Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Руджери, М. П. Спешиале, Приближенные симметрии в теории вязкоупругости, *ТМФ*, 2016, том 189, номер 1, 115–124

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9080>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 15:55:46

© 2016 г.

М. Руджери*, М. П. Спешиале†

ПРИБЛИЖЕННЫЕ СИММЕТРИИ В ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

В рамках подхода приближенных симметрий исследуются возмущенные системы дифференциальных уравнений в частных производных, описывающие вязкоупругие среды с нелинейным рассеянием. Проведена полная классификация приближенных симметрий таких уравнений и доказана теорема о соотношении между симметриями двух связанных друг с другом моделей. С помощью генератора группы преобразований, взятого в первом порядке приближения, для некоторых физических моделей найдены приближенные решения.

Ключевые слова: приближенные симметрии, вязкоэластичные среды, нелокальные преобразования.

DOI: 10.4213/tmf9080

1. ВВЕДЕНИЕ

Во многих задачах, представляющих интерес для физиков, дифференциальные уравнения содержат члены с “малыми” параметрами. Совместное рассмотрение теории групп Ли и теории возмущений привело к развитию метода приближенных симметрий. Различные приближенные симметрии предлагались на протяжении последних двадцати лет. Байков, Газизов и Ибрагимов [1]–[4] предложили разложение в ряд теории возмущений для генератора Ли полной теории, при котором все свойства точных симметрий Ли переходят в свойства приближенных симметрий. Однако

Авторы выражают свою благодарность за финансовую поддержку со стороны G.N.F.M. of I.N.d.A.M. (проект “Formazione di pattern, insorgenza di fenomeni oscillatori e soluzioni localizzate in sistemi reazione-diffusione con diffusione non lineare”, 2015). Авторы также благодарны за поддержку Kore University of Enna (исследовательский проект “Metodi per la ricerca di soluzioni esatte e numeriche per equazioni e sistemi di equazioni differenziali alle derivate parziali della fisica matematica” под руководством проф. Валенти).

*Faculty of Engineering and Architecture, Kore University of Enna, Enna, Italy.
E-mail: marianna.ruggieri@unikore.it

†Department of Mathematics and Computer Science, University of Messina, Messina, Italy.
E-mail: mpspeciale@unime.it

разложение приближенного оператора плохо отвечает приближению в смысле теории возмущений: даже если используется приближенный оператор первого порядка, соответствующее приближенное решение может содержать члены высшего порядка.

Метод, предложенный Фушичем и Штеленом [5], согласуется с теорией возмущений и дает правильные члены для приближенных решений, но не позволяет работать в рамках иерархии: при поиске симметрий уравнения в различных порядках приближения связаны, что может привести к чрезвычайному разрастанию алгебры.

В настоящей статье мы следуем методу Валенти [6]; этот метод, в свою очередь, следует общей линии подхода Фушича–Штелена, но лишен недостатка, связанного с невозможностью работать в рамках иерархии, используя теорию возмущений.

Для исследования уравнений с малыми членами можно применять пертурбативный подход приближенных симметрий. Мы рассматриваем следующую консервативную (2×2) -систему уравнений в частных производных, описывающих нелинейную вязкоупругую среду:

$$u_t - v_x = 0, \quad (1)$$

$$v_t - \left(\int^u f(s) ds + \lambda(u)v_x \right)_x = 0, \quad (2)$$

где $f(u)$ и $\lambda(u)$ – гладкие функции, не равные константе. Если рассматривать u как удельный объем, $p(u) = \int^u f(s) ds$ как давление, $\lambda(u)$ как переменный коэффициент вязкости и v как скорость, то примеры таких моделей можно найти в теории вязкоупругости. В частности, система (1)–(2) описывает в рамках лагранжева подхода движение одномерного сжимаемого вязкого потока жидкости.

Рассчитывая в дальнейшем применить подход “приближенной симметрии”, мы вводим в систему малый параметр ε :

$$u_t - v_x = 0, \quad (3)$$

$$v_t - \left(\int^u f(s) ds + \varepsilon \lambda(u)v_x \right)_x = 0. \quad (4)$$

После применения нелокальных преобразований $u = w_x$, $v = w_t$ система (3), (4) становится эквивалентной уравнению

$$w_{tt} = f(w_x)w_{xx} + \varepsilon (\lambda(w_x)w_{tx})_x, \quad (5)$$

изучавшемся в работе [7]. Частные случаи систем уравнений типа (1), (2) можно найти в трудах [6]–[12], а исследование некоторых математических проблем, таких как глобальное существование, единственность и устойчивость решений, проведено в работах [13], [14].

