Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. В. Скрыпник, Скрученные рациональные r -матрицы и алгебраический анзац Бете: приложение к обобщенным моделям Годена, димерам Бозе–Хаббарда и моделям типа Джейнса–Каммингса–Дике, *ТМФ*, 2016, том 189, номер 1, 125–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9078>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 18:15:15

© 2016 г.

Т. В. Скрыпник^{*†}

СКРУЧЕННЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ r -МАТРИЦЫ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ АНЗАЦ БЕТЕ: ПРИЛОЖЕНИЕ К ОБОБЩЕННЫМ МОДЕЛЯМ ГОДЕНА, ДИМЕРАМ БОЗЕ–ХАББАРДА И МОДЕЛЯМ ТИПА ДЖЕЙНСА–КАММИНГСА–ДИКЕ

Построены квантовые интегрируемые системы, ассоциированные с алгебрами Ли $gl(n)$ и некосимметрическими скрученными и сдвинутыми рациональными r -матрицами. Среди полученных моделей – модели типа Годена как при наличии внешнего магнитного поля, так и без него, n -уровневые модели Джейнса–Каммингса–Дике с $(n-1)$ -модами в Λ -конфигурации, векторное обобщение димеров Бозе–Хаббарда и т. д. Квантовые гамильтонианы построенных интегрируемых моделей диагонализированы при помощи иерархического анзаца Бете.

Ключевые слова: интегрируемые системы, классические r -матрицы, алгебраический анзац Бете.

DOI: 10.4213/tmf9078

1. ВВЕДЕНИЕ

Квантовые интегрируемые системы с дальним действием играют важную роль в непертурбативной физике. Они применяются в теории малых квантовых гранул [1]–[4], где используется знаменитая модель Ричардсона [5], в ядерной физике [6], [7], теории цветных газов Ферми [8], теории конденсатов Бозе–Эйнштейна [9], [10], в так называемой теории центрального спина [11], [12] и т. д.

Основным примером таких моделей являются интегрируемые системы Годена [13], системы Годена во внешнем магнитном поле [14], димеры Бозе–Хаббарда [9], [10], обычные двухуровневые модели Джейнса–Каммингса–Дике [15], [16] и их n -уровневые обобщения [17], [18] и т. д. Общей чертой этих моделей является их связь с классическими кососимметрическими r -матрицами [14], [19]. Однако подход к квантовым интегрируемым системам, базирующийся на классических кососимметрических r -матрицах, имеет серьезное ограничение. Действительно, согласно теореме

^{*}University of Milano-Bicocca, Milano, Italy. E-mail: taras.skrypnyk@unimib.it

[†]Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова НАН Украины, Киев, Украина

Белафина–Дринфельда [20] классические кососимметрические r -матрицы исчерпываются рациональными, тригонометрическими и эллиптическими r -матрицами. Более того, эллиптические r -матрицы не являются картан-инвариантными, и соответствующие интегрируемые системы не имеют сохраняющихся операторов числа частиц. Это ограничивает их применение в физике. Кроме того, так называемые нестандартные рациональные [21] и нестандартные тригонометрические r -матрицы [20] приводят к неэрмитовым гамильтонианам, что делает практически невозможным их использование в квантовой теории. Поэтому применение классических кососимметрических r -матриц в квантовой механике ограничивается двумя классическими r -матрицами: стандартной рациональной и стандартной тригонометрической r -матрицами.

В серии предыдущих работ [22]–[26] мы предложили конструировать квантовые интегрируемые системы с помощью классических некососимметрических r -матриц, лежащих вне классификации Белафина–Дринфельда [20]. Таким образом мы, в частности, построили обобщение моделей Годена [22], соответствующее произвольной простой (редуктивной) алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и произвольной $(\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})$ -значной некососимметрической классической r -матрице со спектральными параметрами. Мы также рассмотрели случаи алгебр Ли высших рангов и сконструировали различные интегрируемые модификации и обобщения моделей Джайнса–Каммингса–Дике и димеров Бозе–Хаббарда [25]–[27]. В том числе мы показали, что соответствующие гамильтонианы диагонализуются при помощи алгебраического анзаца Бете [23], [25], [26]. В данной работе мы развиваем эти идеи и рассматриваем квантовые интегрируемые модели, ассоциированные с алгебрами Ли высшего ранга и классическими некососимметрическими r -матрицами определенного типа. А именно, мы концентрируем наше внимание на случаях алгебр Ли $\mathfrak{g} = gl(n)$ и так называемых сдвинутых и скрученных (или Z_2 -градуированных) классических r -матрицах следующего вида [28]:

$$\begin{aligned} r(u, v) = & \left(\frac{v^2}{u^2 - v^2} + c_0 \right) X_{11} \otimes X_{11} + \frac{v^2}{u^2 - v^2} \sum_{i,j=2}^n X_{ij} \otimes X_{ji} + \\ & + \frac{uv}{(u^2 - v^2)} \sum_{i=2}^n (X_{i1} \otimes X_{1i} + X_{1i} \otimes X_{i1}), \end{aligned} \quad (1)$$

где X_{ij} , $i, j \in \overline{1, n}$, – стандартный базис алгебры Ли $gl(n)$ и c_0 – произвольная константа.

Мы показываем, что с этой некососимметрической классической r -матрицей, кроме обобщенных моделей Годена при наличии внешнего магнитного поля и без него, можно также ассоциировать два однопараметрических семейства спин-бозонных моделей типа Джайнса–Каммингса–Дике и векторное обобщение димеров Бозе–Хаббарда. Простейший ($c_0 = 0$) представитель первого семейства этих моделей имеет следующий гамильтониан:

$$\begin{aligned} \hat{H}^{S,B} = & \sum_{j=2}^n (w_j - w_1) \hat{b}_j^- \hat{b}_j^+ + \sum_{l=1}^N \left((w_1 + c_1 + \nu_l^2 k_1) \hat{S}_{11}^{(l)} + \sum_{i=2}^n (w_i + c_n + \nu_l^2 k_n) \hat{S}_{ii}^{(l)} \right) + \\ & + \sqrt{k_1 - k_n} \sum_{l=1}^N \nu_l \sum_{j=2}^n (\hat{b}_j^+ \hat{S}_{j1}^{(l)} + \hat{b}_j^- \hat{S}_{1j}^{(l)}) - \frac{1}{2} \left(\sum_{k,l=1}^N \hat{S}_{11}^{(l)} \hat{S}_{11}^{(k)} + \sum_{k,l=1}^N \sum_{i,j=2}^n \hat{S}_{ij}^{(l)} \hat{S}_{ji}^{(k)} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\hat{b}_j^-$, $\hat{b}_j^+$ – стандартные операторы рождения-уничтожения бозонов, $\hat{S}_{ij}^{(l)}$ – компоненты обобщенного спина, представляющие базовые элементы X_{ij} алгебры Ли $gl(n)$, константы w_i , ν_l и k_1 , k_n , c_1 , c_n произвольны. Гамильтониан (2) имеет следующую интерпретацию: первый член – это энергия свободных мод электромагнитного поля, второй член – свободная энергия N атомов. Третий член описывает взаимодействие между атомом и $(n - 1)$ -модами электромагнитного поля так называемой Λ -конфигурации с неоднородными (зависящими от атома) константами взаимодействия $g_i^{(l)} = \sqrt{k_1 - k_n} \nu_l$. Последние два члена соответствуют взаимодействию между атомами.

Простейший ($c_0 = 0$) представитель второго семейства спин-бозонных моделей имеет гамильтониан

$$\begin{aligned} \hat{H}^{S,A} = & \sum_{j=2}^n \left(w_j - w_1 - \frac{n-2}{2} \right) \hat{a}_j^- \hat{a}_j^+ + \sum_{l=1}^N ((w_1 + c_1 - \nu_l^{-2} k'_1) \hat{S}_{11}^{(l)} + \\ & + \sum_{i=2}^n (w_i + c_n - \nu_l^{-2} k'_n) \hat{S}_{ii}^{(l)}) + \sqrt{k_1 - k'_n} \sum_{l=1}^N \nu_l^{-1} \sum_{j=2}^n (\hat{a}_j^+ \hat{S}_{j1}^{(l)} + \hat{a}_j^- \hat{S}_{1j}^{(l)}) + \\ & + \left(\sum_{j=2}^n \hat{a}_j^- \hat{a}_j^+ \right)^2, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\hat{a}_j^-$, $\hat{a}_j^+$ – стандартные операторы рождения-уничтожения бозонов, $\hat{S}_{ij}^{(l)}$ определены выше, константы w_i , ν_l , k'_1 , k'_n , c_1 , c_n – произвольны. Гамильтониан (3) имеет такую же интерпретацию, как и гамильтониан (2), только вместо дополнительного межатомного взаимодействия он содержит векторный аналог нелинейности Керра.

Наконец, простейший ($c_0 = 1$) представитель семейства векторных обобщений димера Бозе–Хаббарда имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \hat{H}^{A,B} = & \sum_{j=2}^n \left(w_j - \frac{n-2}{2} - w_1 \right) \hat{a}_j^- \hat{a}_j^+ + \sum_{j=2}^n (w_j - w_1) \hat{b}_j^- \hat{b}_j^+ - \\ & - \sqrt{(k_1 - k_n)(k'_1 - k'_n)} \sum_{j=2}^n (\hat{a}_j^- \hat{b}_j^+ + \hat{b}_j^- \hat{a}_j^+) - \frac{1}{2} \left(\sum_{j=2}^n \hat{b}_j^- \hat{b}_j^+ \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\sum_{j=2}^n \hat{a}_j^- \hat{a}_j^+ \right)^2. \end{aligned}$$

Первые два члена в этом гамильтониане кинетические. Третий член описывает взаимодействие между двумя группами векторных бозонов. Последние два члена – векторные обобщения нелинейности Керра.

Для диагонализации гамильтонианов сконструированных моделей мы используем результаты работы [29], обобщающие иерархический анзац Бете для кососимметрических r -матриц [30] на некососимметрический случай. Отметим, что первоначально иерархический анзац Бете был предложен в работах [31], [32] и алгебраизован в статье [33] для квантово-группового случая.

Структура настоящей работы имеет следующий вид: в разделе 2 мы напоминаем общие факты о некососимметрических r -матрицах и квантовых интегрируемых моделях, в разделе 3 описываем сдвинутые и скрученные рациональные r -матрицы и интегрируемые системы, связанные с ними. Наконец, в разделе 4 мы диагонализуем полученные модели методом иерархического анзаца Бете.

2. КВАНТОВЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ И r -МАТРИЦЫ

2.1. Классические r -матрицы: определения и обозначения. Пусть $\mathfrak{g} = gl(n)$ – алгебра Ли общей линейной группы над полем комплексных чисел. Пусть X_{ij} , $i, j = \overline{1, n}$, – стандартный базис алгебры $gl(n)$ с коммутационными соотношениями

$$[X_{ij}, X_{kl}] = \delta_{kj}X_{il} - \delta_{il}X_{kj}. \quad (4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $r(u_1, u_2) = \sum_{i,j,k,l=1}^n r_{ij,kl}(u_1, u_2)X_{ij} \otimes X_{kl}$ двух комплексных переменных u_1, u_2 со значениями в тензорном квадрате алгебры Ли $\mathfrak{g} = gl(n)$ называется классической r -матрицей, если она удовлетворяет обобщенному классическому уравнению Янга–Бакстера [34]–[36]:

$$[r^{12}(u_1, u_2), r^{13}(u_1, u_3)] = [r^{23}(u_2, u_3), r^{12}(u_1, u_2)] - [r^{32}(u_3, u_2), r^{13}(u_1, u_3)], \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} r^{12}(u_1, u_2) &\equiv \sum_{i,j,k,l=1}^n r_{ij,kl}(u_1, u_2)X_{ij} \otimes X_{kl} \otimes 1, \\ r^{13}(u_1, u_3) &\equiv \sum_{i,j,k,l=1}^n r_{ij,kl}(u_1, u_3)X_{ij} \otimes 1 \otimes X_{kl} \end{aligned}$$

и т. д., $r_{ij,kl}(u_1, u_2)$ – матричные элементы r -матрицы $r^{12}(u_1, u_2)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем называть классическую r -матрицу $\mathfrak{g}_0 \subset gl(n)$ -инвариантной, если

$$[r(u_1, u_2), X \otimes 1 + 1 \otimes X] = 0, \quad X \in \mathfrak{g}_0. \quad (6)$$

В настоящей работе мы рассматриваем диагональные классические r -матрицы следующего вида:

$$r(u_1, u_2) \equiv \sum_{i,j=1}^n r_{ji}(u_1, u_2)X_{ij} \otimes X_{ji}. \quad (7)$$

Более того, мы рассматриваем только r -матрицы, которые изменением параметризации можно привести к форме

$$r(u_1, u_2) = \frac{\Omega}{u_1 - u_2} + r^0(u_1, u_2), \quad (8)$$

где $\Omega = \sum_{i,j=1}^n X_{ij} \otimes X_{ji}$ – тензорный оператор Казимира и $r^0(u_1, u_2)$ – регулярная на диагонали $u_1 = u_2$ функция со значениями в $gl(n) \otimes gl(n)$.

2.2. Алгебра операторов Лакса и классические r -матрицы. Используя классические r -матрицы $r(u_1, u_2)$, можно определить тензорную скобку Ли

$$[\hat{L}(u_1) \otimes 1, 1 \otimes \hat{L}(u_2)] = [r^{12}(u_1, u_2), \hat{L}(u_1) \otimes 1] - [r^{21}(u_2, u_1), 1 \otimes \hat{L}(u_2)], \quad (9)$$

где $\hat{L}(u) = \sum_{i,j=1}^n \hat{L}_{ij}(u)X_{ij}$, $r^{21}(u_2, u_1) = P^{12}r^{12}(u_1, u_2)P^{12}$.

Явная форма операторов $\hat{L}_{ij}(u)$ как функций вспомогательного параметра u не является произвольной. Она согласуется со структурой r -матрицы $r(u_1, u_2)$ и зависит от рассматриваемой квантовой системы.

Для дальнейшего изложения важно также следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $\hat{L}^{(k)}(u)$, $k \in \overline{0, N}$, – независимые (как функции параметра u) операторы Лакса, удовлетворяющие условиям

$$[\hat{L}^{(k)}(u) \otimes 1, 1 \otimes \hat{L}^{(k)}(v)] = [r^{12}(u, v), \hat{L}^{(k)}(u) \otimes 1] - [r^{21}(v, u), 1 \otimes \hat{L}^{(k)}(v)], \quad (10)$$

$$[\hat{L}^{(k)}(u) \otimes 1, 1 \otimes \hat{L}^{(l)}(v)] = 0, \quad k \neq l. \quad (11)$$

Тогда оператор $\hat{L}(u) = \sum_{k=0}^N \hat{L}^{(k)}(u)$ удовлетворяет скобке (9) с r -матрицей $r^{12}(u, v)$.

2.3. Квантовые интегралы.

2.3.1. Генерирующие функции. В этом пункте мы объясняем связь между классическими некососимметрическими $(gl(n) \otimes gl(n))$ -значными r -матрицами и квантовой интегрируемостью.

Рассмотрим следующие функции на алгебре Лакса:

$$\hat{t}_n(u) = \text{tr}_n \hat{L}(u) = \sum_{i=1}^n \hat{L}_{ii}(u), \quad \hat{\tau}_n(u) = \frac{1}{2} \text{tr}_n \hat{L}^2(u) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \hat{L}_{ij}(u) \hat{L}_{ji}(u). \quad (12)$$

Имеет место следующая теорема [29], [37].

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\hat{L}(u)$ – оператор Лакса, удовлетворяющий коммутационным соотношениям (9) с классической r -матрицей вида (7). Предположим, что в некоторой открытой области $U \times U \subset \mathbb{C}^2$ функция $r(u, v)$ имеет разложение (8). Тогда операторнозначные функции $\hat{t}_n(u)$ и $\hat{\tau}_n(u)$ генерируют коммутативную алгебру:

$$[\hat{t}_n(u), \hat{t}_n(v)] = 0, \quad [\hat{\tau}_n(u), \hat{t}_n(v)] = 0, \quad [\hat{\tau}_n(u), \hat{\tau}_n(v)] = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что генерирующий оператор

$$\hat{t}_n(u) = \text{tr}_n \hat{L}(u) = \sum_{i=1}^n \hat{L}_{ii}(u)$$

не принадлежит, вообще говоря, центру алгебры Лакса.

2.3.2. Дополнительные интегралы. Опишем дополнительные интегралы, связанные с симметрией r -матрицы. Предположим, что среди квантовых динамических переменных существуют квантовые операторы $\hat{M}_a$, где $a \in \overline{1, \dim \mathfrak{g}_0}$, $\mathfrak{g}_0$ – некоторая подалгебра в $gl(n)$, такие, что имеют место следующие коммутационные соотношения [18]:

$$[\hat{M}_a, \hat{L}_b(u)] = \sum_{c=1}^{\dim gl(n)} C_{ab}^c \hat{L}_c(u), \quad (13)$$

в которых X_c , $c \in \overline{1, \dim gl(n)}$, – некоторый базис в $gl(n)$, X_c^* , $c \in \overline{1, \dim gl(n)}$, – дуальный базис, $\hat{L}_c(u)$ – компоненты оператора Лакса в этом базисе:

$$\hat{L}(u) = \sum_{c=1}^{\dim gl(n)} \hat{L}_c(u) X_c^*,$$

C_{ab}^c – тензор структурных констант алгебры $gl(n)$ в базисе $\{X_c\}$.

Можно показать [38], что операторы $\widehat{M}_a$ образуют алгебру Ли, изоморфную алгебре $\mathfrak{g}_0$, и что эта алгебра Ли централизует алгебру интегралов, генерируемых функциями $\hat{\tau}_n(u)$, $\hat{t}_n(u)$:

$$[\widehat{M}_a, \hat{\tau}_n(u)] = 0, \quad [\widehat{M}_a, \hat{t}_n(u)] = 0, \quad a \in \overline{1, \dim \mathfrak{g}_0}.$$

Используя этот факт, можно значительно расширить коммутативную алгебру, порожденную функциями $\hat{\tau}_n(u)$, $\hat{t}_n(u)$.

ПРИМЕР 1. В данной работе рассматривается случай, когда $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_0$ имеют вид $\mathfrak{g} = gl(n)$, $\mathfrak{g}_0 = gl(1) \oplus gl(n-1)$. Подалгебра $\mathfrak{g}_0$ порождается операторами

$$\{\widehat{M}_{kl} \mid k, l = 1 \cup k, l \in \overline{2, n}\}.$$

Условие (13) приобретает вид

$$[\widehat{M}_{kl}, \hat{L}_{ij}(u)] = (\delta_{li} \hat{L}_{kj}(u) - \delta_{kj} \hat{L}_{il}(u)). \quad (14)$$

Эта алгебра имеет коммутативную подалгебру, порожденную операторами $\widehat{M}_{ii}$, $i \in \overline{1, n}$.

3. СДВИНУТЫЕ Z_2 -ГРАДУИРОВАННЫЕ r -МАТРИЦЫ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ

В настоящем разделе мы рассматриваем важный пример диагональной в корневом базисе, $(gl(n) \otimes gl(n))$ -значной, $(gl(1) \oplus gl(n-1))$ -инвариантной классической r -матрицы, удовлетворяющей условию регулярности (8), а также соответствующие квантовые интегрируемые системы, кажущиеся интересными с точки зрения физики.

3.1. Сдвинутые Z_2 -градуированные или скрученные рациональные r -матрицы. Рассмотрим следующую $(gl(n) \otimes gl(n))$ -значную функцию двух комплексных переменных:

$$\begin{aligned} r(u, v) = & \left(\frac{v^2}{u^2 - v^2} + c_0 \right) X_{11} \otimes X_{11} + \frac{v^2}{u^2 - v^2} \sum_{i,j=2}^n X_{ij} \otimes X_{ji} + \\ & + \frac{uv}{(u^2 - v^2)} \sum_{i=2}^n (X_{i1} \otimes X_{1i} + X_{1i} \otimes X_{i1}). \end{aligned} \quad (15)$$

Можно показать, что она удовлетворяет обобщенному классическому уравнению Янга–Бакстера (5) для произвольного значения константы c_0 и, следовательно, является классической r -матрицей. Эта r -матрица принадлежит классу сдвинутых Z_2 -градуированных классических r -матриц [28]. Соответствующая Z_2 -градуировка алгебры $gl(n)$,

$$gl(n) = gl(n)_{\bar{0}} + gl(n)_{\bar{1}},$$

определена подалгеброй

$$gl(n)_{\bar{0}} = gl(1) \oplus gl(n-1).$$

Данная Z_2 -градуировка определяется также с помощью автоморфизма σ второго порядка. При $c_0 = 0$ r -матрица (15) получается скручиванием рациональной

r -матрицы с помощью автоморфизма σ [28], [36], поэтому мы называем ее скрученной рациональной r -матрицей. Тензор сдвига в r -матрице (15) имеет вид

$$c^{12} = c_0 X_{11} \otimes X_{11}.$$

Он является решением постоянного классического уравнения Янга–Бакстера на $gl(n)_{\bar{0}}$ [28].

