Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. С. Агеев, И. Я. Арефьева, М. Д. Тихановская, $(1+1)$ -
корреляторы и движущиеся массивные дефекты, *ТМФ*,
2016, том 188, номер 1, 85–120

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9085>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 17:05:30

© 2016 г. Д. С. Агеев*, И. Я. Арефьева*, М. Д. Тихановская^{†*}

(1 + 1)-КОРРЕЛЯТОРЫ И ДВИЖУЩИЕСЯ МАССИВНЫЕ ДЕФЕКТЫ

В рамках AdS/CFT-соответствия рассматриваются корреляционные функции скалярных операторов на границе пространства AdS_3 , деформированного движущейся массивной частицей. Для вычисления двухточечной корреляционной функции используются геодезическое приближение и так называемый метод перенормированных отображений, получающийся из традиционного метода отображений с учетом перенормировок. Проведено сравнение результатов, полученных с помощью метода перенормированных отображений и с помощью прямых вычислений, в которых отслеживались намотки геодезических вокруг конической сингулярности. На примерах продемонстрировано, что результаты совпадают. Показано, что корреляторы в геодезическом приближении имеют зонную структуру, которая существенно зависит от массы и скорости частиц.

Ключевые слова: AdS/CFT-соответствие, голографическая дуальность, конические дефекты, термализация.

DOI: 10.4213/tmf9085

1. ВВЕДЕНИЕ

AdS/CFT-соответствие или, точнее, двойственность калибровочные теории – гравитация [1]–[3] представляет собой мощный инструмент для изучения квантовых систем в пределе сильной связи. В силу достаточно гибкой формулировки этой дуальности область ее применений очень обширна. AdS/CFT-соответствие используется в различных областях теоретической физики: при изучении столкновения тяжелых ионов [4]–[6], в теории конденсированных сред [7]–[9], при исследовании

Работа поддержана РФФИ (грант № 14-01-00707). Д. С. Агеев поддержан Программой поддержки молодых ученых – кандидатов наук (грант МК-2510.2014.1). И. Я. Арефьева благодарит INFN за частичную поддержку в процессе написания работы.

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: ageev@mi.ras.ru, arefeva@mi.ras.ru, tikhanovskaya@mi.ras.ru

[†]Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, Россия

процессов термализации квантовой теории в пределе сильной связи [10]–[14] или энтропии запутанных состояний [15]–[17], при анализе поведения систем при резком включении сильных взаимодействий, так называемых квантовых квенчей [18], [19].

Голографически двойственной теорией для гравитации в пространстве AdS_3 является двумерная конформная теория поля. Трехмерная гравитация является топологической, следовательно, в этой теории отсутствуют распространяющиеся гравитоны. Деформация трехмерной гравитации точечной частицей приводит только к глобальным эффектам [20], [21]. Это означает, что локально пространство, деформированное точечной частицей, имеет метрику AdS_3 , но глобально оно выглядит как пространство, из которого удален клин, при этом грани клина отождествляются. Иначе говоря, наличие точечной частицы вызывает появление конической сингулярности. Рассеяние точечных частиц в пространстве с коническими сингулярностями было изучено в работе [22]. Классические и квантовые теории скалярного поля на конусе рассмотрены в ряде работ, начиная со статьи [23]. Скалярные поля в плоском пространстве с дефектами изучались в работе [24]. Космические струны в плоских пространствах M_4 и AdS_4 изучались в статьях [25]–[27], а космическая мембрана рассматривалась в рамках ТЭВ-гравитации в работе [28].

Естественно рассмотреть теорию, голографически двойственную пространству AdS_3 с точечными частицами [29]. Корреляторы в теории, дуальной пространству AdS_3 с неподвижной частицей, рассмотрены в рамках геодезического приближения в статьях [29], [30], где было замечено появление новых возбуждений в граничной теории. AdS/CFT -соответствие для AdS_3 -орбифолда, обладающего многими границами, изучено в работе [31]. В работе [32] введена новая величина в теории, двойственной конформной теории поля, названная переплетением, а также показано, что она связана с геометрией конического дефекта. В работе [33] исследованы корреляторы в теории, дуальной машине времени Готта в пространстве AdS_3 . Голографически двойственная модель для измененной конформной теории поля с дефектами изучалась в работе [34].

В настоящей работе мы продолжаем изучать граничные теории, дуальные пространству AdS_3 , деформированному массивными движущимися точечными частицами. Чтобы описать эти деформации, удобно рассмотреть AdS_3 как групповое многообразие $SL(2, \mathbb{R})$ [35]. Пространство AdS_3 с частицей – это пространство, которое остается после удаления специального подмножества, называемого клином, из пространства AdS_3 , при этом границы клина отождествляются специальным образом [21], [36]. Геодезические в этом пространстве-времени локально такие же, как и в недеформированном пространстве AdS_3 , и это кардинально упрощает нахождение корреляторов на границе пространства в геодезическом приближении. В этом приближении можно найти все геодезические, соединяющие две точки на границе. Для статической частицы можно в явном виде выписать уравнения для всех геодезических, соединяющих две точки, разделенные пространственноподобным интервалом, в координатах Дезера–Джакива [32]. Однако обобщение этих координат на случай многих частиц в явном виде отсутствует [37], что делает проблему аналитического описания всех геодезических достаточно сложной.

Мы решаем эту задачу, используя так называемый метод хирургии, который был рассмотрен ранее в работах [29], [30], [32], [33]. Как и в работе [33], мы вынуждены

использовать численные расчеты для учета всех геодезических, соединяющих две точки на границе, в присутствии движущейся частицы.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 мы напоминаем групповую структуру пространства AdS_3 и явные формулы для геодезических в этом пространстве, а также рассматриваем связь причинных и запаздывающих функций Грина для двумерной теории на цилиндре. В разделе 3 мы описываем метод отображений и строим перенормировочную процедуру. Мы называем эту процедуру методом перенормированных отображений. На нескольких примерах мы демонстрируем связь намотанных и отображенных геодезических. В разделе 4 мы показываем, что имеется зонная структура корреляторов на границе пространства AdS_3 , деформированного точечной частицей, и обсуждаем, от каких параметров зависит эта структура.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. Пространство AdS_3 как групповое многообразие. Введем обозначения и параметризацию, используемые в работе.

Пространство AdS_3 – это гиперboloид, который во вложенных координатах x_0, x_1, x_2, x_3 может быть записан как

$$-x_0^2 - x_3^2 + x_1^2 + x_2^2 = -1. \quad (2.1)$$

Мы будем использовать “бочечные” координаты (t, χ, ϕ) , которые дают решение уравнения (2.1):

$$x_3 = \text{ch } \chi \cos t, \quad x_0 = \text{ch } \chi \sin t, \quad x_1 = \text{sh } \chi \cos \phi, \quad x_2 = \text{sh } \chi \sin \phi, \quad (2.2)$$

где t – временная координата, χ – радиальная координата и ϕ – угловая координата с периодом 2π . Конформная граница пространства AdS_3 соответствует $\chi \rightarrow \infty$. В этих координатах метрика записывается как

$$ds^2 = -\text{ch}^2 \chi dt^2 + d\chi^2 + \text{sh}^2 \chi d\phi^2.$$

Мы также будем использовать координаты диска Пуанкаре, в которых $r = \text{th}(\chi/2)$, при этом метрика принимает вид

$$ds^2 = -\left(\frac{1+r^2}{1-r^2}\right)^2 dt^2 + \left(\frac{2}{1-r^2}\right)^2 (dr^2 + r^2 d\phi^2).$$

Элементы пространства AdS_3 допускают представление в виде (2×2) -матриц из группы $SL(2, \mathbb{R})$:

$$\mathbf{x} = x_3 \mathbf{1} + \sum_{\mu=0,1,2} \gamma_\mu x^\mu = \text{ch } \chi \mathbf{\Omega}(t) + \text{sh } \chi \mathbf{\Gamma}(\phi) = \begin{pmatrix} x_3 + x_2 & x_0 + x_1 \\ x_1 - x_0 & x_3 - x_2 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

где

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{\Omega}(t) = \cos t \mathbf{1} + \sin t \gamma_0, \quad \mathbf{\Gamma}(\phi) = \cos \phi \gamma_1 + \sin \phi \gamma_2. \quad (2.5)$$

Условие $\det \mathbf{x} = 1$ эквивалентно (2.1).

2.2. Точечные частицы в AdS_3 . Известно, что трехмерная гравитация является тривиальной в смысле отсутствия динамических степеней свободы. В работах [20], [21] показано, что точечная частица локально не изменяет метрику, порождая коническую сингулярность. В этом пункте мы напоминаем структуру пространства AdS_3 , деформированного точечной частицей.

2.2.1. *Покоящаяся частица в AdS_3 .* Напомним решение Дезера–Джакива [20].

Рассмотрим уравнение Эйнштейна в пространстве-времени с размерностью $d = 3$:

$$G^{\mu\nu} - \Lambda g^{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu}. \quad (2.6)$$

В случае одной покоящейся в центре пространства AdS_3 частицы тензор энергии-импульса будет иметь только одну отличную от нуля компоненту:

$$T^{00} = \frac{m}{\sqrt{-g}} N(R) \delta(R),$$

Метрика ds_{DJ}^2 в случае, когда пространство деформируется точечной покоящейся в центре пространства частицей, записывается в виде (здесь и далее m – масса частицы)

$$ds_{\text{DJ}}^2 = -N^2(R) dt^2 + \Phi(R)(dR^2 + R^2 d\tilde{\phi}^2),$$

где функции $\Phi(R)$ и $N(R)$ определяются как

$$\Phi(R) = \frac{4A^2}{\Lambda R^2((R/R_0)^A + (R/R_0)^{-A})^2}, \quad N(R) = \frac{((R/R_0)^A - (R/R_0)^{-A})}{((R/R_0)^A + (R/R_0)^{-A})}.$$

Параметр A связан с массой частицы равенством $A = 1 - 4\pi Gm$. Если сделать замену переменных

$$\text{sh } \chi = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{R}{R_0} \right)^A + \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-A} \right), \quad \phi = A\tilde{\phi},$$

то получается метрика пространства AdS_3 в “бочечных” координатах с измененным диапазоном значений угла:

$$ds^2 = -\text{ch}^2 \chi dt^2 + d\chi^2 + \text{sh}^2 \chi d\phi^2, \quad \phi \in (0, 2A\pi).$$

Рассмотрим случай покоящейся частицы на групповом языке. Покоясь в центре пространства AdS_3 , частица вырезает клин, который может быть задан двумя гранями, расположенными на поверхностях, соответствующих постоянному углу (см. рис. 1). Эти две грани отождествляются в сечениях постоянного времени. В матричном представлении первая грань клина описывается следующим образом:

$$\mathbf{x}_{1\text{-face}} = \text{ch } \chi \, \boldsymbol{\Omega}(t) + \text{sh } \chi \, \boldsymbol{\Gamma} \left(-\frac{\alpha}{2} \right). \quad (2.7)$$

Грань параметризуется двумя переменными α и t . Величина α пропорциональна массе частицы. Вторую грань клина можно получить поворотом первой на угол α . Записывая вращение в виде

$$\mathbf{x}_{\text{rot}} = u_{\text{rot}}^{-1} \mathbf{x} u_{\text{rot}}, \quad u_{\text{rot}} = \boldsymbol{\Omega} \left(-\frac{\alpha}{2} \right),$$

Рис. 1. Пространство AdS_3 , деформированное покоящейся частицей. Две плоские поверхности, задаваемые условием $\phi = \text{const}$, являются гранями, на которых происходит отождествление пространства.

получаем уравнение для второй грани

$$\mathbf{x}_{2\text{-face}} = \Omega\left(\frac{\alpha}{2}\right) \mathbf{x}_{1\text{-face}} \Omega\left(-\frac{\alpha}{2}\right). \quad (2.8)$$

Здесь $\Omega(\alpha/2)$ определяется формулой (2.5).

2.2.2. Движущаяся массивная частица в AdS_3 . Для описания пространства с массивной движущейся частицей на групповом языке удобно применить преобразование Лоренца к граням клина неподвижной частицы. Массивная частица движется периодически вдоль мировой линии внутри пространства AdS_3 , не достигая границы. Грани клина склеиваются симметрично с учетом направления движения вдоль сечений постоянного времени.

