \partial^2 u_j / \partial t_l \partial t_k$, имеет вид

$$\frac{\partial \lambda_j^k / \partial u_i}{\lambda_i^k - \lambda_j^k} = \frac{\partial \lambda_j^l / \partial u_i}{\lambda_i^l - \lambda_j^l} \quad \text{при } i \neq j. \quad (2.6)$$

Используя формулу (2.5) для λ_j^k и уравнение ЭПД для F^k , перепишем левую часть условия совместности в виде

$$\frac{\partial \lambda_j^k / \partial u_i}{\lambda_i^k - \lambda_j^k} = \frac{\epsilon_i}{u_i - u_j}.$$

Поскольку правая часть не зависит от индекса k переменной t_k , мы получили условие совместности различных уравнений иерархии (2.4).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Следует заметить, что критические уравнения (2.3) приводят к решениям годографа для системы (2.4), т. е.

$$t_0 + \sum_{k=1}^m t_k \lambda_j^k(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{при } j = 1, \dots, n.$$

Как будет показано ниже, решение годографа можно обобщить, придав ему матричный вид [23], который для нашего нового класса систем гидродинамического типа непосредственно получается из критических уравнений для соответствующей функции $\Phi(\mathbf{t}; \mathbf{x})$.

3. ФУНКЦИИ ТИПА ЛАУРИЧЕЛЛЫ И ИХ ВЫРОЖДЕНИЕ

Функция Лауричеллы вида

$$F(\mathbf{x}) = \int_{\Delta} \eta(\mathbf{x}; z) dz = \int_{\Delta} f(x) \prod_{j=1}^n (1 - x_j z)^{-\epsilon_j} dz$$

была введена как обобщение на случай многих переменных гипергеометрической функции Гаусса

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \int_0^1 z^{\alpha-1} (1-z)^{-\alpha+\gamma-1} (1-xz)^{-\beta} dz$$

и переходит в нее при $n = 1$ и $x_1 = x$. Дифференциал Гаусса $\eta(0, 1, x; z) dz$ имеет регулярные особые точки $\{0, 1, 1/x, \infty\}$. Хорошо известно, что гипергеометрическая функция Гаусса сводится к вырожденной гипергеометрической функции Куммера при слиянии особых точек $1/x$ и ∞ . Кроме того, функцию Куммера можно свести к функции Эрмита–Вебера или к функции Бесселя с помощью дальнейших слияний. Слияния параметризуются разбиениями числа $n + 3 = 4$.

Пусть $(i_1, \dots, i_m)$ означает разбиение числа $n + 3 = i_1 + \dots + i_m$, в котором $i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_m$. Каждое число i_j представляет собой число слияний в соответствующей особой точке дифференциала Гаусса (Лауричеллы). При $n = 1$, т. е. для гипергеометрической функции Гаусса, имеем $4 = (1, 1, 1, 1)$. Тогда разбиение $4 = (2, 1, 1)$ соответствует функции Куммера, $4 = (2, 2)$ – функции Бесселя,

$4 = (3, 1)$ – функции Эрмита–Вебера, а $4 = (4)$ – функции Эйри, как показано на следующей диаграмме:

В этом разделе мы переносим такие процессы слияния на функции Лауричеллы (подробнее см. [14]–[17], [21], [22]).

3.1. Обобщенные гипергеометрические функции. Чтобы объяснить вырождение функции Лауричеллы, введем сначала обобщенную гипергеометрическую функцию (функцию Аомото–Гельфанда) на грассманиане $\text{Gr}(2, n+3)$, которая обобщает функцию Лауричеллы [14], [17], [21]. Пусть ζ – точка грассманиана $\text{Gr}(2, n+3)$. То есть ζ можно представить $[2 \times (n+3)]$ -матрицей ранга 2, которую обозначим $\zeta \in M_{k \times (n+3)}(\mathbb{C})$. Вспомним, что $\text{Gr}(2, n+3)$ определяется по правилу $\text{Gr}(2, n+3) \cong \text{GL}_2(\mathbb{C}) \setminus M_{2 \times (n+3)}(\mathbb{C})$. Тогда обобщенную гипергеометрическую функцию можно ввести по формуле

$$F(\zeta; \mu) = \int_{\Delta} \chi(\tau\zeta; \mu) \omega_{\tau}, \quad \omega_{\tau} := \tau_0 d\tau_1 - \tau_1 d\tau_0, \quad (3.1)$$

где $\tau = (\tau_0 : \tau_1) \in \mathbb{CP}^1$, а Δ – контур на $\mathbb{CP}^1$. Функция $\chi(\tau\zeta; \mu)$ – характер централизатора регулярного элемента алгебры $\mathfrak{gl}_{n+3}(\mathbb{C})$ с весом $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_n)$. Каждый регулярный элемент $A \in \mathfrak{gl}_{n+3}$ можно представить жордановой матрицей, соответствующей разбиению $n+3 = (i_1, \dots, i_m)$,

$$A_{(i_1, \dots, i_m)} := A_{i_1} \oplus A_{i_2} \oplus \dots \oplus A_{i_m},$$

где A_{i_k} – жорданов $(i_k \times i_k)$ -блок с собственным значением a_{i_k} , т. е.

$$A_{i_k} := \begin{pmatrix} a_{i_k} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{i_k} & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{i_k} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{i_k} \end{pmatrix} = a_{i_k} I_{i_k} + \Lambda_{i_k},$$

где I_{i_k} – единичная $(i_k \times i_k)$ -матрица, а Λ_{i_k} – нильпотентная матрица с единицами над диагональю. При этом должно выполняться условие $a_{i_j} \neq a_{i_k}$, если $i_j \neq i_k$. Разбиение $(i_1, \dots, i_m)$ приводит к параметризации соответствующего централизатора, который обозначим

$$H_{(i_1, \dots, i_m)} := \{h \in \text{GL}_{n+3}(\mathbb{C}) : hA_{(i_1, \dots, i_m)} = A_{(i_1, \dots, i_m)}h\}.$$

Представим $H_{(i_1, \dots, i_m)}$ в виде

$$H_{(i_1, \dots, i_m)} = H_{i_1} \oplus H_{i_2} \oplus \dots \oplus H_{i_m},$$

где H_k задаются наборами матриц вида

$$\sum_{j=0}^{k-1} h_j \Lambda_k^j = \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & \dots & h_{k-1} \\ 0 & h_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & h_1 \\ 0 & \dots & 0 & h_0 \end{pmatrix},$$

где $h_0 \in \mathbb{C}^\times$ и $h_j \in \mathbb{C}$ при $j = 1, \dots, k-1$. В частности, $H_{(1, \dots, 1)}$ состоит из диагональных матриц с разными диагональными элементами. Заметим, что размерность группы $H_{(i_1, \dots, i_m)}$ равна $n+3$, что совпадает с числом параметров группы.

Следуя [22], построим характер группы χ для каждого H_k (точнее, его универсальное покрытие $\tilde{H}_k, \chi: \tilde{H}_k \rightarrow \mathbb{C}^\times$) следующим образом. Введем сначала функцию $\theta_j(h)$ на H_k для $j = 0, 1, \dots, k-1$:

$$\ln \left(h_0 + \sum_{j=1}^{k-1} h_j \Lambda_k^j \right) = \ln h_0 + \sum_{j=1}^{k-1} \theta_j(h) \Lambda_k^j.$$

Первые четыре функции $\theta_j(h)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \theta_1(h) &= \frac{h_1}{h_0}, & \theta_2(h) &= \frac{h_2}{h_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{h_1}{h_0} \right)^2, & \theta_3(h) &= \frac{h_3}{h_0} - \frac{h_1}{h_0} \frac{h_2}{h_0} + \frac{1}{3} \left(\frac{h_1}{h_0} \right)^3, \\ \theta_4(h) &= \frac{h_4}{h_0} - \frac{h_1 h_3}{h_0^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{h_2}{h_0} \right)^2 + \frac{h_1^2 h_2}{h_0^3} - \frac{1}{4} \left(\frac{h_1}{h_0} \right)^4. \end{aligned}$$

Тогда характер $\chi(h; \mu)$ с $\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{k-1}) \in \mathbb{C}^k$ задается формулой

$$\chi(h_0, h_1, \dots, h_{k-1}; \mu) = h_0^{\mu_0} \exp \left(\sum_{j=1}^{k-1} \mu_j \theta_j(h) \right).$$

