Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Дж. Губбиотти, Д. Леви, К. Шимитерна, Линеаризуемость и ложные пары Лакса для нелинейных неавтономных квад-графовых уравнений, подчиняющихся условию согласованности при обходах вокруг кубической ячейки, *ТМФ*, 2016, том 189, номер 1, 69–83

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9079>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 07:34:30

© 2016 г. Дж. Губбиотти^{*†}, К. Шимитерна^{*†}, Д. Леви^{*†}

ЛИНЕАРИЗУЕМОСТЬ И ЛОЖНЫЕ ПАРЫ ЛАКСА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ КВАД-ГРАФОВЫХ УРАВНЕНИЙ, ПОДЧИНЯЮЩИХСЯ УСЛОВИЮ СОГЛАСОВАННОСТИ ПРИ ОБХОДАХ ВОКРУГ КУБИЧЕСКОЙ ЯЧЕЙКИ

Обсуждается линеаризация неавтономных нелинейных уравнений в частных разностях, попадающих в классификацию Болла уравнений на квад-графах, подчиняющихся условиям согласованности при обходах вокруг элементарного куба решетки. Показано, что пара Лакса таких уравнений оказывается ложной. Приводятся обобщенные симметрии этих уравнений, которые оказываются неавтономными и зависящими от произвольной функции зависимых переменных, заданных в двух точках решетки. Эти обобщенные симметрии задаются дифференциально-разностными уравнениями, допускающими в некоторых случаях специфические преобразования Беклунда.

Ключевые слова: уравнения в частных разностях, S -интегрируемость, преобразование Беклунда, ложные пары Лакса.

DOI: 10.4213/tmf9079

1. ВВЕДЕНИЕ

Симметрии и коммутирующие потоки лежат в основе теории интегрируемости. Преобразования Беклунда и нелинейные законы суперпозиции [1], [2] проложили дорогу к построению дискретизаций интегрируемых систем.

Работа Д. Леви и К. Шимитерна была частично поддержана грантом Italian Ministry of Education and Research, 2010 PRIN “Непрерывная и дискретная нелинейная интегрируемая эволюция: от волн на поверхности воды до симплектических отображений”. Работа Дж. Губбиотти и Д. Леви была поддержана грантом INFN IS-CSN4 “Математические методы нелинейной физики”.

^{*}Dipartimento di Matematica e Fisica, Università degli Studi Roma Tre, Roma, Italy

[†]Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Roma Tre, Roma, Italy.

E-mail: gubbiotti@mat.uniroma3.it, scimiterna@fis.uniroma3.it, decio.levi@roma3.infn.it

Рис. 1. Квад-граф.

Первая версия критерия интегрируемости, получившего название согласованности при обходе вокруг элементарного куба (критерий САС), содержится в работе Доливы и Сантини [3].

В последнее время с помощью критерия САС были получены многочисленные результаты, касающиеся классификации нелинейных разностных уравнений. Важность этого критерия обусловлена тем, что он обеспечивает существование преобразований Беклунда [4]–[7] и, следовательно, существование представления нулевой кривизны, или пары Лакса, которые, как хорошо известно [8], связаны как с линеаризуемыми, так и с интегрируемыми уравнениями.

Первая попытка построения классификации уравнений в частных разностях с помощью критерия САС была предпринята в работе [9] в предположении о том, что уравнения на всех гранях куба имеют один и тот же вид. В результате был получен класс дискретных уравнений, образуемых системами на квад-графах; базисными строительными блоками этих систем оказываются уравнения на четырехугольниках вида

$$A(x, x_1, x_2, x_{12}; \alpha_1, \alpha_2) = 0, \quad (1)$$

в которых четыре поля x, x_1, x_2 и $x_{12} \in \mathbb{C}$ соответствуют четырем вершинам четырехугольника (ниже в уравнении (3) эти поля обозначаются как x_1, x_2, x_4 и x_4 , а на решетке с индексами m и n – как $x_{m,n}, x_{m+1,n}, x_{m,n+1}$ и $x_{m+1,n+1}$), а параметры $\alpha_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2$, соответствуют ребрам четырехугольника ($\alpha_2 = \alpha_2(n), \alpha_1 = \alpha_1(m)$) (см. рис. 1). В приведенных выше обозначениях, если четырехугольник получается с помощью выбора двух независимых направлений 1, 2, исходящих из начальной вершины, которой ставится в соответствие поле x , то нижние индексы 1 и 2 обозначают поля в вершинах со сдвигами на α_1 и α_2 вдоль направлений 1 и 2, отсчитывая от начальной вершины, а нижний индекс 12 относится к полю, соответствующему последней, четвертой вершине четырехугольника. Кроме того, предполагается, что функция $A(x, x_1, x_2, x_{12}; \alpha_1, \alpha_2)$ аффинно линейна по каждому из своих аргументов (обладает свойством полилинейности) с коэффициентами, зависящими от двух параметров ребер и инвариантными относительно дискретно действующей группы D_4 симметрий квадрата:

$$\begin{aligned} A(x, x_1, x_2, x_{12}; \alpha_1, \alpha_2) &= \varepsilon A(x, x_2, x_1, x_{12}; \alpha_2, \alpha_1) = \\ &= \sigma A(x_1, x, x_{12}, x_2; \alpha_1, \alpha_2), \quad \varepsilon, \sigma = \pm 1. \end{aligned}$$

Эта упрощающая гипотеза представляет собой так называемое *свойство тетраэдра*, из которого следует, что при произвольных начальных значениях x, x_1, x_2 и x_3 функция $x_{123} \doteq x_{123}(x, x_1, x_2, x_3; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ не зависит от x . На трехмерной

Рис. 2. Уравнения куба.

решетке индексов m , n и p , на кубе, изображенном на рис. 2, приняты следующие обозначения: $x = x_{m,n,p}$, $x_1 = x_{m+1,n,p}$, $x_2 = x_{m,n+1,p}$ и $x_3 = x_{m,n,p+1}$. Тогда $x_{123} = x_{m+1,n+1,p+1}$. Уравнение решетки

$$A(x_{m,n,p}, x_{m+1,n,p}, x_{m,n+1,p}, x_{m+1,n+1,p}; \alpha_1(m), \alpha_2(n)) = 0$$

выполняется для каждого квадрата решетки индексов m и n и зависит параметрически от индекса p , а уравнение $\bar{A} = 0$ имеет ту же структуру относительно индексов m и n , что и уравнение $A = 0$, но при других значениях p , $p + 1$. Уравнение $B = 0$ определено на квадратах решетки индексов m и p и зависит параметрически от индекса n , а уравнение $\bar{B} = 0$ определено на квадратах решетки индексов n и p и параметрически зависит от индекса m . Результат классификации состоит в составлении набора двух списков уравнений (H и Q) для в общей сложности семи согласованных систем уравнений (с точностью до общего преобразования Мёбиуса переменных полей и точечных преобразований параметров ребер), представленных в работе [9]. Таким образом, на рис. 2, изображающем двумерную решетку, $\bar{A}$ задает копию уравнения A (т.е. одно из семи уравнений H и Q), а на гранях B и $\bar{B}$ устанавливаются соотношения между решением уравнения A и решениями уравнения $\bar{A}$, т.е. осуществляется автопреобразование Беклунда для уравнения A . При переходе в проективное пространство из автопреобразования Беклунда получается пара Лакса.