Настоящая работа организована следующим образом. В разделе 2 вводится редукция, основанная на приближенной симметрии, для модели (3), (4); групповая классификация с помощью анализа приближенной симметрии системы (3), (4) представлена в разделе 3; в разделе 4 мы исследуем связь между приближенной классификацией нашей системы и уравнением (5), изучавшемся в работе [7], поскольку модель (3), (4) и модель (5) связаны нелинейными преобразованиями. Наконец, в разделе 5 найдены приближенные решения для некоторых физических моделей; при этом используется генератор группы преобразований, взятый в первом порядке приближения.

2. РЕДУКЦИЯ, ОСНОВАННАЯ НА ПРИБЛИЖЕННОЙ СИММЕТРИИ

Следуя основным принципам приближенного метода, предложенного в [6]–[9], мы получаем классификацию симметрий для определенных функций $f(u)$ и $\lambda(u)$, относительно которых система (3), (4) приближенно инвариантна.

Запишем общее решение системы (3), (4) в виде $u = u(t, x, \varepsilon)$, $v = v(t, x, \varepsilon)$ и рассмотрим следующую однопараметрическую группу Ли инфинитезимальных преобразований в (t, x, u, v) -пространстве системы (3), (4):

$$\begin{aligned}\hat{t} &= t + a\xi^1(t, x, u, v, \varepsilon) + \mathcal{O}(a^2), \\ \hat{x} &= x + a\xi^2(t, x, u, v, \varepsilon) + \mathcal{O}(a^2), \\ \hat{u} &= u + a\eta_1(t, x, u, v, \varepsilon) + \mathcal{O}(a^2), \\ \hat{v} &= v + a\eta_2(t, x, u, v, \varepsilon) + \mathcal{O}(a^2),\end{aligned}\tag{6}$$

где a – групповой параметр. Предположим, что функции $u(t, x, \varepsilon)$, $\hat{u}(\hat{t}, \hat{x}, \varepsilon)$ и функции $v(t, x, \varepsilon)$, $\hat{v}(\hat{t}, \hat{x}, \varepsilon)$ являются аналитическими по ε и могут быть разложены в степенные ряды:

$$\begin{aligned}u(t, x, \varepsilon) &= u_0(t, x) + \varepsilon u_1(t, x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \hat{u}(\hat{t}, \hat{x}, \varepsilon) &= \hat{u}_0(\hat{t}, \hat{x}) + \varepsilon \hat{u}_1(\hat{t}, \hat{x}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ v(t, x, \varepsilon) &= v_0(t, x) + \varepsilon v_1(t, x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \hat{v}(\hat{t}, \hat{x}, \varepsilon) &= \hat{v}_0(\hat{t}, \hat{x}) + \varepsilon \hat{v}_1(\hat{t}, \hat{x}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),\end{aligned}\tag{7}$$

где u_0 , u_1 , v_0 , v_1 – некоторые гладкие функции от t и x , а $\hat{u}_0$, $\hat{u}_1$, $\hat{v}_0$, $\hat{v}_1$ – некоторые гладкие функции от $\hat{t}$ и $\hat{x}$.

После подстановки первого и третьего соотношения из (7) в уравнения (3), (4), приравнявая к нулю коэффициенты при определенных степенях ε , получаем следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных:

$$L_{01} := u_{0t} - v_{0x} = 0, \tag{8}$$

$$L_{02} := v_{0t} - f(u_0)u_{0x} = 0, \tag{9}$$

$$L_{11} := u_{1t} - v_{1x} = 0, \tag{10}$$

$$L_{12} := v_{1t} - f(u_0)u_{1x} - f'(u_0)u_{0x}u_1 - \lambda(u_0)u_{0xt} - \lambda'(u_0)u_{0x}u_{0t} = 0, \tag{11}$$