Преобразование буста в матричном представлении имеет вид

$$\mathbf{u} = \text{ch} \frac{\xi}{2} \mathbf{1} - \text{sh} \frac{\xi}{2} \gamma_2 = \text{ch} \frac{\xi}{2} \Omega(0) - \text{sh} \frac{\xi}{2} \Gamma\left(\frac{\pi}{2}\right). \quad (2.9)$$

Применяя это преобразование к граням, которые описываются формулами (2.7) и (2.8), мы получим для координат движущейся частицы

$$\mathbf{x}_{1\text{-mov-face}} = \mathbf{u}^{-1} \mathbf{x}_{1\text{-face}} \mathbf{u}, \quad \mathbf{x}_{2\text{-mov-face}} = \mathbf{u}^{-1} \mathbf{x}_{1\text{-face}} \mathbf{u}. \quad (2.10)$$

Сопоставляя равенство (2.8), связывающее две грани клина в случае неподвижной частицы, с учетом преобразований (2.10) получаем, что в пространстве AdS_3 с движущимся дефектом одну грань из другой можно получить с помощью изометрии:

$$\mathbf{x}_{2\text{-mov-face}} = \Omega_{\mathbf{u}}\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\xi}{2}\right) \mathbf{x}_{1\text{-mov-face}} \Omega_{\mathbf{u}}\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\xi}{2}\right), \quad (2.11)$$

где

$$\Omega_{\mathbf{u}}\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\xi}{2}\right) \equiv \Omega_{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^{-1}\left(\frac{\xi}{2}\right)\Omega\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\mathbf{u}\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

Таким образом, в пространстве AdS_3 с движущейся частицей изометрия действует как

$$\mathbf{x}^* = \Omega_{\mathbf{u}}^{-1} \mathbf{x} \Omega_{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} x_3^* + x_2^* & x_0^* + x_1^* \\ x_1^* - x_0^* & x_3^* - x_2^* \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

где $\mathbf{x}$ – точка в AdS_3 , определяемая формулой (2.3).

Перепишем формулу (2.3) в явном виде, используя “бочечные” координаты,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \cos t \operatorname{ch} \chi + \sin \phi \operatorname{sh} \chi & \operatorname{ch} \chi \sin t + \cos \phi \operatorname{sh} \chi \\ -\operatorname{ch} \chi \sin t + \cos \phi \operatorname{sh} \chi & \cos t \operatorname{ch} \chi - \sin \phi \operatorname{sh} \chi \end{pmatrix},$$

тогда изометрия (2.12) примет вид

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} \cos t^* \operatorname{ch} \chi^* + \sin \phi^* \operatorname{sh} \chi^* & \operatorname{ch} \chi^* \sin t^* + \cos \phi^* \operatorname{sh} \chi^* \\ -\operatorname{ch} \chi^* \sin t^* + \cos \phi^* \operatorname{sh} \chi^* & \cos t^* \operatorname{ch} \chi^* - \sin \phi^* \operatorname{sh} \chi^* \end{pmatrix}.$$

Таким образом, преобразование координат записывается как

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} t^* &= \mathcal{B}_{\xi}(\alpha) \sec t \operatorname{th} \chi \cos \phi + \operatorname{tg} t \left(1 + 2\operatorname{sh}^2 \xi \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right), \\ \operatorname{tg} \phi^* &= -2\mathcal{F}^{-1} \operatorname{tg} \phi, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\operatorname{ch} \chi^* = \operatorname{ch} \chi \left[\left(\mathcal{B}_{\xi} \operatorname{th} \chi \cos \phi + \sin t \left(1 + 2\operatorname{sh}^2 \xi \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) \right)^2 + \cos^2 t \right]^{1/2},$$

где введены обозначения

$$\mathcal{B}_{\xi}(\alpha) = \operatorname{sh} \xi \left(\sin \alpha \operatorname{tg} \phi - 2 \operatorname{ch} \xi \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right), \quad (2.14)$$

$$\mathcal{F} = \operatorname{ch} \xi (2 \sin \alpha \operatorname{tg} \phi - \cos \alpha + \cos \phi) + \sec \phi \cos(\alpha + \phi) + \cos \alpha \operatorname{ch} 2\xi - 2\operatorname{sh}^2 \xi.$$

Взяв предел $\chi \rightarrow \infty$ в (2.13), можно получить преобразование координат произвольной точки на границе пространства AdS_3 (обозначим эту точку как b):

$$\operatorname{tg} t_b^* = \mathcal{B}_{\xi}(\alpha) \sec t_b \cos \phi_b + \operatorname{tg} t_b \left(1 + 2\operatorname{sh}^2 \xi \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right), \quad \operatorname{tg} \phi_b^* = -2\mathcal{F}^{-1} \operatorname{tg} \phi_b. \quad (2.15)$$

Преобразование радиальной координаты χ вблизи границы пространства после применения изометрии задается равенством

$$e^{\chi_{nb}^*} = e^{\chi_{nb}} \sqrt{\mathcal{A}}, \quad (2.16)$$

где

$$\mathcal{A} = \left(\mathcal{B}_{\xi}(\alpha) \cos \phi_b + \sin t_b \left(1 + 2\operatorname{sh}^2 \xi \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) \right)^2 + \cos^2 t_b.$$

Выведем уравнения, определяющие грани клина. Как упомянуто выше, чтобы зафиксировать грани клина, требуется найти постоянные во времени и симметричные по углу точки, т. е. точки, фиксированные условиями $t^* = t$ и $\phi^* = -\phi$. Решая уравнение $\operatorname{tg} t = \operatorname{tg} t^*$, мы получаем выражение для граней клина:

$$\operatorname{th} \chi = \frac{2 \sin t \operatorname{sh} \xi \sin^2(\alpha/2)}{2 \operatorname{ch} \xi \sin^2(\alpha/2) \cos \phi \pm \sin \alpha \sin \phi}. \quad (2.17)$$

Рис. 2. Сечения пространства AdS_3 с массивной движущейся частицей при $t = \text{const}$. Окружность соответствует границе пространства, тонкие кривые отвечают граням клина в моменты времени $t = -\pi/2, -0.5, 0.5, \pi/2$ (слева направо для каждого графика). Угол φ – это угол между кривыми, являющимися сечениями клина при $t = \pi/2$, в точке их пересечения. Рисунки построены при $\alpha = \pi/4$ и при $\xi = 1$ (а) и $\xi = 2.5$ (б).

Рис. 3. Изображения клина (2.18) массивной движущейся частицы при $\xi = 1, \alpha = \pi/8$ (а) и $\xi = 2.5, \alpha = \pi/4$ (б) для $-\pi/2 < t < \pi/2$ (значения t меняются вдоль вертикальной оси).

Перепишем это равенство через координаты (t, ϕ, r) (напомним, что $r = \text{th}(\chi/2)$), и получим r как функцию от ϕ и t для двух граней:

$$r(\phi, t) = \text{th} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arcth} \frac{2 \sin t \operatorname{sh} \xi \sin^2(\alpha/2)}{2 \operatorname{ch} \xi \sin^2(\alpha/2) \cos \phi \pm \sin \alpha \sin \phi} \right). \quad (2.18)$$

Пересечение двух поверхностей, определяемых формулой (2.18), дает фиксированную относительно изометрии линию (или, что эквивалентно, мировую линию массивной частицы), описываемую уравнением

$$r(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \xi \sin^2 t}}{\operatorname{th} \xi \sin t}.$$

Массивная частица движется периодически по времени слева направо и обратно (с периодом $T = 2\pi$). Заметим, что если $\xi \rightarrow \infty$, то мы имеем случай безмассовой частицы, т.е. $r = \operatorname{tg}(t/2)$, что совпадает с формулами для безмассовой частицы, приведенными в работе [35]. В сечении постоянного времени t грани клина являются кривыми, пересекающимися в точке, где находится частица. Угол φ между этими двумя кривыми в точке их пересечения можно выразить следующим образом:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{4 \sin^2(\alpha/2) \sin \alpha \operatorname{ch} \xi \sqrt{1 - \sin^2 t \operatorname{th}^2 \xi}}{\sin^2 \alpha - 4 \sin^4(\alpha/2)(1 + 2 \operatorname{sh}^2 \xi \sin^2(\alpha/2))}.$$

Из этой формулы видно, что угол между двумя кривыми максимален при $t = \pm\pi/2$, если $\alpha > \pi$, и при $t = 0$, если $\alpha < \pi$ (см. рис. 2).

Трехмерные графики клина изображены на рис. 3.

2.3. Корреляционные функции на границе и геодезические в пространстве AdS_3 . Чтобы в рамках AdS/CFT -соответствия вычислить корреляционную функцию скалярного оператора Φ_Δ с большим конформным весом Δ на границе пространства AdS_3 , можно использовать геодезическое приближение [29]. В этом приближении формула для коррелятора имеет вид

$$G_\Delta(\phi_a, t_a; \phi_b, t_b) = e^{-\Delta \mathcal{L}_{\text{ren}}(\phi_a, t_a; \phi_b, t_b)}. \quad (2.19)$$

Здесь a и b – это две точки на границе пространства с координатами (ϕ_a, t_a) и (ϕ_b, t_b) . Для точек, разделенных пространственноподобным интервалом, $\mathcal{L}_{\text{ren}}(\phi_a, t_a; \phi_b, t_b)$ есть перенормированная длина геодезической, соединяющей эти точки [29], [30]. В настоящей статье мы ограничимся рассмотрением вкладов в корреляционную функцию только от пространственноподобных геодезических. Вычисление вклада в корреляционную функцию от геодезических, соединяющих точки, разделенные времениподобным интервалом, будет проведено в следующей работе.

2.3.1. Пространственноподобные точки. Напомним, как геодезическое приближение работает в пространстве AdS_3 в глобальных координатах. Рассмотрим две точки на границе с координатами (ϕ_a, t_a) и (ϕ_b, t_b) , разделенные пространственноподобным интервалом. Примем для определенности, что $\phi_b > \phi_a$. Геодезическая

в балке $(\phi, t, r) = (\phi(\lambda), t(\lambda), r(\lambda))$, соединяющая эти точки, определяется уравнениями

$$\begin{aligned}\phi_{ab}(\lambda) &= \arctg\left(\operatorname{tg} \frac{D_s[\phi_a, \phi_b]}{2} \operatorname{th} \lambda\right) + \Sigma_s[\phi_a, \phi_b], \\ t_{ab}(\lambda) &= \arctg\left(\operatorname{tg} \frac{D[t_a, t_b]}{2} \operatorname{th} \lambda\right) + \Sigma[t_a, t_b],\end{aligned}\quad (2.20)$$

и

$$r(\lambda) = \frac{\sqrt{\cos(2D[t_a, t_b]) + \operatorname{ch} 2\lambda} - \sqrt{\cos(2D[t_a, t_b]) - \cos(2D_s[\phi_a, \phi_b])}}{\sqrt{\cos(2D_s[\phi_a, \phi_b]) + \operatorname{ch} 2\lambda}}.$$

Здесь параметризация введена так, чтобы значение $\lambda = -\infty$ соответствовало точке a на границе, а $\lambda = +\infty$ соответствовало точке b на границе. В (2.20) величины $D_s[\phi_a, \phi_b]$, $D[t_a, t_b]$, $\Sigma_s[\phi_a, \phi_b]$ и $\Sigma[t_a, t_b]$ определяются как

$$\begin{aligned}D_s[\phi_a, \phi_b] &= \begin{cases} \phi_b - \phi_a, & \phi_b - \phi_a < \pi, \\ \phi_b - \phi_a - 2\pi, & \phi_b - \phi_a > \pi; \end{cases} & D[t_a, t_b] = t_b - t_a; \\ \Sigma_s[\phi_a, \phi_b] &= \begin{cases} \frac{\phi_b + \phi_a}{2}, & \phi_b - \phi_a < \pi, \\ \frac{\phi_b + \phi_a}{2} + \pi, & \phi_b - \phi_a > \pi; \end{cases} & \Sigma[t_a, t_b] = \frac{t_b + t_a}{2}.\end{aligned}\quad (2.21)$$

Заметим, что в работе [33] для геодезической использовалась другая параметризация.