В формуле (15) r -матрица диагональна в корневом базисе и $gl(n)_{\bar{0}}$ -инвариантна. Она также удовлетворяет условию регулярности (8). Для того чтобы показать это, достаточно применить параметризацию $u^2 = e^s$, $v^2 = e^t$. Данная r -матрица и соответствующие квантовые интегрируемые системы являются основными объектами исследования в настоящей работе.

3.2. Обобщенные модели Годена во внешнем магнитном поле. Для рассматриваемой r -матрицы (15) операторы Лакса систем типа Годена во внешнем магнитном поле получаются посредством конкретизации операторов Лакса для систем Годена, отвечающих r -матрице общего вида [22], [24]:

$$\begin{aligned} \hat{L}^S(v) = & \sum_{k=1}^N \left(\left[\frac{v^2}{\nu_k^2 - v^2} + c_0 \right] S_{11}^{(k)} X_{11} + \frac{v^2}{\nu_k^2 - v^2} \sum_{i,j=2}^n S_{ij}^{(k)} X_{ji} + \right. \\ & \left. + \frac{\nu_k v}{(\nu_k^2 - v^2)} \sum_{i=2}^n (S_{i1}^{(k)} X_{1i} + S_{1i}^{(k)} X_{i1}) \right) + \left(c_1 X_{11} + c_n \sum_{j=2}^n X_{jj} \right), \end{aligned} \quad (16)$$

где операторы $\hat{S}_{ij}^{(m)}$, $i, j \in \overline{1, n}$, $m \in \overline{1, N}$, образуют представление алгебры Ли $gl(n)^{\oplus N}$:

$$[\hat{S}_{ij}^{(m)}, \hat{S}_{kl}^{(p)}] = \delta^{mp} (\delta_{kj} \hat{S}_{il}^{(m)} - \delta_{il} \hat{S}_{kj}^{(m)}).$$

Разложение генерирующей функции второго порядка по динамическим переменным имеет вид

$$\hat{\tau}_n^S(u) = \hat{H}_0^S + \sum_{l=1}^N \frac{\nu_l^2}{\nu_l^2 - u^2} \hat{H}_{\nu_l}^S + \sum_{l=1}^N \frac{\nu_l^4}{(\nu_l^2 - u^2)^2} \hat{C}_l,$$

где $\hat{C}_l = 1/2 \sum_{i,j=1}^n S_{ji}^{(l)} S_{ij}^{(l)}$ – операторы Казимира l -й копии алгебры $gl(n)$, $\hat{H}_0^S$ и $\hat{H}_{\nu_l}^S$ – нетривиальные интегралы. Гамильтонианы систем типа Годена во внешнем магнитном поле – это операторы $\hat{H}_{\nu_l}^S$, $l \in \overline{1, N}$, имеющие следующую явную форму:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\nu_l}^S = & \sum_{\substack{k=1, \\ k \neq l}}^N \left(\left[\frac{\nu_l^2}{\nu_k^2 - \nu_l^2} + c_0 \right] S_{11}^{(k)} S_{11}^{(l)} + \frac{\nu_l^2}{\nu_k^2 - \nu_l^2} \sum_{i,j=2}^n S_{ij}^{(k)} S_{ji}^{(l)} + \right. \\ & + \frac{\nu_k \nu_l}{(\nu_k^2 - \nu_l^2)} \sum_{i=2}^n (S_{i1}^{(k)} S_{1i}^{(l)} + S_{1i}^{(k)} S_{i1}^{(l)}) \left. \right) + (c_0 - 1) S_{11}^{(l)} S_{11}^{(l)} - \sum_{i,j=2}^n S_{ij}^{(l)} S_{ji}^{(l)} - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{j=2}^n (S_{1j}^{(l)} S_{j1}^{(l)} + S_{j1}^{(l)} S_{1j}^{(l)}) + c_1 S_{11}^{(l)} + c_n \sum_{j=2}^n S_{jj}^{(l)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Дополнительные линейные интегралы, удовлетворяющие условию (14), – суть глобальные спинные операторы

$$\widehat{M}_{ij}^S = \sum_{k=1}^N \widehat{S}_{ij}^{(k)}, \quad i, j \in \overline{2, n}, \quad \widehat{M}_{11}^S = \sum_{k=1}^N \widehat{S}_{11}^{(k)} \quad (18)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Операторы Лакса и гамильтонианы систем типа Годена без внешнего магнитного поля получаются наложением условий $c_1 = c_n = 0$.

3.3. Обобщенные модели Бозе–Хаббарда. Рассмотрим другой пример интегрируемой модели и операторов Лакса, ассоциированных со сдвинутыми Z_2 -градуированными r -матрицами. Эта модель обобщает димер Бозе–Хаббарда.

В отличие от операторов Лакса обобщенных моделей Годена бозонные операторы Лакса существуют не для всех классических r -матриц. Тем не менее для некоторых классических r -матриц можно определить бозонные операторы Лакса [26], [37], [38]. Более того, оказывается, что для некоторых r -матриц можно определить несколько независимых бозонных операторов Лакса [27], [37]. В случае рассматриваемых r -матриц возможно определить два таких оператора. Они имеют следующую форму [37]:

$$\begin{aligned} \hat{L}^B(u) = & -c_0 \left(\sum_{j=2}^n \hat{b}_j^- \hat{b}_j^+ \right) X_{11} + u \sqrt{k_1 - k_n} \sum_{j=2}^n (\hat{b}_j^+ X_{j1} + \hat{b}_j^- X_{1j}) + \\ & + u^2 \left(k_1 X_{11} + k_n \sum_{i=2}^n X_{ii} \right), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \hat{L}^A(u) = & (1 - c_0) \left(\sum_{j=2}^n \hat{a}_j^- \hat{a}_j^+ \right) X_{11} - \sum_{i,j=2}^n \hat{a}_i^- \hat{a}_j^+ X_{ji} - \\ & - u^{-1} \sqrt{k'_1 - k'_n} \sum_{j=2}^n (\hat{a}_j^+ X_{j1} + \hat{a}_j^- X_{1j}) - u^{-2} \left(k'_1 X_{11} + k'_n \sum_{i=2}^n X_{ii} \right), \end{aligned} \quad (20)$$

где константы $k_j, k'_j, j \in \overline{1, n}$, произвольны и $\hat{b}_i^\pm, \hat{a}_i^\pm$ – операторы рождения-уничтожения бозонов:

$$\begin{aligned} [\hat{b}_i^+, \hat{b}_j^-] &= \delta_{ij}, & [\hat{b}_i^+, \hat{b}_j^+] &= [\hat{b}_i^-, \hat{b}_j^-] = 0, \\ [\hat{a}_i^+, \hat{a}_j^-] &= \delta_{ij}, & [\hat{a}_i^+, \hat{a}_j^+] &= [\hat{a}_i^-, \hat{a}_j^-] = 0, \\ [\hat{b}_i^+, \hat{a}_j^-] &= [\hat{b}_i^+, \hat{a}_j^+] = [\hat{b}_i^-, \hat{a}_j^-] = [\hat{b}_i^-, \hat{a}_j^+] = 0. \end{aligned}$$

Дополнительные интегралы, удовлетворяющие свойству (14) для операторов Лакса $\hat{L}^B(u)$ и $\hat{L}^A(u)$, имеют вид

$$\widehat{M}_{ij}^B = \hat{b}_i^- \hat{b}_j^+, \quad i, j \in \overline{2, n}, \quad \widehat{M}_{11}^B = - \sum_{j=2}^n \hat{b}_j^- \hat{b}_j^+, \quad (21)$$

$$\widehat{M}_{ij}^A = \hat{a}_i^- \hat{a}_j^+, \quad i, j \in \overline{2, n}, \quad \widehat{M}_{11}^A = - \sum_{j=2}^n \hat{a}_j^- \hat{a}_j^+. \quad (22)$$

Рассмотрим оператор Лакса, являющийся суммой операторов Лакса (19) и (20) (это возможно благодаря утверждению 1):

$$\hat{L}^{A,B}(u) = \hat{L}^B(u) + \hat{L}^A(u).$$

Он определяет две группы взаимодействующих векторных бозонов. Для этого оператора Лакса дополнительные операторы, удовлетворяющие свойствам (14), имеют следующий вид:

$$\hat{M}_{ij}^{A,B} = \hat{M}_{ij}^A + \hat{M}_{ij}^B.$$

Генерирующая функция $\hat{t}_n^{A,B}(u)$ (с точностью до константы) совпадает с оператором $\hat{M}_{11}^{A,B}$. Генерирующая функция второго порядка записывается как

$$\hat{\tau}_n^{A,B}(u) = \sum_{k=-4}^4 \hat{H}_k^{A,B} u^k.$$

Используя явную форму операторов Лакса, легко показать, что в этом случае $\hat{H}_4^{A,B}$, $\hat{H}_{-4}^{A,B}$ – константы (т.е. пропорциональны единичному оператору) и справедливы равенства $\hat{H}_3^{A,B} = \hat{H}_1^{A,B} = \hat{H}_{-1}^{A,B} = \hat{H}_{-3}^{A,B} = 0$. Прямой подсчет показывает также, что с точностью до постоянных членов

$$\hat{H}_2^{A,B} = (k_1(1 - c_0) - k_n) \sum_{j=2}^n (\hat{a}_j^- \hat{a}_j^+ + \hat{b}_j^- \hat{b}_j^+), \quad \hat{H}_{-2}^{A,B} = k'_1 c_0 \sum_{j=2}^n (\hat{a}_j^- \hat{a}_j^+ + \hat{b}_j^- \hat{b}_j^+).$$

Важным интегралом является $\hat{H}_0^{A,B}$. С точностью до константы

$$-\frac{1}{2}(k_1 k'_1 + (n-1)k_n k'_n)$$

он имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \hat{H}_0^{A,B} &= \sqrt{k_1 - k_n} \sqrt{k'_1 - k'_n} \sum_{j=2}^n (\hat{a}_j^- \hat{b}_j^+ + \hat{b}_j^- \hat{a}_j^+) + \\ &+ \frac{1}{2} \left[c_0 \sum_{j=2}^n \hat{b}_j^- \hat{b}_j^+ + (c_0 - 1) \sum_{j=2}^n \hat{a}_j^- \hat{a}_j^+ \right]^2 + \frac{n-2}{2} \sum_{j=2}^n \hat{a}_j^- \hat{a}_j^+ + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=2}^n \hat{a}_j^- \hat{a}_j^+ \right)^2. \end{aligned}$$

Окончательный вид “физического” гамильтониана определяется формулой

$$\begin{aligned} \hat{H}^{A,B} &= \sum_{i=1}^n w_i \hat{M}_{ii}^{A,B} - \hat{H}_0^{A,B} = \\ &= \sum_{j=2}^n \left(w_j - \frac{n-2}{2} - w_1 \right) \hat{a}_j^- \hat{a}_j^+ + \sum_{j=2}^n (w_j - w_1) \hat{b}_j^- \hat{b}_j^+ - \\ &- \sqrt{k_1 - k_n} \sqrt{k'_1 - k'_n} \sum_{j=2}^n (\hat{a}_j^- \hat{b}_j^+ + \hat{b}_j^- \hat{a}_j^+) - \\ &- \frac{1}{2} \left(c_0 \sum_{j=2}^n \hat{b}_j^- \hat{b}_j^+ - (c_0 - 1) \sum_{j=2}^n \hat{a}_j^- \hat{a}_j^+ \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\sum_{j=2}^n \hat{a}_j^- \hat{a}_j^+ \right)^2. \end{aligned}$$

Первые два члена в этом гамильтониане кинетические. Третий член типа “перескока” описывает взаимодействие двух групп векторных бозонов. Последние два члена – это векторная нелинейность типа Керра. В случае $c_0 = 1$ они обретают простую симметрическую форму.