Для централизатора $H_{(i_1, \dots, i_m)}$ характер группы имеет вид

$$\chi(h; \mu) = \prod_{k=1}^m \chi_{i_k}(h^{(k)}; \mu^{(k)}) = \prod_{k=1}^m (h_0^{(k)})^{\mu_0^{(k)}} \exp \left(\sum_{j=1}^{i_k-1} \mu_j^{(k)} \theta_j(h^{(k)}) \right), \quad (3.2)$$

где через h обозначен набор $h = (h_0^{(1)}, \dots, h_{i_1-1}^{(1)}, h_0^{(2)}, \dots, h_{i_2-1}^{(2)}, \dots, h_0^{(m)}, \dots, h_{i_m-1}^{(m)})$. В случае $H_{(1, \dots, 1)}$ имеем

$$\chi(h; \mu) = \prod_{k=1}^n (h_0^{(k)})^{\mu_0^{(k)}}.$$

Заметим, что параметры $h_j^{(k)}$, $k = 1, \dots, m$, определяются условиями

$$h_0^{(k)} \in \mathbb{C}^\times \quad \text{и} \quad h_j^{(k)} \in \mathbb{C} \quad \text{при} \quad j = 1, \dots, i_k - 1.$$

Рассмотрим теперь действие подмножества $Z \subset M_{2 \times (n+3)}(\mathbb{C})$, у которого все (2×2) -миноры ненулевые (т.е. Z можно отождествить с верхней клеткой грассманиана $\text{Gr}(2, n+3)$):

$$\begin{aligned} \text{GL}_2(\mathbb{C}) \times H_{(i_1, \dots, i_m)}: Z &\longrightarrow M_{2 \times (n+3)}(\mathbb{C}), \\ (g, h): \zeta &\longmapsto g \zeta h. \end{aligned}$$

Заметим, что действие $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ слева задает канонический вид точки в $\mathrm{Gr}(2, n+3)$.

Тогда пространство матриц, полученное как образ этого действия, можно представить в виде

$$Z_{i_1, \dots, i_m} = \left\{ \zeta = (\zeta^{(1)}, \dots, \zeta^{(m)}) \in M_{2 \times (n+3)} : \begin{array}{l} \zeta^{(j)} = (\zeta_0^{(j)}, \dots, \zeta_{i_j-1}^{(j)}) \in M_{2 \times i_j}, \quad j = 1, \dots, m \\ \det(\zeta_0^{(j)}, \zeta_1^{(j)}) \neq 0, \quad \det(\zeta_0^{(i)}, \zeta_0^{(j)}) \neq 0 \end{array} \right\}.$$

Следует заметить, что размерность $Z_{(i_1, \dots, i_m)}$ равна n , т. е.

$$\dim \mathrm{Gr}(2, n+3) - (\dim H_{(i_1, \dots, i_m)} - 1) = 2(n+1) - (n+2) = n.$$

Введем теперь обобщенную функцию Лауричеллы $\eta(\mathbf{x}; z)$ по формуле

$$\eta(\mathbf{x}; z) dz = \chi(\tau\zeta; \mu)\omega_\tau, \quad (3.3)$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\zeta)$, $z = \tau_1/\tau_0$, $\tau = (\tau_0 : \tau_1) \in \mathbb{CP}^1$ и $\zeta \in Z_{i_1, \dots, i_m}$.

3.2. Примеры для $\mathrm{Gr}(2, 5)$. Вычислим все обобщенные дифференциалы Лауричеллы $\chi(\tau\zeta; \mu)\omega_\tau = \eta(\mathbf{x}; z) dz$ для $\mathrm{Gr}(2, 5)$, т. е. при $n = 2$. Имеем следующие семь случаев.

1. Используя разбиение $5 = (1, 1, 1, 1, 1)$, получим

$$\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -x_1 & -x_2 \end{pmatrix},$$

при этом $x_1 x_2 (x_1 - 1)(x_2 - 1)(x_1 - x_2) \neq 0$ и

$$\begin{aligned} \chi(\tau\zeta; \mu)\omega_\tau &= \tau_0^{\mu_0^{(1)}} \tau_1^{\mu_0^{(2)}} (\tau_0 - \tau_1)^{\mu_0^{(3)}} (\tau_0 - x_1 \tau_1)^{\mu_0^{(4)}} (\tau_0 - x_2 \tau_1)^{\mu_0^{(5)}} \omega_\tau = \\ &= z^{\mu_0^{(2)}} (1 - z)^{\mu_0^{(3)}} (1 - x_1 z)^{\mu_0^{(4)}} (1 - x_2 z)^{\mu_0^{(5)}} dz = \eta(\mathbf{x}; z) dz, \end{aligned}$$

где $z = \tau_1/\tau_0$ и было использовано условие $\sum_{j=0}^4 \mu_0^{(j)} = -2$. Заметим, что все миноры этой матрицы ненулевые, т. е. ζ представляет собой точку верхней клетки грассманиана $\mathrm{Gr}(2, 5)$. Полагая $\mu_0^{(4)} = -\epsilon_1$, $\mu_0^{(5)} = -\epsilon_2$, $\mu_0^{(2)} = -\epsilon_3$, $\mu_0^{(3)} = -\epsilon_4$ при $x_3 = 0$ и $x_4 = 1$, получим дифференциал Лауричеллы для $n = 4$ с регулярными особыми точками $\{0, 1, 1/x_1, 1/x_2, \infty\}$, т. е.

$$\eta(\mathbf{x}; z) = z^{-\epsilon_3} (1 - z)^{-\epsilon_4} (1 - x_1 z)^{-\epsilon_1} (1 - x_2 z)^{-\epsilon_2}.$$

2. Используя разбиение $5 = (2, 1, 1, 1)$, получим

$$\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 & 1 & -1 & -x_2 \end{pmatrix},$$

при этом $x_1 x_2 (x_2 - 1) \neq 0$ и

$$\begin{aligned} \chi(\tau\zeta; \mu)\omega_\tau &= \tau_0^{\mu_0^{(1)}} \tau_1^{\mu_0^{(2)}} e^{\mu_1^{(1)} x_1 \tau_1 / \tau_0} (\tau_0 - \tau_1)^{\mu_0^{(3)}} (\tau_0 - x_2 \tau_1)^{\mu_0^{(4)}} \omega_\tau = \\ &= e^{\mu_1^{(1)} x_1 z} z^{\mu_0^{(2)}} (1 - z)^{\mu_0^{(3)}} (1 - x_2 z)^{\mu_0^{(4)}} dz = \eta(\mathbf{x}; z) dz. \end{aligned}$$

Заметим, что все миноры этой матрицы ненулевые, за исключением минора с индексами $(2, 3)$, т. е. мы получили точку клетки с коразмерностью 1. Теперь особые точки таковы: $\{0, 1, 1/x_2, \infty\}$, и, в частности, точка $z = \infty$ является нерегулярной особой точкой из-за слияния регулярных особых точек $z = 1/x_1$ и $z = \infty$ дифференциала Лауричеллы в случае 1. Обобщенная функция Лауричеллы имеет вид

$$\eta(\mathbf{x}; z) = z^{-\epsilon_3}(1 - z)^{-\epsilon_4}(1 - x_2 z)^{-\epsilon_2} e^{\epsilon_1 x_1}.$$

3. Используя разбиение $5 = (2, 2, 1)$, получим

$$\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 & 1 & 0 & -x_2 \end{pmatrix},$$

при этом $x_1 x_2 \neq 0$ и

$$\begin{aligned} \chi(\tau\zeta; \mu) \omega_\tau &= \tau_0^{\mu_0^{(1)}} \tau_1^{\mu_0^{(2)}} e^{\mu_1^{(1)} x_1 \tau_1 / \tau_0 + \mu_1^{(2)} \tau_0 / \tau_1} (\tau_0 - x_2 \tau_1)^{\mu_0^{(3)}} \omega_\tau = \\ &= e^{\mu_1^{(1)} x_1 z + \mu_1^{(2)} / z} z^{\mu_0^{(2)}} (1 - x_2 z)^{\mu_0^{(3)}} dz = \eta(\mathbf{x}; z) dz. \end{aligned}$$

Заметим, что два минора с наборами индексов $(2, 3)$ и $(1, 4)$ равны нулю, т. е. мы получили точку клетки с коразмерностью 2. При этом обобщенная функция Лауричеллы имеет вид

$$\eta(\mathbf{x}; z) = z^{-\epsilon_3}(1 - x_2 z)^{-\epsilon_2} e^{\epsilon_1 x_1 z + \epsilon_4 / z}.$$

4. Используя разбиение $5 = (3, 1, 1)$, получим

$$\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x_1 & 1 & -x_2 \end{pmatrix},$$

