Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. К. Нуччи, Вездесущие симметрии, *ТМФ*, 2016, том 188, номер 3, 459–469

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9082>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 13:39:55

© 2016 г.

М. К. Нуччи*

ВЕЗДЕСУЩИЕ СИММЕТРИИ

Представлен обзор некоторых недавних работ, посвященных проблеме квантования с сохранением нётеровских симметрий, нахождению скрытой линейности в суперинтегрируемых системах и демонстрации того, что нелокальные симметрии на самом деле являются локальными. В частности, выведено уравнение Шредингера изохронной модели “золотой рыбки” Калоджеро, для чего использована его связь с уравнением Дарвина. Доказана линейность классической суперинтегрируемой системы в плоскости непостоянной кривизны и найдены точечные симметрии Ли (также интерпретирующиеся как λ -симметрии), которые соответствуют нелинейным симметриям цепочки Риккати.

Ключевые слова: симметрии Ли и Нётер, классическое квантование, суперинтегрируемость, нелокальные симметрии.

DOI: 10.4213/tmf9082

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье мы поясняем на примерах некоторые результаты наших недавних работ, которые включают в себя:

- квантование с сохранением нётеровских симметрий,
- поиск скрытой линейности суперинтегрируемых систем,
- демонстрацию того, что нелокальные симметрии на самом деле являются локальными.

В разделе 2 мы применяем квантование, сохраняющее нётеровские симметрии [1], к N ротаторам в плоскости и к соответствующей изохронной модели “золотой рыбки” [2]. В разделе 3 мы показываем, что суперинтегрируемая система в двумерном пространстве непостоянной кривизны, заданная в работе [3], является линеаризуемой. Много дополнительных примеров и некоторую гипотезу можно найти в работе [4]. В разделе 4 мы показываем, что группа нелокальных полных симметрий

М. К. Нуччи выражает свою признательность за финансовую поддержку Italian Ministry of University and Scientific Research (проект PRIN 2010-2011, Prot. 2010JJ4KPA_004, “Geometric and analytic theory of Hamiltonian systems in finite and infinite dimensions”).

*Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Perugia and INFN, Sezione Perugia, Perugia, Italy. E-mail: nucci@unipg.it

каждого элемента цепочки Риккати [5], которые были определены в работе [6] и заново истолкованы как λ -симметрии в работе [7], на самом деле является группой точечных симметрий Ли соответствующих систем первого порядка.

2. КВАНТОВАНИЕ ИЗОХРОННОЙ МОДЕЛИ “ЗОЛОТОЙ РЫБКИ”

Существуют различные методы описания динамики квантовых систем, среди них следующие:

- 1) описание с помощью зависящего от времени уравнения Шредингера вместе с соответствующим уравнением непрерывности для плотности вероятности;
- 2) описание, использующее временной пропагатор, также называемый ядром Фейнмана, или пространственным представлением функции Грина;
- 3) использование зависящей от времени функции Вигнера.

В работе [8] все три метода были связаны посредством динамического инварианта, называемого инвариантом Ермакова. Мы рассматриваем квантование классических задач путем нахождения для них зависящего от времени уравнения Шредингера.

В работе [9] был сделан вывод о том, что симметрии Ли следует сохранять, если необходимо последовательное квантование. В работе [10] (см. пример 18) был представлен альтернативный гамильтониан простого гармонического осциллятора, полученный с помощью нелинейного канонического преобразования классического гамильтониана гармонического осциллятора. Этот альтернативный гамильтониан был использован в работе [11] для демонстрации того, к каким абсурдным результатам приводят обычные схемы квантования¹⁾. В работе [1] была предложена схема квантования, сохраняющая нётеровские симметрии, которая применялась к примеру Гольдштейна, чтобы вывести правильное уравнение Шредингера. В работе [15] такая же схема квантования использовалась, чтобы квантовать уравнение Риккати второго порядка, а в работе [16] было выполнено квантование динамики заряженных частиц в однородном магнитном поле и неизохронной системы “золотой рыбки” Калоджеро. В статье [17] этот метод позволил получить уравнение Шредингера для уравнения, связанного с “золотой рыбкой” Калоджеро, в работе [18] он же дал уравнение Шредингера для двух нелинейных уравнений, в какой-то степени связанных с задачей Римана [19]. В работе [20] было показано, что условие сохранения нётеровских симметрий непосредственно приводит к уравнению Шредингера в импульсном пространстве нелинейного осциллятора типа осциллятора Льева из работы [21], а в работе [22] этот же результат был получен для семейства квадратичного уравнения типа Льева [23].

