Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Бонеки, Ц. Цю, М. Тарлини, Бигамильтонова система
на грассманиане, *ТМФ*, 2016, том 189, номер 1, 3–14

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9087>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 04:16:09

© 2016 г.

Ф. Бонеки*, Ц. Цю†, М. Тарлини*

БИГАМИЛЬТОНОВА СИСТЕМА НА ГРАССМАНИАНЕ

С учетом недавних результатов о том, что геометрия Пуассона–Нийенхайса соответствует квантованию симплектического группоида, интегрирующего пуассоново многообразие, обсуждается структура Пуассона–Нийенхайса на грассманиане, заданном совместными структурами Кириллова–Костанта–Сурьо и Брюа–Пуассона. Собственные числа тензора Нийенхайса являются переменными Гельфанда–Цетлина, которые, как было показано, также находятся в инволюции по отношению к структуре Брюа–Пуассона. Кроме того, доказано, что расслоение Штифеля на грассманиане допускает наличие бигамильтоновой структуры.

Ключевые слова: симплектическая геометрия, интегрируемые системы, геометрия Пуассона–Нийенхайса, квантование пуассоновых многообразий, симплектические группоиды.

DOI: 10.4213/tmf9087

1. ВВЕДЕНИЕ

Понятие *симплектического группоида* было введено Карасевым и Вейнштейном с целью квантования пуассоновых многообразий. Действительно, если пуассоново многообразие (M, π) *интегрируемо*, то существует каноническое симплектическое многообразие $\mathcal{G}$, наделенное совместной группоидной структурой, которая воспроизводит тензор Пуассона π на его пространстве единиц M . Совместность симплектической структуры и группоида определяется требованием, чтобы граф умножения был лагранжевым подмногообразием многообразия $\bar{\mathcal{G}} \times \bar{\mathcal{G}} \times \mathcal{G}$, где $\bar{\mathcal{G}}$ имеет противоположную симплектическую форму. Если $\mathcal{H}$ – пространство состояний, полученных с помощью некоторого квантования многообразия $\mathcal{G}$, то граф умножения квантуется вектором в пространстве $\mathcal{H}^* \otimes \mathcal{H}^* \otimes \mathcal{H}$, который можно понимать как отображение $m: \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, задающее алгебраическую структуру на $\mathcal{H}$, которую следует считать алгеброй наблюдаемых, квантующей алгебру Пуассона на M .

В работе [1] была предложена общая концепция, основанная на геометрическом квантовании симплектического группоида, где результатом квантования является

*National Institute of Nuclear Physics, Sezione di Firenze, Firenze, Italy.
Email: francesco.bonechi@fi.infn.it, marco.tarlini@fi.infn.it

†Uppsala University, Department of Mathematics, Uppsala, Sweden.
Email: jian.qiu@math.uu.se

алгебра C^* . Идея заключается в поиске *мультипликативной поляризации*, совместной с группоидной структурой, которая позволяет построить свертку на пространстве поляризованных сечений.

Наша точка зрения и основное наблюдение состоят в том, что именно эта перспектива (а не наложение дополнительных условий на сложную задачу поиска подходящих поляризаций) позволяет найти больше сингулярных поляризаций, а именно – сингулярные действительные поляризации.

В работах [2], [3] мы начали изучение квантования интегрируемых многообразий Пуассона с помощью сингулярных лагранжевых поляризаций симплектического группоида. Начав с проективной плоскости CP_1 , мы перешли к структуре Брюа–Пуассона на комплексных проективных плоскостях CP_n . А именно, рассматривалась действительная поляризация, индуцирующая в пространстве лагранжевых листов структуру топологического группоида. В статье [3] введено понятие *мультипликативной интегрируемости модулярной функции*. Модулярная функция должна быть интегрируемой в обычном смысле, гамильтонианы в инволюции должны быть совместны с группоидной структурой таким образом, чтобы слои уровней наследовали структуру топологического группоида. Тогда можно рассмотреть подгруппоид листов Зоммерфельда и (при условии, что можно ввести систему Хаара) считать квантованием алгебру конволюций.

Источником таких интегрируемых систем является бигамильтонова геометрия. Действительно, как было показано, каждая невырожденная симплектическая структура Пуассона–Нийенхейса (ПН) порождает мультипликативную интегрируемую модель на симплектическом группоиде [4]. Именно эта структура положена в основу построений работы [3] для проективных плоскостей CP_n .