при этом $x_1 x_2 \neq 0$ и

$$\begin{aligned} \chi(\tau\zeta; \mu) \omega_\tau &= \tau_0^{\mu_0^{(1)}} \tau_1^{\mu_0^{(2)}} \exp \left[\mu_1^{(1)} \frac{\tau_1}{\tau_0} + \mu_2^{(1)} \left(x_1 \frac{\tau_1}{\tau_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{\tau_1}{\tau_0} \right)^2 \right) \right] (\tau_0 - x_2 \tau_1)^{\mu_0^{(3)}} \omega_\tau = \\ &= \exp \left[\mu_1^{(1)} z + \mu_2^{(1)} \left(x_1 z - \frac{1}{2} z^2 \right) \right] z^{\mu_0^{(2)}} (1 - x_2 z)^{\mu_0^{(3)}} dz = \eta(\mathbf{x}; z) dz. \end{aligned}$$

Заметим, что миноры с наборами индексов $(2, 3)$, $(2, 4)$ и $(3, 4)$ равны нулю. Здесь равенство нулю минора с индексами $(3, 4)$ является следствием соотношения Плюккера, поэтому ζ – точка клетки с коразмерностью 2. При этом обобщенная функция Лауричеллы имеет вид

$$\eta(\mathbf{x}; z) = z^{-\epsilon_3}(1 - x_2 z)^{-\epsilon_2} e^{\epsilon_1(x_1 z - z^2/2) + \epsilon_4 z}.$$

5. Используя разбиение $5 = (3, 2)$, получим

$$\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_1 & 1 & x_2 \end{pmatrix},$$

при этом $x_1 x_2 \neq 0$ и

$$\begin{aligned} \chi(\tau\zeta; \mu) \omega_\tau &= \tau_0^{\mu_0^{(1)}} \tau_1^{\mu_0^{(2)}} \exp \left[\mu_1^{(1)} \frac{\tau_1}{\tau_0} + \mu_2^{(1)} \left(x_1 \frac{\tau_1}{\tau_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{\tau_1}{\tau_0} \right)^2 \right) + \mu_1^{(2)} x_2 \frac{\tau_1}{\tau_0} \right] \omega_\tau = \\ &= z^{\mu_0^{(2)}} \exp \left[\mu_1^{(1)} z + \mu_2^{(1)} \left(x_1 z - \frac{1}{2} z^2 \right) + \mu_1^{(2)} x_2 z \right] dz = \eta(\mathbf{x}; z) dz. \end{aligned}$$

Заметим, что миноры с наборами индексов $(2, 3)$, $(2, 4)$ и $(2, 5)$ равны нулю. Другие нулевые миноры получаются из соотношения Плюккера, поэтому ζ – точка клетки с коразмерностью 3. При этом обобщенная функция Лауричеллы имеет вид

$$\eta(\mathbf{x}; z) = z^{-\epsilon_3} \exp \left[\epsilon_1 \left(x_1 z - \frac{1}{2} z^2 \right) + \epsilon_2 x_2 z + \epsilon_4 z \right].$$

6. Используя разбиение $5 = (4, 1)$, получим

$$\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -x_1 & -x_2 \end{pmatrix},$$

при этом $x_1 x_2 \neq 0$ и

$$\begin{aligned} \chi(\tau\zeta; \mu)\omega_\tau &= \tau_0^{\mu_0^{(1)}} \exp \left[\mu_1^{(1)} \frac{\tau_1}{\tau_0} + \mu_2^{(1)} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\tau_1}{\tau_0} \right)^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \mu_3^{(1)} \left(-x_1 \frac{\tau_1}{\tau_0} + \frac{1}{3} \left(\frac{\tau_1}{\tau_0} \right)^3 \right) \right] (\tau_0 - x_2 \tau_1)^{\mu_0^{(2)}} \omega_\tau = \\ &= \exp \left[\mu_1^{(1)} z - \mu_2^{(1)} \frac{1}{2} z^2 - \mu_3^{(1)} \left(x_1 z - \frac{1}{3} z^3 \right) \right] (1 - x_2 z)^{\mu_0^{(2)}} dz = \eta(\mathbf{x}; z) dz. \end{aligned}$$

Заметим, что миноры с наборами индексов $(1, 3)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 4)$ и $(3, 5)$ равны нулю. Здесь равенство нулю минора с индексами $(3, 4)$ является следствием соотношения Плюккера, поэтому ζ – точка клетки с коразмерностью 3. При этом обобщенная функция Лауричеллы имеет вид

$$\eta(\mathbf{x}; z) = (1 - x_2 z)^{-\epsilon_2} \exp \left[\epsilon_1 \left(x_1 z - \frac{1}{3} z^3 \right) + \epsilon_3 z + \epsilon_4 z^2 \right].$$

7. Используя разбиение $5 = (5)$, получим

$$\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -x_1 & -x_2 \end{pmatrix},$$

при этом $x_1 x_2 \neq 0$ и

$$\begin{aligned} \chi(\tau\zeta; \mu)\omega_\tau &= \tau_0^{\mu_0^{(1)}} \exp \left[\mu_1^{(1)} \frac{\tau_1}{\tau_0} - \mu_2^{(1)} \frac{1}{2} \left(\frac{\tau_1}{\tau_0} \right)^2 + \mu_3^{(1)} \left(-x_1 \frac{\tau_1}{\tau_0} + \frac{1}{3} \left(\frac{\tau_1}{\tau_0} \right)^3 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \mu_4^{(1)} \left(-x_2 \frac{\tau_1}{\tau_0} + x_1 \left(\frac{\tau_1}{\tau_0} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\tau_1}{\tau_0} \right)^4 \right) \right] \omega_\tau = \\ &= \exp \left[\mu_1^{(1)} z - \mu_2^{(1)} \frac{1}{2} z^2 - \mu_3^{(1)} \left(x_1 z - \frac{1}{3} z^3 \right) + \mu_4^{(1)} \left(-x_2 z + x_1 z^2 - \frac{1}{4} z^4 \right) \right] dz = \\ &= \eta(\mathbf{x}; z) dz. \end{aligned}$$

Заметим, что миноры с наборами индексов $(1, 3)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$ и $(4, 5)$ равны нулю. Поэтому ζ – точка клетки с коразмерностью 4. При этом обобщенная функция Лауричеллы имеет вид

$$\eta(\mathbf{x}; z) = \exp \left[\epsilon_1 \left(x_1 z - \frac{1}{3} z^3 \right) + \epsilon_2 \left(x_2 z - x_1 z^2 - \frac{1}{4} z^4 \right) + \epsilon_3 z + \epsilon_4 z^2 \right].$$

3.3. Наиболее вырожденный случай для $\text{Gr}(2, n+3)$. В случае грассманиана $\text{Gr}(2, n+3)$ характер χ , связанный с разбиением $n+3 = (n+3)$, можно рассчитать следующим образом. Канонический вид элемента $\zeta \in \text{Gr}(2, n+3)/H_{(n+3)}$ выражается формулой

$$\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -x_1 & -x_2 & \dots & -x_n \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \prod_{j=1}^n x_n \neq 0.$$

Тогда получим

$$\tau\zeta = (\tau_0, \tau_1, 0, -x_1\tau_1, -x_2\tau_1, \dots, -x_n\tau_1),$$

и соответствующий характер имеет вид

$$\chi(\tau\zeta, \mu) = \tau_0^{\mu_0} \exp\left(\sum_{i=1}^{n+2} \mu_i \theta_i(\mathbf{x}; z)\right),$$

где $z = \tau_1/\tau_0$ и сумма в экспоненте представима формулой

$$\sum_{i=1}^{n+2} \mu_i \theta_i(\mathbf{x}; z) = \sum_{m=1}^n (-1)^m \left(\sum_{l=1}^{n-m+1} \mu_{l+m+1} x_l \right) z^m + \varphi(z).$$

Здесь $\varphi(z)$ – часть, зависящая только от z . Введем переменные,

$$y_m := (-1)^m \sum_{l=1}^{n-m+1} \mu_{l+m+1} x_l,$$

т. е. имеем просто

$$\sum_{i=1}^{n+2} \mu_i \theta_i(\mathbf{x}; z) = \xi(\mathbf{y}; z) + \varphi(z), \quad \text{где} \quad \xi(\mathbf{y}; z) := \sum_{m=1}^n y_m z^m.$$

Тогда, выбрав $\mu_0 = -2$, получим

$$\eta(\mathbf{y}; z) dz = \chi(\tau\zeta, \mu) \omega_\tau = f(z) \exp\left(\sum_{m=1}^n y_m z^m\right) dz. \quad (3.4)$$

4. ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, СВЯЗАННЫЕ С ВЫРОЖДЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЛАУРИЧЕЛЛЫ НА ГРАССМАНИАНЕ $\text{Gr}(2, 5)$

Как объяснялось в разделе 3, число свободных переменных в $Z_{(i_1, \dots, i_m)}$ равно n . Например, в случае $n = 1$ имеем одну переменную $x = x_1$, а дифференциал Лауричеллы вида $\eta(x; z) dz = z^{-\epsilon_1} (1-z)^{-\epsilon_2} (1-xz)^{-\epsilon_3} dz$ приводит к гипергеометрической функции Гаусса

$$F_{\text{Gauss}}(x) = \int_{\Delta} z^{-\epsilon_1} (1-z)^{-\epsilon_2} (1-xz)^{-\epsilon_3} dz.$$

Точки $\{0, 1, 1/x, \infty\}$ являются регулярными особыми точками гипергеометрического уравнения.