Если рассматривается система уравнений второго порядка

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, \quad (1)$$

которая получается из вариационного принципа с лагранжианом первого порядка, то метод, который был предложен в работе [1], дает уравнение Шредингера. План этого метода следующий.

1. Находим симметрии Ли уравнений Лагранжа:

$$\Upsilon = W(t, \mathbf{x})\partial_t + \sum_{k=1}^N W_k(t, \mathbf{x})\partial_{x_k}.$$

¹⁾Такие, как нормальное упорядочение [12], [13] и квантование Вейля [14].

2. Среди них находим нётеровские симметрии

$$\Gamma = V(t, \mathbf{x})\partial_t + \sum_{k=1}^N V_k(t, \mathbf{x})\partial_{x_k}.$$

При этом может потребоваться найти лагранжиан, дающий максимально возможное число нётеровских симметрий [24]–[27].

3. Выводим уравнение Шредингера²⁾, допускающее эти нётеровские симметрии Ли,

$$2i\Psi_t + \sum_{k,j=1}^N f_{kj}(\mathbf{x})\Psi_{x_j x_k} + \sum_{k=1}^N h_k(\mathbf{x})\Psi_{x_k} + f_0(\mathbf{x})\Psi = 0 \quad (2)$$

с симметриями Ли

$$\Omega = V(t, \mathbf{x})\partial_t + \sum_{k=1}^N V_k(t, \mathbf{x})\partial_{x_k} + G(t, \mathbf{x}, \Psi)\partial_\Psi,$$

не добавляя никаких других симметрий, кроме двух симметрий, которые присутствуют в любом линейном однородном дифференциальном уравнении в частных производных, а именно, $\Psi\partial_\Psi$ и $\alpha(t, \mathbf{x})\partial_\Psi$, где $\alpha = \alpha(t, \mathbf{x})$ – любое решение уравнения Шредингера (2).

Если систему (1) можно линеаризовать с помощью точечного преобразования и если она обладает максимальным числом допустимых точечных симметрий Ли, а именно имеет $N^2 + 4N + 3$ симметрий, то, как доказано в работах [28], [29], алгебра симметрий Ли с максимальной размерностью для системы из N уравнений второго порядка является изоморфной алгебре $sl(N + 2, \mathbb{R})$, а соответствующие нётеровские симметрии порождают алгебру Ли g^V размерности $(N^2 + 3N + 6)/2$, структуру которой (разложение Леви–Мальцева и реализацию с помощью матричной алгебры) можно определить. Также было доказано, что соответствующая линейная система имеет вид

$$\mathbf{y}''(s) + 2A_1(s)\mathbf{y}'(s) + A_0(s)\mathbf{y}(s) + \mathbf{b}(s) = 0, \quad (3)$$

где $(N \times N)$ -матрицы A_0, A_1 удовлетворяют уравнению

$$A_0(s) = A_1'(s) + A_1(s)^2 + a(s)\mathbb{I} \quad (4)$$

и a – скалярная функция.

Следовательно, если система (1) допускает $sl(N + 2, \mathbb{R})$ в качестве алгебры симметрий Ли, то алгоритм, который дает уравнение Шредингера, можно переформулировать следующим образом [20].

1. Находим линеаризующее преобразование, которое не меняет время, как это требуется в нерелятивистской квантовой механике.

2. Применяя линеаризацию к стандартному лагранжиану соответствующей линейной системы (3), получаем лагранжиан, который допускает максимальное число нётеровских симметрий³⁾.

²⁾Мы полагаем $\hbar = 1$ без потери общности.

³⁾В работе [29] было показано, что любой диффеоморфизм между двумя системами дифференциальных уравнений второго порядка переводит нётеровские симметрии в нётеровские симметрии, следовательно, лагранжиан единствен с точностью до диффеоморфизма.

3. Применяем линеаризующее преобразование к уравнению Шредингера соответствующей классической линейной задачи. Это дает уравнение Шредингера, соответствующее системе (1).

Такое квантование совместно с классическими свойствами системы: симметрии Ли полученного уравнения Шредингера соответствуют нётеровским симметриям, допускаемым лагранжианом системы (1).

Рассмотрим N плоских роторов – двумерных заряженных частиц в однородном магнитном поле. В работе [16] для случая одного плоского ротора, записанного в координатах x, y , мы показали, что сохранение восьми нётеровских симметрий его классического лагранжиана

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{\omega}{2}(y\dot{x} - x\dot{y}) \quad (5)$$

дает уравнение Шредингера, которое было выведено Дарвиным [30]:

$$2i\Psi_t + \psi_{xx} + \Psi_{yy} - i\omega(y\Psi_x - x\Psi_y) - \frac{\omega^2}{4}(x^2 + y^2)\Psi = 0. \quad (6)$$

Квантование одного ротора недавно обсуждалось в работе [31].