Можно вычислить длину $\mathcal{L}_{\text{AdS}}$ геодезической, соединяющей две точки на кривой (2.20), используя общее соотношение через объемлющие координаты конечных точек этой кривой:

$$\begin{aligned}\operatorname{ch} \mathcal{L}_{\text{AdS}} &= -\frac{1}{2}[\det(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b) - 2] = \\ &= -(x_{(a)}, x_{(b)}) = x_{0,a}x_{0,b} + x_{3,a}x_{3,b} - x_{1,a}x_{1,b} - x_{2,a}x_{2,b},\end{aligned}\quad (2.22)$$

где $x_{i,a}$ и $x_{i,b}$, $i = 0, 1, 2, 3$, – объемлющие координаты (2.2) начальной и конечной точек a и b . Переписывая (2.22) в координатах (ϕ, t, χ) , выразим длину геодезической через координаты точек $a = (\phi_a, t_a, \chi_a)$ и $b = (\phi_b, t_b, \chi_b)$ следующим образом:

$$\begin{aligned}-\operatorname{ch} \mathcal{L}(a; b) &= -\operatorname{ch} \chi_a \sin t_a \operatorname{ch} \chi_b \sin t_b - \operatorname{ch} \chi_a \cos t_a \operatorname{ch} \chi_b \cos t_b + \\ &+ \operatorname{sh} \chi_a \cos \phi_a \operatorname{sh} \chi_b \cos \phi_b + \operatorname{sh} \chi_a \sin \phi_a \operatorname{sh} \chi_b \sin \phi_b.\end{aligned}\quad (2.23)$$

Когда точки “уходят” на границу, т. е. $\chi_{a,b} \rightarrow \infty$, мы получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{reg}}(a; b) &= \ln \left[(\cos(t_a - t_b) - \cos(\phi_a - \phi_b)) \frac{e^{\chi_a + \chi_b}}{2} \right] = \\ &= \ln [2(\cos(t_a - t_b) - \cos(\phi_a - \phi_b))] + \delta_a + \delta_b,\end{aligned}\quad (2.24)$$

где $\delta_a = \chi_a - \ln 2$, $\delta_b = \chi_b - \ln 2$.

Вычитая расходящиеся части δ_a , δ_b в (2.24), получаем перенормированную длину пространственноподобной геодезической, связывающей две точки на границе:

$$\mathcal{L}_{\text{ren}}(t_a, \phi_a; t_b, \phi_b) = \ln [2(\cos(t_a - t_b) - \cos(\phi_a - \phi_b))].\quad (2.25)$$

Из этой формулы и из уравнения (2.19) выводим, что двухточечная корреляционная функция на границе пространства AdS_3 имеет вид

$$G_{\Delta, \text{AdS}}(\phi_a, t_a, \phi_b, t_b) = \left(\frac{1}{2(\cos(t_a - t_b) - \cos(\phi_a - \phi_b))} \right)^\Delta. \quad (2.26)$$

2.3.2. Времениподобные точки. Как было отмечено выше, в пространстве AdS_3 не существует непрерывных геодезических, которые связывают две точки на границе, разделенные времениподобным интервалом. Поэтому, чтобы в данном случае применять геодезическое приближение для вычисления двухточечных корреляционных функций, мы используем предписание из статей [30], [33], которое ранее было использовано в [11] в координатах Пуанкаре. В соответствии с этим предписанием, чтобы вычислить коррелятор для двух точек, разделенных времениподобным интервалом, нужно соединить эти точки квазигеодезической, состоящей из двух пространственноподобных геодезических, каждая из которых имеет разрыв на горизонте Пуанкаре. Явный вид этих разрывных геодезических дается формулами

$$\begin{aligned} \phi_{ab}(\lambda) &= \arctg \left(\tg \frac{D[\phi_a, \phi_b]}{2} \text{cth } \lambda \right) + \Sigma[\phi_a, \phi_b], \\ t_{ab}(\lambda) &= \arctg \left(\tg \frac{D[t_a, t_b]}{2} \text{cth } \lambda \right) + \Sigma[t_a, t_b] \end{aligned} \quad (2.27)$$

и

$$r(\lambda) = \frac{\sqrt{\cos(2D[t_a, t_b]) + \text{ch } 2\lambda} - \sqrt{\cos(2D[t_a, t_b]) - \cos(2D[\phi_a, \phi_b])}}{\sqrt{\cos(2D[\phi_a, \phi_b]) + \text{ch } 2\lambda}}, \quad (2.28)$$

где $D[t_a, t_b]$ и $\Sigma[t_a, t_b]$ заданы в (2.21).

На рис. 4 изображена квазигеодезическая, соединяющая граничные точки a и b с координатами (ϕ_a, t_a) и (ϕ_b, t_b) .

Для простоты рассмотрим симметричные точки. В этом случае граничными точками являются $(\delta\phi, \delta t)$ и $(-\delta\phi, -\delta t)$, где

$$\delta\phi = \frac{\phi_a - \phi_b}{2}, \quad \delta t = \frac{t_a - t_b}{2}. \quad (2.29)$$

Часть квазигеодезической, которая начинается в точке a при $\lambda = -\infty$, достигает горизонта Пуанкаре в точке с координатами $(\phi_{h_1}, t_{h_1}, \chi_{h_1})$. Эти координаты получаются как пределы правых частей формул (2.27), (2.28) при $\lambda \rightarrow -0$ и имеют вид

$$t_{h_1} = -\frac{\pi}{2}, \quad \phi_{h_1} = -\frac{\pi}{2}, \quad \chi_{h_1} = \text{arcsch} \frac{|\sin \delta\phi|}{\sqrt{\sin^2 \delta t - \sin^2 \delta\phi}}.$$

Часть квазигеодезической, которая достигает точки b при $\lambda = +\infty$, начинается на горизонте Пуанкаре в точке с координатами $(\phi_{h_2}, t_{h_2}, \chi_{h_2})$; это соответствует пределам правых частей формул (2.27), (2.28) при $\lambda \rightarrow +0$:

$$t_{h_2} = \frac{\pi}{2}, \quad \phi_{h_2} = \frac{\pi}{2}, \quad \chi_{h_2} = \text{arcsch} \frac{|\sin \delta\phi|}{\sqrt{\sin^2 \delta t - \sin^2 \delta\phi}}.$$

Рис. 4. График квазигеодезической, соединяющей точки a и b на границе, соответствующие значениям аффинного параметра $\lambda \rightarrow -\infty$ и $\lambda \rightarrow +\infty$. Точки a_r и b_r – это ближайшие к границе точки балка, соответствующие конечным значениям параметра $-\lambda$ и λ . Кривая ah_1 – пространственноподобная геодезическая, соединяющая точку a на границе и точку h_1 на горизонте Пуанкаре. Кривая bh_2 – пространственноподобная геодезическая, соединяющая точку b на границе и точку h_2 на горизонте Пуанкаре.

Взяв в качестве точек a и b в формуле (2.23) $b = h_1$ и $a = a_r$, получаем длину геодезической между точкой a_r с координатами $(-\delta\phi, -\delta t, \chi)$, лежащей рядом с границей, т. е. с большим значением χ , и точкой h_1 с координатами $(\phi_{h_1}, t_{h_1}, \chi_{h_1})$:

$$\mathcal{L}(a_r; h_1) = \ln\left(2\sqrt{\sin^2\delta t - \sin^2\delta\phi}\right) + \delta_{a_r} + \dots, \quad \delta_{a_r} = \chi_{a_r} - \ln 2, \quad (2.30)$$

где многоточием обозначены слагаемые, имеющие порядок ниже лидирующего в пределе $\chi \rightarrow \infty$. Вычитая расходящееся слагаемое, мы перенормируем длину геодезической между точкой a на границе и точкой h_1 на горизонте Пуанкаре:

$$\mathcal{L}_{\text{ren}}(a; h_1) = \ln\left(2\sqrt{\sin^2\delta t - \sin^2\delta\phi}\right). \quad (2.31)$$

Подобным образом, взяв $a = b_r$ и $b = h_2$ в формуле (2.23) и вычтя расходящееся слагаемое, получаем перенормированную длину между точкой b на границе и точкой h_2 на горизонте Пуанкаре:

$$\mathcal{L}_{\text{ren}}(b; h_2) = \ln\left(2\sqrt{\sin^2\delta t - \sin^2\delta\phi}\right). \quad (2.32)$$

Рис. 5. На рис. “а” показаны различные области, определяющиеся знаком тригонометрического интервала $-\cos(t_b - t) + \cos(\phi_b - \phi)$ при $t_b = 0$ и $\phi_b = 0$; области I и II времениподобные, области III и IV пространственноподобные. На рис. “б” показано преобразование времениподобного интервала в пространственноподобный после отражения точки b в b'' в области I, т. е. $\vec{ba} \rightarrow \vec{b''a}$, и аналогичное изменение $\vec{b'c} \rightarrow \vec{b''c}$ в области II. На рис. “в” показано изменение интервала в области IV после преобразования отражения, т. е. $\vec{ba} \rightarrow \vec{b''a}$ и $\vec{bc} \rightarrow \vec{b''c}$.

Сложим равенства (2.31) и (2.32), в результате имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{quasi,ren}}(t_a, \phi_a; t_b, \phi_b) &= \mathcal{L}_{\text{ren}}(a; h_1) + \mathcal{L}_{\text{ren}}(b; h_2) = \\ &= 2 \ln \left(2 \sqrt{\sin^2 \delta t - \sin^2 \delta \phi} \right) = \ln [2(-\cos(t_a - t_b) + \cos(\phi_a - \phi_b))]. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Сопоставляя это выражение с (2.19), получаем двухточечную корреляционную функцию для точек, разделенных времениподобным интервалом:

$$G_{\Delta, \text{AdS}}(\phi_a, t_a, \phi_b, t_b) = \left(\frac{1}{2(-\cos(t_a - t_b) + \cos(\phi_a - \phi_b))} \right)^\Delta. \quad (2.34)$$

Сравнивая выражения (2.26) и (2.34), мы можем записать единообразно

$$G_{\Delta, \text{AdS}}(\phi_a, t_a, \phi_b, t_b) = \left(\frac{1}{2|\cos(t_a - t_b) - \cos(\phi_a - \phi_b)|} \right)^\Delta. \quad (2.35)$$

2.3.3. Симметрия относительно отражения. Как было замечено в работе [33], корреляционная функция (2.35) обладает симметрией

$$G_{\Delta, \text{AdS}}(\phi_a, t_a; \phi_b, t_b) = G_{\Delta, \text{AdS}}(\phi_a, t_a; \phi_b + \pi, t_b + \pi),$$

т. е. она инвариантна относительно одновременного сдвига на π аргументов t и ϕ . Назовем это преобразование $(t, \phi) \mapsto (t + \pi, \phi + \pi)$ преобразованием отражения. После его применения времениподобный интервал ab преобразуется в пространственноподобный ab'' , и наоборот (см. рис. 5).

2.3.4. *Некоторые замечания о корреляционной функции Вайтмана, причинном и запаздывающем корреляторах.* Функция (2.35), определяемая через геодезическое приближение, связана с причинной и с запаздывающей функциями, а также с функцией Вайтмана. Корреляционная функция Вайтмана получается [38]–[40] с помощью $i\epsilon$ -предписания из коррелятора

$$G_E(\phi_a, \tau_a; \phi_b, \tau_b) = \left(\frac{1}{2(\text{ch}(\tau_a - \tau_b) - \cos(\phi_a - \phi_b))} \right)^\Delta \quad (2.36)$$

конформной теории поля на евклидовом цилиндре и может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} G_W(\phi_a, t_a; \phi_b, t_b) &= \langle O(\phi_a, t_a) O(\phi_b, t_b) \rangle = \\ &= \left(\frac{1}{2(\cos(t_a - t_b - i\epsilon) - \cos(\phi_a - \phi_b))} \right)^\Delta. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Можно переписать данное выражение в смысле обобщенных функций [41]:

$$\begin{aligned} G_W(\phi_a, t_a; \phi_b, t_b) &= G_{\Delta, \text{AdS}}(\phi_a, t_a; \phi_b, t_b) \times \\ &\times [\Psi_W(t_a; t_b) \theta(-\cos(t_a - t_b) + \cos(\phi_a - \phi_b)) + \theta(\cos(t_a - t_b) - \cos(\phi_a - \phi_b))], \end{aligned} \quad (2.38)$$

где $G_{\Delta, \text{AdS}}(\phi_a, t_a; \phi_b, t_b)$ определена в (2.35) и $\Psi_W(t_a; t_b) = e^{-i\pi\Delta \text{sgn}(\sin(t_a - t_b))}$.