3.4. n -уровневая модель Джейнса–Каммингса–Дике с $(n - 1)$ -модами.

Рассмотрим интегрируемые модели, содержащие спинные и бозонные степени свободы. Для этого введем оператор Лакса, являющийся суммой спинного оператора Лакса $\hat{L}^S(v)$ и бозонных операторов Лакса $\hat{L}^B(v)$ и $\hat{L}^A(v)$ (что возможно благодаря утверждению 1). Мы исследуем каждый из этих случаев отдельно.

3.4.1. Случай 1. Рассмотрим следующий оператор Лакса:

$$\hat{L}^{S,B}(v) = \hat{L}^S(v) + \hat{L}^B(v),$$

где операторы $\hat{L}^S(v)$, $\hat{L}^B(v)$ определяются формулами (16), (19). Для этого оператора Лакса дополнительные интегралы, удовлетворяющие свойству (14), определяются выражением

$$\hat{M}_{ij}^{S,B} = \hat{M}_{ij}^S + \hat{M}_{ij}^B, \quad i, j \in \overline{2, n} \cup i, j = 1,$$

в котором операторы $\hat{M}_{ij}^S$ и $\hat{M}_{ij}^B$ задаются формулами (18), (21).

Генерирующая функция второго порядка имеет вид

$$\hat{\tau}_n^{S,B}(u) = \sum_{k=0}^2 \hat{H}_{2k}^{S,B} u^{2k} + \sum_{l=1}^N \frac{\nu_l^2}{\nu_l^2 - u^2} \hat{H}_{\nu_l}^{S,B} + \sum_{l=1}^N \frac{\nu_l^4}{(\nu_l^2 - u^2)^2} \hat{C}_l,$$

где $\hat{C}_l = \sum_{i,j=1}^n S_{ij}^{(l)} S_{ji}^{(l)}$ – оператор Казимира l -й копии алгебры Ли $gl(n)$, $\hat{H}_{2k}^{S,B}$ и $\hat{H}_{\nu_l}^{S,B}$ – нетривиальные интегралы. Рассмотрим интегралы $\hat{H}_{\nu_l}^{S,B}$. Прямым вычислением получаем, что

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\nu_l}^{S,B} &= \hat{H}_{\nu_l}^S + \nu_l \sqrt{k_1 - k_n} \sum_{j=2}^n (\hat{b}_j^+ \hat{S}_{j1}^{(l)} + \hat{b}_j^- \hat{S}_{1j}^{(l)}) - \\ &- c_0 \left(\sum_{j=2}^n \hat{b}_j^- \hat{b}_j^+ \right) \hat{S}_{11}^{(l)} + \nu_l^2 \left(k_1 \hat{S}_{11}^{(l)} + k_n \sum_{i=2}^n \hat{S}_{ii}^{(l)} \right). \end{aligned}$$

Окончательный вид “физического” гамильтониана определяется выражением

$$\begin{aligned} \hat{H}^{S,B} &= \sum_{i=1}^n w_i \hat{M}_{ii}^{S,B} + \sum_{l=1}^N \hat{H}_{\nu_l}^{S,B} = \sum_{j=2}^n (w_j - w_1) \hat{b}_j^- \hat{b}_j^+ + \\ &+ \sum_{l=1}^N \left((w_1 + c_1 + \nu_l^2 k_1) \hat{S}_{11}^{(l)} + \sum_{i=2}^n (w_i + c_n + \nu_l^2 k_n) \hat{S}_{ii}^{(l)} \right) + \\ &+ \sqrt{k_1 - k_n} \sum_{l=1}^N \nu_l \sum_{j=2}^n (\hat{b}_j^+ \hat{S}_{j1}^{(l)} + \hat{b}_j^- \hat{S}_{1j}^{(l)}) - c_0 \left(\sum_{j=2}^n \hat{b}_j^- \hat{b}_j^+ \right) \sum_{l=1}^N \hat{S}_{11}^{(l)} + \\ &+ \left(c_0 - \frac{1}{2} \right) \left(\sum_{l=1}^N \hat{S}_{11}^{(l)} \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^N \sum_{i,j=2}^n \hat{S}_{ij}^{(l)} \hat{S}_{ji}^{(k)}. \end{aligned}$$

Его можно интерпретировать следующим образом: первый член в нем есть энергия свободных мод электромагнитного поля, второй член – свободная энергия N атомов, третий член (наиболее важный) описывает взаимодействие между атомом и $(n-1)$ -модами поля в так называемой Λ -конфигурации с неоднородными (зависящими от атома) константами взаимодействия $g_l = \sqrt{k_1 - k_n} \nu_l$. Четвертый член описывает нелинейность типа Штарка. Он отсутствует в частном случае $c_0 = 0$. Наконец, последние два члена соответствуют межатомному взаимодействию.

3.4.2. *Случай 2.* Рассмотрим спин-бозонный оператор Лакса

$$\hat{L}^{S,A}(v) = \hat{L}^S(v) + \hat{L}^A(v),$$

где операторы $\hat{L}^S(v)$, $\hat{L}^A(v)$ определены формулами (16), (20). Для этого оператора Лакса дополнительные интегралы, удовлетворяющие свойству (14), имеют вид

$$\hat{M}_{ij}^{S,A} = \hat{M}_{ij}^S + \hat{M}_{ij}^A, \quad i, j \in \overline{2, n} \cup i, j = 1,$$

где операторы $\hat{M}_{ij}^S$ и $\hat{M}_{ij}^A$ задаются равенствами (18), (22).

Генерирующая функция второго порядка определяется выражением

$$\hat{\tau}_n^{S,A}(u) = \sum_{k=0}^2 \hat{H}_{2k}^{S,A} u^{-2k} + \sum_{l=1}^N \frac{\nu_l^2}{\nu_l^2 - u^2} \hat{H}_{\nu_l}^{S,A} + \sum_{l=1}^N \frac{\nu_l^4}{(\nu_l^2 - u^2)^2} \hat{C}_l,$$

в котором $\hat{C}_l = \sum_{i,j=1}^n S_{ij}^{(l)} S_{ji}^{(l)}$ – оператор Казимира l -й копии алгебры Ли $gl(n)$, $\hat{H}_{2k}^{S,A}$ и $\hat{H}_{\nu_l}^{S,A}$ – нетривиальные интегралы. Вычислим явно интегралы $\hat{H}_{\nu_l}^{S,A}$. После прямого подсчета получаем, что

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\nu_l}^{S,A} &= \hat{H}_{\nu_l}^S + \nu_l^{-1} \sqrt{k'_1 - k'_n} \sum_{j=2}^n (\hat{a}_j^+ \hat{S}_{j1}^{(l)} + \hat{a}_j^- \hat{S}_{1j}^{(l)}) + (1 - c_0) \left(\sum_{j=2}^n \hat{a}_j^- \hat{a}_j^+ \right) \hat{S}_{11}^{(l)} - \\ &- \sum_{i,j=2}^n \hat{a}_i^- \hat{a}_j^+ \hat{S}_{ji}^{(l)} - \nu_l^{-2} \left(k'_1 \hat{S}_{11}^{(l)} + k'_n \sum_{i=2}^n \hat{S}_{ii}^{(l)} \right). \end{aligned}$$

Окончательный вид “физического” гамильтониана определяется формулой

$$\hat{H}^{S,A} = \sum_{i=1}^n w_i \hat{M}_{ii}^{S,A} + \sum_{l=1}^N \hat{H}_{\nu_l}^{S,A} + \frac{1}{2} \left((\hat{M}_{11}^{S,A})^2 + \sum_{i,j=2}^n \hat{M}_{ij}^{S,A} \hat{M}_{ji}^{S,A} \right),$$

где мы использовали тот факт, что в алгебру коммутирующих интегралов можно также включить квадратичный оператор Казимира

$$\hat{C}_M^{S,A} = (\hat{M}_{11}^{S,A})^2 + \sum_{i,j=2}^n \hat{M}_{ij}^{S,A} \hat{M}_{ji}^{S,A},$$

принадлежащий алгебре симметрии $gl(1) \oplus gl(n-1)$.