В комплексных переменных уравнения Ньютона для N роторов в плоскости имеют вид

$$\ddot{r}_k = i\omega\dot{r}_k \quad (k = 1, \dots, N). \quad (7)$$

У этой системы бесконечно много лагранжианов, среди которых имеются по крайней мере два лагранжиана L_0 и L , допускающие максимальное число нётеровских симметрий⁴⁾:

$$L_0 = \frac{e^{-i\omega t}}{2} \sum_{k=1}^N \dot{r}_k^2, \quad L = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{2} \dot{r}_k \dot{\tilde{r}}_k + \frac{i\omega}{4} (\tilde{r}_k \dot{r}_k - r_k \dot{\tilde{r}}_k) \right). \quad (8)$$

Подстановка $r_k = x_k + iy_k$, $\tilde{r}_k = x_k - iy_k$ с $x_k, y_k \in \mathbb{R}$ в лагранжиан L дает

$$L = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{2}(\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2) + \frac{\omega}{2}(y_k\dot{x}_k - x_k\dot{y}_k) \right), \quad (9)$$

и уравнения Лагранжа (7) принимают вид

$$\ddot{x}_k = -\omega\dot{y}_k, \quad \ddot{y}_k = \omega\dot{x}_k. \quad (10)$$

Тогда уравнение Шредингера, получающееся из условия сохранения нётеровских симметрий, записывается как

$$2i\Psi_t + \sum_{k=1}^N \left(\Psi_{x_k x_k} + \Psi_{y_k y_k} - i\omega(y_k\Psi_{x_k} - x_k\Psi_{y_k}) - \frac{\omega^2}{4}(x_k^2 + y_k^2)\Psi \right) = 0. \quad (11)$$

⁴⁾Заметим, что лагранжиан L_0 дает N уравнений Лагранжа (7) и, следовательно, обладает $(N^2 + 3N + 6)/2$ нётеровскими симметриями, тогда как лагранжиан L дает $2N$ уравнений Лагранжа, поскольку среди них имеются уравнения для комплексно-сопряжённых функций $\tilde{r}_k$. Следовательно, L допускает $2N^2 + 3N + 3$ нётеровских симметрий Нётер.

Действительно, уравнение (11) допускает алгебру симметрий Ли размерности $2N^2 + 3N + 3 + 1 + \infty$. Например, для $N = 2$ семнадцать нётеровских симметрий, допускаемых лагранжианом L (9), порождаются следующими операторами:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_1 &= \partial_t, \\
 \Gamma_2 &= 2 \cos(\omega t) \partial_t - (\cos(\omega t) \omega y_1 + \sin(\omega t) \omega x_1) \partial_{x_1} + \\
 &\quad + (\cos(\omega t) \omega x_1 - \sin(\omega t) \omega y_1) \partial_{y_1} - (\cos(\omega t) \omega y_2 - \sin(\omega t) \omega x_2) \partial_{x_2} + \\
 &\quad + (\cos(\omega t) \omega x_2 - \sin(\omega t) \omega y_2) \partial_{y_2}, \\
 \Gamma_3 &= 2 \sin(\omega t) \partial_t + (\cos(\omega t) \omega x_1 - \sin(\omega t) \omega y_1) \partial_{x_1} + \\
 &\quad + (\cos(\omega t) \omega y_1 + \sin(\omega t) \omega x_1) \partial_{y_1} + (\cos(\omega t) \omega x_2 - \sin(\omega t) \omega y_2) \partial_{x_2} + \\
 &\quad + (\cos(\omega t) \omega y_2 + \sin(\omega t) \omega x_2) \partial_{y_2}, \\
 \Gamma_4 &= -y_2 \partial_{x_2} + x_2 \partial_{y_2}, \quad \Gamma_5 = -y_1 \partial_{x_1} + x_1 \partial_{y_1}, \\
 \Gamma_6 &= y_2 \partial_{x_1} - x_2 \partial_{y_1} + y_1 \partial_{x_2} - x_1 \partial_{y_2}, \quad \Gamma_7 = -x_2 \partial_{x_1} - y_2 \partial_{y_1} + x_1 \partial_{x_2} + y_1 \partial_{y_2}, \\
 \Gamma_8 &= (\cos(\omega t) x_2 + \sin(\omega t) y_2) \partial_{x_1} - (\cos(\omega t) y_2 - \sin(\omega t) x_2) \partial_{y_1} - \\
 &\quad - (\cos(\omega t) x_1 + \sin(\omega t) y_1) \partial_{x_2} + (\cos(\omega t) y_1 - \sin(\omega t) x_1) \partial_{y_2}, \\
 \Gamma_9 &= (\sin(\omega t) x_2 - \cos(\omega t) y_2) \partial_{x_1} - (\cos(\omega t) x_2 + \sin(\omega t) y_2) \partial_{y_1} + \\
 &\quad + (\cos(\omega t) y_1 - \sin(\omega t) x_1) \partial_{x_2} + (\cos(\omega t) x_1 + \sin(\omega t) y_1) \partial_{y_2}, \\
 \Gamma_{10} &= \partial_{x_2}, \quad \Gamma_{11} = \partial_{y_2}, \\
 \Gamma_{12} &= \cos(\omega t) \partial_{x_2} + \sin(\omega t) \partial_{y_2}, \quad \Gamma_{13} = -\sin(\omega t) \partial_{x_2} + \cos(\omega t) \partial_{y_2}, \\
 \Gamma_{14} &= \partial_{y_1}, \quad \Gamma_{15} = \partial_{x_1}, \\
 \Gamma_{16} &= \cos(\omega t) \partial_{x_1} + \sin(\omega t) \partial_{y_1}, \quad \Gamma_{17} = -\sin(\omega t) \partial_{x_1} + \cos(\omega t) \partial_{y_1}.
 \end{aligned}$$