Используя выражение (2.37), получаем представление для причинной корреляционной функции конформной теории поля на цилиндре:

$$\begin{aligned} G_c(\phi_a, t_a; \phi_b, t_b) &= \langle TO(\phi_a, t_a) O(\phi_b, t_b) \rangle_c = \\ &= \left(\frac{1}{2(\cos(t_a - t_b - i\epsilon(t_a - t_b)) - \cos(\phi_a - \phi_b))} \right)^\Delta. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Эту функцию можно записать как

$$\begin{aligned} G_c(\phi_a, t_a; \phi_b, t_b) &= G_{\Delta, \text{AdS}}(\phi_a, t_a; \phi_b, t_b) \times \\ &\times [\Psi_c(t_a; t_b) \theta(-\cos(t_a - t_b) + \cos(\phi_a - \phi_b)) + \theta(\cos(t_a - t_b) - \cos(\phi_a - \phi_b))], \end{aligned} \quad (2.40)$$

где

$$\Psi_c(t_a; t_b) = e^{-i\pi\Delta \text{sgn}(\sin(t_a - t_b))} \theta(t_a - t_b) + e^{i\pi\Delta \text{sgn}(\sin(t_a - t_b))} \theta(-t_a + t_b).$$

Запаздывающая корреляционная функция имеет вид

$$G_{\text{ret}}(\phi_a, t_a; \phi_b, t_b) \equiv \theta(t_a - t_b) \langle [O(\phi_a, t_a), O(\phi_b, t_b)] \rangle, \quad (2.41)$$

следовательно,

$$\begin{aligned} G_{\text{ret}}(\phi_a, t_a; \phi_b, t_b) &= \\ &= G_{\Delta}(\phi_a, t_a; \phi_b, t_b) \Psi_{\text{ret}}(t_a; t_b) \theta(t_a - t_b) \theta(-\cos(t_a - t_b) + \cos(\phi_a - \phi_b)), \end{aligned}$$

где

$$\Psi_{\text{ret}}(t_a; t_b) = -2i \sin(\pi \Delta \operatorname{sgn}(\sin(t_a - t_b))).$$

Формулы, приведенные выше, могут быть записаны в универсальном виде

$$G_{A,\Delta}(\phi_a, t_a; \phi_b, t_b) = G_{\Delta, \text{AdS}}(\phi_a, t_a; \phi_b, t_b) \Phi_{A,\Delta}(\phi_a, t_a; \phi_b, t_b),$$

где индекс A отвечает корреляционной функции Вайтмана (W), причинной (c) или запаздывающей (ret) корреляционной функции, а Φ определена как

$$\begin{aligned} \Phi_{A,\Delta}(\phi_a, t_a; \phi_b, t_b) &= \\ &= \Psi_{A,\Delta}(t_a; t_b) \theta(-\cos(t_a - t_b) + \cos(\phi_a - \phi_b)) + \theta(\cos(t_a - t_b) - \cos(\phi_a - \phi_b)) \end{aligned} \quad (2.42)$$

для корреляционной функций Вайтмана или причинной функции ($A = W, c$) и как

$$\Phi_{\text{ret},\Delta}(\phi_a, t_a; \phi_b, t_b) = \Psi_{\text{ret},\Delta}(t_a; t_b) \theta(t_a - t_b) \theta(-\cos(t_a - t_b) + \cos(\phi_a - \phi_b)) \quad (2.43)$$

для запаздывающей корреляционной функции. Если Δ – целое число, то функции (2.38) и (2.40) совпадают и $\Psi_{\text{ret},\Delta} = 0$.

3. МЕТОД ОТОБРАЖЕНИЙ И НАМОТАННЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ

3.1. Метод отображений в жизненном пространстве. Когда пространство AdS_3 деформируется точечной частицей, формулы (2.37), (2.39) и (2.41) должны быть изменены. В частности,

$$\begin{aligned} \langle TO(\phi_a, t_a) O(\phi_b, t_b) \rangle_{\text{l.s.}} &= \\ &= \left(\frac{1}{2(\cos(t_a - t_b) + i(t_a - t_b)\epsilon) - \cos(\phi_a - \phi_b)} \right)^\Delta \Theta_0(\phi_a, t_a; \phi_b, t_b) + \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{n_{\max}} \left(\frac{1}{2(\cos(t_{a,n}^* - t_b) + i(t_{a,n}^* - t_b)\epsilon) - \cos(\phi_{a,n}^* - \phi_b)} \right)^\Delta \times \\ &\times \Theta_0(\phi_{a,n}^*, t_{a,n}^*; \phi_b, t_b) Z_{\Delta,n}(\phi_{a,n}^*, t_{a,n}^*; \phi_b, t_b) + \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\bar{n}_{\max}} \left(\frac{1}{2(\cos(t_{a,n}^\# - t_b) + i(t_{a,n}^\# - t_b)\epsilon) - \cos(\phi_{a,n}^\# - \phi_b)} \right)^\Delta \times \\ &\times \bar{\Theta}_0(\phi_{a,n}^\#, t_{a,n}^\#; \phi_b, t_b) \bar{Z}_{\Delta,n}(\phi_{a,n}^\#, t_{a,n}^\#; \phi_b, t_b). \end{aligned} \quad (3.1)$$

В этой формуле индекс l.s. в левой части означает жизненное пространство (living space) на границе пространства AdS_3 с неподвижной или движущейся частицей, а

$$(\phi_a, t_a)^{*n} = (\phi_{a,n}^*, t_{a,n}^*)$$

суть координаты отображенных точек, полученных применением n раз изометрии $*$. Обратное преобразование $\#$ определяется как

$$(\phi_a^\#, t_a^\#)^* = (\phi_a, t_a),$$

и мы используем обозначения

$$(\phi_a, t_a)^{\#n} = (\phi_{a,n}^\#, t_{a,n}^\#). \quad (3.2)$$

По сравнению с обычной формулой для функции Грина (см. пример (4.1.35) в работе [42]) мы добавляем в выражение (3.1) множители

$$\Theta_0(\phi_{a,n}^*, t_{a,n}^*; \phi_b, t_b), \quad \bar{\Theta}_0(\phi_{a,n}^\#, t_{a,n}^\#; \phi_b, t_b), \\ Z_{\Delta,n}(\phi_{a,n}^*, t_{a,n}^*; \phi_b, t_b), \quad \bar{Z}_{\Delta,n}(\phi_{a,n}^\#, t_{a,n}^\#; \phi_b, t_b),$$

где

$$\Theta_0(\phi_a, t_a, \phi_b, t_b) = \begin{cases} 1, & |\phi_a - \phi_b| > |t_a - t_b|, \\ 0, & |\phi_a - \phi_b| < |t_a - t_b|, \end{cases}$$

а Z -множители связаны с перенормировками (см. п. 3.4).

В соответствии с (2.40) имеем

$$\begin{aligned} \langle TO(\phi_a, t_a)O(\phi_b, t_b) \rangle_{\text{l.s.}} &= \Phi_{c,\Delta}(\phi_a, t_a; \phi_b, t_b) G_{\Delta, \text{AdS}}(\phi_a, t_a; \phi_b, t_b) \Theta_0(\phi_a, t_a; \phi_b, t_b) + \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{n_{\max}} \Phi_{c,\Delta}(\phi_{a,n}^*, t_{a,n}^*; \phi_b, t_b) G_{\Delta, \text{AdS}}(\phi_{a,n}^*, t_{a,n}^*; \phi_b, t_b) \times \\ &\times \Theta_0(\phi_{a,n}^*, t_{a,n}^*; \phi_b, t_b) Z_n(\phi_{a,n}^*, t_{a,n}^*; \phi_b, t_b) + \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\bar{n}_{\max}} \Phi_{c,\Delta}(\phi_{a,n}^\#, t_{a,n}^\#; \phi_b, t_b) G_{\Delta, \text{AdS}}(\phi_{a,n}^\#, t_{a,n}^\#; \phi_b, t_b) \times \\ &\times \bar{\Theta}_0(\phi_{a,n}^\#, t_{a,n}^\#; \phi_b, t_b) \bar{Z}_n(\phi_{a,n}^\#, t_{a,n}^\#; \phi_b, t_b), \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $G_{\Delta, \text{AdS}}(\phi, t)$ и $\Phi_{c,\Delta}(\phi_a, t_a; \phi_b, t_b)$ определяются формулами (2.35) и (2.42). Наличие Φ -множителей в суммах в (3.3) связано с изменением причинной связи между двумя точками на границе после изометрии (2.15). Это проиллюстрировано на рис. 6 и рис. 7.

На рис. 6 изображен схематический график геодезических, связывающих точки a_i , $i = 1, 2$, с точками $b = (0, 0)$ и $b^\#$, где координаты точки $b^\#$ определяются преобразованием (3.2). Мы видим, что изначально пространственноподобные точки могут сохранять свою причинную структуру после преобразований $*$ и $\#$, а также могут изменять ее.

На рис. 7 изображены геодезические, соединяющие точки a_i , $i = 1, 2$, с $b = (0, 0)$ и b^* , где координаты точки b^* определяются преобразованием (2.15). Мы видим, что пространственноподобные точки могут оставаться пространственноподобными после преобразования $*$, а также могут становиться времениподобными.

Поскольку в нашей работе мы не учитываем вклад геодезических, которые соединяют точки, разделенные времениподобным интервалом, можно проигнорировать Φ -множители и ввести корреляционную функцию следующим образом:

$$\begin{aligned} G_{\text{l.s.}}(\phi_a, t_a, \phi_b, t_b) &= G_{\Delta, \text{AdS}}(\phi_a, t_a; \phi_b, t_b) \Theta_0(\phi_a, t_a; \phi_b, t_b) + \\ &+ \sum_n G_{\Delta, \text{AdS}}(\phi_{a,n}^*, t_{a,n}^*; \phi_b, t_b) Z_{\Delta,n}(\phi_{a,n}^*, t_{a,n}^*; \phi_b, t_b) \Theta_0(\phi_{a,n}^*, t_{a,n}^*; \phi_b, t_b) + \\ &+ \sum_n G_{\Delta, \text{AdS}}(\phi_{a,n}^\#, t_{a,n}^\#; \phi_b, t_b) \bar{Z}_{\Delta,n}(\phi_{a,n}^\#, t_{a,n}^\#; \phi_b, t_b) \bar{\Theta}_0(\phi_{a,n}^\#, t_{a,n}^\#; \phi_b, t_b). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Введем новую перенормированную функцию $G_{\Delta, \text{ren}, n}(t_{a,n}^*, \phi_{a,n}^*; t_b, \phi_b)$, которая определяется как произведение функции Z на корреляционную функцию на границе

Рис. 6. Геодезические, соединяющие точки a_i , $i = 1, 2$, с точками $b = (0, 0)$ и $b^\#$. Точки b и a_1 , как и точки $b^\#$ и a_1 , разделены времениподобным интервалом; точки b и a_2 , как и точки $b^\#$ и a_2 , разделены пространственноподобным интервалом (а). Точки b и a_1 разделены пространственноподобным интервалом, точки $b^\#$ и a_1 – времениподобным; точки b и a_2 разделены времениподобным интервалом, а точки $b^\#$ и a_2 – пространственноподобным (б). Здесь $\alpha = 1$, $\xi = 1$.

Рис. 7. Геодезические, соединяющие точки a_i , $i = 1, 2$, с точками $b = (0, 0)$ и b^* . Точки b и a_1 , как и точки b^* и a_1 , разделены времениподобным интервалом; точки b и a_2 , как и точки b^* и a_2 , разделены пространственноподобным интервалом (а). Точки b и a_1 разделены пространственноподобным интервалом, точки b^* и a_1 – времениподобным; точки b и a_2 разделены времениподобным интервалом, а точки b^* и a_2 – пространственноподобным (б). Здесь $\alpha = 1$, $\xi = 1$.