В результате мы получаем следующий гамильтониан:

$$\begin{aligned} \hat{H}^{S,A} = & \sum_{j=2}^n \left(w_j - w_1 - \frac{n-2}{2} \right) \hat{a}_j^- \hat{a}_j^+ + \sum_{l=1}^N \left((w_1 + c_1 - \nu_l^{-2} k'_1) \hat{S}_{11}^{(l)} + \right. \\ & + \sum_{i=2}^n (w_i + c_n - \nu_l^{-2} k'_n) \hat{S}_{ii}^{(l)} \Big) + \sqrt{k'_1 - k'_n} \sum_{l=1}^N \nu_l^{-1} \sum_{j=2}^n \left(\hat{a}_j^+ \hat{S}_{j1}^{(l)} + \hat{a}_j^- \hat{S}_{1j}^{(l)} \right) + \\ & + \left(\sum_{j=2}^n \hat{a}_j^- \hat{a}_j^+ \right)^2 + c_0 \left(\left[\sum_{l=1}^N \hat{S}_{11}^{(l)} \right]^2 - \sum_{j=2}^n \hat{a}_j^- \hat{a}_j^+ \sum_{k=1}^N \hat{S}_{11}^{(k)} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Физическая интерпретация гамильтониана $\hat{H}^{S,A}$ такова: первый член – это энергия $n - 1$ свободных мод электромагнитного поля, второй член соответствует свободной энергии N атомов. Третий (наиболее важный) член описывает взаимодействие между атомом и $(n - 1)$ -модами поля в Λ -конфигурации с неоднородными (зависящими от атома) постоянными взаимодействия $g_l = \sqrt{k'_1 - k'_n} \nu_l^{-1}$. Четвертый член описывает нелинейность типа Керра. Наконец, два последних слагаемых соответствуют межатомному взаимодействию и нелинейности Штарка. Они отсутствуют в частном случае $c_0 = 0$, когда формула (23) для гамильтониана имеет наиболее простой вид.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Можно рассмотреть также интегрируемую спин-бозонную систему, отвечающую оператору Лакса $\hat{L}^{S,A,B}(v) = \hat{L}^S(v) + \hat{L}^A(v) + \hat{L}^B(v)$. Она определяет взаимодействие векторного димера Бозе–Хаббарда с N спинами (в статье [25] рассмотрен пример $n = 2$). Физическая важность такой модели не очевидна. Поэтому мы не исследуем ее в настоящей работе.

4. ДИАГОНАЛИЗАЦИЯ

В этом разделе мы диагонализуем построенные в предыдущих разделах генерирующие функции квантовых гамильтонианов и дополнительные коммутирующие интегралы, связанные с алгеброй симметрий r -матрицы. Начнем с общей ситуации.

4.1. Диагонализация: общий случай. Пусть V – пространство неприводимого представления алгебры операторов Лакса. Предположим, что существует вакуумный вектор $\Omega \in V$ такой, что

$$\hat{L}_{ii}(u)\Omega = \Lambda_{ii}(u)\Omega, \quad \hat{L}_{kl}(u)\Omega = 0, \quad i, k, l \in \overline{1, n}, \quad k > l, \quad (24)$$

и все пространство V порождено действием операторов $\hat{L}_{kl}(u)$, $k < l$, на вектор Ω .

4.1.1. Иерархические векторы Бете. Опишем явно так называемые иерархические или гнездовые векторы Бете, которые используются для диагонализации квантовых интегралов. В нашей конструкции мы существенно эксплуатируем результаты статей [18], [29], которые обобщают результаты работы [30].

Рассмотрим вместо пространства представления V алгебры операторов Лакса вспомогательное пространство

$$V^{M_1, M_2, \dots, M_k} \equiv V \otimes (\mathbb{C}^n)^{\otimes M_1} \otimes (\mathbb{C}^n)^{\otimes M_2} \otimes \dots \otimes (\mathbb{C}^n)^{\otimes M_k},$$

где $k \in \overline{1, n-1}$ и $M_k \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим также новый $gl(n)$ -значный оператор Лакса $\hat{L}^{(k)}(u)$, действующий в пространстве $V^{M_1, M_2, \dots, M_k}$, со следующими компонентами:

$$\hat{L}_{ij}^{(k)}(u) = \hat{L}_{ij}^{(k-1)}(u) + \sum_{m=1}^{M_k} r_{ij}(v_m^{(k)}, u) X_{ji}^{(k,m)} = \hat{L}_{ij}(u) + \sum_{l=1}^k \sum_{m=1}^{M_l} r_{ij}(v_m^{(l)}, u) X_{ji}^{(l,m)},$$

где $r_{ij}(v_m^{(l)}, u)$ – компоненты r -матрицы, $v_m^{(l)}$ – дополнительные комплексные параметры и $X_{ji}^{(l,m)}$ – линейный оператор, действующий как матрица X_{ji} в m -м сомножителе $\mathbb{C}^n$ множителя $(\mathbb{C}^n)^{\otimes M_l}$ тензорного произведения и как единичный оператор в других множителях тензорного произведения $V^{M_1, M_2, \dots, M_k}$.

Рассмотрим кроме того матрицы с операторными коэффициентами, действующими в пространстве $V^{M_1, M_2, \dots, M_{k-1}}$:

$$\hat{B}^{(k)}(u) = \sum_{j=k+1}^n \hat{L}_{kj}^{(k-1)}(u) X_{kj},$$

где $k \in \overline{1, n-1}$ и $\hat{L}_{1j}^{(0)}(u) \equiv \hat{L}_{1j}(u)$.

Поднимем эти операторы в тензорное пространство $V^{M_1, M_2, \dots, M_{n-1}}$. Введем тензорные обозначения $\hat{B}_m^{(k)}(v_m) \equiv 1_n \otimes \dots \otimes \hat{B}^{(k)}(v_m) \otimes \dots \otimes 1_n$, где $\hat{B}^{(k)}(v_m)$ действует как матрица X_{kj} в m -м из M_k пространств $\mathbb{C}^n$ множителя $(\mathbb{C}^n)^{\otimes M_k}$ тензорного произведения $V \otimes (\mathbb{C}^n)^{\otimes M_1} \otimes (\mathbb{C}^n)^{M_2} \otimes \dots \otimes (\mathbb{C}^n)^{M_{n-1}}$, является единичной матрицей в других пространствах $\mathbb{C}^n$ этого множителя, компонентой $\hat{L}_{kj}^{(k-1)}(u)$ в пространстве $V^{M_1, M_2, \dots, M_{k-1}}$ и единичной матрицей в пространствах $\mathbb{C}^n$ других множителей $(\mathbb{C}^n)^{\otimes M_l}$, $l > k$.

Иерархические векторы Бете строятся следующим образом [18], [29]:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(v_{m_1}^{(1)}, \dots, v_{m_{n-1}}^{(n-1)}) &= \\ &= \prod_{m_1=1}^{M_1} \hat{B}_{m_1}^{(1)}(v_{m_1}^{(1)}) \prod_{m_2=1}^{M_2} \hat{B}_{m_2}^{(2)}(v_{m_2}^{(2)}) \dots \prod_{m_{n-1}=1}^{M_{n-1}} \hat{B}_{m_{n-1}}^{(n-1)}(v_{m_{n-1}}^{(n-1)}) \Omega^{M_1, \dots, M_{n-1}}, \end{aligned}$$

где $\Omega^{M_1, \dots, M_{n-1}}$ – вакуумный вектор в пространстве $V^{M_1, \dots, M_{n-1}}$, задающийся формулой

$$\Omega^{M_1, \dots, M_{n-1}} = \Omega \otimes (e_2)^{\otimes M_1} \otimes (e_3)^{\otimes M_2} \otimes \dots \otimes (e_n)^{\otimes M_{n-1}}. \quad (25)$$

Здесь e_i – базисные векторы пространства $\mathbb{C}^n$ с компонентами $(e_i)_a = \delta_{ia}$, $a \in \overline{1, n}$.

Построенные векторы Бете совпадают с собственными векторами квантовых гамильтонианов после наложения дополнительных условий (уравнений Бете) на быстроты $v_{m_k}^{(k)}$.

4.1.2. Спектр генерирующей функции и дополнительных интегралов. Диагонализуем теперь операторы $\hat{\tau}_n(u)$, $\hat{t}_n(u)$, $\hat{M}_{ii}(u)$, $i \in \overline{1, n}$, в пространстве представления V . Имеет место следующая теорема (следствие общей теоремы статьи [29]).

ТЕОРЕМА 2. Пусть r -матрица $r(u, v)$ задается формулой (15). Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Спектр генерирующей функции $\hat{\tau}_n(u)$ в пространстве V имеет вид

$$\begin{aligned} 2\Lambda_n(u, \{v_j^{(k)}\}) = & \sum_{k=1}^n \left(\Lambda_{kk}(u) + \sum_{j=1}^{M_{k-1}} \frac{u^2}{(v_j^{(k-1)})^2 - u^2} - \sum_{j=1}^{M_k} \frac{u^2}{(v_j^{(k)})^2 - u^2} - c_0 M_1 \delta_{k1} \right)^2 + \\ & + u^2 \partial_{u^2} \left(n\Lambda_{11}(u) - \sum_{i=1}^n \Lambda_{ii}(u) \right) + \sum_{k=2}^n (u^2 \partial_{u^2} - 1) \left((n-k)\Lambda_{kk}(u) - \right. \\ & - \sum_{i=k+1}^n \Lambda_{ii}(u) + (n-k) \sum_{j=1}^{M_{k-1}} \frac{u^2}{(v_j^{(k-1)})^2 - u^2} \left. \right) - \\ & - n \sum_{j=1}^{M_1} \frac{(v_j^{(1)})^2 u^2}{((v_j^{(1)})^2 - u^2)^2} - \sum_{k=2}^n (n-k+1) \sum_{j=1}^{M_k} \frac{u^4}{((v_j^{(k)})^2 - u^2)^2}, \end{aligned} \quad (26)$$

где $M_0 = M_n = 0$, M_k , $k \in \overline{1, n-1}$, – неотрицательные целые числа и быстро-
ты $v_i^{(k)}$, $k \in \overline{1, n-1}$, $i \in \overline{1, M_k}$, удовлетворяют следующим уравнениям Бете:

$$\Lambda_{11}(v_i^{(1)}) - \Lambda_{22}(v_i^{(1)}) + \frac{n}{2} - c_0 M_1 = \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{M_1} \frac{2(v_i^{(1)})^2}{(v_j^{(1)})^2 - (v_i^{(1)})^2} - \sum_{j=1}^{M_2} \frac{(v_i^{(1)})^2}{(v_j^{(2)})^2 - (v_i^{(1)})^2}, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{k+1k+1}(v_i^{(k+1)}) - \Lambda_{k+2k+2}(v_i^{(k+1)}) = & \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{M_{k+1}} \frac{2(v_i^{(k+1)})^2}{(v_j^{(k+1)})^2 - (v_i^{(k+1)})^2} - \\ & - \sum_{j=1}^{M_k} \frac{(v_i^{(k+1)})^2}{(v_j^{(k)})^2 - (v_i^{(k+1)})^2} - \sum_{j=1}^{M_{k+2}} \frac{(v_i^{(k+1)})^2}{(v_j^{(k+2)})^2 - (v_i^{(k+1)})^2}, \quad k \in \overline{1, n-3}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{n-1n-1}(v_i^{(n-1)}) - \Lambda_{nn}(v_i^{(n-1)}) = & \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{M_{n-1}} \frac{2(v_i^{(n-1)})^2}{(v_j^{(n-1)})^2 - (v_i^{(n-1)})^2} - \\ & - \sum_{j=1}^{M_{n-2}} \frac{(v_i^{(n-1)})^2}{(v_j^{(n-2)})^2 - (v_i^{(n-1)})^2}. \end{aligned} \quad (29)$$