При этом уравнение Шредингера (11) допускает конечную восемнадцатимерную алгебру симметрий Ли, порожденную следующими операторами:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \Gamma_1, \\
 X_2 &= \Gamma_2 + \frac{\omega}{2} (\sin(\omega t) - i\omega \cos(\omega t) (x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2)) \Psi \partial_\Psi, \\
 X_3 &= \Gamma_3 - \frac{\omega}{2} (\cos(\omega t) + i\omega \sin(\omega t) (x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2)) \Psi \partial_\Psi, \\
 X_4 &= \Gamma_4, \quad X_5 = \Gamma_5, \quad X_6 = \Gamma_6, \quad X_7 = \Gamma_7, \quad X_8 = \Gamma_8, \quad X_9 = \Gamma_9, \\
 X_{10} &= \Gamma_{10} - \frac{i\omega y_2}{2} \Psi \partial_\Psi, \quad X_{11} = \Gamma_{11} + \frac{i\omega x_2}{2} \Psi \partial_\Psi, \\
 X_{12} &= \Gamma_{12} + \frac{i\omega}{2} (y_2 \cos(\omega t) - x_2 \sin(\omega t)) \Psi \partial_\Psi, \\
 X_{13} &= \Gamma_{13} - \frac{i\omega}{2} (x_2 \cos(\omega t) + y_2 \sin(\omega t)) \Psi \partial_\Psi, \\
 X_{14} &= \Gamma_{14} + \frac{i\omega x_1}{2} \Psi \partial_\Psi, \quad X_{15} = \Gamma_{15} - \frac{i\omega y_1}{2} \Psi \partial_\Psi, \\
 X_{16} &= \Gamma_{16} + \frac{i\omega}{2} (y_1 \cos(\omega t) - x_1 \sin(\omega t)) \Psi \partial_\Psi, \\
 X_{17} &= \Gamma_{17} - \frac{i\omega}{2} (x_1 \cos(\omega t) + y_1 \sin(\omega t)) \Psi \partial_\Psi, \\
 X_{18} &= \Psi \partial_\Psi.
 \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим изохронную N -частичную модель “золотой рыбки” [2]:

$$\ddot{z}_n = i\omega \dot{z}_n + 2 \sum_{\ell=1, \ell \neq n}^N \frac{\dot{z}_n \dot{z}_\ell}{z_n - z_\ell} \quad (n = 1, \dots, N). \quad (12)$$

В работе [2] среди прочих был представлен следующий гамильтониан системы (12) (здесь p_n – импульсы):

$$H_c = \sum_{n=1}^N \left(-i\omega z_n + e^{p_n} \prod_{\ell=1, \ell \neq n}^N (z_n - z_\ell)^{-1} \right). \quad (13)$$

Он дает лагранжиан

$$L_c = \sum_{n=1}^N \left(i\omega z_n - \dot{z}_n + \ln \left(\prod_{\ell=1, \ell \neq n}^N (z_n - z_\ell) \dot{z}_n \right) \dot{z}_n \right), \quad (14)$$

который допускает только три симметрии Нётер для любого N :

$$Y_1 = \partial_t, \quad Y_2 = e^{i\omega t} \partial_t, \quad Y_3 = \sum_{k=1}^N \partial_{z_k}.$$

Следовательно, лагранжиан L_c не подходит для того, чтобы применять наш метод квантования.