пространства AdS_3 :

$$\begin{aligned} G_{\Delta, \text{ren}, n}(\phi_{a,n}^*, t_{a,n}^*; \phi_b, t_b) &\equiv G_{\Delta, \text{AdS}}(\phi_{a,n}^*, t_{a,n}^*; \phi_b, t_b) Z_{\Delta, n}(\phi_{a,n}^*, t_{a,n}^*; \phi_b, t_b), \\ G_{\Delta, \text{ren}, n}(\phi_{a,n}^\#, t_{a,n}^\#; \phi_b, t_b) &\equiv G_{\Delta, \text{AdS}}(\phi_{a,n}^\#, t_{a,n}^\#; \phi_b, t_b) \bar{Z}_{\Delta, n}(\phi_{a,n}^\#, t_{a,n}^\#; \phi_b, t_b). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Тогда функцию (3.4) можно представить в виде

$$\begin{aligned} G_{1.s.}(\phi_a, t_a, \phi_b, t_b) &= G_{\Delta, \text{AdS}}(\phi_a, t_a; \phi_b, t_b) \Theta_0(\phi_a, t_a; \phi_b, t_b) + \\ &+ \sum_n G_{\Delta, \text{ren}, n}(\phi_{a,n}^*, t_{a,n}^*; \phi_b, t_b) \Theta_0(\phi_{a,n}^*, t_{a,n}^*; \phi_b, t_b) + \\ &+ \sum_n G_{\Delta, \text{ren}, n}(\phi_{a,n}^\#, t_{a,n}^\#; \phi_b, t_b) \bar{\Theta}_0(\phi_{a,n}^\#, t_{a,n}^\#; \phi_b, t_b). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Из инвариантности относительно изометрии (3.5) вытекают следующие свойства корреляционных функций:

$$\begin{aligned} G_{\Delta, \text{ren}, n}(\phi_{a,n}^*, t_{a,n}^*; \phi_b, t_b) &= G_{\Delta, \text{ren}, n}(\phi_{a,n-1}^*, t_{a,n-1}^*; \phi_{b,1}^\#, t_{b,1}^\#) = G_{\Delta, \text{ren}, n}(\phi_a, t_a; \phi_{b,n}^\#, t_{b,n}^\#), \\ G_{\Delta, \text{ren}, n}(\phi_{a,n}^\#, t_{a,n}^\#; \phi_b, t_b) &= G_{\Delta, \text{ren}, n}(\phi_{a,n-1}^\#, t_{a,n-1}^\#; \phi_{b,1}^*, t_{b,1}^*) = G_{\Delta, \text{ren}, n}(\phi_a, t_a; \phi_{b,n}^*, t_{b,n}^*). \end{aligned}$$

В формулах (3.4) и (3.6) не указаны пределы суммирования по n . Вопрос об определении пределов суммирования обсуждается в п. 3.2 для статической частицы и в п. 3.3 для движущейся частицы. Как было замечено в п. 2.3, функция $G_{\Delta, \text{AdS}}(\phi_a, t_a; \phi_b, t_b)$ связана с перенормированными длинами геодезических. Функция $G_{\Delta, \text{ren}, n}(\phi_{a,n}^*, t_{a,n}^*; \phi_b, t_b)$ также связана с перенормированными длинами геодезических, когда одна из них пересекает клин (см. п. 3.4). Следовательно, можно кратко записать

$$G_{\text{l.s.}}(\phi_a, t_a; \phi_b, t_b) = \sum e^{-\Delta \mathcal{L}_{\text{ren}}(\phi_a, t_a; \phi_b, t_b)}. \quad (3.7)$$

Здесь производится суммирование по всем геодезическим, соединяющим точки a и b , имеющие координаты (ϕ_a, t_a) и (ϕ_b, t_b) . Эти точки лежат в жизненном пространстве на границе деформированного пространства AdS_3 . Сравнивая выражение (3.7) с (3.4), отметим, что в (3.7) отсутствуют Θ -функции, так как $\Theta = 1$ в каждом слагаемом, которое дает вклад в правую часть равенства (3.7). Конфигурации этих геодезических могут различаться в зависимости от выбора точек a и b и от значений величин, характеризующих движущуюся частицу.

В п. 3.3 рассмотрено представление (3.7) для пространства AdS_3 с одной движущейся частицей. Чтобы описание нашего метода стало более ясным, начнем с анализа деформации пространства AdS_3 одной неподвижной частицей.

3.2. Неподвижная частица. В этом пункте мы описываем перенормировки метода отображений, который используется для вычисления вкладов геодезических в правую часть формулы (3.7), в пространстве AdS_3 с одной неподвижной частицей. Этот случай рассматривался ранее в работе [29] для точек, разделенных пространственноподобным интервалом, и в работах [30], [33] для времениподобных точек. Мы начинаем наше рассмотрение со случая одной неподвижной частицы, так как он является наиболее наглядным.

3.2.1. Одновременные точки. Сформулируем метод отображений для случая одной неподвижной частицы и одновременных точек. Наше предписание для вычисления коррелятора дается формулой

$$\begin{aligned} G_{\text{l.s.}}(\phi_a, t_a, \phi_b, t_a) &= G_{\Delta, \text{AdS}}(\phi_a, t_a, \phi_b, t_a) + \\ &+ \sum_{n=1}^{n_{\max}} G_{\Delta, \text{ren}, n}(\phi_a, t_a, \phi_{b^{*n}}, t_a) + \sum_{n=1}^{\tilde{n}_{\max}} G_{\Delta, \text{ren}, n}(\phi_a, t_a, \phi_{b^{\#n}}, t_a). \end{aligned} \quad (3.8)$$

В соответствии с этой формулой, чтобы вычислить коррелятор, мы должны учесть следующие вклады:

- вклады от базовых геодезических, соединяющих точки a и b ;
- вклады от геодезических, соединяющих точку a и точки $b^{*n} \equiv b^{\overbrace{* \dots * }^n}$, которые получены как отображение точки b и лежат в правой относительно a части окружности, т. е.

$$|\phi_a - \phi_{b^{*n}}| < \pi, \quad n \leq n_{\max}; \quad (3.9)$$

- вклады от геодезических, соединяющих точку a и точки $b^{\#n} \equiv b^{\overbrace{\# \dots \# }^n}$, которые получены как отображение точки b и лежат в левой относительно a части окружности, т. е.

$$|\phi_a - \phi_{b^{\#n}}| < \pi, \quad n \leq \bar{n}_{\max}. \quad (3.10)$$

В более явном виде наше предписание записывается как

$$G_{1.s.}(\phi_a, t_a, \phi_b, t_a) = G_{\Delta, \text{AdS}}(\phi_a, t_a, \phi_b, t_a) + \sum_{n=1}^{n_{\max}} G_{\Delta, \text{AdS}}(\phi_a, t_a, \phi_b + n\bar{\alpha}, t_a) + \sum_{n=1}^{\bar{n}_{\max}} G_{\Delta, \text{AdS}}(\phi_a, t_a, \phi_b - n\bar{\alpha}, t_a), \quad (3.11)$$

где $\bar{\alpha} = 2\pi - \alpha$, а $n_{\max}$ и $\bar{n}_{\max}$ определяются с помощью ограничений (3.9) и (3.10). Если $\alpha < \pi$, мы имеем только одну отображенную точку, а наличие вкладов от добавочных геодезических зависит от положения точек a и b [30]. При $\alpha > \pi$ мы имеем несколько слагаемых в (3.11).

На рис. 8а показаны вклады от дополнительных геодезических, соединяющих точку a с тремя отображенными точками b^* , b^{**} и b^{***} , полученными поворотом точки b против часовой стрелки на углы $\bar{\alpha}$, $2\bar{\alpha}$ и $3\bar{\alpha}$. Для данного положения точек a и b только три геодезические ab , ab^* и ab^{**} дают вклад. Геодезическая ab^{***} вклада не вносит, поскольку точка b^{***} выходит за пределы полуокружности, находящейся справа от пунктирной линии aD . На рис. 9а показаны вклады от дополнительных геодезических, соединяющих точку a с тремя отображенными точками $b^{\#}$, $b^{\#\#}$ и $b^{\#\#\#}$, полученными поворотом точки b по часовой стрелке на углы $\bar{\alpha}$, $2\bar{\alpha}$ и $3\bar{\alpha}$. Эти вклады могут быть представлены как сумма двух геодезических. Первая геодезическая соединяет точку a с точкой K на клине, вторая геодезическая соединяет точку K^* (полученную отображением точки K) с b . Видно, что геодезические $ab^{\#\#}$ и $ab^{\#\#\#}$ не вносят вклад, поскольку их длины соответствуют связи точки a с точкой b' , которая не является отображением точки b . На рис. 8б и рис. 9б показана роль ограничений (3.9) и (3.10).

3.2.2. Доказательство периодичности коррелятора. Чтобы доказать, что равенство (3.11) определяет коррелятор на окружности, мы должны показать, что

$$G_{1.s.}(\phi_a, t_a, \phi_b, t_a) = G_{1.s.}(\phi_a, t_a, \phi_b + \bar{\alpha}, t_a). \quad (3.12)$$

Рассмотрим частный случай, представленный на рис. 10а. В этом случае имеются следующие вклады в левую часть формулы (3.12): от геодезической, связывающей две точки a и b (базовая геодезическая), от геодезических, связывающих точку a с отображенными точками b^* , b^{**} и $b^{\#}$, т. е. в (3.9), (3.10) $n_{\max} = 2$, $\bar{n}_{\max} = 1$.

Рис. 8. Геодезические, соединяющие точку a с тремя отображенными точками b^* , b^{**} и b^{***} (а). Вклад точки b^{***} соответствует связи точек a и b' (б).

Рис. 9. Геодезические, соединяющие точку a с тремя отображенными точками b^* , b^{**} и b^{***} (а). Угловые координаты точек b^{**} и b^{***} превышают по модулю угловую координату точки D (б).

Чтобы вычислить правую часть (3.12), заметим, что после сдвига $\phi_b \rightarrow \phi_b + \bar{\alpha}$ (полученная точка на рис. 10б обозначена как c) в соответствии с нашим предписанием имеются следующие вклады. Во-первых, имеется вклад от базовой геодезической между точками a , c , где точка $c = (\phi_b + \bar{\alpha}, t_a)$. Во-вторых, присутствуют вклады от отображенной геодезической, соединяющей a и c^* , которая эквивалентна геодезической между точками a и b^{**} , а также вклады от геодезической между точками a

Рис. 10. Геодезические, соединяющие точки a и b , b^{**} (а), и геодезические, соединяющие точки a и c (где $\phi_c = \phi_b + \bar{\alpha}$), $c^\#$, c^* , $c^{\#\#}$ (б).

и $c^\#$, которая эквивалентна геодезической между точками a и b , и от геодезической между точками a и $c^{\#\#}$, которая совпадает с геодезической между точками a и $b^\#$. Таким образом, числа $n_{\max}$ и $\bar{n}_{\max}$ изменяются, и для точки c мы имеем $n_{\max} = 1$, $\bar{n}_{\max} = 2$ (см. рис. 10б). Следовательно, изменение величин $n_{\max}$ и $\bar{n}_{\max}$ после сдвига на период сохраняет общее количество вкладов. В рассмотренном примере функция $G_{1.s.}$ является периодической.

3.2.3. Пространственноподобные точки. Для точек, разделенных пространственноподобным интервалом, наш способ вычисления коррелятора остается таким же, как и для одновременных точек:

$$G_{1.s.}(\phi_a, t_a, \phi_b, t_b) = G_{\Delta, \text{AdS}}(\phi_a, t_a, \phi_b, t_b) + \sum_{n=1}^{n_{\max}} G_{\Delta, \text{AdS}}(\phi_a, t_a, \phi_b + n\bar{\alpha}, t_b) + \sum_{n=1}^{\bar{n}_{\max}} G_{\Delta, \text{AdS}}(\phi_a, t_a, \phi_b - n\bar{\alpha}, t_b), \quad (3.13)$$

где $n_{\max}$ и $\bar{n}_{\max}$ находятся из ограничений (3.9) и (3.10). На рис. 11 изображены различные вклады в правую часть формулы (3.13).

3.2.4. Универсальная формула и инвариантность относительно изометрии. Если не нарушена инвариантность функции G_{ren} относительно изометрии, связанной с дефектом, то имеет место соотношение

$$G_{\text{ren}}(\phi_a, t_a, \phi_b - \bar{\alpha}, t_b) = G_{1.s.}(\phi_a + \bar{\alpha}, t_a, \phi_b, t_b). \quad (3.14)$$

Тогда можно переписать формулу (3.13) как

$$G_{\text{ren}}(\phi_a, t_a, \phi_b, t_b) = G_{\Delta, \text{AdS}}(\phi_a, t_a, \phi_b, t_b) \Theta_0(\phi_a, t_a, \phi_b, t_b) + \sum_{n=1}^{n_{\max}} G_{\Delta, \text{AdS}}(\phi_a, t_a, \phi_b + n\bar{\alpha}, t_b) + \sum_{n=1}^{\bar{n}_{\max}} G_{\Delta, \text{AdS}}(\phi_a + n\bar{\alpha}, t_a, \phi_b, t_b). \quad (3.15)$$

Рис. 11. Геодезические, соединяющие пространственноподобные точки a и $b = (0, 0)$, а также геодезические, соединяющие точку a с отображенными точками $b^* = (0, \bar{\alpha})$, $b^{**} = (0, 2\bar{\alpha})$, $b^\# = (0, -\bar{\alpha})$. Здесь $\alpha = 3\pi/2$.