Как показано в работе [5], симплектическая структура ПН существует для всех компактных эрмитовых симплектических пространств: действительно, форма, обратная к симплектической форме Кириллова–Константа–Сурьо (ККС) Ω_{kks} , и структура Брюа–Пуассона π_{bp} совместны. В статье [6] доказано, что эти структуры ПН имеют максимальный ранг и, следовательно, задают мультипликативную интегрируемую модель на симплектическом группоиде, интегрирующем структуру Брюа–Пуассона. Доказательство является общим для всех классических случаев; в настоящей работе развивается более явный альтернативный подход, применимый в случае грассманианов. Мы предполагаем, что он окажется полезным при изучении мультипликативных интегрируемых моделей на симплектических группоидах. Кроме того, мы используем геометрическую концепцию, которая была использована в работе [7] при изучении вырождения торов системы Гельфанда–Цетлина, и, таким образом, представляется разумным попытаться найти возможное вырождение полной геометрии Нийенхейса.

В статье [6] в явном виде посчитаны собственные числа оператора Нийенхейса $N = \pi_{\text{bp}}\Omega_{\text{kks}}$ и доказано, что они представляют собой общеизвестные переменные Гельфанда–Цетлина. Эта интегрируемая модель хорошо известна, она изучена в работе [8]. Новым является тот факт, что собственные числа находятся в инволюции и со структурой Брюа–Пуассона. В данной работе мы начинаем с построения в явном виде структуры Пуассона на $\mathbb{C}^{n^k}$ и сводим ее к грассманиану, следуя тем же этапам симплектической редукции, которая задает и симплектическую форму ККС, и доказываем далее более простым способом результаты, полученные в работе [6].

В частности, мы рассматриваем геометрию Пуассона расслоения Штифеля на грассманианах и, кроме того, доказываем существование бигамильтоновой структуры на многообразии Штифеля.

2. СТРУКТУРЫ ПН

Напомним основные необходимые факты из геометрии ПН. Пусть (M, π) – пуассоново многообразие, где $\pi \in C^\infty(\Lambda^2 TM)$ – бивектор Пуассона, и

$$\{f, g\} = \pi^{ij} \partial_i f \partial_j g$$

есть скобка Пуассона между $f, g \in C^\infty(M)$. С помощью скобки Схоутена между мультивекторными полями можно записать тождество Якоби для скобки Пуассона в виде $[\pi, \pi] = 0$.

$(1, 1)$ -тензор $N: TM \rightarrow TM$ называется *тензором Нийенхейса*, если он имеет нулевое кручение Нийенхейса, т. е. для любой пары (v_1, v_2) векторных полей на M имеем

$$T(N)(v_1, v_2) = [Nv_1, Nv_2] - N([Nv_1, v_2] + [v_1, Nv_2] - N[v_1, v_2]) = 0.$$

Многообразием *Пуассона–Нийенхейса* является триада (M, π, N) , где (M, π) – пуассоново многообразие, а N – тензор Нийенхейса, при этом π и N совместны, т. е.

$$N \circ \pi = \pi \circ N^*, \quad \{\alpha, \beta\}_{N\pi} = \{N^*\alpha, \beta\}_\pi + \{\alpha, N^*\beta\}_\pi - N^*\{\alpha, \beta\}_\pi,$$

где

$$\{\alpha, \beta\}_\pi = L_{\pi(\alpha)}\beta - L_{\pi(\beta)}\alpha - d\langle \pi, \alpha \wedge \beta \rangle$$

при $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$, а N^* означает дуальное отображение. Одним из важных свойств геометрии ПН является существование иерархии совместных пуассоновых структур $N^k(\pi)$, т. е. $[N^k(\pi), N^s(\pi)] = 0$ для всех $k, s \geq 0$.

Рассмотрим теперь обратную симплектическую форму Ω^{-1} и другую совместную пуассонову структуру π_0 , т. е. $[\Omega^{-1}, \pi_0] = 0$. Как следствие существует пучок структур Пуассона $\pi_t = \pi_0 + t\Omega^{-1}$ при $t \in \mathbb{R}$. Кроме того, $(M, \Omega^{-1}, N = \pi_0 \Omega)$ является (симплектической) структурой ПН (доказательство см. в статье [9]).