Вырождение функции Гаусса в функцию Куммера можно непосредственно получить из гипергеометрической функции Гаусса предельным переходом $\delta \rightarrow 0$, полагая $x = \delta y$, $\epsilon_3 = 1/\delta$. В результате предельного перехода получим

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} (1 - xz)^{-\epsilon_3} = \lim_{\delta \rightarrow 0} (1 - \delta yz)^{-1/\delta} = e^{yz}.$$

Соответствующая гипергеометрическая функция, названная вырожденной гипергеометрической функцией Куммера, имеет вид

$$F_{\text{Kummer}}(y) = \int_{\Delta} z^{-\epsilon_1} (1 - z)^{-\epsilon_2} e^{yz} dz.$$

В данном предельном переходе точка $z = \infty$ стала теперь нерегулярной особой точкой. Разбиение $(2, 1, 1)$ можно считать кратностью особых точек $(\infty, 0, 1)$ системы (2.1), т. е. предел дает $1/x \rightarrow \infty$.

4.1. Вырожденные гидродинамические системы. Пример из п. 3.2 показывает, что реально существуют только три различные вырожденные функции типа функции Лауричеллы. Они имеют следующий вид.

Случай 1. Для разбиений $5 = (i_1, \dots, i_p)$, где $2 \leq p \leq 4$, за исключением $5 = (3, 2)$, функция типа Лауричеллы имеет вид

$$\eta_1(x, y; z) = f(z)(1 - xz)^{-\epsilon} e^{yz}$$

с некоторой функцией $f(z)$.

Случай 2. Для случая разбиения $5 = (3, 2)$ имеем

$$\eta_2(x, y; z) = g(z)e^{(y_1 + y_2)z}$$

с некоторой функцией $g(z)$.

Случай 3. Наиболее вырожденному случаю соответствует разбиение $5 = (5)$, когда функция типа Лауричеллы имеет вид

$$\eta_3(x, y; z) = h(z)e^{y_1 z + y_2 z^2}$$

с некоторой функцией $h(z)$.

Ниже мы построим системы гидродинамического типа, соответствующие перечисленным случаям.

4.1.1. Случай 1. Функцию типа Лауричеллы $\eta_1(x, y; z)$ можно также непосредственно получить из функции Лауричеллы (2.1) предельным переходом $\delta \rightarrow 0$, положив

$$x_1 = x, \quad x_2 = \delta y, \quad \epsilon_1 = \epsilon, \quad \epsilon_2 = \frac{1}{\delta}.$$

Соответствующий предел уравнения ЭПД (1.2) для $\eta_1(x, y; z)$ имеет вид уравнения

$$x \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - \epsilon \frac{\partial \eta_1}{\partial y}, \quad (4.1)$$

которое не является уравнением типа ЭПД. Функция

$$F(x, y) = \int_{\Delta} f(z) \eta_1(x, y; z) dz$$

при частном выборе функции $f(z)$ описывает вырождение функции Аппеля F_D в вырожденную гипергеометрическую функцию Куммера (см. раздел 8.7 в статье [22]).

Разложение функции $\eta_1(x, y; z)$ по степеням z при $f(z) = 1$ имеет вид

$$\eta_1(x, y; z) = \sum_{j=0}^{\infty} F_1^k(x, y) z^k, \quad F_1^k(x, y) = \sum_{i+j=k} \frac{(\epsilon, i)}{i! j!} x^i y^j,$$

где $(\epsilon, i) := \epsilon(\epsilon + 1) \dots (\epsilon + i - 1)$. Выпишем несколько первых функций $F_1^k(x, y)$:

$$F_1^1 = \epsilon x + y, \quad F_1^2 = \frac{\epsilon(\epsilon + 1)}{2} x^2 + \epsilon xy + \frac{1}{2} y^2.$$

Введем теперь производящую функцию

$$\Phi_1(\mathbf{t}; x, y) := \sum_{k=0}^m t_k F_1^{k+1}(x, y).$$

Заметим, что функция $\Phi_1(\mathbf{t}; x, y)$ также удовлетворяет уравнению (4.1) – вырожденному уравнению ЭПД. Определим критическую точку $(x, y) = (u_1, u_2)$ по формуле

$$\left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right|_{(u_1, u_2)} = \left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right|_{(u_1, u_2)} = 0,$$

которая далее приводит к деформации критической точки $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{t})$. Заметим также, что ввиду (4.1) в критической точке выполняется условие

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial y} \right|_{(u_1, u_2)} = 0.$$

Теперь, взяв производную критического уравнения по t_k , получим

$$\frac{\partial F_1^{k+1}}{\partial u_i} + \Phi_{i,i}^1 \frac{\partial u_i}{\partial t_k} = 0, \quad i = 1, 2,$$

где

$$\Phi_{1,1}^1 := \left. \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} \right|_{(u_1, u_2)}, \quad \Phi_{2,2}^1 := \left. \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} \right|_{(u_1, u_2)}.$$

Эта система приводит к уравнениям гидродинамического типа для $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$,

$$\frac{\partial u_i}{\partial t_k} = \lambda_i^k \frac{\partial u_i}{\partial x}, \quad k = 1, \dots, m,$$

где характеристические скорости имеют вид

$$\lambda_1^k = \frac{1}{\epsilon} \left. \frac{\partial F_1^{k+1}}{\partial x} \right|_{(u_1, u_2)}, \quad \lambda_2^k = \left. \frac{\partial F_1^{k+1}}{\partial y} \right|_{(u_1, u_2)}.$$

Следовательно, функции u_1 и u_2 являются инвариантами Римана для этой вырожденной системы.

Используя приведенные выше формулы для F_1^k , можно показать, что

$$\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial F_1^{k+1}}{\partial x} = \sum_{i+j=k} x^i F_1^j, \quad \frac{\partial F_1^{k+1}}{\partial y} = F_1^k.$$

Первые два члена этой иерархии с $k = 1, 2$ следующие:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t_1} &= ((1 + \epsilon)u_1 + u_2) \frac{\partial u_1}{\partial t_0}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t_1} &= (\epsilon u_1 + u_2) \frac{\partial u_2}{\partial t_0} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t_2} &= \left(\frac{1}{2}(\epsilon + 1)(\epsilon + 2)u_1^2 + (\epsilon + 1)u_1u_2 + \frac{1}{2}u_2^2 \right) \frac{\partial u_1}{\partial t_0}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t_2} &= \left(\frac{1}{2}\epsilon(\epsilon + 1)u_1^2 + \epsilon u_1u_2 + \frac{1}{2}u_2^2 \right) \frac{\partial u_2}{\partial t_0}. \end{aligned}$$

Коммутативность иерархии является прямым следствием того факта, что все функции $\eta_1(x, y; z)$ подчиняются уравнению (4.1).

При $\epsilon = 1/2$ и $\epsilon = -1/2$ из приведенной выше системы получим первые пределы вырождения: соответственно бездисперсионного нелинейного уравнения Шредингера и бездисперсионной цепочки Тоды.