3.3. Движущаяся частица. Рассмотрим двухточечную корреляционную функцию скалярных операторов на границе в присутствии движущейся частицы внутри пространства¹⁾. Мы имеем выделенное направление движения частицы. Изометрия определяется формулами (2.15).

При наличии массивной движущейся частицы аналогом (3.6) является представление

$$\begin{aligned}
 G_{1.s.}(\phi_a, t_a, \phi_b, t_b) &= G_{\Delta, \text{AdS}}(\phi_a, t_a, \phi_b, t_b) \Theta_0(\phi_a, t_a; \phi_b, t_b; \alpha, \xi) + \\
 &+ \sum_{n=1}^{n_{\max}} G_{\Delta, \text{ren}, n}(\phi_{a^\#n}, t_{a^\#n}, \phi_b, t_b) \Theta_{\text{cr}}(\phi_a, t_a; \phi_{b^{*n}}, t_{b^{*n}}; \alpha, \xi) + \\
 &+ \sum_{n=1}^{\bar{n}_{\max}} G_{\Delta, \text{ren}, n}(\phi_{a^{*n}}, t_{a^{*n}}, \phi_b, t_b) \Theta_{\text{cr}}(\phi_{a^{*n}}, t_{a^{*n}}; \phi_b, t_b; \alpha, \xi), \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

где значения $n_{\max}$ и $\bar{n}_{\max}$ определяются соотношениями (3.9) и (3.10), т. е. как в статическом случае.

Предполагается, что перенормировки, определяющие функцию $G_{\Delta, \text{ren}, n}$, инвариантны относительно действия изометрии (2.15). В выражение (3.16) входят функции $\Theta_0(\phi_a, t_a; \phi_b, t_b; \alpha, \xi)$ и $\Theta_{\text{cr}}(\phi_a, t_a; \phi_b, t_b; \alpha, \xi)$ (здесь cr – сокращение слова crossing), определенные следующим образом: $\Theta_0(\phi_a, t_a; \phi_b, t_b; \alpha, \xi) = 1$, если геодезическая, соединяющая точки (ϕ_a, t_a) и (ϕ_b, t_b) , не пересекает клин, и $\Theta_0(\phi_a, t_a; \phi_b, t_b; \alpha, \xi) = 0$, если эта геодезическая пересекает клин; $\Theta_{\text{cr}}(\phi_a, t_a; \phi_b, t_b; \alpha, \xi) = 1$, если данная геодезическая пересекает нижнюю грань клина, и $\Theta_{\text{cr}}(\phi_a, t_a; \phi_b, t_b; \alpha, \xi) = 0$ если геодезическая не пересекает нижнюю грань клина (см. рис. 12).

¹⁾Если мы рассматриваем одну движущуюся массивную частицу, то, очевидно, можно перейти с помощью преобразования Лоренца к системе отсчета, где частица покоится, и рассматриваемая задача сводится к предыдущей (см. п. 3.2). Однако мы проведем рассмотрение непосредственно в лабораторной системе, имея в виду дальнейшее обобщение на случай нескольких массивных и безмассовых частиц [43].

Рис. 12. Клин и различные типы геодезических в случае пространства, деформированного легкой частицей. Базовыми являются геодезические между точками a и b . Отображенные геодезические соединяют точки $a^\#$, b и a , b^* . Координаты граничных точек и значения параметров выбраны как $\phi_a = 5.1$, $t_a = -0.5$, $\phi_b = 0.6$, $t_b = 0.4$ (а); как $\phi_a = 5$, $t_a = -0.5$, $\phi_b = 1.6$, $t_b = 0.2$ (б) и как $\phi_a = 4.4$, $t_a = -0.5$, $\phi_b = 1.6$, $t_b = 0.2$ (в). На всех рисунках $\alpha = \pi/2$ и $\xi = 1.3$.

3.3.1. *Легкая движущаяся массивная частица.* В случае $\alpha < \pi$ формула (3.16) содержит только три слагаемых. Первое слагаемое определяется вкладом от геодезической, не пересекающей клин, второе и третье – вкладами геодезических, пересекающих клин:

$$\begin{aligned}
 G_{\alpha, \xi}(\phi_a, t_a, \phi_b, t_b) = & G_{\Delta, \text{AdS}}(\phi_a, t_a, \phi_b, t_b) \Theta_0(\phi_a, t_a; \phi_b, t_b; \alpha, \xi) + \\
 & + G_{\Delta, \text{ren}, 1}(\phi_{a^*}, t_{a^*}, \phi_b, t_b) \Theta_{\text{cr}}(\phi_{a^*}, t_{a^*}; \phi_b, t_b; \alpha, \xi) + \\
 & + G_{\Delta, \text{ren}, 1}(\phi_a, t_a, \phi_{b^*}, t_{b^*}) \Theta_{\text{cr}}(\phi_a, t_a; \phi_{b^*}, t_{b^*}; \alpha, \xi). \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

Численно находя носители функций Θ_0 и Θ_{cr} , получаем различные конфигурации геодезических. Будем называть базовой геодезической, которая соединяет точки a и b на границе, не пересекая клин. Намотанные геодезические упираются в клин, выходят из него (другими словами, входят в одну из граней клина и выходят из отождествленной точки второй грани клина) и соединяют точки на границе. В частном случае, когда точка a находится на одной из сторон клина (для определенности на нижней стороне), под действием изометрии она перейдет в точку a^* на противоположной стороне клина. Тогда роль геодезической будет играть геодезическая между точками a^* и b .

Существуют три различные комбинации базовых и намотанных геодезических, которые дают вклад в коррелятор на границе пространства AdS_3 , деформированного массивной легкой частицей. Перечислим эти три комбинации:

- базовая геодезическая дает вклад, намотанная не вносит;
- базовая геодезическая не дает вклада, намотанная дает вклад;
- базовая и намотанная геодезические дают вклад в коррелятор.

На рис. 12 изображены различные комбинации геодезических, вносящих вклад в коррелятор, при конечных значениях α и ξ .

Рис. 13. Конфигурация дважды намотанной геодезической, соединяющей точки a и b , при фиксированных значениях параметра буста ξ и массового параметра $\alpha = 5.4$ (а). Базовая геодезическая между a и b показана жирной линией, намотанная геодезическая состоит из трех частей, ее длина вычисляется как $l(a, b) = l(a, o^{**}) + l(o^{**}, o^*) + l(o, b)$. На рис. “б” приведен вид конфигурации сверху.

3.3.2. Тяжелая движущаяся массивная частица. Если $\alpha > \pi$, то ситуация отличается от случая легкой частицы: необходимо учесть дополнительные конфигурации геодезических, которые возникают при вычислении двухточечной корреляционной функции. Базовая геодезическая всегда дает вклад.

Для простоты рассмотрим частный случай $\alpha = 3\pi/2$. Переписывая формулу (3.16) в явном виде, получим выражение для коррелятора

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{\alpha, \xi}(\phi_a, t_a, \phi_b, t_b) = & G_{\Delta, \text{AdS}}(\phi_a, t_a, \phi_b, t_b) \Theta_0(\phi_a, t_a; \phi_b, t_b; \alpha, \xi) + \\ & + G_{\Delta, \text{ren}, 1}(\phi_a, t_a, \phi_{b^*}, t_{b^*}) \Theta_{\text{cr}}(t_a, \phi_a; t_{b^*}, \phi_{b^*}; \alpha, \xi) + \\ & + G_{\Delta, \text{ren}, 1}(\phi_{a^*}, t_{a^*}, \phi_b, t_b) \Theta_{\text{cr}}(t_a, \phi_a; t_b^{\#}, \phi_b^{\#}; \alpha, \xi) + \\ & + G_{\Delta, \text{ren}, 2}(\phi_a, t_a, \phi_{b^{*2}}, t_{b^{*2}}) \Theta_{\text{cr}}(\phi_a, t_a, \phi_{b^{*2}}, t_{b^{*2}}; \alpha, \xi) + \\ & + G_{\Delta, \text{ren}, 2}(\phi_{a^{*2}}, t_{a^{*2}}, \phi_b, t_b) \Theta_{\text{cr}}(\phi_{a^{*2}}, t_{a^{*2}}, \phi_b, t_b; \alpha, \xi). \end{aligned}$$

Первое слагаемое в этом выражении соответствует базовой геодезической, второе и третье слагаемые – геодезической, намотанной один раз, как и в случае легкой частицы. Два последних слагаемых соответствуют дважды намотанным геодезическим. На рис. 13 можно увидеть, что последнее слагаемое действительно дает вклад в коррелятор.

Рис. 14. Геодезическая, соединяющая две граничные точки, т. е. проходящая через точки b , o , o^* , a . Сплошная кривая — первоначальная геодезическая, штриховая кривая — геодезическая между отображенными точками.

3.4. Перенормировки.

3.4.1. *Пространственноподобные геодезические.* Найдем перенормированную длину отображенных геодезических между двумя точками на границе. Рассмотрим проходящую через клин геодезическую между двумя точками с координатами (ϕ_a, t_a) и (ϕ_b, t_b) , расположенными рядом с границей пространства. Геодезическая может быть представлена как кривая, состоящая из двух частей (см. рис. 14), длины которых суть l_{a,o^*} и $l_{o,b}$. Здесь o^* — это точка o , к которой применена изометрия (2.12).

Изометрия должна сохранять длину геодезической между точками a и b в балке, $l_{o,b} = l_{o^*,b^*}$, следовательно, длина геодезической должна удовлетворять соотношениям

$$\mathcal{L}_{\text{reg}}(a, b) = \mathcal{L}_{\text{reg}}(a, b^*) = \mathcal{L}_{\text{reg}}(a^{\#}, b). \quad (3.18)$$

Здесь reg означает регуляризованное значение. Регуляризация, как ясно из вышесказанного, соответствует условию, что точки a и b лежат вблизи границы. Перенормированные длины геодезических между точками a , b^* и $a^{\#}$, b даются выражениями

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{ren}}(a, b^*) &= \ln[2(\cos(t_a - t_b^*) - \cos(\phi_a - \phi_b^*))], \\ \mathcal{L}_{\text{ren}}(a^{\#}, b) &= \ln[2(\cos(t_a^{\#} - t_b) - \cos(\phi_a^{\#} - \phi_b))]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Очевидно, что эти длины не равны друг другу. Проведем вычисления для каждой геодезической, учитывая аккуратно зависимость расходящихся частей от χ .