Структуры ПН тесно связаны с интегрируемыми системами (общие ссылки на бигамильтоновы системы даны в работе [10]). Рассмотрим *спектральную проблему*, связанную с симплектической структурой ПН, а именно задачу на собственные числа тензора N . Поскольку $N^* - \lambda = \Omega \circ (\pi_0 - \lambda\Omega^{-1})$ и $\pi_0 - \lambda\Omega^{-1}$ является антисимметричным оператором, собственные числа тензора N^* дважды вырождены, и число различных собственных чисел не превосходит $(\dim M)/2$. Будем говорить, что тензор N имеет максимальный ранг, если существует открытое плотное многообразие M_0 , на котором определено $(\dim M)/2$ независимых функций $\lambda_i \in C^1(M_0)$ таких, что $\lambda_i(x)$ является собственным числом тензора N при $x \in M_0$. Назовем такие функции λ_i собственными числами Нийенхейса. Нет гарантии, что их можно продолжить на все многообразие M ; в наших примерах они продолжаются как непрерывные функции.

Набор гладких функций I_k удовлетворяет *рекуррентным соотношениям Ленарда*, если

$$dI_{k+1} = N^* dI_k. \quad (1)$$

Как следствие I_k находятся в инволюции с Ω^{-1} и π_0 . Канонический набор таких функций имеет вид $I_k = 1/k \operatorname{Tr} N^k$, $k = 1, \dots, n$. Можно проверить уравнение (1) с помощью соотношений $\mathcal{L}_{NX}N = N\mathcal{L}_XN$ при $X \in TM$.

Если N имеет максимальный ранг, собственные числа Нийенхайса удовлетворяют следующему уравнению:

$$N^* d\lambda_i = \lambda_i d\lambda_i. \quad (2)$$

Собственные числа Нийенхайса находятся в инволюции с обеими пуассоновыми структурами Ω^{-1} и π_0 , они представляют собой возможный выбор переменных действия интегрируемой системы.

3. БИГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ НА ГРАССМАНИАНЕ

В этом разделе вводятся симплектические и пуассоновы структуры на грассманиане. Грассманиан $\operatorname{Gr}(n, k)$ можно понимать как коприсоединенную орбиту группы $U(n)$, таким образом фиксируется симплектическая структура ККС. Наделив $U(n)$ стандартной структурой Пуассона–Ли, можно показать, что

$$\operatorname{Gr}(n, k) = U(n)/U(n-k) \times U(k)$$

является однородным пространством Пуассона; назовем эту структуру структурой Брюа–Пуассона. В работе [5] показана совместность двух указанных пуассоновых структур.

Дадим явное описание этих структур на $\operatorname{Gr}(n, k)$. В п. 3.1 грассманиан $\operatorname{Gr}(n, k)$ охарактеризован как симплектическая редукция пространства $\mathbb{C}^{nk}$, рассматриваемая как гамильтоново пространство $U(k)$. Это построение определяет $U(k)$ -расслоение Штифеля на грассманиане. В п. 3.2 мы показываем, что та же редукция задает структуру Брюа–Пуассона на $\operatorname{Gr}(n, k)$. Наконец, в п. 3.3 обсуждается совместность в рамках указанной геометрической концепции. В частности, доказано существование бигамильтоновой структуры не только на $\operatorname{Gr}(n, k)$, но и на многообразии Штифеля.

3.1. Расслоение Штифеля. отождествим $\mathfrak{u}(n)$ с антиэрмитовыми матрицами; дуальные матрицы $\mathfrak{u}(n)^*$ отождествим с пространством $\operatorname{Herm}(n)$ эрмитовых матриц со спариванием $\langle X, \xi \rangle = \operatorname{Im} \operatorname{Tr}(X\xi)$, где $X \in \mathfrak{u}(n)$ и $\xi \in \operatorname{Herm}(n)$. Таким образом, коприсоединенное действие отображается в присоединенное. Определим $\operatorname{Gr}(n, k)$ как присоединенную $U(n)$ -орбиту подпространства $\rho \subset \operatorname{Herm}(n)$, где

$$\rho = \operatorname{diag}(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-k}, \underbrace{1, \dots, 1}_k). \quad (3)$$