Теми же самыми авторами в работе [10] рассматривалась более общая перспектива развития задачи классификации. Там предполагалось, что на гранях A , B , C и $\bar{A}$, $\bar{B}$ и $\bar{C}$ куба согласованности могут задаваться априори различные квад-уравнения без предположения о наличии какой-либо D_4 -симметрии или свойства тетраэдра. Авторы указанной работы рассматривали наборы из шести (априори различных) квад-уравнений, ассоциированных с гранями трехмерного куба (см. рис. 2):

$$\begin{aligned} A(x, x_1, x_2, x_{12}; \alpha_1, \alpha_2) &= 0, & \bar{A}(x_3, x_{13}, x_{23}, x_{123}; \alpha_1, \alpha_2) &= 0, \\ B(x, x_2, x_3, x_{23}; \alpha_2, \alpha_3) &= 0, & \bar{B}(x_1, x_{12}, x_{13}, x_{123}; \alpha_2, \alpha_3) &= 0, \\ C(x, x_1, x_3, x_{13}; \alpha_1, \alpha_3) &= 0, & \bar{C}(x_2, x_{12}, x_{23}, x_{123}; \alpha_1, \alpha_3) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Такой набор из шести уравнений оказывается *трехмерно согласованным*, если при произвольных начальных данных x , x_1 , x_2 и x_3 три значения величины x_{123} , вычисленные с помощью уравнений $\bar{A} = 0$, $\bar{B} = 0$ и $\bar{C} = 0$, совпадают. В результате

авторы работы [10] воспроизвели уравнения Q -типа из работы [9] и привели некоторые новые примеры квад-уравнений типа H , которые оказались деформациями соответствующего уравнения, полученного в работе [9].

Болл [11]–[13] классифицировал все согласованные квад-уравнения, обладающие свойством тетраэдра, в отсутствие каких-либо дополнительных предположений. Его результаты были сформулированы в работе [13] в виде набора теорем, начиная с теоремы 3.9 и заканчивая теоремой 3.14, в которых перечислены все согласованные шестичленные конфигурации с точностью до преобразований из $(\text{Möb})^8$ – группы независимых преобразований Мёбиуса восьми полей в вершинах куба согласованности. Задавая для каждого из уравнений (1) соответствующие биквадраты

$$A^{i,j} \equiv A^{i,j}(x_i, x_j) = A_{,x_m} A_{,x_n} - A A_{,x_m x_n}, \quad (3)$$

где $\{m, n\}$ – дополнение к набору индексов $\{i, j\}$ в множестве $\{1, 2, 3, 4\}$, можно разбить все квад-уравнения на три несвязных семейства: уравнения Q -типа (без вырожденных биквадратов), уравнения H^4 -типа (с четырьмя вырожденными биквадратами) и уравнения H^6 -типа (все шесть биквадратов вырождены).

Следует отметить, что все классификационные результаты выполняются локально в том смысле, что все они относятся к отдельной квадратной ячейке или к отдельному кубу. Важная задача вложения этих результатов в двух- или трехмерную решетку отдельных уравнений квадратов или кубов с сохранением условия трехмерной согласованности уже обсуждалась в работе [10] с помощью концепции черно-белой (BW) решетки. Одним из путей решения этой задачи оказывается идея вложить уравнения (2) в $\mathbb{Z}^2$ -решетку, элементарная ячейка которой имеет размер выше единицы. В таком случае уравнение $Q = Q(x, x_1, x_2, x_{12}; \alpha_1, \alpha_2)$ продолжается на решетку, а уравнения решетки становятся интегрируемыми или линеаризуемыми. Для этого, следуя работе [11], отобразим квадрат симметрично относительно его правой и верхней сторон, а затем завершим построение двумерной решетки, снова отобразив одно из полученных таким образом уравнений симметрично относительно другой из выбранных выше сторон¹⁾. Эта процедура представлена в графическом виде на рис. 3, а на уровне квад-уравнений это отвечает построению трех уравнений, получаемых из уравнения $Q = Q(x, x_1, x_2, x_{12}; \alpha_1, \alpha_2)$ переворотом одного из участвующих в нем полей:

$$Q = Q(x, x_1, x_2, x_{12}, \alpha_1, \alpha_2) = 0, \quad (4a)$$

$$|Q = Q(x_1, x, x_{12}, x_2, \alpha_1, \alpha_2) = 0, \quad (4b)$$

$$\underline{Q} = Q(x_2, x_{12}, x, x_1, \alpha_1, \alpha_2) = 0, \quad (4c)$$

$$|\underline{Q} = Q(x_{12}, x_2, x_1, x, \alpha_1, \alpha_2) = 0. \quad (4d)$$

Замаскировав полную решетку $\mathbb{Z}^2$ такими уравнениями, получим уравнение в частных конечных разностях, которое можно исследовать с помощью известных методов. Поскольку априори $Q \neq |Q \neq \underline{Q} \neq |Q$, построенная таким образом решетка будет раскрашена в четыре цвета, т. е. получается обобщение BW-решетки [14], [15].

¹⁾ Отметим, что вне зависимости от выбора стороны квадрата результат последнего отражения оказывается одним и тем же.

Рис. 3. Четырехцветная решетка.