2. Спектр генерирующей функции линейных интегралов $\hat{t}_n(u)$ в пространстве V имеет вид

$$\lambda_n(u) = \sum_{k=1}^n \Lambda_{kk}(u) - c_0 M_1.$$

3. Собственные значения дополнительных линейных интегралов $\hat{M}_{ii}$, $i \in \overline{1, n}$, на векторах Бете определяются выражениями

$$m_i(M_1, \dots, M_{n-1}) = m_{ii} + M_{i-1} - M_i,$$

где m_{ii} – собственное значение оператора $\hat{M}_{ii}$ на вакуумном векторе Ω :

$$\hat{M}_{ii}\Omega = m_{ii}\Omega.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Собственные векторы, соответствующие собственным значениям $\Lambda_n(u, \{v_j^{(k)}\})$, – это иерархические векторы Бете $V(v_{m_1}^{(1)}, \dots, v_{m_{n-1}}^{(n-1)})$. Функции $\hat{\tau}_n(u)$, $\hat{t}_n(u)$ и интегралы $\hat{M}_{ii}$ рассматриваются как поднятые в тензорное произведение $V^{M_1, M_2, \dots, M_k}$ следующим способом:

$$\begin{aligned}\hat{\tau}_n(u) &\mapsto \hat{\tau}_n(u) 1_n \otimes \dots \otimes 1_n \otimes \dots \otimes 1_n, \\ \hat{t}_n(u) &\mapsto \hat{t}_n(u) 1_n \otimes \dots \otimes 1_n \otimes \dots \otimes 1_n, \\ \hat{M}_{ii} &\mapsto \hat{M}_{ii} 1_n \otimes \dots \otimes 1_n \otimes \dots \otimes 1_n.\end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Заметим, что среди уравнений (27)–(29) есть только один набор уравнений, а именно уравнение (27), который существенно отличается от соответствующего набора в случае рациональных r -матриц [17]. Заметим также, что в случае $c_0 = 0$ функция $\hat{t}_n(u)$ является функцией Казимира. Этот факт отражен в явном виде ее спектра.

4.2. Случай обобщенных моделей Годена. Применим изложенные выше общие результаты к моделям типа Годена. Для этой цели достаточно определить собственные значения $\Lambda_{ii}(u)$, $i \in \overline{1, n}$, что эквивалентно определению пространства представления V . В случае моделей типа Годена алгебра Лакса совпадает с прямой суммой N копий алгебры Ли $gl(n)$. Пространство неприводимого представления алгебр Ли $gl(n)^{\oplus N}$ имеет вид $V = (\otimes_{l=1}^N V^{\lambda^{(l)}})$, где $V^{\lambda^{(l)}}$ – пространство неприводимого представления l -й копии алгебры $gl(n)$, нумерованное старшим весом $\lambda^{(l)} = (\lambda_1^{(l)}, \dots, \lambda_n^{(l)})$, $l \in \overline{1, N}$. В пространстве представления V существует вектор старшего веса Ω_S такой, что

$$\hat{S}_{ii}^{(l)} \Omega_S = \lambda_i^{(l)} \Omega_S, \quad \hat{S}_{ij}^{(l)} \Omega_S = 0, \quad i, j \in \overline{1, n}, \quad i < j, l \in \overline{1, N}.$$

Используя определение оператора Лакса, легко видеть, что Ω_S совпадает с вакуумным вектором для рассматриваемого представления алгебры Лакса. Отсюда следует, что функции $\Lambda_{ii}(u)$ для моделей типа Годена во внешнем магнитном поле имеют следующий вид:

$$\Lambda_{ii}(u) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{l=1}^N \lambda_i^{(l)} \left\{ \frac{u^2}{\nu_l^2 - u^2} + c_0 \delta_{i,1} \right\} + c_1 \delta_{i,1} + c_n (1 - \delta_{i,1}) \right).$$

Мы получаем также как следствие теоремы 2, что спектр дополнительных интегралов $\hat{M}_{ii}^S$, $i \in \overline{1, n}$, на иерархических векторах Бете записывается следующим образом:

$$m_i^S(M_1, \dots, M_{n-1}) = \sum_{m=1}^N \lambda_i^{(m)} + M_{i-1} - M_i.$$

Спектр гамильтонианов $\hat{H}_{\nu_l}^S$ типа Годена во внешнем магнитном поле имеет вид

$$\begin{aligned}h_l^S &= h_l^{S,0} - \sum_{j=1}^{M_1} \lambda_1^{(l)} \left(\frac{\nu_l^2}{(v_j^{(1)})^2 - \nu_l^2} + c_0 \right) + \\ &+ \sum_{k=2}^n \lambda_k^{(l)} \left(\sum_{j=1}^{M_{k-1}} \frac{\nu_l^2}{(v_j^{(k-1)})^2 - \nu_l^2} - \sum_{j=1}^{M_k} \frac{\nu_l^2}{(v_j^{(k)})^2 - \nu_l^2} \right),\end{aligned} \quad (30)$$

где $h_l^{S,0}$ – собственное значение этих гамильтонианов на вакуумном векторе Ω_S :

$$\begin{aligned} h_l^{S,0} = & \sum_{\substack{m=1, \\ m \neq l}}^N \left(\frac{\nu_l^2}{\nu_m^2 - \nu_l^2} + c_0 \right) \lambda_1^{(m)} \lambda_1^{(l)} + c_0 (\lambda_1^{(l)})^2 + \sum_{k=2}^n \sum_{\substack{m=1, \\ m \neq l}}^N \frac{\lambda_k^{(m)} \lambda_k^{(l)} \nu_l^2}{\nu_m^2 - \nu_l^2} + \\ & + \frac{1}{2} \left((n-1) \lambda_1^{(l)} - \sum_{k=2}^n \lambda_k^{(l)} \right) - \sum_{i=1}^n (\lambda_i^{(l)})^2 - \sum_{i=1}^n (n-2i+1) \lambda_i^{(l)} + \\ & + c_1 \lambda_1^{(l)} + c_n \sum_{k=2}^n \lambda_k^{(l)}, \end{aligned}$$

и быстроты $v_i^{(k)}$, $k \in \overline{1, n-1}$, $i \in \overline{1, M_k}$, удовлетворяют следующим уравнениям Бете:

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^N (\lambda_1^{(l)} - \lambda_2^{(l)}) \frac{(v_i^{(1)})^2}{\nu_l^2 - (v_i^{(1)})^2} + \left(\frac{1}{2} n - c_0 M_1 + c_0 \sum_{m=1}^N \lambda_1^{(m)} \right) + (c_1 - c_n) = \\ & = \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{M_1} \frac{2(v_i^{(1)})^2}{(v_j^{(1)})^2 - (v_i^{(1)})^2} - \sum_{j=1}^{M_2} \frac{(v_i^{(1)})^2}{(v_j^{(2)})^2 - (v_i^{(1)})^2}, \\ & \sum_{l=1}^N (\lambda_{k+1}^{(l)} - \lambda_{k+2}^{(l)}) \frac{(v_i^{(k+1)})^2}{\nu_l^2 - (v_i^{(k+1)})^2} = \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{M_{k+1}} \frac{2(v_i^{(k+1)})^2}{(v_j^{(k+1)})^2 - (v_i^{(k+1)})^2} - \\ & - \sum_{j=1}^{M_k} \frac{(v_i^{(k+1)})^2}{(v_j^{(k)})^2 - (v_i^{(k+1)})^2} - \sum_{j=1}^{M_{k+2}} \frac{(v_i^{(k+1)})^2}{(v_j^{(k+2)})^2 - (v_i^{(k+1)})^2}, \quad k \in \overline{1, n-3}, \\ & \sum_{l=1}^N (\lambda_{n-1}^{(l)} - \lambda_n^{(l)}) \frac{(v_i^{(n-1)})^2}{\nu_l^2 - (v_i^{(n-1)})^2} = \\ & = \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{M_{n-1}} \frac{2(v_i^{(n-1)})^2}{(v_j^{(n-1)})^2 - (v_i^{(n-1)})^2} - \sum_{j=1}^{M_{n-2}} \frac{(v_i^{(n-1)})^2}{(v_j^{(n-2)})^2 - (v_i^{(n-1)})^2}. \end{aligned}$$

4.3. Случай векторной модели димера Бозе–Хаббарда. Применим теперь изложенные выше общие результаты к векторному димеру Бозе–Хаббарда. Для этой цели определим собственные значения $\Lambda_{ii}(u)$, $i \in \overline{1, n}$, и пространство представления V . В случае векторной модели димеров Бозе–Хаббарда алгебра Лакса совпадает с прямой суммой двух копий алгебры Гейзенберга, каждая из которых имеет размерность $2n-1$. Пространство неприводимого представления данной алгебры Лакса имеет вид $V = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, где $\mathcal{H}_A$, $\mathcal{H}_B$ – фоковские пространства, отвечающие алгебре Гейзенберга бозонов типа A и B . В пространстве представления V существует вакуумный вектор Ω_{AB} такой, что

$$\hat{a}_i^+ \Omega_{AB} = 0, \quad \hat{b}_j^+ \Omega_{AB} = 0, \quad i, j \in \overline{2, n}.$$

Он совпадает с тензорным произведением вакуумных векторов для бозонов типа A и B : $\Omega_{AB} = \Omega_A \otimes \Omega_B$. Из самого определения оператора Лакса этой модели легко

видеть, что Ω_{AB} совпадает с вакуумным вектором соответствующего представления алгебры Лакса. Используя этот вакуумный вектор, мы получаем, что функции $\Lambda_{ii}(u)$ для моделей типа Бозе–Хаббарда имеют следующий явный вид:

$$\Lambda_{ii}(u) = (k_1 \delta_{i,1} + k_n (1 - \delta_{i,1})) u^2 - (k'_1 \delta_{i,1} + k'_n (1 - \delta_{i,1})) u^{-2}, \quad i \in \overline{1, n}.$$

Зная явную форму функции $\Lambda_{ii}(u)$, мы имеем как следствие теоремы 2, что спектр дополнительных интегралов $\hat{M}_{ii}^{AB}$, $i \in \overline{1, n}$, на иерархических векторах Бете определяется выражением

$$m_i^{AB}(M_1, \dots, M_{n-1}) = M_{i-1} - M_i.$$

Спектр единственного не зависящего от $\hat{M}_{ii}^{AB}$ квадратичного интеграла $\hat{H}_0^{AB}$ дается формулой

$$h_0^{AB} = (k_n - k_1) \sum_{j=1}^{M_1} (v_j^{(1)})^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (M_k - M_{k-1})^2 - \sum_{k=1}^n M_k + \frac{n}{2} M_1 + c_0 \left(c_0 + \frac{1}{2} \right) M_1^2,$$