Обозначим через Ω_{kks} соответствующую симплектическую структуру ККС, а через $\{\cdot, \cdot\}_{\text{kks}}$ соответствующую скобку Пуассона. Поскольку подгруппой изотропий для ρ является $U(n-k) \times U(k)$, где $U(n-k)$ – минор порядка $n-k$ в левом верхнем углу и $U(k)$ – минор порядка k в правом нижнем углу, отображение $\mu_{(n,k)}: U(n) \rightarrow \operatorname{Gr}(n, k)$, заданное формулой

$$\mu_{(n,k)}(g) = g\rho g^{-1}, \quad g \in U(n), \quad (4)$$

отождествляет $\text{Gr}(n, k)$ с однородным пространством $U(n)/U(n-k) \times U(k)$. Обозначим тем же символом $\mu_{(n,k)}$ отображение моментов для гамильтонова присоединенного $U(n)$ -действия, причем $\mu_{(n,k)}(X) = \langle X, \mu_{(n,k)} \rangle$. Отображение эквивариантно, т. е. для любого $X, Y \in \mathfrak{u}(n)$ имеем

$$\{\mu_{(n,k)}(X), \mu_{(n,k)}(Y)\}_{\text{kks}} = \mu_{(n,k)}([X, Y]).$$

Переменными Гельфанда–Цетлина являются собственные числа $\lambda_\alpha^{(r)}$, $\alpha = 1, \dots, r$, минора порядка r в левом верхнем углу отображения $\mu_{(n,k)}$ (см. статью [8]). Они удовлетворяют следующим неравенствам, которые задают так называемый *конус Гельфанда–Цетлина* $\mathcal{C}_{\text{GC}}$:

$$\lambda_\alpha^{(n-i)} \leq \lambda_\alpha^{(n-i-1)} \leq \lambda_{\alpha+1}^{(n-i)} \quad (5)$$

при $i = 0, \dots, n-1$ и $\lambda_\alpha^{(n)} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-k}, \underbrace{1, \dots, 1}_k)$. В качестве примера приведем схему грассманиана $\text{Gr}(4, 2)$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & \lambda_2^{(3)} & 1 \\ & \lambda_1^{(2)} & \lambda_2^{(2)} & \\ & & \lambda_1^{(1)} & \end{bmatrix}.$$

Грассманиан $\text{Gr}(n, k)$ задается как симплектическая редукция пространства $\mathbb{C}^{n \cdot k}$. Рассмотрим каноническую симплектическую форму на $\mathbb{C}^{n \cdot k}$, записанную в виде

$$\Omega = i \sum_{i,j} dz_i^j \wedge \bar{d}z_i^j, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = n-k+1, \dots, n. \quad (6)$$

При заданном естественном правом $U(k)$ -действии на векторном пространстве $\mathbb{C}^{n \cdot k}$ отображение его моментов имеет вид $\nu_{U(k)}: \mathbb{C}^{n \cdot k} \rightarrow \text{Herm}(k)$, а именно:

$$\nu_{U(k)}: \begin{pmatrix} z_1^{n-k+1} & \dots & z_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_n^{n-k+1} & \dots & z_n^n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} |z_i^{n-k+1}|^2 & \dots & \bar{z}_i^{n-k+1} z_i^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{z}_i^n z_i^{n-k+1} & \dots & |z_i^n|^2 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

при этом

$$\sum_{j'} z_i^{j'} X_{j'j} = \{\nu_{U(k)}(X), z_i^j\},$$

где z_i^j – координаты на $\mathbb{C}^{n \cdot k}$, а $X \in \mathfrak{u}(k)$.

Тогда многообразие

$$\nu_{U(k)}^{-1}(1_k) \subset \mathbb{C}^{n \cdot k} \quad (8)$$

характеризуется соотношениями

$$\sum_{i=1}^n |z_i^j|^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^n \bar{z}_i^j z_i^{j'} = 0, \quad j \neq j', \quad j, j' = n-k+1, \dots, n. \quad (9)$$

С учетом этих выражений столбцы в правой части (7) образуют ортонормированный k -репер.

Получаем, что форма ККС Ω_{KKS} на грассманиане $\text{Gr}(n, k)$ является симплектической редукцией пространства $\mathbb{C}^{n \times k}$ под влиянием $U(k)$ -действия:

$$\text{Gr}(n, k) = \mathbb{C}^{n \times k} // U(k) = \nu_{U(k)}^{-1}(1_k) / U(k). \quad (10)$$

Подпространство пространства $\mathbb{C}^{n \times k}$, заданное с помощью $\nu_{U(k)}^{-1}(1_k)$, является многообразием Штифеля $S(n, k)$, а правое $U(k)$ -действие является главным и задает главное расслоение Штифеля:

$$\begin{array}{ccc} S(n, k) & \leftarrow & U(k) \\ \downarrow & & \\ \text{Gr}(n, k) & & \end{array}. \quad (11)$$

Это расслоение эквивариантно по отношению к естественным левым $U(n)$ -действиям.