В случае, когда уравнение $Q = 0$ инвариантно относительно действия группы D_4 , получаем

$$Q = |Q = \underline{Q} = \overline{Q}, \quad (5)$$

откуда вытекает, что элементарная ячейка имеет единичный размер и имеет место классификация Адлера–Бобенко–Суриса. Когда

$$\begin{aligned} Q(x, x_1, x_2, x_{12}, \alpha_1, \alpha_2) &= \sigma Q(x, x_2, x_1, x_{12}, \alpha_2, \alpha_1) = \\ &= \varepsilon Q(x_{12}, x_1, x_2, x, \alpha_2, \alpha_1), \quad \sigma, \varepsilon \in \{\pm 1\}, \end{aligned} \quad (6)$$

т. е.

$$Q = |Q, \quad \underline{Q} = |Q, \quad (7)$$

уравнение обладает *ромбической симметрией*, а если

$$Q(x, x_1, x_2, x_{12}, \alpha_1, \alpha_2) = Q(x_1, x, x_{12}, x_2, \alpha_1, \alpha_2), \quad (8)$$

т. е.

$$Q = |Q, \quad \underline{Q} = |Q \quad (9)$$

или

$$Q = \underline{Q}, \quad |Q = |Q, \quad (10)$$

будем говорить, что уравнение имеет *трапецидальную симметрию*. Подробное исследование всех решеток, полученных из *ромбического* H^4 -семейства, включая построение их пар Лакса, преобразований Беклунда и бесконечных иерархий обобщенных симметрий, было произведено в работе [15]. Авторы работы [16] исследовали все уравнения из классификации Болла, не рассмотренные ранее в литературе [9], [10], [15], показали их линеаризуемость с помощью теста интегрируемости на основе алгебраической энтропии [17], [18] и нашли их линеаризации в явном виде. Больше подробностей о линеаризуемости можно найти в работах [19], [20].

Общая процедура вложения представлена в работах [11], [13]. Различные вложения в трехмерные согласованные решетки, приводящие либо к интегрируемым, либо к неинтегрируемым уравнениям, изучались в работе [14] с помощью анализа на основе алгебраической энтропии.

После оригинальной работы Адлера, Бобенко и Суриса [9] были предприняты различные попытки упростить требования, налагаемые на согласованные квад-уравнения. На этом пути в работах [21], [22] были получены четыре нететраэдральных модели, три из которых обладали D_4 -симметрией. Все эти модели или задаются линейными уравнениями, или (более-менее тривиально) линеаризуются [23]. Другие нететраэдральные согласованные системы линейных уравнений на квадратичной решетке исследовались в работах [10], [24].

Существование ложных пар Лакса хорошо известно, но мы еще далеки от полного понимания этого явления. Термин пары Лакса относится к паре линейных уравнений (переопределенная система), связанных с нелинейной интегрируемой системой через условие совместности. Наиболее важным свойством пары Лакса оказывается то, что она должна доказывать интегрируемость связанной с ней нелинейной системы и содержать информацию о нетривиальных решениях такой системы.

Ложные пары Лакса – это такие пары Лакса, которые не доказывают интегрируемость связанных с ними нелинейных систем. Ложные пары Лакса часто имеют вид, весьма сходный с видом, характерным для пар Лакса, обеспечивающих интегрируемость, и некритически настроенные эксперты в области интегрируемых систем продолжают публиковать примеры ложных пар Лакса, которые они принимают за настоящие (см. примеры в работе [25]). Более того, ложные пары Лакса обычно связываются с линеаризуемыми системами, так что доказательство ложности пары Лакса оказывается тем не менее способом доказать линеаризуемость системы.

Пары Лакса могут быть дискретными или непрерывными, матричными или скалярными, применяемыми в методе обратной задачи рассеяния или в изомонодромных деформациях, и ложные пары Лакса возникают во всех этих категориях. Хотя в литературе имеется множество ссылок на ложные пары Лакса, одной из наиболее известных является работа [26]; гораздо менее обширная литература посвящена объяснению явления ложных пар Лакса и тому, как их распознавать. Тем не менее для распознавания ложных пар Лакса придуманы разнообразные методы (см. [25], [27]–[33]).

Ниже в разделе 2 рассматриваются простейшие трапецидальные H^4 -уравнения, а именно ${}_tH_1^\varepsilon$ -уравнение, для которого строится пара Лакса. В разделе 3 приведено построение непосредственной линеаризации этого уравнения и показано, что полученная таким образом пара Лакса на самом деле оказывается эффективно ложной. В разделе 4 рассматриваются обобщенные симметрии этого уравнения, которые оказываются дифференциально-разностными уравнениями, допускающими по построению преобразования Беклунда. Выводы содержатся в разделе 5.

2. ${}_tH_1^\varepsilon$ -УРАВНЕНИЕ

Прежде чем определить уравнение ${}_tH_1^\varepsilon$, необходимо ввести обозначения:

$$\mathcal{F}_p^{(\pm)} \doteq \frac{1 \pm (-1)^p}{2}, \quad \alpha_1 \doteq \alpha_1(m), \quad \alpha_2 \doteq \alpha_2(n), \quad \alpha_3 \doteq \alpha_3(p),$$

где α_1, α_2 – постоянные, которые могут нести зависимость от переменной решетки и играют роль шага решетки при переходе к непрерывному пределу. Постоянная α_3

возникает в преобразованиях Беклунда и играет роль спектрального параметра:

$$\begin{aligned} \psi_{m,n+1} &= \ell_{m,n} \cdot L_{m,n} \psi_{m,n}, & \psi_{m+1,n} &= m_{m,n} \cdot M_{m,n} \psi_{m,n}, \\ \tau_{m,n} \cdot L_{m+1,n} \cdot M_{m,n} - M_{m,n+1} \cdot L_{m,n} &= 0, & \tau_{m,n} &\doteq \frac{m_{m,n} \ell_{m+1,n}}{\ell_{m,n} m_{m,n+1}}, \\ \ell_{m,n} &\doteq \ell(m, n, x_{m,n}, x_{m,n+1}; \alpha_3, \alpha_1, \varepsilon), & L_{m,n} &\doteq L(m, n, x_{m,n}, x_{m,n+1}; \alpha_3, \alpha_1, \varepsilon), \\ m_{m,n} &\doteq m(m, n, x_{m,n}, x_{m+1,n}; \alpha_2, \alpha_3, \varepsilon), & M_{m,n} &\doteq M(m, n, x_{m,n}, x_{m+1,n}; \alpha_2, \alpha_3, \varepsilon). \end{aligned} \quad (11)$$

Элементы L и M задают пару Лакса на решетке индексов m и n , а уравнения (11) представляют соответствующее уравнение Лакса на решетке. Связанные с ним коэффициенты нормировки обозначены через ℓ и m , а τ есть их отношение, появляющееся в уравнении Лакса.