4.1.2. Случай 2. Функцию типа Лауричеллы $\eta_2(y_1, y_2; z)$ можно получить предельным переходом $\delta \rightarrow 0$, полагая

$$x_1 = \delta y_1, \quad x_2 = \delta y_2, \quad \epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{1}{\delta}.$$

Тогда уравнение ЭПД (1.2) принимает простой вид:

$$0 = \frac{\partial \eta_2}{\partial y_1} - \frac{\partial \eta_2}{\partial y_2}.$$

Это означает, что по сути имеется одна переменная $y := y_1 + y_2$ и соответствующая система гидродинамического типа – просто уравнения Бюргерса–Хопфа [28]. Следовательно, имеем следующую производящую функцию:

$$\Phi_2(\mathbf{t}; y) := \sum_{k=0}^m t_k F_2^{k+1}(v), \quad F_2^k := \frac{1}{k!} v^k,$$

где F_2^k – коэффициенты разложения функции

$$\eta_2(y_1, y_2; z) = \sum_{k=0}^{\infty} F_2^k(y) z^k.$$

Тогда динамика критической точки $\frac{\partial \Phi_2}{\partial y}|_{y=v} = 0$ описывается иерархией Бюргерса–Хопфа

$$\frac{\partial v}{\partial t_k} = F_2^k(v) \frac{\partial v}{\partial t_0} = \frac{v^k}{k!} \frac{\partial v}{\partial t_0}.$$

Таким образом, у нас есть редуцируемая система, зависящая всего от одной переменной.

4.1.3. *Случай 3.* Общий случай наиболее сильного вырождения с одинарным разбиением $n = (n)$ мы обсудим в разделе 5. Здесь же изложим некоторые особенности наиболее вырожденного случая для $\text{Gr}(2, 5)$. Прежде всего заметим, что процесс вырождения, переводящий функцию Лауричеллы $\eta(x_1, x_2; z) = (1 - x_1 z)^{-\epsilon_1} (1 - x_2 z)^{-\epsilon_2}$ в функцию $\eta_3(y_1, y_2; z) = e^{y_1 z + y_2 z^2}$, соответствует пределу $\delta \rightarrow 0$ при

$$x_1 = \delta \sqrt{y_2} + \frac{1}{2} \delta^2 y_1, \quad x_2 = -\delta \sqrt{y_2} + \frac{1}{2} \delta^2 y_1, \quad \epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{1}{\delta^2}. \quad (4.2)$$

Это преобразование явно показывает, что предел приводит к слиянию двух сингулярных точек $1/x_1, 1/x_2 \rightarrow \infty$. В разделе 6 мы обобщим эту формулу на случай n переменных.

Преобразование (4.2) превращает уравнение ЭПД (1.2) с двумя переменными в уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial \eta_3}{\partial y_2} = \frac{\partial^2 \eta_3}{\partial^2 y_1}, \quad (4.3)$$

которое, в отличие от предыдущего случая, содержит производную второго порядка вместо смешанной производной. Такие уравнения появляются в работе [16] в связи с многомерными аналогами функции Эйри.

Построим теперь систему гидродинамического типа, описывающую деформации критических точек производящей функции Φ_3 , связанной с $\eta_3(y_1, y_2; z)$. Прежде всего разложим функцию типа Лауричеллы $\eta_3(y_1, y_2; z)$:

$$\eta_3(y_1, y_2; z) = e^{y_1 z + y_2 z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} F_3^k(y_1, y_2) z^k,$$

где $F^k(y_1, y_2)_3$ является элементарным полиномом Шура $p_k(y_1, y_2)$, т. е.

$$F_3^k(y_1, y_2) = p_k(y_1, y_2) := \sum_{j_1 + 2j_2 = k} \frac{y_1^{j_1} y_2^{j_2}}{j_1! j_2!}.$$

Заметим, что эти полиномы удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial p_k}{\partial y_1} = p_{k-1}, \quad \frac{\partial p_k}{\partial y_2} = p_{k-2},$$

где $p_0 = 1$ и $p_n = 0$ при $n < 0$.

Теперь введем производящую функцию $\Phi_3(\mathbf{t}; y_1, y_2)$ вида

$$\Phi_3(\mathbf{t}; y_1, y_2) = \sum_{k=0}^m t_k F_3^{k+1}(y_1, y_2) = \sum_{k=0}^m t_k p_{k+1}(y_1, y_2).$$

Уравнения для критической точки $(y_1, y_2) = (u_1, u_2)$ функции $\Phi_3(\mathbf{t}; y_1, y_2)$ имеют вид

$$\left. \frac{\partial \Phi_3}{\partial y_1} \right|_{(u_1, u_2)} = \sum_{k=0}^m t_k p_k(u_1, u_2) = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi_3}{\partial y_2} \right|_{(u_1, u_2)} = \sum_{k=1}^m t_k p_{k-1}(u_1, u_2) = 0. \quad (4.4)$$

Теперь, взяв производную по t_k , получим

$$p_k + \Phi_{1,2}^3 \frac{\partial u_2}{\partial t_k} = 0, \quad p_{k-1} + \Phi_{2,1}^3 \frac{\partial u_1}{\partial t_k} + \Phi_{2,2}^3 \frac{\partial u_2}{\partial t_k} = 0,$$

где введены обозначения

$$\Phi_{1,2}^3 = \Phi_{2,1}^3 = \sum_{k=2}^m t_k p_{k-2}, \quad \Phi_{2,2}^3 := \sum_{k=3}^m t_k p_{k-3}.$$

С помощью уравнения для $k = 0$ можно исключить $\Phi_{i,j}^3$ и получить следующие уравнения гидродинамического типа для $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t_k} = \mathbf{A}_k \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t_0}, \quad \mathbf{A}_k := \begin{pmatrix} p_k & p_{k-1} \\ 0 & p_k \end{pmatrix}.$$

Первые две системы имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_1 & 1 \\ 0 & u_1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t_0} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial}{\partial t_2} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u_1^2 + u_2 & u_1 \\ 0 & \frac{1}{2}u_1^2 + u_2 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t_0} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Коммутирование всех этих потоков проверяется прямым вычислением. Таким образом, получаем интегрируемую иерархию систем гидродинамического типа. Подчеркнем, что переменные (u_1, u_2) не являются инвариантами Римана, в отличие от других рассмотренных выше систем. Этот факт является следствием уравнения для η_3 , которое содержит производную второго порядка $\partial^2 \eta_3 / \partial y_1^2$.

Критические уравнения (4.4) являются уравнениями годографа для этих систем. Они представимы в матричной форме, которая обсуждается в статье [23]. Таким образом, имеем

$$\sum_{k=0}^m t_k \mathbf{A}_k = 0.$$

В разделе 6 обсуждается общий случай наиболее вырожденной конфлюэнтной системы.

5. ВЫРОЖДЕННЫЕ СИСТЕМЫ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ СМЕШАННОМУ СЛУЧАЮ ДЛЯ ГРАССМАНИАНА $\text{Gr}(2, 6)$

Существуют три различных нередуцируемых типа обобщенных функций Лауричеллы для грассманиана $\text{Gr}(2, 6)$, которые имеют вид

$$\begin{aligned} \eta_*^1(x_1, x_2, y; z) &= (1 - x_1 z)^{-\epsilon_1} (1 - x_2 z)^{-\epsilon_2} e^{yz}, \\ \eta_*^2(x, y_1, y_2; z) &= (1 - xz)^{-\epsilon} e^{y_1 z + y_2 z^2}, \\ \eta_*^3(y_1, y_2, y_3; z) &= e^{y_1 z + y_2 z^2 + y_3 z^3}. \end{aligned}$$

Система гидродинамического типа, соответствующая первой функции, выражается через инварианты Римана (диагонализуемый случай). Система, соответствующая третьей функции, обсуждается в разделе 6 для произвольного n . Здесь же мы рассмотрим второй случай, который определяется вырождением для $\text{Gr}(2, 6)$ с разбиением $6 = (5, 1)$.

С помощью преобразования, аналогичного преобразованию (4.2) для случая 2 грассманиана $\text{Gr}(2, 5)$, можно получить $\eta_*^2(x, y_1, y_2; z)$ из функции Лауричеллы $\eta(x_1, x_2, x_3) = \prod_{i=1}^3 (1 - x_i z)^{-\epsilon_i}$ в пределе $\delta \rightarrow 0$ при $x_1 = x, \epsilon_1 = \epsilon$, полагая

$$x_2 = \delta\sqrt{y_2} + \delta^2 \frac{y_1}{2}, \quad x_3 = -\delta\sqrt{y_2} + \delta^2 \frac{y_1}{2}, \quad \epsilon_2 = \epsilon_3 = \frac{1}{\delta^2}.$$

Система ЭПД (1.2) в этом пределе принимает вид

$$\frac{\partial \eta_*^2}{\partial y_2} = \frac{\partial^2 \eta_*^2}{\partial y_1^2}, \quad x \frac{\partial^2 \eta_*^2}{\partial x \partial y_1} = \frac{\partial \eta_*^2}{\partial x} - \epsilon \frac{\partial \eta_*^2}{\partial y_1}, \quad x^2 \frac{\partial^2 \eta_*^2}{\partial x \partial y_2} = \frac{\partial \eta_*^2}{\partial x} - \epsilon \frac{\partial \eta_*^2}{\partial y_1} - \epsilon x \frac{\partial \eta_*^2}{\partial y_2}. \quad (5.1)$$

Заметим, что последнее уравнение можно вывести из первых двух.