Кольцо полиномиальных функций $\mathcal{A}(S(n, k))$ образовано элементами матрицы $\sigma \in M_{n, k}(\mathcal{A}(S(n, k)))$ вида

$$\sigma = \begin{pmatrix} z_1^{n-k+1} & z_1^{n-k+2} & \cdots & z_1^n \\ z_2^{n-k+1} & z_2^{n-k+2} & \cdots & z_2^n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ z_n^{n-k+1} & z_n^{n-k+2} & \cdots & z_n^n \end{pmatrix}.$$

Тогда легко проверить, что

$$\nu_{U(k)} = \sigma^\dagger \sigma = 1_k, \quad \mu_{(n, k)} = \sigma \sigma^\dagger,$$

где $\mu_{(n, k)}$ – отображение моментов для гамильтонова левого $U(n)$ -действия на грассманиане $\text{Gr}(n, k)$. Тавтологическое векторное расслоение – это эрмитово векторное расслоение, связанное с фундаментальным представлением группы $U(k)$, которое обозначается $\mathcal{E}_k = S(n, k) \times_{U(k)} \mathbb{C}^k$, где $(s, v) \sim (sg, vg)$ и $s \in S(n, k)$, $v \in \mathbb{C}^k$, $g \in U(k)$.

Легко проверить, что i -я строка матрицы σ , $\sigma_i: S(n, k) \rightarrow \mathbb{C}^k$ вида

$$\sigma_i(s) = (z_i^{n-k+1}, z_i^{n-k+2}, \dots, z_i^n), \quad s \in S(n, k), \quad i = 1, \dots, n, \quad (12)$$

является $U(k)$ -эквивариантной, т. е. она представляет собой (голоморфное) сечение расслоения $\mathcal{E}_k$. Более того, отображение $\mu_{(n, k)} = \sigma \sigma^\dagger \in M_n(C^\infty(\text{Gr}(n, k)))$ – идемпотент ранга k . Оно представляет $\mathcal{E}_k$ в виде $\text{Im } \mu_{(n, k)} \subset \mathbb{C}^n$. Наконец, справедливо равенство $(\mu_{(n, k)})_{ij} = \langle \sigma_i, \sigma_j \rangle$, где $\langle z, w \rangle = \sum_{i=1}^k z_i \bar{w}_i$ означает обычное эрмитово произведение на $\mathbb{C}^k$.

3.2. Структура Пуассона на расслоении Штифеля. Рассмотрим стандартную структуру Пуассона–Ли на $U(n)$, полученную с помощью классической r -матрицы $r = 1/2 \sum_{j < k} X_j^k \wedge Y_j^k$, где $X_j^k = e_j^k - e_k^j$ и $Y_j^k = i(e_j^k + e_k^j)$, а e_j^k – матрица $n \times n$, в которой элемент (j, k) равен единице, а все остальные элементы равны нулю. Напомним, что пуассонов бивектор определяется выражением $\pi = r^L - r^R$, в котором L и R означают левый и правый сдвиг.

Можно показать, что $U(n - k)$ и $U(k)$ являются подгруппами Пуассона, поэтому однородные пространства

$$S(n, k) = U(n)/U(n - k)$$

и

$$\text{Gr}(n, k) = U(n)/U(n - k) \times U(k)$$

наследуют структуру Пуассона. Более того, поскольку правые действия $U(k)$ и $U(n - k)$ коммутируют друг с другом, умножение справа на $U(k)$ сводится к правому пуассонову действию $U(k)$ на $S(n, k)$. Как следствие, главное расслоение (11) является пуассоновым, а связанное с ним расслоение $\mathcal{E}_k$ является пуассоновым векторным расслоением [6]. Эти утверждения следуют из плоской контрвариантной связности, явная формула для которой обсуждается в следующем разделе.

Дадим явное описание указанных пуассоновых структур в соответствии с симплектической редукцией, изложенной в предыдущем пункте.