где мы положили

$$\begin{aligned}f(u_0) &= f(u)|_{\varepsilon=0}, & f'(u_0) &= f'(u(t, x, \varepsilon))|_{\varepsilon=0}, \\ \lambda(u_0) &= \lambda(u)|_{\varepsilon=0}, & \lambda'(u_0) &= \lambda'(u(t, x, \varepsilon))|_{\varepsilon=0};\end{aligned}$$

здесь и далее штрих обозначает производную функции по ее аргументу. Следовательно, (u_0, v_0) являются решением системы (8), (9), которую мы назовем *невозмущенной системой*. Чтобы получить однопараметрическую группу Ли инфинитезимальных преобразований системы (8)–(11), согласованную с разложениями (7) зависимых переменных, мы подставляем эти разложения в инфинитезимальные преобразования (6).

После формальной подстановки, приравняв к нулю коэффициенты в нулевом и первом порядках по ε , получаем следующую однопараметрическую группу Ли

инфинитезимальных преобразований:

$$\hat{t} = t + a\xi_0^1(t, x, u_0, v_0) + \mathcal{O}(a^2), \quad (12)$$

$$\hat{x} = x + a\xi_0^2(t, x, u_0, v_0) + \mathcal{O}(a^2), \quad (13)$$

$$\hat{u}_0 = u_0 + a\eta_{10}(t, x, u_0, v_0) + \mathcal{O}(a^2), \quad (14)$$

$$\hat{v}_0 = v_0 + a\eta_{20}(t, x, u_0, v_0) + \mathcal{O}(a^2), \quad (15)$$

$$\hat{u}_1 = u_1 + a[\alpha_1(t, x, u_0, v_0) + \alpha_2(t, x, u_0, v_0)u_1 + \alpha_3(t, x, u_0, v_0)v_1] + \mathcal{O}(a^2), \quad (16)$$

$$\hat{v}_1 = v_1 + a[\alpha_4(t, x, u_0, v_0) + \alpha_5(t, x, u_0, v_0)u_1 + \alpha_6(t, x, u_0, v_0)v_1] + \mathcal{O}(a^2). \quad (17)$$

Следуя [7], [9], введем следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем (точные) симметрии системы (8)–(11) относительно однопараметрической группы Ли инфинитезимальных преобразований (7) *приближенными симметриями* системы (3), (4).

В соответствии с этим определением однопараметрическая группа Ли инфинитезимальных преобразований (12)–(17), ассоциированная алгебра Ли и соответствующий инфинитезимальный оператор

$$\begin{aligned} X = & \xi_0^1(t, x, u_0, v_0) \frac{\partial}{\partial t} + \xi_0^2(t, x, u_0, v_0) \frac{\partial}{\partial x} + \\ & + \eta_{10}(t, x, u_0, v_0) \frac{\partial}{\partial u_0} + \eta_{20}(t, x, u_0, v_0) \frac{\partial}{\partial v_0} + \\ & + \eta_{11}(t, x, u_0, v_0, u_1, v_1) \frac{\partial}{\partial u_1} + \eta_{21}(t, x, u_0, v_0, u_1, v_1) \frac{\partial}{\partial v_1} \end{aligned} \quad (18)$$

называются приближенной группой Ли, приближенной алгеброй Ли и приближенным оператором Ли системы (3), (4). Заметим, что η_{11} и η_{21} являются коэффициентами при параметре a в (16) и (17). Кроме того, если положить

$$\begin{aligned} X^{(0)} = & \xi_0^1(t, x, u_0, v_0) \frac{\partial}{\partial t} + \xi_0^2(t, x, u_0, v_0) \frac{\partial}{\partial x} + \\ & + \eta_{10}(t, x, u_0, v_0) \frac{\partial}{\partial u_0} + \eta_{20}(t, x, u_0, v_0) \frac{\partial}{\partial v_0}, \end{aligned} \quad (19)$$

то приближенный оператор Ли (18) может быть переписан как

$$X = X^{(0)} + \eta_{11}(t, x, u_0, v_0, u_1, v_1) \frac{\partial}{\partial u_1} + \eta_{21}(t, x, u_0, v_0, u_1, v_1) \frac{\partial}{\partial v_1}, \quad (20)$$

при этом $X^{(0)}$ может рассматриваться как инфинитезимальный оператор невозмущенной системы (8), (9).