Разлагая функцию η_*^2 по степеням z , получим

$$\eta_*^2 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k(y_1, y_2) z^k \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} q_j(x) z^j \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n p_{n-k}(y_1, y_2) q_k(x) \right) z^n,$$

где p_k — элементарный полином Шура,

$$q_j(x) = \frac{\epsilon(\epsilon+1) \cdots (\epsilon+j-1)}{j!} x^j, \quad j = 1, 2, \dots,$$

и $q_0 = 1$. Теперь введем функцию

$$\Phi(\mathbf{t}; x, y_1, y_2) = \sum_{k=0}^{\infty} t_k F^{k+1}(x, y_1, y_2), \quad (5.2)$$

где

$$F^k = \sum_{j=0}^k p_{k-j}(y_1, y_2) q_j(x), \quad F^0 = 1.$$

(При $x = 0$ получим обычный случай грассманиана $\text{Gr}(2, 5)$ с разбиением $5 = (5)$.)

Отметим тождества

$$\frac{\partial F^{k+1}}{\partial y_1} = F^k, \quad \frac{\partial F^{k+1}}{\partial y_2} = F^{k-1}, \quad \frac{\partial F^{k+1}}{\partial x} = \epsilon \sum_{j=0}^k F^{k-j} x^j.$$

Последнее уравнение можно вывести по индукции, т. е.

$$\sum_{k=1}^n (\epsilon + k - 1) p_{n-k} q_{k-1} = \epsilon \sum_{k=0}^{n-1} p_{n-1-k} q_k + \sum_{k=2}^n (k-1) p_{n-k} q_{k-1},$$

при этом $(k-1)q_{k-1} = (\epsilon + k - 2)xq_{k-2} = \epsilon xq_{k-2} + (k-2)xq_{k-2}$.

Дифференцируя Φ по y_1, y_2 и x , получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} &= \sum_{j=0}^m t_j F^j, & \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} &= \sum_{j=1}^m t_j F^{j-1}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \epsilon \sum_{k=0}^m t_k \left(\sum_{l=0}^k F^{k-l} x^l \right) = \epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} + \epsilon x \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} + \epsilon x^2 \sum_{j=2}^m t_j \left(\sum_{l=2}^j F^{j-l} x^{l-2} \right).\end{aligned}$$

Поэтому в критической точке $(x, y_1, y_2) = (u, v_1, v_2)$ функции Φ имеем

$$\sum_{j=0}^m t_j F^j = 0, \quad \sum_{j=1}^m t_j F^{j-1} = 0, \quad \sum_{j=2}^m t_j \left(\sum_{l=2}^j F^{j-l} x^{l-2} \right) = 0. \quad (5.3)$$

Следует отметить, что функция $\Phi(\mathbf{t}; x, y_1, y_2)$ удовлетворяет системе (5.1), которая является пределом вырождения системы ЭПД (1.2).

Продифференцируем теперь (5.3) по t_k , получим

$$F^k + \Phi_{1,2} \frac{\partial v_2}{\partial t_k} = 0, \quad F^{k-1} + \Phi_{2,1} \frac{\partial v_1}{\partial t_k} + \Phi_{2,2} \frac{\partial v_2}{\partial t_k} = 0, \quad G^k + \Phi_{0,0} \frac{\partial u}{\partial t_k} = 0, \quad (5.4)$$

где введены функции

$$\Phi_{i,j} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_i \partial y_j} \Big|_{(u, v_1, v_2)}, \quad \Phi_{0,0} := \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \Big|_{(u, v_1, v_2)},$$

а также

$$G^k := \sum_{j=0}^k F^{k-j} u^j.$$

Здесь использован тот факт, что $\Phi_{1,1} = \Phi_{0,1} = \Phi_{0,2} = 0$, поскольку соответствующие вторые производные функции Φ выражаются линейной комбинацией первых производных (см. (5.1)).

Введем матрицу

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \Phi_{0,0} & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{1,2} & \Phi_{2,2} \\ 0 & 0 & \Phi_{1,2} \end{pmatrix}.$$

Тогда из системы (5.4) получим матричное уравнение для $\mathbf{u} = (u, v_1, v_2)^T$:

$$\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t_k} = -(G^k, F^{k-1}, F^k)^T. \quad (5.5)$$

Теперь сформулируем следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Критическая точка $(x, y_1, y_2) = (u, v_1, v_2)$ производящей функции $\Phi(\mathbf{t}; x, y_1, y_2)$ вида (5.2) удовлетворяет системам гидродинамического типа

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t_k} = \mathbf{A}_k \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, \quad \mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} G^k & 0 & 0 \\ 0 & F^k & F^{k-1} \\ 0 & 0 & F^k \end{pmatrix}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $k = 0$ из уравнения (5.5) получим

$$M \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t_0} = -(1, 0, 1)^T.$$

Заметим, что правая часть уравнения (5.5) имеет вид

$$(G^k, F^{k-1}, F^k)^T = A_k(1, 0, 1)^T.$$

Исключая матрицу M из этих уравнений с временами t_0 , t_k и замечая, что матрицы A_k коммутируют с M , получим искомую систему. ■

Например, первый поток иерархии из предложения 1 можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \begin{pmatrix} u \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u + v_1 & 0 & 0 \\ 0 & u + v_1 & 1 \\ 0 & 0 & u + v_1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t_0} \begin{pmatrix} u \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

6. КОНФЛЮЭНТНЫЕ СИСТЕМЫ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА В НАИБОЛЕЕ ВЫРОЖДЕННЫХ СЛУЧАЯХ

Как показано в п. 3.3, вырожденная функция типа Лауричеллы (характер) представима в экспоненциальной форме:

$$\eta_*(\mathbf{y}; z) = \exp \left(\sum_{i=1}^n y_i z^i \right) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(\mathbf{y}) z^i. \quad (6.1)$$

Эту функцию Лауричеллы можно непосредственно получить из первоначальной функции Лауричеллы $\eta(\mathbf{x}; z) = \prod_{j=1}^n (1 - x_j z)^{-\epsilon_j}$ в результате предельного перехода $\delta \rightarrow 0$. Сначала положим все $\epsilon_j = 1/\delta^n$. Заметим, что

$$\prod_{j=1}^n (1 - x_j z) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_i(\mathbf{x}) z^i, \quad \sigma_i(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq n} x_{j_1} \cdots x_{j_i}.$$

Рассмотрим теперь полином n -й степени по x ,

$$x^n = \sum_{i=0}^{n-1} \delta^n y_{n-i} x^i, \quad \text{т. е.} \quad \delta^n y_i = (-1)^{i+1} \sigma_i(\mathbf{x}). \quad (6.2)$$

Это означает, что имеется следующее уравнение, в котором перейдем к пределу $\delta \rightarrow 0$:

$$\prod_{j=1}^n (1 - x_j z)^{-\epsilon_j} = \left(1 - \delta^n \sum_{i=1}^n y_i z^i \right)^{-1/\delta^n} \longrightarrow \exp \left(\sum_{i=1}^n y_i z^i \right).$$

Чтобы найти переменные x_i , являющиеся корнями уравнения (6.2), будем искать их в виде рядов:

$$x_i = \sum_{j=1}^n \delta^j a_{i,j} + \mathcal{O}(\delta^{n+1}), \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.3)$$

Теперь легко понять, что разложение вполне определено, и можно однозначно найти коэффициенты $a_{i,j}$ в этом разложении по возмущению. Например, в случае $n = 4$ имеем

$$a_{i,1} = \omega_4^i y_4^{1/4}, \quad a_{i,2} = \frac{y_3}{4a_{i,1}^2}, \quad a_{i,3} = -\frac{y_3^2}{32a_{i,1}^5} + \frac{y_2}{4a_{i,1}}, \quad a_{i,4} = \frac{y_1}{4},$$