Напомним, что для заданной биалгебры Ли $(\mathfrak{g}, \delta)$ и ее дуальной алгебры $(\mathfrak{g}^*, \delta^*)$ дубль Дринфельда алгебры $\mathfrak{g}$ является квазитриангулярной биалгебраической структурой $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$, заданной на векторном пространстве $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ с r -матрицей, имеющей вид $r = \sum_i e^i \wedge e_i$, где $\{e_i\}$ – базис в $\mathfrak{g}$ и $\{e^i\}$ – дуальный базис в $\mathfrak{g}^*$. Биалгебры $(\mathfrak{g}, \delta)$ и $(\mathfrak{g}^*, \delta^*)$ являются биподальгебрами биалгебраической структуры $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$. Тогда односвязная группа, интегрирующая $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$, является группой Пуассона–Ли, таким образом G и G^* являются подгруппами Пуассона–Ли (см. книгу [11]).

Применим эту процедуру к стандартной структуре Пуассона–Ли группы $G = U(n)$. В этом случае дубль Дринфельда $GL(n, \mathbb{C})$ является действительной группой.

В работе [12] в явном виде описаны скобки структуры Пуассона на $SL(n, \mathbb{C})$, которые можно считать полуклассическим пределом для связей действительной квантовой группы $SL_q(n, \mathbb{C})$, описанной в статье [13]. Можно перенести данную структуру Пуассона непосредственно на $GL(n, \mathbb{C})$ и $\mathbb{C}^{n^2}$ согласно формулам

$$\begin{aligned} \{z_i^j, z_i^{j'}\} &= iz_i^j z_i^{j'}, & j < j', & & \{z_i^j, z_{i'}^j\} &= iz_i^j z_{i'}^j, & i < i', \\ \{z_i^j, z_{i'}^{j'}\} &= 2iz_i^{j'} z_{i'}^j, & i < i', \quad j < j', & & \{z_i^j, z_{i'}^{j'}\} &= 0, & i > i', \quad j < j', \\ \{\bar{z}_i^j, z_i^j\} &= 2i \left(\sum_{j' > j} |z_i^{j'}|^2 - \sum_{i' < i} |z_{i'}^j|^2 \right), & & & \{\bar{z}_i^j, z_{i'}^{j'}\} &= 0, & i \neq i', \quad j \neq j', \\ \{\bar{z}_i^j, z_{i'}^j\} &= iz_i^j z_{i'}^j + 2i \sum_{j' > j} \bar{z}_i^{j'} z_{i'}^{j'}, & i \neq i', & & & & \\ \{\bar{z}_i^j, z_i^{j'}\} &= -i \bar{z}_i^j z_i^{j'} - 2i \sum_{i' < i} \bar{z}_{i'}^j z_{i'}^{j'}, & j \neq j'. & & & & \end{aligned} \quad (13)$$

Заметим, что $(2, 0)$ -часть тензора Пуассона является голоморфным тензором Пуассона.

Посредством прямых вычислений можно доказать следующую лемму.

ЛЕММА 3.1. 1. *Отображение, заданное формулами (7), при $k = n$ определяет идеал $I_c = \langle \nu_{U(n)}(z) - c \rangle$ алгебры Пуассона на $C^\infty(\mathbb{C}^{n^2})$ для любого числа $c \in \mathbb{R}$. В частности, $U(n) = \nu_{U(n)}^{-1}(1_n)$ является подмногообразием Пуассона.*

2. Подалгебра, порожденная матричными элементами последних k столбцов матрицы $z = (z_i^j)$, является подалгеброй Пуассона, при этом проекция из $\mathbb{C}^{n^2}$ в $\mathbb{C}^{n \times k}$, полученная путем игнорирования первых $n - k$ столбцов матрицы z , является пуассоновой.

3. Идеал $I_{c,k} = I_c \cap C^\infty(\mathbb{C}^{n \times k})$ является идеалом Пуассона, порожденным идеалом $\langle \nu_{U(k)}(z) - c \rangle$. В частности, многообразие Штифеля $S(n, k) = \nu_{U(k)}^{-1}(1_k)$ является подмногообразием Пуассона пространства $\mathbb{C}^{n \times k}$.