Важно отметить, что, как указано в работе [9] и подтверждено в недавних статьях [6], [8], [15], благодаря характеру функциональной зависимости от координат в приближенном операторе Ли (18) (или (20)) теперь при поиске условий инвариантности системы (8)–(11) мы можем работать в рамках иерархии. Сначала мы проводим классификацию невозмущенной системы (8), (9) с помощью оператора (19), а затем определяем функции α_i , $i = 1, \dots, 6$, из условий инвариантности, получающихся в результате применения оператора (20) к уравнениям (10), (11). Фактически

условие инвариантности системы (8)–(11) записывается как

$$\begin{aligned} X_0^{(1)}(L_{01})|_{L_{01}=0} &= 0, & X_0^{(1)}(L_{02})|_{L_{02}=0} &= 0, \\ X^{(1)}(L_{11})|_{L_{11}=0} &= 0, & X^{(2)}(L_{12})|_{L_{12}=0} &= 0, \end{aligned} \quad (21)$$

где операторы $X_0^{(1)}$, $X^{(1)}$ и оператор $X^{(2)}$ являются первыми и вторым членами разложения для X_0 и X .

3. ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ПРИ ПОМОЩИ ПРИБЛИЖЕННОЙ РЕДУКЦИИ

Из условий инвариантности (21) мы получаем следующие соотношения:

$$\xi_0^1 = a_3 t + a_1, \quad \xi_0^2 = a_4 x + a_2, \quad (22)$$

$$\eta_{10} = a_6 u_0 + a_9, \quad \eta_{20} = (a_6 + a_4 - a_3)v_0 + a_5, \quad (23)$$

$$\eta_{11} = (a_8 - a_4 + a_3)u_1, \quad \eta_{21} = a_8 v_1 + a_7, \quad (24)$$

$$(a_6 u_0 + a_9)f'(u_0) - 2(a_4 - a_3)f(u_0) = 0, \quad (25)$$

$$(a_6 u_0 + a_9)\lambda'(u_0) - (a_8 - a_6 + a_4)\lambda(u_0) = 0, \quad (26)$$

где a_i ($i = 1, \dots, 9$) суть произвольные константы. При произвольных функциях f и λ получаем $a_6 = a_9 = 0$, $a_4 = a_3$, $a_8 = -a_3$. Назовем ассоциированную с (22)–(26) пятимерную алгебру Ли *основной приближенной алгеброй Ли* системы (3), (4) и обозначим ее как $\mathcal{A}pprox\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$. Она порождается пятью операторами

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, & X_2 &= \frac{\partial}{\partial x}, & X_3 &= \frac{\partial}{\partial v_0}, & X_4 &= \frac{\partial}{\partial v_1}, \\ X_5 &= t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} - u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} - v_1 \frac{\partial}{\partial v_1}. \end{aligned} \quad (27)$$

Классификация функций f и соответствующие расширения алгебры $\mathcal{A}pprox\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$, вытекающие из (22)–(25), приведены в табл. 1.

ТАБЛИЦА 1. Классификация функций $f(u_0)$ и $\lambda(u_0)$ и соответствующие расширения алгебры $\mathcal{A}pprox\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$. Здесь f_0 , λ_0 , $p \neq 0$, s и q – определяющие константы.

Случай	$f(u_0)$ и $\lambda(u_0)$	Расширения алгебры $\mathcal{A}pprox\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$
I	$f(u_0) = f_0 e^{u_0/p},$ $\lambda(u_0) = \lambda_0 e^{(1+s)u_0/p}$	$X_6 = x \frac{\partial}{\partial x} + 2p \frac{\partial}{\partial u_0} + v_0 \frac{\partial}{\partial v_0} +$ $+ 2s u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + (2s+1)v_1 \frac{\partial}{\partial v_1}$
II	$f(u_0) = (u_0 + q)^{1/p},$ $\lambda(u_0) = \lambda_0 (u_0 + q)^{(1+s)/p-1}$	$X_6 = x \frac{\partial}{\partial x} + 2p(u_0 + q) \frac{\partial}{\partial u_0} +$ $+ (2p+1)v_0 \frac{\partial}{\partial v_0} +$ $+ 2s u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + (2s+1)v_1 \frac{\partial}{\partial v_1}$

4. ОБСУЖДЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОЙ РЕДУКЦИИ

Теперь, коль скоро две модели связаны нелокальными преобразованиями, сравним нашу классификацию с предложенной в работе [7]. Сначала для этой цели мы приведем классификацию уравнения (5) из работы [7], причем для ясности переобозначим некоторые константы в соответствии с (22)–(26).