где $\omega_4 = e^{2\pi\sqrt{-1}/4}$ – корень четвертой степени из единицы. При этом преобразования переменных x_i выглядят следующим образом:

$$x_i = \delta \omega_4^i y_4^{1/4} + \delta^2 \omega_4^{2i} \frac{y_3 y_4^{-1/2}}{4} + \delta^3 \omega_4^{4-i} \left(-\frac{1}{32} y_3^2 y_4^{-5/4} + \frac{1}{4} y_2 y_4^{-1/4} \right) + \delta^4 \frac{y_1}{4} + \mathcal{O}(\delta^5).$$

Следует отметить, что члены высших порядков $\mathcal{O}(\delta^{n+1})$ в ряде (6.3) стремятся к нулю в пределе $\delta \rightarrow 0$, т.е. можно использовать усеченную форму преобразования переменных x_i с точностью до $\mathcal{O}(\delta^n)$ (см., например, (4.2) для случая $n = 2$).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Отметим, что в выражениях (6.3) для переменных x_i имеется некоторая свобода, и, например, можно также найти x_i в треугольной форме, т.е. $a_{i,j} = 0$ при $j > i$. Например, при $n = 2$ имеем

$$x_1 = \delta y_2^{1/2}, \quad x_2 = -\delta y_1^{1/2} + \delta^2 y_1,$$

а при $n = 3$ получим

$$x_1 = \delta y_3^{1/3}, \quad x_2 = \delta \omega_3 y_3^{1/3} + \delta^2 q y_2 y_3^{-1/3}, \quad x_3 = \delta \omega_3^2 y_3^{1/3} - \delta^2 q y_2 y_3^{-1/3} + \delta^3 y_1,$$

где $\omega_3 = e^{2\pi\sqrt{-1}/3}$ и $q = \omega_3/(\omega_3^2 - 1)$. Более подробно такое преобразование будет рассмотрено в другой работе.

Коэффициенты $p_i(\mathbf{y})$ в выражении (6.1) иногда называют элементарными полиномами Шура, они имеют вид

$$p_i(\mathbf{y}) = \sum_{j_1+2j_2+\dots+nj_n=i} \frac{y_1^{j_1} y_2^{j_2} \dots y_n^{j_n}}{j_1! j_2! \dots j_n!}.$$

Выпишем несколько первых полиномов:

$$p_0 = 1, \quad p_1 = y_1, \quad p_2 = y_2 + \frac{1}{2} y_1^2, \quad p_3 = y_3 + y_1 y_2 + \frac{1}{3} y_1^3.$$

Заметим, что $p_i(\mathbf{y})$ удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial p_i}{\partial y_j} = p_{i-j}, \quad p_m = 0, \quad \text{если } m < 0.$$

Введем функцию

$$\Phi(\mathbf{t}; \mathbf{y}) := \sum_{k=0}^{\infty} t_k F^{k+1}(\mathbf{y}), \quad F^k(\mathbf{y}) = p_k(\mathbf{y}).$$

Теперь сформулируем лемму об уравнениях для Φ , которые можно считать вырожденной системой ЭПД.

ЛЕММА 1. Для каждого r имеем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_r} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_i \partial y_j} \quad \text{для всех } i + j = r.$$

Рассмотрим критическую точку $\mathbf{y} = \mathbf{u}$ функции $\Phi(\mathbf{t}; \mathbf{y})$, т. е.

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{u}} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.4)$$

Введем обозначения

$$\Phi_i := \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{u}}, \quad \Phi_{i,j} := \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_i \partial y_j} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{u}}.$$

Заметим, что из леммы 1 следует

$$\Phi_{i,j} = \Phi_{i+j} = 0, \quad \text{если } i + j \leq n.$$

Тогда, дифференцируя уравнение (6.4) по t_k при $k = 0, 1, \dots, n$, получим следующую лемму.

ЛЕММА 2. Справедливо соотношение

$$\begin{pmatrix} \Phi_{n,1} & \Phi_{n,2} & \dots & \Phi_{n,n} \\ 0 & \Phi_{n-1,2} & \dots & \Phi_{n-1,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \Phi_{1,n} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t_k} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F_{n-1}^k \\ F_{n-2}^k \\ \vdots \\ F_0^k \end{pmatrix},$$

$$\text{где } F_j^k = \left. \frac{\partial F_j^k}{\partial y_j} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{u}} = p_{k-j}(\mathbf{u}).$$

Заметим, что каждая (верхняя) i -я диагональ матрицы коэффициентов имеет один и тот же элемент Φ_{n+i+1} , который будем считать ненулевым. Тогда справедливо следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Предположим, что $\Phi_{i,j} \neq 0$ при $i + j > n$. Тогда имеем

$$\frac{\partial}{\partial t_k} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0^k & F_1^k & \dots & F_{n-1}^k \\ 0 & F_0^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & F_1^k \\ 0 & \dots & 0 & F_0^k \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix},$$

где $F_j^k = p_{k-j}(\mathbf{u})$. Заметим, что $F_j^k = 0$ при $j > k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего укажем на то, что при $k = 0$ имеем $F_j^0 = 0$ для $j = 1, \dots, n-1$, а $F_0^0 = 1$. Теперь запишем равенство

$$\begin{pmatrix} F_{n-1}^k \\ F_{n-2}^k \\ \vdots \\ F_0^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0^k & F_1^k & \dots & F_{n-1}^k \\ 0 & F_0^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & F_1^k \\ 0 & \dots & 0 & F_0^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрицы коэффициентов в лемме 2 и в настоящем предложении коммутируют. Предположение $\Phi_{n,1} \neq 0$ означает обратимость матрицы коэффициентов $(\Phi_{i,j})$ в лемме 2. Это завершает доказательство предложения. ■

Представим уравнение гидродинамического типа в векторной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t_k} = \mathbf{A}_k \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, \quad k = 1, \dots, m, \quad (6.5)$$

где $\mathbf{A}_k$ — $(n \times n)$ -матрица коэффициентов в предложении 2. Матрица $\mathbf{A}_1$ введена в уравнении (1.5), а $\mathbf{A}_2$ имеет вид

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} u_2 + \frac{1}{2}u_1^2 & u_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_2 + \frac{1}{2}u_1^2 & u_1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & u_2 + \frac{1}{2}u_1^2 & u_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & u_2 + \frac{1}{2}u_1^2 & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & u_1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & u_2 + \frac{1}{2}u_1^2 \end{pmatrix}.$$

Можно также убедиться, что эти системы совместны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Система уравнений (6.5) совместна, т. е.

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t_k \partial t_m} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t_m \partial t_k}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условия совместности имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{A}_k}{\partial t_m} - \frac{\partial \mathbf{A}_m}{\partial t_k} + \mathbf{A}_k \frac{\partial \mathbf{A}_m}{\partial x} - \mathbf{A}_m \frac{\partial \mathbf{A}_k}{\partial x} &= 0, \\ \mathbf{A}_k \mathbf{A}_m &= \mathbf{A}_m \mathbf{A}_k. \end{aligned}$$

Коммутативность во втором уравнении очевидна. Заметив, что элемент $(\mathbf{A}_k)_{i,j}$ равен p_{m-j+i} , можно записать производную в виде векторного поля:

$$\frac{\partial \mathbf{A}_k}{\partial t_m} = \left(\sum_{i \leq j} F_{i,j}^m \frac{\partial u_j}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u_i} \right) \mathbf{A}_k, \quad F_{i,j}^m = p_{m-j+i}.$$

Элемент (r, s) первого уравнения условий совместности имеет вид

$$\sum_{i \leq j} \left(F_{i,j}^m \frac{\partial u_j}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u_i} F_{r,s}^k - F_{i,j}^k \frac{\partial u_j}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u_i} F_{r,s}^m + F_{r,i}^k \frac{\partial u_j}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u_j} F_{i,s}^k - F_{r,i}^m \frac{\partial u_j}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u_j} F_{i,s}^k \right).$$

Используя равенства $F_{i,j}^m = p_{m-j+i}$ и т. д., для коэффициента перед производной $\partial u_j / \partial x$ получим следующее выражение:

$$\sum_{i=1}^n (p_{m-j+i} p_{k-s+r-i} - p_{k-j+i} p_{m-s+r-i} + p_{k-i+r} p_{m-s+i-j} - p_{m-i+r} p_{k-s+i-j}),$$

в котором $r \leq i \leq s \leq j$. Непосредственные вычисления доказывают равенство нулю этого выражения. Например, заметим, что члены с $i = r$ и $i = j$ взаимно уничтожаются. ■

6.1. Решение годографа системы (6.5). Решение системы (6.5) выражается через полиномы Шура. Заметим, что уравнение критической точки (6.4) можно представить в матричной форме (матричное обобщение решения годографа):

$$H(\mathbf{t}; \mathbf{u}) := \sum_{k=0}^m t_k A_k = 0. \quad (6.6)$$

Используя этот результат, получим точное решение для $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, фиксируя t_i при $i > n$, т. е.