Теперь запишем tH_1^ε -уравнение:

$$\begin{aligned} (x_{m,n} - x_{m+1,n})(x_{m,n+1} - x_{m+1,n+1}) - \alpha_2 - \\ - \varepsilon^2 \alpha_2 (\mathcal{F}_n^{(+)} x_{m,n+1} x_{m+1,n+1} + \mathcal{F}_n^{(-)} x_{m,n} x_{m+1,n}) = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где ε – произвольная константа. Уравнение (12) получается из уравнения на ячейке

$$(x - x_2)(x_3 - x_{23}) - \alpha_2(1 + \varepsilon^2 x_3 x_{23}) = 0 \quad (13)$$

с помощью процедуры, схематически описанной в разделе 1 и представленной в деталях в работе [16].

Пара Лакса этого уравнения и его коэффициенты нормировки имеют вид

$$L_{m,n} = \begin{pmatrix} x_{m,n+1} & -x_{m,n} x_{m,n+1} + \alpha_3 \\ 1 & -x_{m,n} \end{pmatrix} - \varepsilon^2 \alpha_3 \begin{pmatrix} -\mathcal{F}_n^{(-)} x_{m,n} & 0 \\ 0 & \mathcal{F}_n^{(+)} x_{m,n+1} \end{pmatrix}, \quad (14a)$$

$$M_{m,n} = \begin{pmatrix} \alpha_3(x_{m,n} - x_{m+1,n}) + \alpha_2 x_{m+1,n} & -\alpha_2 x_{m,n} x_{m+1,n} - \varepsilon^2 \alpha_3 \alpha_2 (\alpha_3 - \alpha_2) \mathcal{F}_n^{(+)} \\ \alpha_2 & \alpha_1(x_{m,n} - x_{m+1,n}) - \alpha_2 x_{m,n} \end{pmatrix}, \quad (14b)$$

$$\tau_{m,n} = \frac{\alpha_2(1 + \varepsilon^2 \mathcal{F}_n^{(-)} x_{m,n}^2 + \varepsilon^2 \mathcal{F}_n^{(+)} x_{m,n+1}^2)}{(x_{m,n} - x_{m+1,n})^2 + \varepsilon^2 \alpha_2^2 \mathcal{F}_n^{(+)}}, \quad (14c)$$

$$\ell_{m,n} = \frac{1}{1 - i\varepsilon(\mathcal{F}_n^{(-)} x_{m,n} - \mathcal{F}_n^{(+)} x_{m,n+1})}, \quad (14d)$$

$$m = \frac{1}{x_{m,n} - x_{m+1,n} + i\varepsilon \alpha_2 \mathcal{F}_n^{(+)}}. \quad (14e)$$

Здесь с помощью весьма нетривиального вычисления удастся переписать формулы для связности (14c), (14d), (14e) без применения стандартных членов с квадратными корнями. Уравнения, связанные с другими сторонами куба, имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha_2(x_{m,p} - x_{m,p+1})(x_{m+1,p} - x_{m+1,p+1}) + \varepsilon^2 \alpha_3 \alpha_2 (\alpha_3 - \alpha_2) \mathcal{F}_q^{(+)} - \\ - \alpha_3(x_{m,p} - x_{m+1,p})(x_{m,p+1} - x_{m+1,p+1}) = 0, \\ (x_{n,q} - x_{n,q+1})(x_{n+1,q} - x_{n+1,q+1}) - \alpha_3 - \\ - \varepsilon^2 \alpha_3 (\mathcal{F}_n^{(+)} x_{n+1,q} x_{n+1,q+1} + \mathcal{F}_n^{(-)} x_{n,q} x_{n,q+1}) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Уравнения (15) суть преобразования Беклунда для уравнения ${}_tH_1^\varepsilon$, в которых переменные решетки $p+1$ и $q+1$ интерпретируются как индексы, параметризующие новое решение. При переходе в проективное пространство уравнения (15) приводят к паре Лакса (14a), (14b).

3. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ И ЛОЖНЫЕ ПАРЫ ЛАКСА

Перейдем к анализу уравнения (12). В нем всегда можно положить $\alpha_2 \neq 0$, иначе это уравнение вырождается в уравнение

$$(x_{m,n} - x_{m+1,n})(x_{m,n+1} - x_{m+1,n+1}) = 0,$$

решение которого на решетке оказывается тривиальным. Введем обозначения $x_{m,2k} \doteq w_{m,k}$, $x_{m,2k+1} \doteq z_{m,k}$. Тогда уравнение (12) приводится к следующей системе двух связанных автономных разностных уравнений:

$$\mathcal{E}_m \equiv (w_{m,k} - w_{m+1,k})(z_{m,k} - z_{m+1,k}) - \varepsilon^2 \alpha_2 z_{m,k} z_{m+1,k} - \alpha_2 = 0, \quad (16a)$$

$$(w_{m,k+1} - w_{m+1,k+1})(z_{m,k} - z_{m+1,k}) - \varepsilon^2 \alpha_2 z_{m,k} z_{m+1,k} - \alpha_2 = 0. \quad (16b)$$

Вычитая уравнение (16b) из (16a), получим

$$(w_{m,k} - w_{m+1,k} - w_{m,k+1} + w_{m+1,k+1})(z_{m,k} - z_{m+1,k}) = 0. \quad (17)$$

Теперь возможны два случая.

Случай 1. Если $z_{m,k} = f_k$, где f_k – функция общего вида, то уравнение (17) выполнено. Из (16a) или из (16b) имеем $\varepsilon \neq 0$, так что, решая уравнение относительно f_k , получим

$$f_k = \pm \frac{i}{\varepsilon}. \quad (18)$$

Случай 2. Если $z_{m,k} \neq f_k$, где f_k определено в (18), тогда $w_{m,k} = g_m + h_k$, где g_m и h_k – произвольные функции своих аргументов. Следовательно, уравнения (16) сводятся к уравнению

$$\varepsilon^2 z_{m,k} z_{m+1,k} + \kappa_m (z_{m,k} - z_{m+1,k}) + 1 = 0, \quad \kappa_m \doteq \frac{g_{m+1} - g_m}{\alpha_2}. \quad (19)$$

На этом этапе возникают два подслучая.

Подслучай 2.1. Если $\varepsilon = 0$, то из (19) следует, что $\kappa_m \neq 0$. Решая это уравнение, получим

$$z_{m+1,k} - z_{m,k} = \frac{1}{\kappa_m} \quad (20)$$

и, следовательно,

$$z_{m,k} = j_k + \sum_{l=m_0}^{m-1} \frac{1}{\kappa_l}, \quad m \geq m_0 + 1, \quad (21a)$$

$$z_{m,k} = j_k - \sum_{l=m}^{m_0-1} \frac{1}{\kappa_l}, \quad m \leq m_0 - 1, \quad (21b)$$

где $j_k = z_{m_0,k}$ – произвольная константа интегрирования, представляющая собой функцию своих аргументов.