Как указано в статье [7], для уравнения (5) в соответствии с условием инвариантности мы должны записать следующие отношения:

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}_0^1 &= a_3 t + a_1, & \tilde{\xi}_0^2 &= a_4 x + a_2, \\ \tilde{\eta}_0 &= (a_6 + a_4)w_0 + a_5 t + a_9 x + a_{10}, & \tilde{\eta}_1 &= (a_8 + a_3)w_1 + a_7 t + a_{12}, \\ (a_6 w_{0x} + a_9) f'(w_{0x}) - 2(a_4 - a_3) f(w_{0x}) &= 0, \\ (a_6 w_{0x} + a_9) \lambda'(w_{0x}) - (a_4 - a_6 + a_8) \lambda(w_{0x}) &= 0.\end{aligned}$$

Теперь докажем следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. *Для любых f и λ приближенная симметрия, допустимая для уравнения (5), определяет приближенную симметрию, допустимую для уравнений (3), (4), и наоборот.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начав с классификации уравнения (5), чтобы связать координаты оператора $\tilde{X}$ (что соотносится с классификацией координат оператора X), мы требуем, чтобы преобразование $u = w_x$, $v = w_t$ было инвариантно относительно действия оператора

$$\begin{aligned}X^* &= \eta_0 \frac{\partial}{\partial w_0} + \eta_1 \frac{\partial}{\partial w_1} + \zeta_{01} \frac{\partial}{\partial w_{0t}} + \zeta_{02} \frac{\partial}{\partial w_{0x}} + \zeta_{11} \frac{\partial}{\partial w_{1t}} + \zeta_{12} \frac{\partial}{\partial w_{1x}} + \\ &+ \eta_{10} \frac{\partial}{\partial u_0} + \eta_{20} \frac{\partial}{\partial v_0} + \eta_{11} \frac{\partial}{\partial u_1} + \eta_{21} \frac{\partial}{\partial v_1},\end{aligned}$$

где мы положили

$$\begin{aligned}\zeta_{01} &= D_t(\tilde{\eta}_0) - w_{0t} D_t(\tilde{\xi}_0^1) - w_{0x} D_t(\tilde{\xi}_0^2), \\ \zeta_{02} &= D_x(\tilde{\eta}_0) - w_{0t} D_x(\tilde{\xi}_0^1) - w_{0x} D_x(\tilde{\xi}_0^2), \\ \zeta_{11} &= D_t(\tilde{\eta}_1) - w_{1t} D_t(\tilde{\xi}_0^1) - w_{1x} D_t(\tilde{\xi}_0^2), \\ \zeta_{12} &= D_x(\tilde{\eta}_1) - w_{1t} D_x(\tilde{\xi}_0^1) - w_{1x} D_x(\tilde{\xi}_0^2).\end{aligned}\tag{28}$$

А именно, мы используем условия инвариантности

$$\begin{aligned}X^*(u_0 - w_{0x})|_{w_{0x}=u_0, w_{0t}=v_0} &= 0, & X^*(v_0 - w_{0t})|_{w_{0x}=u_0, w_{0t}=v_0} &= 0, \\ X^*(u - w_x)|_{w_x=u, w_t=v} &= 0, & X^*(v - w_t)|_{w_x=u, w_t=v} &= 0.\end{aligned}\tag{29}$$

Кроме того, имеем

$$\begin{aligned}\eta_{10} &= \zeta_{02}|_{w_{0x}=u_0, w_{0t}=v_0} = a_6 u_0 + a_9, \\ \eta_{20} &= \zeta_{01}|_{w_{0x}=u_0, w_{0t}=v_0} = (a_6 + a_4 - a_3) v_0 + a_5, \\ \eta_{11} &= \zeta_{12}|_{w_{1x}=u_1, w_{1t}=v_1} = (a_8 - a_4 + a_3) u_1, \\ \eta_{21} &= \zeta_{11}|_{w_{1x}=u_1, w_{1t}=v_1} = a_8 v_1 + a_7,\end{aligned}$$

что дает нам оставшиеся координаты оператора X .