Известная связь между N -частичной моделью “золотой рыбки” (12) и системой N роторов (7) задается уравнениями [32]

$$r_1 = - \sum_{n=1}^N z_n, \quad r_2 = \prod_{\substack{n, \ell=1, \\ \ell \neq n}}^N z_n z_\ell, \quad r_3 = - \prod_{\substack{n, \ell, m=1, \\ \ell, m \neq n, \\ m \neq \ell}}^N z_n z_\ell z_m, \quad \dots \quad (15)$$

В частности, если $z_n = \xi_n + i\eta_n$ и $N = 2$, то

$$x_1 = \xi_1 + \xi_2, \quad y_1 = \eta_1 + \eta_2, \quad x_2 = \xi_1 \xi_2 - \eta_1 \eta_2, \quad y_2 = \xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1. \quad (16)$$

Подстановка x_1, y_1, x_2, y_2 с учетом (16) в (9) дает лагранжиан N -частичной модели “золотой рыбки”, который допускает семнадцать нётеровских симметрий:

$$\begin{aligned} L_{\text{gf}} = & \frac{1}{2}(\xi_2^2 + \eta_2^2 + 1)(\dot{\xi}_1^2 + \dot{\eta}_1^2) + \frac{1}{2}(\xi_1^2 + \eta_1^2 + 1)(\dot{\xi}_2^2 + \dot{\eta}_2^2) + \\ & + ((\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + 1)\dot{\xi}_2 + (\xi_1 \eta_2 - \eta_1 \xi_2)\dot{\eta}_2)\dot{\xi}_1 + \\ & + ((\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + 1)\dot{\eta}_2 - (\xi_1 \eta_2 - \eta_1 \xi_2)\dot{\xi}_2)\dot{\eta}_1 + \\ & + \frac{\omega}{2}(\eta_1(\xi_2^2 + \eta_2^2) + \eta_1 + \eta_2)\dot{\xi}_1 - \frac{\omega}{2}(\xi_1(\xi_2^2 + \eta_2^2) + \xi_1 + \xi_2)\dot{\eta}_1 + \\ & + \frac{\omega}{2}(\eta_2(\xi_1^2 + \eta_1^2) + \eta_1 + \eta_2)\dot{\xi}_2 - \frac{\omega}{2}(\xi_2(\xi_1^2 + \eta_1^2) + \xi_1 + \xi_2)\dot{\eta}_2. \end{aligned} \quad (17)$$

Соответствующее уравнение Шредингера, которое получается из уравнения (11), записывается как

$$\begin{aligned}
 2i\psi_t &+ \frac{1 + \xi_1^2 + \eta_1^2}{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2} (\psi_{\xi_1 \xi_1} + \psi_{\eta_1 \eta_1}) + \\
 &+ \frac{1 + \xi_2^2 + \eta_2^2}{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2} (\psi_{\xi_2 \xi_2} + \psi_{\eta_2 \eta_2}) - \\
 &- \frac{i\omega}{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2} ((\eta_1^3 - \eta_1^2 \eta_2 + \eta_1 \xi_1^2 - 2\eta_1 \xi_1 \xi_2 + \eta_2 \xi_1^2) \psi_{\xi_1} + \\
 &+ (-\xi_1^3 - \eta_1^2 \xi_2 + \xi_1^2 \xi_2 - \xi_1 \eta_1^2 + 2\eta_1 \xi_1 \eta_2) \psi_{\eta_1} + \\
 &+ (\eta_2^3 - 2\eta_2 \xi_1 \xi_2 - \eta_1 \eta_2^2 + \eta_1 \xi_2^2 + \eta_2 \xi_2^2) \psi_{\xi_2} + \\
 &+ (-\xi_2^3 + 2\eta_2 \eta_1 \xi_2 - \xi_2 \eta_2^2 + \xi_1 \xi_2^2 - \xi_1 \eta_2^2) \psi_{\eta_2}) - \\
 &- \frac{\omega^2}{4} ((\xi_1 + \xi_2)^2 + (\eta_1 + \eta_2)^2 + (\xi_1^2 + \eta_1^2)(\xi_2^2 + \eta_2^2)) \psi = 0.
 \end{aligned} \tag{18}$$

3. СУПЕРИНТЕГРИРУЕМОСТЬ СКРЫВАЕТ ЛИНЕЙНОСТЬ

В работе [33] изучалась двумерная суперинтегрируемая система, для которой соответствующее уравнение Гамильтона–Якоби не допускает разделения переменных в любых координатах. В работе [34] было обнаружено, что уравнения Лагранжа для этой системы можно преобразовать в линейные уравнения третьего порядка, применяя метод редукции [35]. В работе [4] было показано, что в нескольких двумерных суперинтегрируемых системах скрыта линейность, включая среди многих прочих суперинтегрируемую систему Трембля–Турбинера–Винтернитца [36]. Таким образом, можно высказать гипотезу, что все суперинтегрируемые системы являются линеаризуемыми.