Подслучай 2.2. Если $\varepsilon \neq 0$, уравнение (19) принимает вид дискретного уравнения Риккати, линеаризуемого преобразованием Мёбиуса $z_{m,k} \doteq (i/\varepsilon)((y_{m,k}-1)/(y_{m,k}+1))$, приводящим к уравнению

$$(i\kappa_m - \varepsilon)y_{m+1,k} = (i\kappa_m + \varepsilon)y_{m,k}. \quad (22)$$

Так как $\kappa_m \neq \pm i\varepsilon$, поскольку иначе $y_{m,k} = 0$ и $z_{m,k} = -i/\varepsilon$, из условия (22) получаем

$$y_{m,k} = j_k \prod_{l=m_0}^{m-1} \frac{i\kappa_l + \varepsilon}{i\kappa_l - \varepsilon}, \quad m \geq m_0 + 1, \quad (23a)$$

$$y_{m,k} = j_k \prod_{l=m}^{m_0-1} \frac{i\kappa_l - \varepsilon}{i\kappa_l + \varepsilon}, \quad m \leq m_0 - 1, \quad (23b)$$

где $j_k = y_{m_0,k}$ – другая константа интегрирования, являющаяся функцией своих аргументов.

Тем самым всегда можно получить полное решение исходной системы.

Заметим, что при $\varepsilon = 0$ уравнение (12) принимает вид

$$(x_{m,n} - x_{m+1,n})(x_{m,n+1} - x_{m+1,n+1}) - \alpha_2 = 0, \quad (24)$$

и контактное преобразование типа преобразования Мёбиуса

$$x_{m,n} - x_{m+1,n} = \sqrt{\alpha_2} \frac{2w_{m,n} + 1 - \alpha_2}{2w_{m,n} + 1 + \alpha_2} \quad (25)$$

переводит уравнение (12) в следующее линейное уравнение первого порядка:

$$w_{m,n+1} + w_{m,n} + 1 = 0, \quad (26)$$

решение которого имеет вид

$$x_{m,n} = x_{0,n} - \sqrt{\alpha_2} \sum_{l=1}^m \frac{2w_{l,0}(-1)^n + (-1)^n - \alpha_2}{2w_{l,0}(-1)^n + (-1)^n + \alpha_2}. \quad (27)$$

Здесь $x_{0,n}$ и $w_{m,0}$ суть две произвольные константы интегрирования, задаваемые функциями своих аргументов. Другое линеаризующее преобразование при $\varepsilon = 0$ задается формулой

$$x_{m,n} - x_{m+1,n} = \sqrt{\alpha_2} e^{z_{m,n}}, \quad (28)$$

оно переводит уравнение (12) в следующее линейное уравнение первого порядка:

$$z_{m,n+1} + z_{m,n} = 2\pi\kappa, \quad k = 0, 1. \quad (29)$$

Линеаризацию можно произвести также на основе пары Лакса (14). Вводя поля $\rho_{m,k} \doteq \tilde{\psi}_{m,2k}^{(1)}$, $\sigma_{m,k} \doteq \tilde{\psi}_{m,2k+1}^{(1)}$, $\theta_{m,k} \doteq \tilde{\psi}_{m,2k}^{(2)}$, $\chi_{m,k} \doteq \tilde{\psi}_{m,2k+1}^{(2)}$, можно переписать пару

Лакса в виде

$$\begin{aligned}\phi_{m,k+1} &= \mathcal{L}_{m,k}\phi_{m,k}, & \phi_{m+1,k} &= \mathcal{M}_{m,k}\phi_{m,k}, & \phi_{m,k} &\doteq \begin{pmatrix} \rho_{m,k} \\ \theta_{m,k} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{L}_{m,k} &= -\alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & w_{m,k+1} - w_{m,k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{30a}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{m,k} &= \frac{1}{w_{m,k} - w_{m+1,k} + i\varepsilon\alpha_2} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \alpha_3(w_{m,k} - w_{m+1,k}) + \alpha_2 w_{m+1,k} & -\alpha_2 w_{m,k} w_{m+1,k} - \varepsilon^2 \alpha_3 \alpha_2 (\alpha_3 - \alpha_2) \\ \alpha_2 & \alpha_1(w_{m,k} - w_{m+1,k}) - \alpha_2 w_{m,k} \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{30b}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{m,k} \\ \chi_{m,k} \end{pmatrix} = \frac{1}{i - \varepsilon z_{m,k}} \begin{pmatrix} z_{m,k} & \alpha_3 - w_{m,k} z_{q,k} \\ 1 & -w_{m,k} - \varepsilon^2 \alpha_3 z_{m,k} \end{pmatrix} \phi_{m,k},\tag{30c}$$

$$\alpha_3 \mathcal{E}_m \mathcal{N}_{q,k} \phi_{q,k} = 0, \quad \mathcal{N}_{m,k} \doteq \begin{pmatrix} i\varepsilon(z_{m,k} - z_{m+1,k}) & n_{12} \\ z_{m,k} - z_{m+1,k} & n_{22} \end{pmatrix},\tag{30d}$$

где

$$\begin{aligned}n_{12} &= i\varepsilon(w_{m,k} z_{m+1,k} - w_{m+1,k} z_{m,k}) + \varepsilon^2 \alpha_3 (z_{m,k} - z_{m+1,k}) - \\ &\quad - \varepsilon^2 \alpha_2 z_{m,k} + w_{m,k} - w_{m+1,k} + i\varepsilon\alpha_2, \\ n_{22} &= w_{m+1,k} z_{m+1,k} - w_{m,k} z_{m,k} - i\varepsilon\alpha_3 (z_{m,k} - z_{m+1,k}) - i\varepsilon\alpha_2 z_{m+1,k} - \\ &\quad - i\varepsilon(w_{m,k} - w_{m+1,k} + i\varepsilon\alpha_2) z_{m,k} z_{m+1,k},\end{aligned}$$

$w_{m,k} - w_{m+1,k} + i\varepsilon\alpha_2 \neq 0$, $z_{m,k} - z_{m+1,k} \neq 0$, а $\mathcal{E}_m$ — левая часть уравнения (16a). При выводе (30a) и (30d) применялось соотношение (30c) и разностные уравнения, из него вытекающие. Условие совместности уравнений (30a) и (30b) требует выполнения соотношения

$$w_{m,k} - w_{m+1,k} - w_{m,k+1} + w_{m+1,k+1} = 0,$$

а из (30d) следует, что $\mathcal{E}_m = 0$. Аналогично можно записать все соотношения в терминах вектора $\begin{pmatrix} \sigma_{m,k} \\ \chi_{m,k} \end{pmatrix}$. В этом случае совместность построенной таким образом пары Лакса после интегрирования приводит к условию (19).