Наоборот, стартовав с классификации системы (3), (4), принимая во внимание соотношения (28), из (29) мы получаем

$$\begin{aligned}\eta_{10} &= \zeta_{02}|_{w_{0x}=u_0, w_{0t}=v_0} = a_6 u_0 + a_9, \\ \eta_{20} &= \zeta_{01}|_{w_{0x}=u_0, w_{0t}=v_0} = (a_6 + a_4 - a_3)v_0 + a_5, \\ \eta_{11} &= \zeta_{12}|_{w_{1x}=u_1, w_{1t}=v_1} = (a_8 - a_4 + a_3)u_1, \\ \eta_{21} &= \zeta_{11}|_{w_{1x}=u_1, w_{1t}=v_1} = a_8 v_1 + a_7.\end{aligned}$$

Из последних формул легко вывести соотношения между $\tilde{\eta}_0$ и $\tilde{\eta}_1$.

5. ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

На основании теоремы 1 мы можем заключить, что для нахождения инвариантных решений уравнений (3)–(5) нет необходимости применять редукцию ко всем уравнениям, достаточно редукцировать только одно. Очевидно, что удобнее применить редукцию к уравнению (5), поскольку решения уравнений (3), (4) получаются дифференцированием.

Чтобы построить приближенные решения для наших моделей, начнем с классификации уравнения (5). Напомним [7], что ассоциированная основная приближенная алгебра Ли $\mathcal{A}pprox\mathcal{L}\mathcal{P}$ для уравнения (5) является семимерной и порождается операторами

$$\begin{aligned}X_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, & X_2 &= \frac{\partial}{\partial x}, & X_3 &= \frac{\partial}{\partial w_0}, & X_4 &= t \frac{\partial}{\partial w_0}, \\ X_5 &= t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + w_0 \frac{\partial}{\partial w_0}, & X_6 &= \frac{\partial}{\partial w_1}, & X_7 &= t \frac{\partial}{\partial w_1}.\end{aligned}$$

Классификация функций $f(w_{0x})$ и $\lambda(w_{0x})$ приведена в табл. 2.

ТАБЛИЦА 2. Классификация функций $f(w_{0x})$ и $\lambda(w_{0x})$ и соответствующие расширения алгебры $\mathcal{A}pprox\mathcal{L}\mathcal{P}$. Здесь $f_0, \lambda_0, p \neq 0, s$ и q – определяющие константы.

Случай	$f(w_{0x})$ и $\lambda(w_{0x})$	Расширения алгебры $\mathcal{A}pprox\mathcal{L}\mathcal{P}$
I	$f(w_{0x}) = f_0 e^{w_{0x}/p},$ $\lambda(w_{0x}) = \lambda_0 e^{(1+s)w_{0x}/p}$	$X_8 = x \frac{\partial}{\partial x} +$ $+ (w_0 + 2px) \frac{\partial}{\partial w_0} + s w_1 \frac{\partial}{\partial w_1}$
II	$f(w_{0x}) = f_0 (w_{0x} + q)^{1/p},$ $\lambda(w_{0x}) = \lambda_0 (w_{0x} + q)^{(1+s)/p-1}$	$X_8 = x \frac{\partial}{\partial x} +$ $+ [(1+2p)w_0 + 2pqx] \frac{\partial}{\partial w_0} +$ $+ (2s+1)w_1 \frac{\partial}{\partial w_1}$

Применим теорему 1 и совершим нелокальные преобразования $w_x = u, w_t = v$. Тогда, начав с решения уравнения (5), мы можем получить соответствующие решения системы (3), (4).

Рассмотрим однородный вязкоупругий стержень с постоянным поперечным сечением и предположим, что его материал описывается моделью нелинейного тела Кельвина. Запишем классическое уравнение движения

$$w_{tt} = \tau_x \quad (30)$$

(постоянная плотность нормирована на единицу, а массовыми силами мы пренебрегаем), полагая, что соотношение напряжение–деформация имеет следующий вид:

$$\tau = \sigma(w_x) + \lambda(w_x)w_{xt}.$$

Здесь τ – напряжение, x – координата поперечного сечения вдоль длины стержня, $w(t, x)$ – смещение сечения в момент времени t относительно положения покоя, $\sigma(w_x)$ – упругое натяжение (w_x – деформация) и $\lambda(w_x)w_{xt}$ – вязкая компонента напряжения. Уравнение (30) сводится к уравнению (1).