Далее мы иллюстрируем поиск скрытой линейности суперинтегрируемых систем, рассматривая одну из трех суперинтегрируемых систем из работы [3], где изучалась проблема суперинтегрируемости для гамильтониана

$$H = \frac{1}{4u}(p_u^2 + p_v^2) + V(u, v)$$

и были найдены такие потенциалы $V(u, v)$, что гамильтониан H допускает по крайней мере два дополнительных квадратичных интеграла. Среди этих трех суперинтегрируемых систем существует система с гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4u}(p_u^2 + p_v^2) + \frac{a}{u},$$

для которого уравнения Гамильтона имеют вид

$$\begin{aligned}
 \dot{u} &= p_u, & \dot{v} &= p_v, \\
 \dot{p}_u &= \frac{p_v^2 - p_u^2}{2u} + \frac{a}{2u^3}, & \dot{p}_v &= -\frac{p_u p_v}{u}.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Получающийся из гамильтониана $\mathcal{H}$ лагранжиан задается как

$$\mathcal{L} = (\dot{u}^2 + \dot{v}^2)u - \frac{a}{u},$$

а уравнения Лагранжа

$$\ddot{u} = \frac{\dot{v}^2 - \dot{u}^2}{2u} + \frac{a}{2u^3}, \quad \ddot{v} = -\frac{\dot{u}\dot{v}}{u}$$

допускают трехмерную алгебру точечных симметрий Ли, порождающуюся следующими операторами:

$$\Omega_1 = \partial_t, \quad \Omega_2 = \partial_v, \quad \Omega_3 = 2t\partial_t + u\partial_u + v\partial_v. \quad (20)$$

Лагранжиан $\mathcal{L}$ обладает двумя нётеровскими симметриями, порожденными операторами Ω_1 и Ω_2 с соответствующими первыми интегралами

$$I_1 = (\dot{u}^2 + \dot{v}^2)u + \frac{a}{u}, \quad I_2 = u\dot{v}.$$

Очевидно, I_1 совпадает с гамильтонианом $\mathcal{H}$.

Мы применяем метод редукции [35] к уравнениям Гамильтона (19), так как они являются автономными. Если выбрать v в качестве новой независимой переменной, то система (19) сведется к следующим трем уравнениям:

$$\frac{du}{dv} = \frac{p_u}{p_v}, \quad \frac{dp_u}{dv} = \frac{p_v^2 - p_u^2}{2up_v} + \frac{a}{2u^3p_v}, \quad \frac{dp_v}{dv} = -\frac{p_u}{u}. \quad (21)$$

Подставим $p_u = p_v \frac{du}{dv}$ из первого уравнения системы (21), тогда третье уравнение примет вид

$$u \frac{dp_v}{dv} + p_v \frac{du}{dv} = 0$$

и может быть проинтегрировано: $up_v = A = \text{const}$. Следовательно, второе уравнение системы (21) можно переписать как уравнение второго порядка

$$\frac{d^2u}{dv^2} = \frac{1}{2u} \frac{du}{dv} + \frac{a + A^2}{2A^2u}, \quad (22)$$

которое допускает трехмерную алгебру симметрий Ли $sl(2, \mathbb{R})$, порожденную следующими операторами:

$$Y_1 = v^2\partial_v + 2uv\partial_u, \quad Y_2 = v\partial_v + u\partial_u, \quad Y_3 = \partial_v.$$

Теперь воспользуемся общим методом, описанным в работе [37], который можно применить к любому обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка, допускающему алгебру симметрий Ли $sl(2, \mathbb{R})$. Решая уравнение (22) относительно A и вычисляя производную по v , мы получаем линейное уравнение третьего порядка

$$\frac{d^3u}{dv^3} = 0.$$

Таким образом, мы показали, что суперинтегрируемая гамильтонова система (19) является линеаризуемой.

4. НЕЛОКАЛЬНЫЕ СИММЕТРИИ ЯВЛЯЮТСЯ НА САМОМ ДЕЛЕ ЛОКАЛЬНЫМИ

В работе [6] была введена группа нелокальных полных симметрий⁵⁾ для каждого элемента цепочки Риккати⁶⁾ [5]. В работе [7] было показано, что нелокальные полные симметрии для каждого элемента цепочки Риккати можно интерпретировать как λ -симметрии. Мы докажем, что такие нелокальные симметрии образуют полную группу точечных симметрий Ли соответствующих систем первого порядка.