Покажем теперь, что пара Лакса (30) является ложной. При калибровочном преобразовании

$$\phi_{m,k} = \mathcal{G}_{m,k} \phi'_{m,k}, \quad \mathcal{G}_{m,k} \doteq (-\alpha_3^k) \alpha_1^m \begin{pmatrix} 1 & w_{m,k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

пара Лакса (30) принимает вид

$$\mathcal{L}'_{m,k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\tag{31}$$

$$\mathcal{M}'_{m,k} = \frac{1}{w_{m,k} - w_{m+1,k} + i\varepsilon\alpha_2} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} w_{m,k} - w_{m+1,k} & (w_{m,k} - w_{m+1,k})^2 - \varepsilon^2 \alpha_2 (\alpha_3 - \alpha_2) \\ \frac{\alpha_2}{\alpha_3} & w_{m,k} - w_{m+1,k} \end{pmatrix}. \quad (32)$$

В формулах (31), (32) матрица $\mathcal{L}'_{m,k}$ не зависит ни от спектрального параметра α_3 , ни от какого-либо из полей. Поэтому эта матрица не представляет интереса ни для какой спектральной задачи.

4. ОБОБЩЕННЫЕ СИММЕТРИИ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЕКЛУНДА

В этом разделе производится построение трехточечных обобщенных симметрий, представленных преобразованиями

$$\begin{aligned} x_{m,n;\lambda} &= g_{m,n}(s, t, u, v, \bar{u}, \bar{v}, x_{m,n}; \alpha_2, \varepsilon), & s &\doteq \frac{x_{m+1,n} - x_{m,n}}{1 + \varepsilon^2 x_{m+1,n} x_{m,n}}, \\ t &\doteq \frac{x_{m,n} - x_{m-1,n}}{1 + \varepsilon^2 x_{m-1,n} x_{m,n}}, & u &\doteq x_{m+1,n} - x_{m,n}, & v &\doteq x_{m,n} - x_{m-1,n}, \\ \bar{u} &\doteq x_{m,n+1} - x_{m,n}, & \bar{v} &\doteq x_{m,n} - x_{m,n-1}, \end{aligned}$$

связанных с уравнением (12) в направлении (m, n) , а затем уравнение (12) интерпретируется как преобразование Беклунда для построенного дифференциально-разностного уравнения. Здесь λ играет роль группового параметра.

4.1. Трехточечные обобщенные симметрии вдоль направления m .

Случай $\varepsilon \neq 0$. В этом случае симметрии имеют вид

$$\begin{aligned} g_{m,n}^{(\varepsilon)} &= \mathcal{F}_n^{(+)} \left\{ \frac{\alpha_2(v^2 + \varepsilon^2 \alpha_2^2)}{(u-v)(u+v)} B_m \left(\frac{\alpha_2}{u} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha_2(u^2 + \varepsilon^2 \alpha_2^2)}{(u-v)(u+v)} B_{m-1} \left(\frac{\alpha_2}{v} \right) \left[x_{m,n} - \frac{(u^2 + \varepsilon^2 \alpha_2^2)v}{(u-v)(u+v)} \right] \omega + \gamma_n \right\} + \\ &\quad + \left[\frac{s^2 t^2}{(s-t)(s+t)} (B_m(s) - B_{m-1}(t)) - \frac{s^2 t}{(s-t)(s+t)} \omega + \delta_n \right] \times \\ &\quad \times \mathcal{F}_n^{(-)}(1 + \varepsilon^2 x_{m,n}^2), \end{aligned} \quad (33)$$

где $B_m(y)$, γ_n и δ_n – функции общего вида от своих аргументов, а ω – произвольная константа. Заметим, что любая из этих функций и константа могут в конечном итоге содержать зависимость от α_2 и ε . Можно показать, что в случае $\varepsilon \neq 0$ не существует не зависящих от n редукций приведенной выше симметрии, для которых $x_{m,n} \doteq x_m$.

Случай $\varepsilon = 0$. В этом случае симметрии имеют более простой вид:

$$\begin{aligned} g_{m,n}^{(0)} &= \frac{u^2 v^2}{(u-v)(u+v)} \left[\mathcal{F}_n^{(+)} \left(\frac{B_m(\alpha_2/u)}{u^2} - \frac{B_{m-1}(\alpha_2/v)}{v^2} \right) \alpha_2 + \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{F}_n^{(-)}(B_m(u) - B_{m-1}(v)) \right] + \left[\frac{x_{m,n}}{2} - \frac{u^2 v}{(u-v)(u+v)} \right] \omega + \\ &\quad + (-1)^n \sigma x_{m,n} + f_n, \end{aligned} \quad (34)$$

где $B_m(y)$ и f_n – функции общего вида от своих аргументов, а ω и σ – произвольные константы. Как и в предыдущем случае, каждая из этих функций и констант может содержать зависимость от α_2 . Легко показать, что при выборе

$$f_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} \gamma_n + \frac{1 - (-1)^n}{2} \delta_n$$

предел $\varepsilon \rightarrow 0$ симметрии (33) совпадает с ограничением $\sigma = \omega/2$ симметрии (34), и, таким образом, симметрия при $\varepsilon = 0$ становится не зависящей от n . Поэтому естественно спросить, содержит ли семейство симметрий (34) редукции, не зависящие от n . Такая редукция существует и задается формулами

$$g_{m,n}^{(0)} = \frac{u^2 v^2}{(u-v)(u+v)} \left(\frac{B_m(u; \alpha_2)}{u} - \frac{B_{m-1}(v; \alpha_2)}{v} \right) + \left[\frac{x_{m,n}}{2} - \frac{u^2 v}{(u-v)(u+v)} \right] \omega + \chi, \quad (35)$$

где ω и χ – произвольные константы (зависящие в принципе от α_2), а $B_m(y; \alpha_2)$ – функция от своих аргументов, удовлетворяющая следующему функциональному уравнению:

$$B_m\left(\frac{\alpha_2}{y}; \alpha_2\right) = B_m(y; \alpha_2). \quad (36)$$

Общее решение уравнения (36) имеет вид

$$B_m(y; \alpha_2) = \begin{cases} G_m(y; \alpha_2), & y \in \mathcal{B}(\alpha_2) \subset \Omega(\alpha_2), \\ G_m\left(\frac{\alpha_2}{y}; \alpha_2\right), & \frac{\alpha_2}{y} \in \mathcal{B}(\alpha_2), \end{cases}$$