Теперь, чтобы найти инвариантные решения, мы проводим редукцию уравнения (5), отвечающую линейной комбинации оператора X_5 и оператора X_8 для случая II из табл. 2. Из соответствующих инвариантных условий на поверхности получаем следующее представление различных членов в разложении функции w :

$$w_0 = t^{(a_8(p+1)+a_5)/a_5} \psi(\omega) - qx, \quad w_1 = t^{a_8(1+2s)/a_5} \phi(\omega);$$

это представление дает инвариантное решение в первом порядке приближения по ε , при этом $\omega = xt^{-(a_8+a_5)/a_5}$ является переменной подобия. Функции ψ и ϕ должны удовлетворять следующей системе уравнений, к которым сводится уравнение (5) при использовании оператора $a_5 X_5 + a_8 X_8$:

$$\begin{aligned} & [(a_5 + a_8)\omega]^2 \psi'' - a_8(1 + 2p)(a_5 + a_8)\omega\psi' - a_5^2 f_0(\psi')^{1/p} \psi'' + \\ & + a_8(1 + p)(a_5 + a_8 + a_8 p)\psi = 0, \\ & a_8 p(1 + 2s)(a_8 - a_5 + 2a_8 s)(\psi')^2 \phi - a_5^2 f_0(\psi')^{1+1/p}(\psi''\phi' + p\psi'\phi'') - \\ & - a_5 \lambda_0(\psi')^{(1+s)/p} [(a_5 + a_8)(p - 1 - s)\omega(\psi'')^2 - \\ & - p(a_5 - a_8 - 2a_8 s)\psi'\psi'' - p(a_5 + a_8)\omega\psi'\psi'''] + \\ & + p(\psi')^2 \omega(a_5 + a_8)[(2a_5 - a_8 - 4a_8 s)\phi' + (a_5 + a_8)\omega\phi''] = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Теперь, чтобы найти решения, представляющие физический интерес, рассмотрим напряжение вида [16]

$$\sigma(w_x) = \sigma_0 \ln(1 + w_x). \quad (32)$$

Таким образом, мы имеем дело со случаем II из табл. 2, где нам следует положить $f_0 = \sigma_0$, $p = -1$, $q = 1$. Решая систему (31) и положив, например, $s = -1/2$ и $a_8 = -a_5$, получаем приближенное решение уравнения (5) с точностью до первого порядка по ε :

$$\begin{aligned} w(t, x, \varepsilon) = & \sqrt{\sigma_0} t^2 \operatorname{tg} \frac{x + K_1}{\sqrt{\sigma_0}} - x + \\ & + \varepsilon \left[\frac{2\lambda_0}{\sqrt{\sigma_0}} \ln \left(\sin \frac{x + K_1}{\sqrt{\sigma_0}} \right) + \sqrt{\sigma_0} \operatorname{tg} \frac{x + K_1}{\sqrt{\sigma_0}} \right] + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (33)$$

где K_1 – константа интегрирования.

Теперь, начав с полученного решения, с использованием теоремы 1 и нелокальных преобразований $w_x = u, w_t = v$ мы можем получить решение системы (3), (4) с точностью до первого порядка по ε простым дифференцированием:

$$\begin{aligned} u &= (t^2 + \varepsilon) \sec^2 \frac{x + K_1}{\sqrt{\sigma_0}} - 1 - \frac{2\varepsilon\lambda_0}{\sigma_0} \operatorname{tg} \frac{x + K_1}{\sqrt{\sigma_0}}, \\ v &= 2\sqrt{\sigma_0} t \operatorname{tg} \frac{x + K_1}{\sqrt{\sigma_0}}. \end{aligned}$$

Еще одно решение, представляющее физический интерес, можно получить, рассмотрев напряжение следующего вида:

$$\sigma(w_x) = -\sigma_0 \left(\frac{3T_0}{\rho V_0^2} \right)^3 \left(\frac{3T_0}{\rho V_0^2} + w_x \right)^{-3} + \sigma_0. \quad (34)$$