Положим

$$\mathcal{L}_{\text{ren}}(a, b^*) = \mathcal{L}_{\text{reg}}(a, b^*) - (\chi_a + \chi_{b^*}), \quad \mathcal{L}_{\text{ren}}(a^{\#}, b) = \mathcal{L}_{\text{reg}}(a^{\#}, b) - (\chi_{a^{\#}} + \chi_b). \quad (3.20)$$

Перенормированная длина геодезической между точками a и b также дается выражением

$$\mathcal{L}_{\text{ren}}(a, b) = \mathcal{L}_{\text{reg}}(a, b) - (\chi_a + \chi_b).$$

Из (3.18) получаем

$$\mathcal{L}_{\text{ren}}(a, b) = \mathcal{L}_{\text{reg}}(a^\#, b) - (\chi_a + \chi_b) = \mathcal{L}_{\text{reg}}(a, b^*) - (\chi_a + \chi_b).$$

Подставляя (3.19) и (3.20), имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{ren}}(a^\#, b) &= \mathcal{L}_{\text{ren}}(a, b) - (\chi_{a^\#} + \chi_b) + \chi_a + \chi_b = \mathcal{L}_{\text{ren}}(a, b) + \chi_a - \chi_{a^\#}, \\ \mathcal{L}_{\text{ren}}(a, b^*) &= \mathcal{L}_{\text{ren}}(a, b) - (\chi_a + \chi_{b^*}) + \chi_a + \chi_b = \mathcal{L}_{\text{ren}}(a, b) + \chi_b - \chi_{b^*} \end{aligned} \quad (3.21)$$

и, следовательно,

$$\mathcal{L}_{\text{ren}}(a^\#, b) = \mathcal{L}_{\text{ren}}(a, b^*) + \chi_a - \chi_{a^\#} - \chi_b + \chi_{b^*}.$$

В соответствии с (2.16) для больших χ мы получаем

$$\begin{aligned} \chi_{b^*} &= \chi_b + \frac{1}{2} \ln C_{b^*}, & C_{b^*} &= \left(\mathcal{B}_\xi(\alpha) \cos \phi_b + \sin t_b \left(1 + 2 \operatorname{sh}^2 \xi \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) \right)^2 + \cos^2 t_b, \\ \chi_{a^\#} &= \chi_a + \frac{1}{2} \ln C_{a^\#}, & C_{a^\#} &= \left(\mathcal{B}_\xi(-\alpha) \cos \phi_a + \sin t_a \left(1 + 2 \operatorname{sh}^2 \xi \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) \right)^2 + \cos^2 t_a, \end{aligned}$$

где $\mathcal{B}_\xi$ определено в (2.14). Наконец, используя (3.21), выводим окончательное выражение для перенормированной длины геодезической между точками a и b в пределе снятой регуляризации (точки a , b , a^* и b^* лежат на границе):

$$\mathcal{L}_{\text{ren}}(a, b) = \ln [2(\cos(t_a^\# - t_b) - \cos(\phi_a^\# - \phi_b)) C_{a^\#}^{1/2}] = \ln [2(\cos(t_a - t_b^*) - \cos(\phi_a - \phi_b^*)) C_{b^*}^{1/2}].$$

Одна из возможных конфигураций с отображенной геодезической – это случай, когда она выходит из точки на границе, затем проходит несколько раз через грани клина и, наконец, выходит на точку границы (получается многократное наматывание). Это возможно, если массивная частица, деформирующая пространство AdS , тяжелая, т. е. $\alpha > \pi$. На рис. 13б изображена такая ситуация. Интересующая нас геодезическая состоит из частей (b, o_1) , (o_1^*, o_2) и (o_2^*, a) . Из приведенных выше рассуждений следует, что каждая отображенная точка (скажем, точка a) добавляет в перенормированную длину в случае обратного преобразования множитель $C_{a^\#}^{-1/2}$ и множитель $C_{a^*}^{-1/2}$ в случае прямого преобразования. Таким образом, для двухточечной функции, вычисляемой с помощью геодезических, соединяющих точки a и b , как на рис. 13, получаем представление факторов Z_n и $\bar{Z}_n$ для многократно отображенных геодезических:

$$\begin{aligned} Z_n(t_{a,n}^\#, \phi_{a,n}^\#; t_b, \phi_b) &= C_{a^\#n}^{-1/2} = C_{a^\#(n-1)}^{-1/2} C_{b^*}^{-1/2} = \dots = C_{b^*n}^{-1/2}, \\ \bar{Z}_n(t_{a,n}^*, \phi_{a,n}^*; t_b, \phi_b) &= C_{a^*}^{-1/2} = C_{a^*(n-1)}^{-1/2} C_{b^\#}^{-1/2} = \dots = C_{b^\#n}^{-1/2}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

3.4.2. Квазигеодезические. В этом пункте мы найдем перенормированную длину геодезической между времениподобными точками a и b . Длина между точками внутри пространства может быть найдена, как и в предыдущем пункте, с исполь-

Рис. 15. Квазигеодезическая, соединяющая точки a и b . Квазигеодезическая состоит из части, соединяющей точки $a^\#$ и b (жирная кривая), и части, соединяющей точки a и b^* (тонкая кривая). Значения параметров $\xi = 1$ и $\alpha = 1$.

зованием выражения (2.22). Длина всей квазигеодезической состоит из трех частей (см. рис. 15) и может быть записана как

$$\mathcal{L}(a, b) = \mathcal{L}(a, h_1) + \mathcal{L}(h_2, o^*) + \mathcal{L}(o, b).$$

Учитывая, что длина сохраняется при изометрии, а также, что точки o и o^* тождественны, получим

$$\mathcal{L}(o, b) = \mathcal{L}(o^*, b^*), \quad \mathcal{L}(a, b) = \mathcal{L}(a, h_1) + \mathcal{L}(h_2, b^*).$$

В соответствии с (2.30) можно переписать эти выражения с учетом расходящихся частей:

$$\mathcal{L}(a, h_1) = \mathcal{L}_{\text{ren}}(a, h_1) + \chi_a, \quad \mathcal{L}(b^*, h_2) = \mathcal{L}_{\text{ren}}(b^*, h_2) + \chi_{b^*}.$$

Учитывая выражение (2.33) для перенормированной длины, имеем

$$\mathcal{L}(a, b) = \mathcal{L}(a, b^*) = \mathcal{L}(a, h_1) + \mathcal{L}(b^*, h_2) = \mathcal{L}_{\text{ren}}(a, b^*) + \chi_a + \chi_{b^*} - 2 \ln 2. \quad (3.23)$$

С другой стороны, длина геодезической между точками a и b записывается как

$$\mathcal{L}(a, b) = \mathcal{L}_{\text{ren}}(a, b) + \chi_a + \chi_b - 2 \ln 2. \quad (3.24)$$

Сравнивая два последних выражения, получаем перенормированную длину для времениподобных точек:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{ren}}(a, b) &= \mathcal{L}_{\text{ren}}(a, b^*) - (\chi_b - \chi_{b^*}) = \mathcal{L}_{\text{ren}}(a, b^*) + \frac{1}{2} \ln C_{b^*} = \\ &= \ln [2(|\cos(t_a - t_{b^*}) - \cos(\phi_a - \phi_{b^*})| C_{b^*}^{1/2})].\end{aligned}$$

Аналогично запишем выражение для перенормированной длины геодезической между точками $a^\#$, b :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{ren}}(a, b) &= \mathcal{L}_{\text{ren}}(a^\#, b) - (\chi_a - \chi_{a^\#}) = \mathcal{L}_{\text{ren}}(a^\#, b) + \frac{1}{2} \ln C_{a^\#} = \\ &= \ln [2(|\cos(t_{a^\#} - t_b) - \cos(\phi_{a^\#} - \phi_b)| C_{a^\#}^{1/2})].\end{aligned}$$

Таким образом, мы снова получаем формулу (3.22).

4. ЗОННАЯ СТРУКТУРА КОРРЕЛЯТОРОВ

4.1. Легкая частица. Рассмотрим случай легкой движущейся частицы и ситуацию, когда точки a и b лежат на противоположных относительно мировой линии массивной частицы сторонах границы пространства AdS_3 (см. рис. 16).

Выше было показано, что пространство AdS_3 , деформированное движущейся массивной частицей, изменяет корреляционную функцию теории на границе. Чтобы наблюдать этот эффект, мы изобразили на рис. 17 график плотности обратной корреляционной функции $\mathcal{G}_{\alpha, \xi, \phi_b, t_b}(\phi_a, t_a)$ как функции координат точки a при фиксированной точке b и фиксированных параметрах α , ξ :

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{\alpha, \xi, \phi_b, t_b}(\phi_a, t_a) &= G_{\alpha, \xi}^{-1}(\phi_a, t_a, \phi_b, t_b), \\ \phi_{\text{max}} < \phi_a < \pi, \quad 2\pi - \phi_{\text{max}} < \pi < \phi_b < 2\pi, \quad \alpha < \pi.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Когда точки a и b расположены на противоположных сторонах от границы пространства, присутствует вклад от отображенной геодезической и имеет место эффект деформации пространства частицей (ср. обсуждение этого вопроса с обсуждением в работе [29]).

На рис. 17 приведены графики функции $\mathcal{G}_{\alpha, \xi, \phi_b, t_b}(\phi_a, t_a)$ при фиксированных t_a , ϕ_b , t_b для фиксированных значений параметров α , ξ и различных Δ . На рис. 18 изображены двумерные графики функции $\mathcal{G}_{\alpha, \xi, \phi_b, t_b}(\phi_a, t_a)$ при фиксированных ϕ_b , t_b для различных значений параметров α , ξ и при $\Delta = 1$. Жирные кривые соответствуют границе удаленной области, штриховые линии указывают места разрывов, которые разделяют различные зоны.

На всех изображениях на рис. 18 имеются зоны, где дает вклад только базовая геодезическая, т. е. корреляционная функция остается неизменной, а также зоны (в окрестности $\phi = 0$), где подключается вклад от геодезической с намоткой. Они отделены от зоны базовой геодезической разрывом. Наличие белой области для случая тяжелой частицы обусловлено тем, что мы учитываем только вклады от пространственноподобных геодезических, т. е. все геодезические, которые соединяют точки, разделенные времениподобным интервалом (точки a и b или a^* и b), не рассматриваются.

Рис. 16. Положение движущейся массивной легкой частицы и двух точек, от которых зависит корреляционная функция. Окружность – это граница пространства AdS_3 в сечении при постоянном времени. Точка b фиксирована и лежит на дуге окружности, изображенной тонкой линией, точка a может лежать в пределах дуги окружности, изображенной более толстой линией. Удаленная из пространства часть ограничена штриховой дугой. Жизненное пространство на рисунке определяется тонкой и жирной линиями.

Рис. 17. Графики функции $\mathcal{G}_{\alpha,\xi,\phi_b,t_b}(\phi_a, t_a)$ (4.1) при фиксированных значениях $t_a = 0.5$, $\phi_b = 3\pi/2$, $t_b = 0$ и параметрах $\alpha = 0.3$, $\xi = 0.4$ для различных значений Δ (а). График функции $\ln \mathcal{G}_{\alpha,\xi,\phi_b,t_b}(\phi_a, t_a)$ для тех же значений параметров (б). Значения $\Delta = 2.6, 2.2, 1.8, 1.4, 1$ (сверху вниз на каждом из рисунков). Вертикальные линии соответствуют границе жизненного пространства.

Рис. 18. Графики функции (4.1). На этом и последующих подобных графиках координата ϕ_a откладывается по горизонтальной оси, а координата t_a – по вертикальной оси. Для каждого графика $t_b = 0$ и координата ϕ_b выбирается так, чтобы точка в данный момент времени лежала на границе клина. Жирная кривая соответствует границе жизненного пространства. Параметр α увеличивается слева направо: $\alpha = 0.3, 0.7, 1.1$. Параметр ξ увеличивается сверху вниз: $\xi = 0, 0.4, 0.8, 1.2$.

4.2. Тяжелая частица. Для тяжелой частицы мы изучаем ту же корреляционную функцию (4.1), что и для легкой частицы в предыдущем пункте, но при

$$0 < \phi_a < 2\pi, \quad \frac{\pi}{2} < \phi_b < \frac{3\pi}{2}, \quad \alpha = \frac{3\pi}{2} > \pi. \quad (4.2)$$

Зонная структура двухточечной корреляционной функции на границе пространства AdS_3 с тяжелой движущейся частицей изображена на рис. 19. Видно, что имеется разделение на несколько, вообще говоря, различных зон, и это типично при деформации пространства тяжелой частицей. Поясним происхождение этих зон сначала для случая неподвижной частицы (см. рис. 20).

Возьмем точку a в “темной” зоне (см. рис. 21). Точки a и b пространственноподобные. Точку a можно соединить с помощью геодезической не только с точкой b с координатами $\phi_b = \phi_a = \pi$, $t_b = t_a = 0$, но и с отображенными точками b^* , b^{**} и $b^\#$. Следовательно, мы имеем несколько вкладов в пропагатор. Для случая, представленного на рис. 21, присутствуют вклады от четырех слагаемых.

Рассмотрим движущуюся тяжелую частицу, расположенную в начальный момент так, как показано на рис. 22. Жизненное пространство лежит в интервале $(\pi/2, 3\pi/2)$. На рис. 23 изображены вклады для различных конфигураций геодезических в этом случае. Видно, что вклад от базовых пространственноподобных геодезических ограничен световым конусом; однократно намотанная геодезическая дает вклад почти всюду. Вклады от различных конфигураций дважды намотанных геодезических формируют зоны рядом с границей, но все вклады от геодезических с двойными намотками покрывают всё жизненное пространство. На рис. 19 показана сумма всех вкладов, представленных отдельно на рис. 23. На рис. 24 изображен двумерный график обратной корреляционной функции при различных значениях Δ и при фиксированных параметрах α и ξ для случая тяжелой частицы. Повторим, что мы не учитываем вклад от геодезических, разделенных времениподобным интервалом.