где $M_0 = M_n = 0$, M_k , $k \in \overline{1, n-1}$, – неотрицательные целые числа и быстроты $v_i^{(k)}$, $k \in \overline{1, n-1}$, $i \in \overline{1, M_k}$, удовлетворяют следующим уравнениям Бете:

$$\begin{aligned} & (k_1 - k_n)(v_i^{(1)})^2 - (k'_1 - k'_n)(v_i^{(1)})^{-2} + \frac{n}{2} - c_0 M_1 = \\ &= \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{M_1} \frac{2(v_i^{(1)})^2}{(v_j^{(1)})^2 - (v_i^{(1)})^2} - \sum_{j=1}^{M_2} \frac{(v_i^{(1)})^2}{(v_j^{(2)})^2 - (v_i^{(1)})^2}, \\ 0 &= \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{M_{k+1}} \frac{2(v_i^{(k+1)})^2}{(v_j^{(k+1)})^2 - (v_i^{(k+1)})^2} - \sum_{j=1}^{M_k} \frac{(v_i^{(k+1)})^2}{(v_j^{(k)})^2 - (v_i^{(k+1)})^2} - \\ & - \sum_{j=1}^{M_{k+2}} \frac{(v_i^{(k+1)})^2}{(v_j^{(k+2)})^2 - (v_i^{(k+1)})^2}, \quad k \in \overline{1, n-3}, \\ 0 &= \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{M_{n-1}} \frac{2(v_i^{(n-1)})^2}{(v_j^{(n-1)})^2 - (v_i^{(n-1)})^2} - \sum_{j=1}^{M_{n-2}} \frac{(v_i^{(n-1)})^2}{(v_j^{(n-2)})^2 - (v_i^{(n-1)})^2}. \end{aligned}$$

4.4. Случай обобщенных моделей Джейнса–Каммингса–Дике. Как было показано выше, с рассматриваемыми r -матрицами можно ассоциировать два типа обобщенных моделей Джейнса–Каммингса–Дике. Ниже мы приводим явные выражения для спектра их гамильтонианов.

4.4.1. Случай 1. Применим полученные в данной работе общие результаты к первому типу моделей Джейнса–Каммингса–Дике. С этой целью необходимо определить собственные значения $\Lambda_{ii}(u)$, $i \in \overline{1, n}$, что эквивалентно нахождению пространства представления V . В данном случае оно совпадает с тензорным произведением пространства $(\otimes_{l=1}^N V^{\lambda^{(l)}})$, где $V^{\lambda^{(l)}}$ – пространство неприводимого представления l -й копии алгебры $gl(n)$, пронумерованное старшим весом $\lambda^{(l)} = (\lambda_1^{(l)}, \dots, \lambda_n^{(l)})$, $l \in \overline{1, N}$,

и бозонного пространства Фока $\mathcal{H}_B$. Вектор старшего веса для представления этой алгебры имеет вид $\Omega_{SB} = \Omega_S \otimes \Omega_B$. Используя определение оператора Лакса, легко видеть, что Ω_{SB} совпадает с вакуумным вектором в пространстве представлений в соответствующей лаксовой алгебре. Используя определение вакуумного вектора и оператора Лакса, мы получаем, что функции $\Lambda_{ii}(u)$, $i \in \overline{1, n}$, для этого типа моделей Джейнса–Каммингса–Дике имеют следующий вид:

$$\Lambda_{ii}(u) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{l=1}^N \lambda_i^{(l)} \left[\frac{u^2}{\nu_l^2 - u^2} + c_0 \delta_{i,1} \right] + c_1 \delta_{i,1} + c_n (1 - \delta_{i,1}) + (k_1 \delta_{i,1} + k_n (1 - \delta_{i,1})) u^2 \right).$$

Применяя теорему 2, мы заключаем также, что спектр дополнительных интегралов имеет ту же форму, что и для моделей типа Годена:

$$m_i^{SB}(M_1, \dots, M_{n-1}) = \sum_{m=1}^N \lambda_i^{(m)} + M_{i-1} - M_i.$$

Спектр гамильтонианов $\hat{H}_{\nu_l}^{SB}$ дается тем же выражением, что и в случае моделей типа Годена:

$$\begin{aligned} h_l^{SB} = & h_l^{SB,0} - \sum_{j=1}^{M_1} \lambda_1^{(l)} \left(\frac{\nu_l^2}{(v_j^{(1)})^2 - \nu_l^2} + c_0 \right) + \\ & + \sum_{k=2}^n \lambda_k^{(l)} \left(\sum_{j=1}^{M_{k-1}} \frac{\nu_l^2}{(v_j^{(k-1)})^2 - \nu_l^2} - \sum_{j=1}^{M_k} \frac{\nu_l^2}{(v_j^{(k)})^2 - \nu_l^2} \right), \end{aligned} \quad (31)$$

где $h_l^{SB,0}$ – собственные значения этих гамильтонианов на вакуумном векторе Ω_{SB} :

$$\begin{aligned} h_l^{SB,0} = & \sum_{\substack{m=1, \\ m \neq l}}^N \left(\frac{\nu_l^2}{\nu_m^2 - \nu_l^2} + c_0 \right) \lambda_1^{(m)} \lambda_1^{(l)} + c_0 (\lambda_1^{(l)})^2 + \sum_{k=2}^n \sum_{\substack{m=1, \\ m \neq l}}^N \frac{\lambda_k^{(m)} \lambda_k^{(l)} \nu_l^2}{\nu_m^2 - \nu_l^2} + \\ & + \frac{1}{2} \left((n-1) \lambda_1^{(l)} - \sum_{s=2}^n \lambda_s^{(l)} \right) - \sum_{i=1}^n (\lambda_i^{(l)})^2 - \sum_{i=1}^n (n-2i+1) \lambda_i^{(l)} + \\ & + (c_1 + k_1 \nu_l^2) \lambda_1^{(l)} + (c_n + k_n \nu_l^2) \sum_{k=2}^n \lambda_k^{(l)}, \end{aligned}$$

а быстроты $v_i^{(k)}$, $k \in \overline{1, n-1}$, $i \in \overline{1, M_k}$, удовлетворяют уравнениям Бете

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^N (\lambda_1^{(l)} - \lambda_2^{(l)}) \frac{(v_i^{(1)})^2}{\nu_l^2 - (v_i^{(1)})^2} + \frac{1}{2} n - c_0 M_1 + c_0 \sum_{m=1}^N \lambda_1^{(m)} + c_1 - c_2 + (k_1 - k_n) (v_i^{(1)})^2 = \\ & = \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{M_1} \frac{2(v_i^{(1)})^2}{(v_j^{(1)})^2 - (v_i^{(1)})^2} - \sum_{j=1}^{M_2} \frac{(v_i^{(1)})^2}{(v_j^{(2)})^2 - (v_i^{(1)})^2}, \end{aligned}$$

$$\sum_{l=1}^N (\lambda_{k+1}^{(l)} - \lambda_{k+2}^{(l)}) \frac{(v_i^{(k+1)})^2}{\nu_l^2 - (v_i^{(k+1)})^2} = \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{M_{k+1}} \frac{2(v_i^{(k+1)})^2}{(v_j^{(k+1)})^2 - (v_i^{(k+1)})^2} - \\ - \sum_{j=1}^{M_k} \frac{(v_i^{(k+1)})^2}{(v_j^{(k)})^2 - (v_i^{(k+1)})^2} - \sum_{j=1}^{M_{k+2}} \frac{(v_i^{(k+1)})^2}{(v_j^{(k+2)})^2 - (v_i^{(k+1)})^2}, \quad k \in \overline{1, n-3},$$

$$\sum_{l=1}^N (\lambda_{n-1}^{(l)} - \lambda_n^{(l)}) \frac{(v_i^{(n-1)})^2}{\nu_l^2 - (v_i^{(n-1)})^2} = \\ = \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{M_{n-1}} \frac{2(v_i^{(n-1)})^2}{(v_j^{(n-1)})^2 - (v_i^{(n-1)})^2} - \sum_{j=1}^{M_{n-2}} \frac{(v_i^{(n-1)})^2}{(v_j^{(n-2)})^2 - (v_i^{(n-1)})^2}.$$

Спектр “физического” гамильтониана $\widehat{H}^{S,B}$ имеет вид

$$h^{S,B} = \sum_{i=1}^n w_i m_i^{S,B} + \sum_{l=1}^N h_l^{S,B}.$$

4.4.2. *Случай 2.* Применим теперь полученные в данной работе результаты ко второму типу моделей Джейнса–Каммингса–Дике. С этой целью определим собственные значения $\Lambda_{ii}(u)$, $i \in \overline{1, n}$, что эквивалентно заданию пространства представления V . В данном случае оно совпадает с тензорным произведением пространств $(\otimes_{l=1}^N V^{\lambda^{(l)}})$, где $V^{\lambda^{(l)}}$ – пространство неприводимого представления l -й копии алгебры $gl(n)$, пронумерованное старшим весом $\lambda^{(l)} = (\lambda_1^{(l)}, \dots, \lambda_n^{(l)})$, $l \in \overline{1, N}$, и бозонного пространства Фока $\mathcal{H}_A$. Вектор старшего веса для представления этой алгебры имеет вид $\Omega_{SA} = \Omega_S \otimes \Omega_A$. Используя определение оператора Лакса, легко видеть, что Ω_{SA} совпадает с вакуумным вектором в пространстве представлений соответствующей лаксовой алгебры. Используя определение вакуумного вектора и оператора Лакса, мы получаем, что функции $\Lambda_{ii}(u)$, $i \in \overline{1, n}$, для этого типа моделей Джейнса–Каммингса–Дике определяются выражением

$$\Lambda_{ii}(u) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{l=1}^N \lambda_i^{(l)} \left[\frac{u^2}{\nu_l^2 - u^2} + c_0 \delta_{i,1} \right] + c_1 \delta_{i,1} + c_n (1 - \delta_{i,1}) - (k'_1 \delta_{i,1} + k'_n (1 - \delta_{i,1})) u^{-2} \right).$$