Оно моделирует идеально мягкий материал [17], [18], основной особенностью которого является лагранжева скорость звука, монотонно убывающая до нуля, когда u неограниченно возрастает. Мы имеем дело со случаем II табл. 2, выбрав константы

$$f_0 = 3\sigma_0 \left(\frac{3T_0}{\rho V_0^2} \right)^3, \quad p = -\frac{1}{4}, \quad q = \frac{3T_0}{\rho V_0^2}.$$

Получаем при $a_5 = -a_8(1 + 2p)$ решение уравнения (5) с точностью до первого порядка по ε :

$$\begin{aligned} w(t, x, \varepsilon) &= 2 \left[3\sigma_0 \left(\frac{3T_0}{\rho V_0^2} \right)^3 \right]^{1/4} \sqrt{t(x + K_1)} - \frac{3T_0}{\rho V_0^2} (x + K_1) + \\ &+ \varepsilon \left(\frac{x + K_1}{t} \right)^{1+2s} \frac{\lambda_0(1+s) \ln[t(x + K_1)]}{(3+4s)} \left[3\sigma_0 \left(\frac{3T_0}{\rho V_0^2} \right)^3 \right]^{-(1+s)} + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Соответствующее приближенное решение системы (3), (4) находится легко.

Список литературы

- [1] В. А. Байков, Р. К. Газизов, Н. Х. Ибрагимов, *Матем. сб.*, **136(178)**:4(8) (1988), 435–450.
- [2] R. K. Gazizov, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **3**:1–2 (1996), 96–101.
- [3] R. K. Gazizov, *J. Math. Anal. Appl.*, **213**:1 (1997), 202–228.
- [4] N. H. Ibragimov, *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations*, v. 1–3, CRC Press, Boca Raton, FL, 1994, 1995.
- [5] W. I. Fushchych, W. M. Shtelen, N. I. Serov, *Symmetry Analysis and Exact Solutions of Equations of Nonlinear Mathematical Physics*, Mathematics and Its Applications, **246**, Kluwer, Dordrecht, 1993.
- [6] A. Valenti, “Approximate symmetries for a model describing dissipative media”, *Proceedings of 10th International Conference in Modern Group Analysis (MOGRAN X)* (Larnaca, Cyprus, October 24–31, 2004), eds. N. H. Ibragimov, C. Sophocleous, P. A. Damianou, Blekinge Institute of Technology, Karlskrona, Sweden, 2005, 236–243.
- [7] M. Ruggieri, A. Valenti, *Bound. Value Probl.*, **2013** (2013), 143, 8 pp.
- [8] M. Ruggieri, M. P. Speciale, *Acta Appl. Math.*, **132**:1 (2014), 549–559.

- [9] A. Valenti, “Approximate symmetries of aviscoelastic model”, *WASCOM 2007*, Proceedings of 14th Conference on Waves and Stability in Continuous Media (Baia Samuele, Sicily, Italy, 30 June–7 July, 2007), eds. N. Manganaro, R. Monaco, S. Rionero, World Sci., Singapore, 2008, 582–588.
- [10] M. Ruggieri, A. Valenti, *J. Math. Phys.*, **50**:6 (2009), 063506, 9 pp.
- [11] M. Ruggieri, A. Valenti, *J. Math. Phys.*, **52**:4 (2011), 043520, 7 pp.
- [12] M. Ruggieri, *Abstr. Appl. Anal.*, **2012** (2012), 237135, 7 pp.
- [13] C. M. Dafermos, *J. Differ. Equ.*, **6**:1 (1969), 71–86.
- [14] R. C. MacCamy, *Indiana Univ. Math. J.*, **20**:3 (1971), 231–238.
- [15] M. Ruggieri, M. P. Speciale, *Ricerche Mat.*, 2016, 8 pp., DOI: 10.1007/s11587-016-0282-z.
- [16] G. Capriz, “Waves in strings with non-local response”, *Mathematical Problems in Continuum Mechanics*, Internal Report No. 13 (Trento, 12–17, January, 1981), CRM, Trento, 1981, 12–17.
- [17] H. M. Cekirge, E. Varley, *Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A*, **273**:1234 (1973), 261–313.
- [18] C. Rogers, W. F. Shadwick, *Bäcklund Transformations and Their Applications*, Mathematics in Science and Engineering, **161**, Academic Press, New York, 1982.