где $G_m(y; \alpha_2)$ – функция общего вида от своих аргументов, через $\Omega(\alpha_2)$ обозначено подмножество комплексной плоскости

$$\Omega(\alpha_2) \doteq \left\{ z \in \mathbb{C}: |z| > \sqrt{|\alpha_2|} \cup z = \sqrt{|\alpha_2|} e^{i\theta_z}, \frac{\theta_{\alpha_2}}{2} \leq \theta_z \leq \frac{\theta_{\alpha_2}}{2} + \pi \right\},$$

а $\mathcal{B}(\alpha_2)$ – произвольное подмножество $\Omega(\alpha_2)$. В частности, если $B_m(y; \alpha_2)$ – аналитическая функция в кольце с центром в начале координат и с радиусами $r_1(\alpha_2)$ и $r_2(\alpha_2)$ с условием $r_1(\alpha_2) < \sqrt{|\alpha_2|} < r_2(\alpha_2)$, то нетрудно показать, что

$$B_m(y; \alpha_2) = U_m\left(\frac{\alpha_2}{y} + y; \alpha_2\right),$$

причем $U_m(y; \alpha_2)$ оказывается аналитической функцией y в некоторой области комплексной плоскости, но в остальном представляет собой функцию общего вида по всем своим аргументам. Например, если в (35) положить $\omega = 0$ и выбрать $U_m(y; \alpha_2) = -1$, то получим симметрию

$$x_{m,n,\lambda} = \frac{(x_{m+1,n} - x_{m,n})(x_{m,n} - x_{m-1,n})}{x_{m+1,n} - x_{m-1,n}} + \chi,$$

которая преобразованием сдвига $x_{m,n} \doteq u_{m,n} + \lambda\chi$ переводится в подкласс ямилловских дискретизаций уравнения Кричевера–Новикова [8].

4.2. Трехточечные обобщенные симметрии вдоль направления n . Имеются следующие симметрии в направлении n :

$$g_{m,n}^{(\varepsilon)} = \mathcal{F}_n^{(+)} \left(B_n \left(\frac{\bar{u} + \bar{v}}{1 + \varepsilon^2 x_{m,n+1} x_{m,n-1}} \right) + \kappa_n \right) + \\ + \mathcal{F}_n^{(-)} (1 + \varepsilon^2 x_{m,n}^2) (C_n(\bar{u} + \bar{v}) + \lambda_n), \quad (37)$$

где $B_n(y)$, $C_n(y)$, κ_n и λ_n – произвольные функции от своих аргументов.

В случае $\varepsilon = 0$ имеем

$$g_{m,n}^{(0)} = D_n(\bar{u} + \bar{v}) + (-1)^n \sigma x_{m,n} + \theta_n, \quad (38)$$

где $D_n(y)$ и θ_n – произвольные функции своих аргументов, а σ – произвольный параметр. Можно непосредственно показать, что при выборе $D_n(y) = \mathcal{F}_n^{(+)} B_n(y) + \mathcal{F}_n^{(-)} C_n(y)$ и $\theta_n = \mathcal{F}_n^{(+)} \kappa_n + \mathcal{F}_n^{(-)} \lambda_n$ предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ симметрии (37) совпадает с ограничением $\sigma = 0$ для симметрии (38).

4.3. Дифференциально-разностное уравнение и преобразования Беклунда. Можно интерпретировать (33) при $\varepsilon \neq 0$ как дифференциально-разностное уравнение относительно переменной m . Поскольку (33) зависит также от n , это возможно в случае зависимости только через $\mathcal{F}_n^{(+)}$ и $\mathcal{F}_n^{(-)}$, так как только в этом случае можно избавиться от этой зависимости с помощью перехода к полям, зависящим только от четных или нечетных значений аргумента n . В этом случае следует положить γ_n и δ_n равными нулю и определить новые поля w_m и z_m так же, как это было сделано в разделе 3. При этом уравнение (33) переходит в следующую систему уравнений:

$$w_{m;\lambda}^{(\varepsilon)} = \left\{ \frac{\alpha_2(\tilde{v}^2 + \varepsilon^2 \alpha_2^2)}{(\tilde{u} - \tilde{v})(\tilde{u} + \tilde{v})} B_m \left(\frac{\alpha_2}{\tilde{u}} \right) - \frac{\alpha_2(\tilde{u}^2 + \varepsilon^2 \alpha_2^2)}{(\tilde{u} - \tilde{v})(\tilde{u} + \tilde{v})} B_{m-1} \left(\frac{\alpha_2}{\tilde{v}} \right) + \left[w_m - \frac{(\tilde{u}^2 + \varepsilon^2 \alpha_2^2)\tilde{v}}{(\tilde{u} - \tilde{v})(\tilde{u} + \tilde{v})} \right] \alpha \right\}, \quad (39)$$

$$z_{m;\lambda}^{(\varepsilon)} = \left\{ \frac{\tilde{s}^2 \tilde{t}^2 [B_m(\tilde{s}) - B_{m-1}(\tilde{t})]}{(\tilde{s} - \tilde{t})(\tilde{s} + \tilde{t})} - \frac{\tilde{s}^2 \tilde{t} \omega}{(\tilde{s} - \tilde{t})(\tilde{s} + \tilde{t})} \right\} (1 + \varepsilon^2 z_m^2), \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{s} &\doteq \frac{z_{m+1} - z_m}{1 + \varepsilon^2 z_{m+1} z_m}, & \tilde{t} &\doteq \frac{z_m - z_{m-1}}{1 + \varepsilon^2 z_{m-1} z_m}, \\ \tilde{u} &\doteq w_{m+1} - w_m, & \tilde{v} &\doteq w_m - w_{m-1}. \end{aligned}$$

Уравнения (16a), (16b) оказываются преобразованиями Беклунда системы (39), (40), связывающими решение (w_m, z_m) с новым решением $(\tilde{w}_m, \tilde{z}_m)$, т. е.

$$(w_m - w_{m+1})(z_m - z_{m+1}) - \alpha_2 \varepsilon^2 z_m z_{m+1} - \alpha_2 = 0, \quad (41a)$$

$$(\tilde{w}_m - \tilde{w}_{m+1})(\tilde{z}_m - \tilde{z}_{m+1}) - \alpha_2 \varepsilon^2 \tilde{z}_m \tilde{z}_{m+1} - \alpha_2 = 0, \quad (41b)$$

$$(\tilde{w}_m - \tilde{w}_{m+1})(z_m - z_{m+1}) - \alpha_2 \varepsilon^2 z_m z_{m+1} - \alpha_2 = 0. \quad (41c)$$

Из системы (41) видно, что решения уравнений (39), (40) не являются независимыми, так как они связаны уравнением (41a). Поэтому, если задано решение (w_m, z_m) двух уравнений (39), (40), решая уравнение (41c), можно найти $\tilde{w}_m$, а из (41b) получим $\tilde{z}_m$.