Применяя теорему 2, мы снова получаем, что спектр дополнительных интегралов $\widehat{M}_{ii}^{S,A}$, $i \in \overline{1, n}$, имеет тот же вид, что и для моделей Годена:

$$m_i^{SA}(M_1, \dots, M_{n-1}) = \sum_{m=1}^N \lambda_i^{(m)} + M_{i-1} - M_i.$$

Спектр гамильтонианов $\widehat{H}_{\nu_l}^{SA}$ дается формально тем же выражением, что и в случае моделей типа Годена:

$$h_l^{SA} = h_l^{SA,0} - \sum_{j=1}^{M_1} \lambda_1^{(l)} \left(\frac{\nu_l^2}{(v_j^{(1)})^2 - \nu_l^2} + c_0 \right) + \\ + \sum_{k=2}^n \lambda_k^{(l)} \left(\sum_{j=1}^{M_{k-1}} \frac{\nu_l^2}{(v_j^{(k-1)})^2 - \nu_l^2} - \sum_{j=1}^{M_k} \frac{\nu_l^2}{(v_j^{(k)})^2 - \nu_l^2} \right), \quad (32)$$

где $h_l^{SA,0}$ – собственные значения этих гамильтонианов на вакуумном векторе Ω_{SA} :

$$\begin{aligned} h_l^{SA,0} = & \sum_{\substack{m=1, \\ m \neq l}}^N \left(\frac{\nu_l^2}{\nu_m^2 - \nu_l^2} + c_0 \right) \lambda_1^{(m)} \lambda_1^{(l)} + c_0 (\lambda_1^{(l)})^2 + \sum_{k=2}^n \sum_{\substack{m=1, \\ m \neq l}}^N \frac{\lambda_k^{(m)} \lambda_k^{(l)} \nu_l^2}{\nu_m^2 - \nu_l^2} + \\ & + \frac{1}{2} \left((n-1) \lambda_1^{(l)} - \sum_{s=2}^n \lambda_s^{(l)} \right) - \sum_{i=1}^n (\lambda_i^{(l)})^2 - \sum_{i=1}^n (n-2i+1) \lambda_i^{(l)} + \\ & + (c_1 - k'_1 \nu_l^{-2}) \lambda_1^{(l)} + (c_n - k'_n \nu_l^{-2}) \sum_{k=2}^n \lambda_k^{(l)}, \end{aligned}$$

а быстроты $v_i^{(k)}$, $k \in \overline{1, n-1}$, $i \in \overline{1, M_k}$, удовлетворяют уравнениям Бете

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^N (\lambda_1^{(l)} - \lambda_2^{(l)}) \frac{(v_i^{(1)})^2}{\nu_l^2 - (v_i^{(1)})^2} + \frac{1}{2} n - c_0 M_1 + c_0 \sum_{m=1}^N \lambda_1^{(m)} + c_1 - c_2 - (k'_1 - k'_n) (v_i^{(1)})^{-2} = \\ & = \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{M_1} \frac{2(v_i^{(1)})^2}{(v_j^{(1)})^2 - (v_i^{(1)})^2} - \sum_{j=1}^{M_2} \frac{(v_i^{(1)})^2}{(v_j^{(2)})^2 - (v_i^{(1)})^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^N (\lambda_{k+1}^{(l)} - \lambda_{k+2}^{(l)}) \frac{(v_i^{(k+1)})^2}{\nu_l^2 - (v_i^{(k+1)})^2} = \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{M_{k+1}} \frac{2(v_i^{(k+1)})^2}{(v_j^{(k+1)})^2 - (v_i^{(k+1)})^2} - \\ & - \sum_{j=1}^{M_k} \frac{(v_i^{(k+1)})^2}{(v_j^{(k)})^2 - (v_i^{(k+1)})^2} - \sum_{j=1}^{M_{k+2}} \frac{(v_i^{(k+1)})^2}{(v_j^{(k+2)})^2 - (v_i^{(k+1)})^2}, \quad k \in \overline{1, n-3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^N (\lambda_{n-1}^{(l)} - \lambda_n^{(l)}) \frac{(v_i^{(n-1)})^2}{\nu_l^2 - (v_i^{(n-1)})^2} = \\ & = \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{M_{n-1}} \frac{2(v_i^{(n-1)})^2}{(v_j^{(n-1)})^2 - (v_i^{(n-1)})^2} - \sum_{j=1}^{M_{n-2}} \frac{(v_i^{(n-1)})^2}{(v_j^{(n-2)})^2 - (v_i^{(n-1)})^2}. \end{aligned}$$

Для того чтобы получить спектр “физического” гамильтониана $\widehat{H}^{S,A}$, отметим, что построенные векторы Бете являются векторами старшего веса для представлений алгебры симметрии $gl(1) \oplus gl(n-1)$, порожденной операторами $\widehat{M}_{ij}^{S,A}$. Этот факт доказывается тем же способом, что и в случае рациональной r -матрицы. Доказательство базируется на явной форме векторов Бете и на формуле действия (14). Используя их, мы получаем, что собственные значения операторов $\widehat{C}_M^{S,A}$ на векторах Бете определяются равенством

$$c_M^{S,A} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{m=1}^N \lambda_i^{(m)} + M_{i-1} - M_i \right)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (n-2i) \left(\sum_{m=1}^N \lambda_{i+1}^{(m)} + M_i - M_{i+1} \right).$$

Спектр “физического” гамильтониана $\widehat{H}^{S,A}$ имеет вид

$$h^{S,A} = \sum_{i=1}^n w_i m_i^{S,A} + \sum_{l=1}^N h_l^{S,A} + \frac{1}{2} c_M^{S,A}.$$

5. ВЫВОДЫ

В настоящей работе мы рассмотрели квантовые интегрируемые модели, ассоциированные со скрученными и сдвинутыми рациональными r -матрицами. Мы показали, что среди получающихся таким образом моделей, кроме моделей Годена и моделей Годена во внешнем магнитном поле, существуют два типа n -уровневых моделей Джейнса–Каммингса–Дике и векторное обобщение моделей димера Бозе–Хаббарда. Мы диагонализировали гамильтонианы полученных моделей с помощью иерархического анзаца Бете.

Важной открытой проблемой остается построение решений предложенных уравнений Бете, которые необходимы для получения окончательных численных ответов, требующихся для применений в квантовой физике.

Список литературы

- [1] J. von Delft, D. C. Ralph, *Phys. Rep.*, **345**:2–3 (2001), 61–173, arXiv: cond-mat/0101019.
- [2] L. Amico, A. Di Lorenzo, A. Osterloh, *Phys. Rev. Lett.*, **86**:25 (2001), 5759–5762.
- [3] J. Links, H.-Q. Zhou, R. H. McKenzie, M. Gould, *J. Phys. A*, **36**:19 (2003), R63–R104.
- [4] J. Dukelsky, S. Pittel, G. Sierra, *Rev. Modern Phys.*, **76**:3 (2004), 643–662.
- [5] R. W. Richardson, N. Sherman, *Nucl. Phys.*, **52** (1964), 221–238; 253–268.
- [6] R. W. Richardson, *Phys. Rev.*, **144**:3 (1966), 874–883; **154**:4 (1967), 1007–1022.
- [7] J. Links, H.-Q. Zhou, M. D. Gould, R. H. McKenzie, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **35**:30 (2002), 6459–6469.
- [8] B. Errea, J. Dukelsky, G. Ortiz, *Phys. Rev. A*, **79**:5 (2009), 051603, 4 pp.
- [9] V. Z. Enol'skii, M. Salerno, N. A. Kostov, A. C. Scott, *Phys. Scr.*, **43**:3 (1991), 229–235.
- [10] J. Links, K. Hibberd, *SIGMA*, **2** (2006), 095, 8 pp.
- [11] E. A. Yuzbashyan, B. L. Altshuler, V. B. Kuznetsov, V. Z. Enolskii, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **38**:36 (2005), 7831–7849.
- [12] M. Bortz, J. Stolze, *Phys. Rev. B*, **76**:1 (2007), 014304, 7 pp.
- [13] M. Gaudin, *La fonction d'onde de Bethe*, Masson, Paris, 1983.
- [14] Е. К. Склянин, “Разделение переменных в модели Годена”, *Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. IX*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **164**, Наука, Л., 1987, 151–169.
- [15] B. Jurčo, *J. Math. Phys.*, **30**:8 (1989), 1739–1743.
- [16] O. Babelon, D. Talalaev, *J. Stat. Mech. Theory Exp.*, **6** (2007), P06013, 1 pp.
- [17] Т. Skrypnyk, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **41**:47 (2008), 475202, 21 pp.
- [18] Т. Skrypnyk, *J. Math. Phys.*, **50**:10 (2009), 103523, 25 pp.
- [19] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, М., 1986.
- [20] А. А. Белавин, В. Г. Дринфельд, *Функц. анализ и его прил.*, **16**:3 (1982), 1–29.
- [21] A. Stolin, *Commun. Math. Phys.*, **141**:3 (1991), 533–548.
- [22] Т. Skrypnyk, *J. Geom. Phys.*, **57**:1 (2006), 53–67.
- [23] Т. Skrypnyk, *J. Math. Phys.*, **48**:2 (2007), 023506, 14 pp.
- [24] Т. Skrypnyk, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **40**:44 (2007), 13337–13352.
- [25] Т. Skrypnyk, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **43**:20 (2010), 205205, 14 pp.
- [26] Т. Skrypnyk, *J. Stat. Mech.*, **2011**:10 (2011), P10009.
- [27] Т. Skrypnyk, *Nucl. Phys. B*, **856**:2 (2012), 552–576.
- [28] Т. Skrypnyk, *J. Geom. Phys.*, **60**:3 (2010), 491–500.
- [29] Т. Skrypnyk, *Nucl. Phys. B*, **891** (2015), 200–229.
- [30] B. Jurčo, *J. Math. Phys.*, **30**:6 (1989), 1289–1293.

- [31] C. N. Yang, *Phys. Rev. Lett.*, **19**:23 (1967), 1312–1315.
- [32] B. Sutherland, *Phys. Rev. B*, **12**:9 (1975), 3795–3805.
- [33] P. P. Kulish, N. Yu. Reshetikhin, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **16**:16 (1983), L591–L596.
- [34] J. M. Maillet, *Phys. Lett. B*, **167** (1986), 401.
- [35] O. Babelon, C.-M. Viallet, *Phys. Lett. B*, **237**:3–4 (1990), 411–416.
- [36] J. Avan, M. Talon, *Phys. Lett. B*, **241**:1 (1990), 77–82.
- [37] T. Skrypnyk, *J. Geom. Phys.*, **97** (2015), 133–155.
- [38] T. Skrypnyk, *J. Math. Phys.*, **56**:2 (2015), 023511, 37 pp.