Начнем с уравнения Риккати первого порядка

$$\dot{u} = -u^2. \quad (23)$$

Среди бесконечного числа его симметрий Ли существуют две симметрии $\Gamma_1 = u(u\partial_u)$ и $\Gamma_2 = u(tu-1)\partial_u$, которые образуют двумерную неабелеву интранзитивную алгебру Ли⁷⁾. Легко показать, что эти две симметрии порождают полную группу симметрий уравнения (23): их инвариант первого порядка в точности совпадает с уравнением (23). Действительно, если мы рассмотрим уравнение

$$\dot{u} = f(t, u), \quad (24)$$

в котором $f(t, u)$ – произвольная функция от t, u , и зададим Γ_1 и Γ_2 как его симметрии Ли, то $f(t, u) \equiv -u^2$.

Далее рассмотрим уравнение Риккати второго порядка и запишем его как систему уравнений первого порядка

$$\dot{u}_1 = u_2, \quad \dot{u}_2 = -(3u_1u_2 + u_1^3). \quad (25)$$

Среди бесконечного числа его симметрий Ли имеются следующие три:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= R_1(u_1\partial_{u_1} + (D - u_1)(u_1)\partial_{u_2}), \\ \Gamma_2 &= R_1((tu_1 - 1)\partial_{u_1} + (D - u_1)(tu_1 - 1)\partial_{u_2}), \\ \Gamma_3 &= R_1((t^2u_1 - 2t)\partial_{u_1} + (D - u_1)(t^2u_1 - 2t)\partial_{u_2}), \end{aligned}$$

где $D = \partial_t + u_2\partial_{u_1}$ и $R_1 = u_2 + u_1^2$. Эти три симметрии порождают полную группу симметрий системы (25).

Уравнение третьего порядка в цепочке Риккати может быть записано как следующая система первого порядка:

$$\dot{u}_1 = u_2, \quad \dot{u}_2 = u_3, \quad \dot{u}_3 = -(4u_1u_3 + 3u_2^2 + 6u_1^2u_2 + u_1^4). \quad (26)$$

Среди бесконечного числа ее симметрий Ли имеются следующие четыре:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= R_2(u_1\partial_{u_1} + (D - u_1)(u_1)\partial_{u_2} + (D - u_1)^2(u_1)\partial_{u_3}), \\ \Gamma_2 &= R_2((tu_1 - 1)\partial_{u_1} + (D - u_1)(tu_1 - 1)\partial_{u_2} + (D - u_1)^2(tu_1 - 1)\partial_{u_3}), \\ \Gamma_3 &= R_2((t^2u_1 - 2t)\partial_{u_1} + (D - u_1)(t^2u_1 - 2t)\partial_{u_2} + (D - u_1)^2(t^2u_1 - 2t)\partial_{u_3}), \\ \Gamma_4 &= R_2((t^3u_1 - 3t^2)\partial_{u_1} + (D - u_1)(t^3u_1 - 3t^2)\partial_{u_2} + (D - u_1)^2(t^3u_1 - 3t^2)\partial_{u_3}), \end{aligned}$$

⁵⁾В работе [38] эта группа была определена как группа, которая полностью определяет данное дифференциальное уравнение через его алгебраическое представление. В этой же статье была определена группа нелокальных полных симметрий задачи Кеплера. Однако в работе [35] было показано, как эти симметрии получаются из точечных симметрий Ли основных систем.

⁶⁾Также называемой иерархией Риккати [39] и последовательностью Риккати [40].

⁷⁾Эта алгебра принадлежит к типу IV в классификации Ли действительных двумерных алгебр на плоскости [41], так как $[\Gamma_1, \Gamma_2] = \Gamma_1$ и $\Gamma_1 \vee \Gamma_2 = 0$.

где $D = \partial_t + u_2 \partial_{u_1} + u_3 \partial_{u_2}$ и $R_2 = u_3 + 3u_1 u_2 + u_1^3$. Эти четыре симметрии порождают полную группу симметрий системы (26).

Итак, полная группа симметрий системы первого порядка, которая соответствует уравнению R_n n -го порядка в цепочке Риккати, порождается следующими $n + 1$ операторами:

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= R_{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} (D - u_1)^j (u_1) \partial_{u_{j+1}}, \\ \Gamma_1 &= R_{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} (D - u_1)^j (tu_1 - 1) \partial_{u_{j+1}}, \\ &\vdots \\ \Gamma_{n+1} &= R_{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} (D - u_1)^j (t^n u_1 - nt^{n-1}) \partial_{u_{j+1}},\end{aligned}$$

где $D = \partial_t + \sum_{j=1}^{n-1} u_{j+1} \partial_{u_j}$ и R_{n-1} является уравнением $(n - 1)$ -порядка в цепочке Риккати.