Можно получить аналогичный результат в случае уравнения (34) при $\varepsilon = 0$.

В случае симметрий переменной n при $\kappa_m = \lambda_m = 0$ зависимость от m оказывается просто параметрической, так что рассмотренное выше явление не имеет места. При этом получают единственное неавтономное дифференциально-разностное

уравнение

$$w_{n,\lambda} = \mathcal{F}_n^{(+)} B_n \left(\frac{w_{n+1} - w_{n-1}}{1 + \varepsilon^2 w_{n+1} w_{n-1}} \right) + \mathcal{F}_n^{(-)} (1 + \varepsilon^2 w_n^2) C_n (w_{n+1} - w_{n-1})$$

и единственное неавтономное преобразование Беклунда

$$(w_n - \tilde{w}_n)(w_{n+1} - \tilde{w}_{n+1}) - \varepsilon^2 \alpha_2 (\mathcal{F}_n^{(+)} w_{n+1} \tilde{w}_{n+1} + \mathcal{F}_n^{(-)} w_n \tilde{w}_n) - \alpha_2 = 0.$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлены результаты, касающиеся линеаризации и симметрий неавтономных нелинейных уравнений в частных конечных разностях, принадлежащих классификации Болла квад-графических уравнений на решетке, уравнений типа ${}_t H_1^\varepsilon$. В частности, предъявлена явная линеаризация этого уравнения, полученная при сведении уравнения ${}_t H_1^\varepsilon$ к системе автономных уравнений в частных разностях, которые могут быть решены явно, и было показано, что пара Лакса этого уравнения оказывается ложной, т. е. с помощью калибровочного преобразования спектральная задача приводится к виду, не зависящему ни от спектрального параметра, ни от полей теории.

Можно построить трехточечные обобщенные симметрии, отражающие свойство линеаризуемости дискретного уравнения, поскольку эти симметрии задаются произвольными функциями непрерывной переменной и дискретного индекса решетки. Этот интересный частный результат будет исследован в последующих работах.

Также в будущем авторы надеются провести анализ остальных линеаризуемых уравнений из классификации Болла.

Список литературы

- [1] D. Levi, R. Benguria, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **77**:9 (1981), 5025–5027.
- [2] J. J. C. Nimmo, W. K. Schief, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **453**:1957 (1997), 255–279.
- [3] A. Doliwa, P. M. Santini, *Phys. Lett. A*, **233**:4–6 (1997), 365–372.
- [4] A. I. Bobenko, Yu. B. Suris, *Int. Math. Res. Not.*, **2002**:11 (2002), 573–611.
- [5] T. Bridgman, W. Hereman, G. R. W. Quispel, P. H. van der Kamp, *Found. Comput. Math.*, **13**:4 (2013), 517–544.
- [6] F. W. Nijhoff, *Phys. Lett. A*, **297**:1–2 (2002), 49–58.
- [7] F. W. Nijhoff, A. Walker, *Glasg. Math. J.*, **43A** (2001), 109–123.
- [8] R. Yamilov, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39**:45 (2006), R541–R623.
- [9] V. E. Adler, A. I. Bobenko, Yu. B. Suris, *Commun. Math. Phys.*, **233**:3 (2003), 513–543.
- [10] В. Э. Адлер, А. И. Бобенко, Ю. Б. Сурис, *Функц. анализ и его прил.*, **43**:1 (2009), 3–21.
- [11] R. Boll, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **18**:3 (2011), 337–365.
- [12] R. Boll, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **19**:4 (2012), 1292001, 3 pp.
- [13] R. Boll, *Classification and Lagrangian structure of 3D consistent quad-equations*, Ph.D. thesis, Technische Universität, Berlin, 2012.
- [14] J. Hietarinta, C. Viallet, *Nonlinearity*, **25**:7 (2012), 1955–1966.
- [15] P. D. Xenitidis, V. G. Papageorgiou, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **42**:45 (2009), 454025, 13 pp.
- [16] G. Gubbiotti, C. Scimiterna, D. Levi, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **23**:4 (2016), 507–543.
- [17] S. Tremblay, B. Grammaticos, A. Ramani, *Phys. Lett. A*, **278**:6 (2001), 319–324.
- [18] C. Viallet, *Algebraic entropy for lattice equations*, arXiv: math-ph/0609043.

- [19] G. Gubbiotti, R. I. Yamilov, *Darboux integrability of trapezoidal H^4 and H^6 families of lattice equations I: First integrals*, [arXiv: 1608.03506](#).
- [20] G. Gubbiotti, C. Scimitema, R. I. Yamilov, *Darboux integrability of trapezoidal H^4 and H^6 families of lattice equations II: First integrals* (in preparation).
- [21] J. Hietarinta, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **37**:6 (2004), L67–L73.
- [22] J. Hietarinta, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **12**, supp. 2 (2005), 223–230.
- [23] A. Ramani, N. Joshi, B. Grammaticos, T. Tamizhmani, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39**:8 (2006), L145–L149.
- [24] J. Atkinson, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **42**:45 (2009), 454005, 7 pp.
- [25] M. Hay, S. Butler, *Simple identification of fake Lax pair*, [arXiv: 1311.2406](#).
- [26] F. Calogero, M. C. Nucci, *J. Math. Phys.*, **32**:1 (1991), 72–74.
- [27] D. Levi, A. Sym, G. Z. Tu, *A working algorithm to isolate integrable surfaces in E^3* , preprint DF-INFN № 761, INFN, Roma, 1990.
- [28] Y. Q. Li, B. Li, S. Y. Lou, *Constraints for evolution equations with some special forms of Lax pairs and distinguishing Lax pairs by available constraints*, [arXiv: 1008.1375](#).
- [29] M. Marvan, *Acta Appl. Math.*, **72**:1–2 (2002), 51–65.
- [30] M. Marvan, *Acta Appl. Math.*, **109**:1 (2010), 239–255.
- [31] M. Marvan, *Acta Appl. Math.*, **83**:1–2 (2004), 39–68.
- [32] S. Yu. Sakovich, *True and fake Lax pairs: how to distinguish them*, [arXiv: nlin.SI/0112027](#).
- [33] S. Yu. Sakovich, *Acta Appl. Math.*, **83**:1 (2004), 69–83, [arXiv: nlin/0212019](#).