Видно, что для тяжелой частицы не существует какой-либо “тени”, как в случае легкой частицы.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе исследованы корреляционные функции конформных операторов в теории, двойственной геометрии пространства AdS_3 , деформированного массивной движущейся частицей. Наши вычисления основаны на геодезическом приближении. Это приближение хорошо работает для операторов с большим конформным весом Δ . Мы, однако, проследили, как это приближение работает для данной геометрии начиная с $\Delta = 1$. Оказалось, что в выражениях для корреляционных функций имеются дополнительные вклады, связанные с нетривиальной структурой геодезических в деформированном пространстве. Наличие этих дополнительных вкладов не зависит от конформной размерности. Дополнительные геодезические, возникающие при вычислении корреляторов, можно найти с помощью перенормированного метода отображений. В работе не учтен вклад геодезических, соединяющих точки времениподобным интервалом.

Рис. 19. Функция $\mathcal{G}_{\alpha, \xi, \phi_b, t_b}(\phi_a, t_a)$ (4.1) в области (4.2) при значениях $\phi_b = \pi$, $t_b = 0$ и $\alpha = 3\pi/2$ и $\xi = 0.6$; жирные кривые показывают границы удаленных областей.

Рис. 20. Функция $\mathcal{G}_{\alpha, \xi, \phi_b, t_b}(\phi_a, t_a)$ (4.1) в области (4.2) в жизненном пространстве, деформированном тяжелой частицей, при $\phi_b = \pi$, $t_b = 0$ и $\alpha = 3\pi/2$ и $\xi = 0.6$. Масштабы по вертикальной и горизонтальной осям различные. Жирный прямоугольник показывает часть, удаленную из пространства AdS.

Рис. 21. Различные зоны двухточечной корреляционной функции. Здесь масштабы по осям совпадают.

Рис. 22. Различные положения движущейся массивной частицы и двух точек коррелятора. Окружность – это граница пространства AdS_3 в сечении при постоянном времени, точка ϕ_b фиксирована в жизненном пространстве (в штриховой части границы). Точка ϕ_a также принадлежит жизненному пространству.

Рис. 23. Различные вклады в функцию $\mathcal{G}_{\alpha, \xi, \phi_b, t_b}(\phi_a, t_a)$, заданную формулами (4.1), (4.2) при $\phi_b = \pi$ и $t_b = 0$ и $\alpha = 3\pi/2$. Жирные линии соответствуют границам удаленных областей. На верхнем левом графике изображена граница удаленной области, на верхнем правом – вклад от базовой геодезической. Левый и правый графики во второй строке отвечают вкладом от дважды намотанных геодезических для различных слагаемых в (4.1), третья строка отвечает вкладу от геодезической, намотанной один раз.

Рис. 24. Функция $\mathcal{G}_{\alpha,\xi,\phi_b,t_b}(\phi_a, t_a)$ (4.1) в области (4.2) при фиксированных $t_a = 0.2$, $\phi_b = \pi$, $t_b = 0$ и $\alpha = 3\pi/2$, $\xi = 0.4$ для различных значений $\Delta = 2.6, 2.2, 1.8, 1.4, 1$ (а). Функция $\ln \mathcal{G}_{\alpha,\xi,\phi_b,t_b}(\phi_a, t_a)$ при тех же фиксированных значениях переменных и параметров для $\Delta = 6, 5, 4, 3, 2$ (б). На обоих рисунках кривые расположены сверху вниз по убыванию значения Δ .

Мы получили две различные картины качественного поведения корреляторов на границе пространства AdS_3 , деформированного покоящейся/движущейся частицей. В первом случае частица, деформирующая пространство AdS_3 , легкая. Тогда дополнительные вклады, упомянутые выше, приводят к следующей картине: мы имеем две различные зоны, разделенные разрывом. При увеличении Δ разрывы сглаживаются. Одна из зон соответствует первоначальному коррелятору конформной теории поля на цилиндре. Другая зона соответствует деформированной теории, т. е. линии постоянного уровня обратного коррелятора деформируются. В случае тяжелой частицы коррелятор имеет качественные отличия: теория деформируется во всем пространстве, и присутствует множество различных вкладов от разных многократно намотанных геодезических. Количество намоток зависит от отклонения $2\pi/\bar{\alpha}$, где $\bar{\alpha}$ – угол, характеризующий жизненное пространство.

Интересно сравнить наши результаты с корреляторами, полученными с использованием предписания Габсера–Клебанова–Полякова–Виттена [2], [3], которое основано на анализе скалярного поля внутри пространства. Этот вопрос обсуждается в работе [44]. Вопрос о вкладе времениподобных геодезических обсуждается в работе [45].

Благодарности. Авторы искренне благодарят Андрея Багрова, Дмитрия Быкова, Игоря Воловича, Шиана Каманьо, Андрея Михайлова, Джузеппе Поликастро и Михаила Храмцова за плодотворные обсуждения. И. Я. Арефьева благодарит Galileo Galilei Institute for Theoretical Physics (Италия) за гостеприимство.

Список литературы

- [1] J. M. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **2:2** (1998), 231–252, arXiv: hep-th/9711200.
- [2] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, A. M. Polyakov, *Phys. Lett B.*, **428:1–2** (1998), 105–114, arXiv: hep-th/9802109.

- [3] E. Witten, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **2**:2 (1998), 253–291, arXiv: hep-th/9802150.
- [4] И. Я. Арефьева, *УФН*, **184**:6 (2014), 569–598.
- [5] O. DeWolfe, S. S. Gubser, C. Rosen, D. Teaney, *Prog. Part. Nucl. Phys.*, **75** (2014), 86–132, arXiv: 1304.7794.
- [6] J. Casalderrey-Solana, H. Liu, D. Mateos, K. Rajagopal, U. A. Wiedemann, *Gauge/string duality, hot QCD and heavy ion collisions*, arXiv: 1101.0618.
- [7] C. P. Herzog, P. Kovtun, S. Sachdev, D. T. Son, *Phys. Rev. D*, **75**:8 (2007), 085020, 20 pp., arXiv: hep-th/0701036.
- [8] S. A. Hartnoll, C. P. Herzog, G. T. Horowitz, *Phys. Rev. Lett.*, **101**:3 (2008), 031601, 4 pp., arXiv: 0803.3295.
- [9] S. A. Hartnoll, C. P. Herzog, G. T. Horowitz, *JHEP*, **12** (2008), 015, 42 pp., arXiv: 0810.1563.
- [10] V. Balasubramanian, A. Bernamonti, J. de Boer, N. Copland, B. Craps, E. Keski-Vakkuri, B. Müller, A. Schäfer, M. Shigemori, W. Staessens, *Phys. Rev. D*, **84**:2 (2011), 026010, 31 pp., arXiv: 1103.2683.
- [11] V. Balasubramanian, A. Bernamonti, B. Craps, V. Keränen, E. Keski-Vakkuri, B. Müller, L. Thorlacius, J. Vanhoof, *JHEP*, **04** (2013), 069, 50 pp., arXiv: 1212.6066.
- [12] J. Aparício, E. López, *JHEP*, **12** (2011), 082, 34 pp., arXiv: 1109.3571.
- [13] V. Keränen, E. Keski-Vakkuri, L. Thorlacius, *Phys. Rev. D*, **85**:2 (2012), 026005, 14 pp., arXiv: 1110.5035.
- [14] И. Я. Арефьева, *ТМФ*, **184**:3 (2015), 398–417, arXiv: 1503.02185.
- [15] S. Ryu, T. Takayanagi, *Phys. Rev. Lett.*, **96**:18 (2006), 181602, 4 pp., arXiv: hep-th/0603001.
- [16] S. Ryu, T. Takayanagi, *JHEP*, **08** (2006), 045, 48 pp., arXiv: hep-th/0605073.
- [17] T. Nishioka, S. Ryu, T. Takayanagi, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **42**:50 (2009), 504008, 35 pp., arXiv: 0905.0932.
- [18] P. Calabrese, J. L. Cardy, *J. Stat. Mech.*, **10** (2007), P10004, arXiv: 0708.3750.
- [19] M. Nozaki, T. Numasawa, T. Takayanagi, *JHEP*, **05** (2013), 080, 38 pp., arXiv: 1302.5703.
- [20] S. Deser, R. Jackiw, G. 't Hooft, *Ann. Phys.*, **152**:1 (1984), 220–235.
- [21] G. 't Hooft, *Class. Quantum Grav.*, **13**:5 (1996), 1023–1040, arXiv: gr-qc/9601014.
- [22] S. Deser, R. Jackiw, *Commun. Math. Phys.*, **118**:3 (1988), 495–509.
- [23] J. S. Dowker, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **10**:1 (1977), 115–124.
- [24] M. O. Katanaev, I. V. Volovich, *Ann. Phys.*, **216**:1 (1992), 1–28.
- [25] T. W. B. Kibble, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **9**:8 (1976), 1387–1398.
- [26] I. Kirsch, *Fortsch. Phys.*, **52**:8 (2004), 727–826, arXiv: hep-th/0406274.
- [27] C. A. B. Bayona, C. N. Ferreira, V. J. Vasquez Otoyá, *Class. Quantum Grav.*, **28**:1 (2011), 015011, arXiv: 1003.5396.
- [28] I. Ya. Aref'eva, “Colliding hadrons as cosmic membranes and possible signatures of lost momentum”, *Cosmology, Quantum Vacuum and Zeta Functions* (Barcelona, Spain, March 8–11, 2010), Springer Proceedings in Physics, **137**, eds. S. D. Odintsov, D. Sáez-Gómez, S. Xambó-Descamps, Springer, Berlin, 2011, 21–34, arXiv: 1007.4777.
- [29] V. Balasubramanian, S. F. Ross, *Phys. Rev. D*, **61**:4 (2000), 044007, 12 pp., arXiv: hep-th/9906226.
- [30] И. Я. Арефьева, А. А. Баров, *ТМФ*, **182**:1 (2015), 3–27.
- [31] V. Balasubramanian, A. Naqvi, J. Simón, *JHEP*, **08** (2004), 023, 49 pp., arXiv: hep-th/0311237.
- [32] V. Balasubramanian, B. D. Chowdhury, B. Czech, J. de Boer, *JHEP*, **01** (2015), 048, 22 pp., arXiv: 1406.5859.

- [33] I. Arefeva, A. Bagrov, P. Saterskog, K. Schalm, *Holographic dual of a time machine*, [arXiv: 1508.04440](#).
- [34] M. Araújo, D. Areán, J. Erdmenger, J. M. Lizana, *JHEP*, **08** (2015), 146, 35 pp., [arXiv: 1505.05883](#).
- [35] H.-J. Matschull, *Class. Quantum Grav.*, **16**:3 (1999), 1069–1096, [arXiv: gr-qc/9809087](#).
- [36] H.-J. Matschull, M. Welling, *Class. Quantum Grav.*, **15**:10 (1998), 2981–3030, [arXiv: gr-qc/9708054](#).
- [37] M. Ciafaloni, *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.*, **57**:1–3 (1997), 323–325.
- [38] K. Osterwalder, R. Schrader, *Commun. Math. Phys.*, **31**:2 (1973), 83–12; **42**:3 (1975), 281–305.
- [39] M. Lüscher, G. Mack, *Commun. Math. Phys.*, **41**:3 (1975), 203–234.
- [40] R. Haag, *Local Quantum Physics. Fields, Particles, Algebras*, Springer, Berlin, 1992.
- [41] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов, *Обобщенные функции и действия над ними*, Физматлит, М., 1959.
- [42] K. Skenderis, B. C. van Rees, *JHEP*, **05** (2009), 085, 71 pp., [arXiv: 0812.2909](#).
- [43] I. Ya. Aref'eva, M. A. Khramtsov, *JHEP*, **04** (2016), 121, 22 pp., [arXiv: 1601.02008](#).
- [44] D. S. Ageev, I. Ya. Aref'eva, *Holographic dual to conical defects: II. Colliding ultrarelativistic particles*, [arXiv: 1512.03363](#).
- [45] Ya. Aref'eva, M. A. Khramtsov, M. D. Tikhonovskaya, *Holographic dual to conical defects III: Improved image method*, [arXiv: 1604.08905](#).

Поступила в редакцию 16.06.2015