Список литературы

- [1] М. К. Нуччи, *ТМФ*, **168**:1 (2011), 162–170.
- [2] F. Calogero, *Phys. D*, **152–153** (2001), 78–84.
- [3] E. G. Kalnins, J. M. Kress, P. Winternitz, *J. Math. Phys.*, **43**:2 (2002), 970–983.
- [4] G. Gubbiotti, M. C. Nucci, *Are all classical superintegrable systems in two-dimensional space linearizable?*, [arXiv:1602.00705](#).
- [5] W. F. Ames, *Nonlinear Ordinary Differential Equations in Transport Processes*, Mathematics in Science and Engineering Series, **42**, Academic Press, New York, 1968.
- [6] K. Andriopoulos, P. G. L. Leach, A. Maharaj, *Appl. Math. Inf. Sci.*, **5**:3 (2011), 525–546.
- [7] C. Muriel, J. L. Romero, *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, **16** (2014), 191–201.
- [8] D. Schuch, M. Moshinsky, *Phys. Rev. A*, **73**:6 (2006), 062111, 10 pp.
- [9] M. C. Nucci, P. G. L. Leach, K. Andriopoulos, *J. Math. Anal. Appl.*, **319**:1 (2006), 357–368.
- [10] Г. Голдстейн, *Классическая механика*, Наука, М., 1975.
- [11] M. C. Nucci, P. G. L. Leach, *J. Math. Anal. Appl.*, **406**:1 (2013), 219–228.
- [12] D. Bjorken, S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, 1964.
- [13] W. H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation*, John Wiley and Sons, New York, 1990.
- [14] H. Weyl, *Z. Phys.*, **46** (1927), 1–46.
- [15] M. C. Nucci, *J. Phys.: Conf. Ser.*, **380**:1 (2012), 012008, 12 pp.
- [16] M. C. Nucci, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **20**:3 (2013), 451–463.
- [17] M. C. Nucci, *Miskolc Math. Notes*, **14**:2 (2013), 461–474.
- [18] M. C. Nucci, *J. Phys.: Conf. Ser.*, **482**:1 (2014), 012032, 10 pp.
- [19] G. Sierra, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **45**:5 (2012), 055209, 28 pp.
- [20] G. Gubbiotti, M. C. Nucci, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **21**:2 (2014), 248–264.
- [21] V. Chithiika Ruby, M. Senthilvelan, M. Lakshmanan, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **45**:38 (2012), 382002, 10 pp.
- [22] G. Gubbiotti, M. C. Nucci, *J. Math. Anal. Appl.*, **422**:2 (2015), 1235–1246.
- [23] A. G. Choudhury, P. Guha, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **46**:16 (2013), 165202, 11 pp.

- [24] M. C. Nucci, P. G. L. Leach, *J. Math. Phys.*, **48**:12 (2007), 123510, 16 pp.
- [25] M. C. Nucci, P. G. L. Leach, *J. Math. Phys.*, **49**:7 (2008), 073517, 8 pp.
- [26] M. C. Nucci, K. M. Tamizhmani, *Nuovo Cimento Soc. Ital. Fis. B*, **125**:3 (2010), 255–269.
- [27] M. C. Nucci, K. M. Tamizhmani, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **17**:2 (2010), 167–178.
- [28] F. González-Gascón, A. González-López, *J. Math. Phys.*, **24**:8 (1983), 2006–2021.
- [29] A. González-López, *J. Math. Phys.*, **29**:5 (1988), 1097–1105.
- [30] C. G. Darwin, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **117**:776 (1927), 258–293.
- [31] F. Calogero, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **45**:22 (2012), 225203, 16 pp.
- [32] F. Calogero, *Isochronous Systems*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2008.
- [33] S. Post, P. Winternitz, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44**:16 (2011), 162001, 8 pp.
- [34] M. C. Nucci, S. Post, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **45**:48 (2012), 482001, 8 pp.
- [35] M. C. Nucci, *J. Math. Phys.*, **37**:4 (1996), 1772–1775.
- [36] F. Tremblay, A. V. Turbiner, P. Winternitz, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **42**:24 (2009), 242001, 10 pp.
- [37] P. G. L. Leach, *J. Math. Anal. Appl.*, **284**:1 (2003), 31–48.
- [38] J. Krause, *J. Math. Phys.*, **35**:11 (1994), 5734–5748.
- [39] M. Euler, N. Euler, P. G. L. Leach, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **14**:2 (2007), 290–310.
- [40] Н. Эйлер, П. Г. Л. Лич, *ТМФ*, **159**:1 (2009), 64–80.
- [41] S. Lie, *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen*, Teubner, Leipzig, 1912.