$$\sum_{k=0}^n t_k A_k(\mathbf{u}) + B(\mathbf{u}) = 0, \quad B(\mathbf{u}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A_k(\mathbf{u}),$$

где постоянные $\{a_k : k = 0, 1, \dots\}$ произвольны. Заметим, что элемент $(1, 1)$ матричного уравнения (6.6), скажем $h(\mathbf{u}, t)$, порождает все остальные элементы, т. е. элемент (i, j) при $i \leq j$ имеет вид

$$(H(\mathbf{t}; \mathbf{u}))_{i,j} = \frac{\partial^{j-i} h}{\partial u_1^{j-i}}(\mathbf{u}, t), \quad h(\mathbf{t}; \mathbf{u}) = \sum_{k=0}^{\infty} t_k p_k(\mathbf{u}).$$

Например, рассмотрим решение годографа при $n = 4$. Имеем

$$h(\mathbf{t}; \mathbf{u}) = t_0 + p_1 t_1 + p_2 t_2 + p_3 t_3 + p_4 t_4 = 0.$$

Приведем соотношение между симметричными полиномами $\{h_j = p_j, e_j\}$:

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i e_{n-i} h_i = 0.$$

Элементарные симметричные функции задаются выражениями $e_j(\mathbf{u}) = (-1)^j p_j(-\mathbf{u})$, например

$$e_1(\mathbf{u}) = u_1, \quad e_2(\mathbf{u}) = -u_2 + \frac{1}{2}u_1^2, \quad e_3(\mathbf{u}) = u_3 - u_1 u_2 + \frac{1}{3}u_1^3.$$

Тогда получим

$$t_i = (-1)^k e_{n-i}(\mathbf{u}), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

В более общем случае можно положить

$$h(\mathbf{u}, t) = t_0 + p_1 t_1 + p_2 t_2 + p_3 t_3 + p_m = 0.$$

Тогда решение выражается через полиномы Шура:

$$t_3 = -S_{(m)}, \quad t_2 = S_{(m,1)}, \quad t_1 = -S_{(m,1,1)}, \quad t_0 = S_{(m,1,1,1)},$$

где $(i_1, i_2, \dots, i_m)$ – разбиение числа $n = i_1 + \dots + i_m$, при этом $i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_m$ (т. е. диаграмма Юнга). Функция $S_{(i_1, \dots, i_m)}$ является полиномом Шура, связанным с диаграммой Юнга $(i_1, \dots, i_m)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В формальном пределе $n \rightarrow \infty$ функция $\eta_*(\mathbf{y}; z)$, заданная выражением (6.1), имеет вид

$$\eta_*(\mathbf{y}; z) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} y_k z^k\right).$$

Введем конечный набор переменных Мивы $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ по формулам

$$y_k := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n \nu_i w_i^k \quad \text{для некоторых } \nu_i \in \mathbb{C} \quad \text{и} \quad k = 1, 2, \dots,$$

что можно считать конечной редукцией бесконечной $\mathbf{y}$ -системы. Тогда обобщенная функция Лауричеллы принимает вид

$$\eta_*(\mathbf{y}(\mathbf{w}); z) = \prod_{i=1}^n (1 - w_i z)^{-\nu_i}.$$

Таким образом, наиболее вырожденный случай грассманиана $\text{Gr}(2, \infty)$, представленный в переменных Мивы, можно считать случаем общего положения.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Бесконечнокомпонентные системы гидродинамического типа, связанные с функцией $\eta_*(\mathbf{y}; z)$, сами по себе образуют класс гидродинамических цепочек. Действительно, система (1.5) при $k = 1$, переписанная в виде

$$\frac{\partial u_i}{\partial t_1} = u_1 \frac{\partial u_i}{\partial t_0} + \frac{\partial u_{i+1}}{\partial t_0}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (6.7)$$

совпадает со строго положительной частью цепочки Павлова, полученной в [7] (см. цепочку (37) в указанной работе при $k = 1, 2, \dots$ и при $c_k = -u_k$). Однако, в отличие от цепочки (37) работы [7], все переменные цепочки (6.7) функционально независимы. Кроме того, конечное усечение цепочки Павлова (например, $c_{N+k} = 0$ при $k = 1, 2, \dots$) можно в точности получить взятием предела, описанного в начале этого раздела.

Благодарности. Ю. Кодама благодарит организаторов конференции “Физика и математика нелинейных явлений” (PMNP-2015) за приглашение.

Список литературы

- [1] G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, John Wiley and Sons, New York, 1974.
- [2] Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко, *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике*, Наука, М., 1978.
- [3] С. П. Царев, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:5 (1990), 1048–1068.
- [4] H. Flashka, M. G. Forest, D. W. McLaughlin, *Commun. Pure Appl. Math.*, **33**:6 (1980), 739–784.
- [5] В. Е. Захаров, *Функц. анализ и его прил.*, **14**:2 (1980), 15–24.
- [6] Y. Kodama, B. G. Konopelchenko, W. K. Schief, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **48**:22 (2015), 225202, 15 pp.
- [7] M. V. Pavlov, *J. Math. Phys.*, **44**:9 (2003), 4134–4156.
- [8] B. G. Konopelchenko, L. Martínez Alonso, E. Medina, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **43**:43 (2010), 434020, 15 pp.

- [9] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, *УМН*, **44**:6(270) (1989), 29–98.
- [10] М. В. Павлов, *ТМФ*, **138**:1 (2004), 55–70.
- [11] A. V. Odesskii, V. V. Sokolov, *Selecta Math. (N. S.)*, **16**:1 (2010), 145–172.
- [12] P. Appell, *J. Math. Pures Appl.* (3), **8** (1882), 173–216.
- [13] G. Lauricella, *Rendiconti del Circolo Mat. Palermo*, **7**, Suppl. 1 (1893), 111–158.
- [14] И. М. Гельфанд, *Докл. АН СССР*, **288**:1 (1986), 14–18.
- [15] И. М. Гельфанд, А. В. Зелевинский, *Функц. анализ и его прил.*, **20**:3 (1986), 17–34.
- [16] И. М. Гельфанд, В. С. Ретах, В. В. Серганова, *Докл. АН СССР*, **298**:1 (1988), 17–21.
- [17] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, В. С. Ретах, *УМН*, **47**:4(286) (1992), 3–82.
- [18] P. Deligne, G. D. Mostow, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **63**:1 (1986), 5–89.
- [19] E. Looijenga, “Uniformization by Lauricella functions – an overview of the theory of Deligne–Mostow”, *Arithmetic and Geometry Around Hypergeometric Functions*, Progress in Mathematics, **260**, eds. R.-P. Holzapfel, A. M. Uludağ, M. Yoshida, Birkhäuser, Basel, 2007, 207–244, arXiv: math/0507534.
- [20] J. Stienstra, “GKZ hypergeometric structures”, *Arithmetic and Geometry Around Hypergeometric Functions*, Progress in Mathematics, **260**, Birkhäuser, Basel, 2007, 313–371, arXiv: math/0511351.
- [21] K. Aomoto, M. Kita, *Theory of Hypergeometric Functions*, Springer, Tokyo, 2011.
- [22] H. Kimura, K. Takano, *Tohoku Math. J. (2)*, **58**:1 (2006), 1–31.
- [23] Y. Kodama, “Integrability of hydrodynamic type equations”, *Nonlinear World*, v. 2, Proceedings of the IV International Workshop on Nonlinear and Turbulent Processes in Physics (Kiev, USSR, October 9–22, 1989), eds. A. G. Sitenko, V. E. Zakharov, V. M. Chernousenko, Naukova Dumka, Kiev, 1989, 115–118.
- [24] E. V. Ferapontov, *Phys. D*, **63**:1–2 (1993), 50–70.
- [25] E. V. Ferapontov, *ТМФ*, **99**:2 (1994), 257–262.
- [26] O. I. Mokhov, “Symplectic and Poisson geometry on loop spaces of manifolds and nonlinear equations”, *Topics in Topology and Mathematical Physics*, American Mathematical Society Translations. Ser. 2, **170**, ed. S. P. Novikov, AMS, Providence, RI, 1995, 121–151.
- [27] О. И. Мохов, Е. В. Ферапонтов, *Функц. анализ и его прил.*, **30**:3 (1996), 62–72.
- [28] Y. Kodama, B. G. Konopelchenko, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **35**:31 (2002), L489–L500.