Далее, пуассонову структуру многообразия Штифеля можно получить из скобок Пуассона (13), положив $j = n - k + 1, \dots, n$ и используя соотношения

$$\sum_{i=1}^n \bar{z}_i^j z_i^{j'} = (\sigma^\dagger \sigma)_j^{j'} = \delta_j^{j'}.$$

Эти скобки можно также получить как полуклассический предел для связей между генераторами алгебры квантового однородного пространства $S_q^{n,k} = U_q(n)/U_q(n-k)$ согласно работе [14].

Поскольку действие группы $U(k)$ на многообразии Штифеля является пуассоновым, получаем структуру Брюа–Пуассона $\pi_{\text{бр}}$ на грассманиане $\text{Gr}(n, k) = S(n, k)/U(k)$.

3.3. Структуры ПН на $\text{Gr}(n, k)$ и $S(n, k)$. Рассмотрим геометрические концепции, обсуждаемые в предыдущем пункте. Пусть ω и π – пресимплектическая форма и тензор Пуассона на M , при этом π проектируема по отношению к пресимплектическому фактору $p: M \rightarrow \underline{M}$. Обозначим через $\underline{\omega}$ и $\underline{\pi}$ фактор симплектической формы и тензор Пуассона. Легко видеть, что $\omega \pi \omega = p^*(\underline{\omega} \underline{\pi} \underline{\omega})$.

ЛЕММА 3.2. Триада $(\underline{M}, \underline{\omega}^{-1}, \underline{N} = \underline{\pi} \underline{\omega})$ задает структуру ПН тогда и только тогда, когда $d\omega \pi \omega = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\underline{\omega}$ обратима, имеем $d\underline{\omega} \underline{\pi} \underline{\omega} = d\underline{b}_{\underline{\omega}}(\underline{\pi}) = \underline{b}_{\underline{\omega}}([\underline{\omega}^{-1}, \underline{\pi}])$, где $\underline{b}_{\underline{\omega}}: T\underline{M} \rightarrow T^*\underline{M}$ является сжатием под воздействием $\underline{\omega}$. Если $(\underline{N}, \underline{\omega}^{-1})$ задает структуру ПН, то $[\underline{\omega}^{-1}, \underline{\pi}] = [\underline{\omega}^{-1}, \underline{N}(\underline{\pi})] = 0$. Наоборот, если $[\underline{\omega}^{-1}, \underline{\pi}] = 0$, тогда согласно результатам работы [9] пара $(\underline{N}, \underline{\omega}^{-1})$ является структурой ПН. В этом случае справедливость утверждения является следствием инъективности p^* .

В книге [10] триада (M, ω, π) , удовлетворяющая условию $d\omega \pi \omega = 0$, называется $P\Omega$ -структурой; в частности, $N = \pi \omega$ имеет нулевое кручение Нийенхейса. Рассмотрим теперь $M = S(n, k)$, где ω является формой Ω , введенной в уравнении (6) и ограниченной на $S(n, k)$, а π – тензор Пуассона, описанный в п. 3 леммы 3.1. Тогда верны равенства $\underline{\omega} = \Omega_{\text{kks}}$ и $\underline{\pi} = \pi_{\text{бр}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Форма Ω_{kks}^{-1} , обратная к симплектической форме ККС, и структура Брюа–Пуассона $\pi_{\text{бр}}$ на грассманиане $\text{Gr}(k, n)$ совместны друг с другом, т. е. $[\Omega_{\text{kks}}^{-1}, \pi_{\text{бр}}] = 0$. Как следствие $(\text{Gr}(k, n), \Omega_{\text{kks}}^{-1}, \pi_{\text{бр}}, \Omega_{\text{kks}})$ является структурой ПН, а $(S(n, k), \Omega, \pi)$ является $P\Omega$ -структурой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Этот результат доказан в работе [5], но его можно наглядно представить следующим образом. Структура Брюа–Пуассона является фактором бивектора π по $U(n)$, записанным в виде

$$\pi = L_{g^*} r - R_{g^*} r, \quad r = i \sum_{1 \leq i < j \leq n} e_i^j \wedge e_j^i,$$

а Ω_{kks}^{-1} – фактор формы

$$\Omega^{-1} = -iL_{g*} \sum_{a \leq k, s > k} e_a^s \wedge e_s^a.$$

Вычислим скобку

$$[\pi, \Omega^{-1}] = L_{g*} \left[\sum_{a < b \leq k} e_a^b \wedge e_b^a + \sum_{a \leq k < r} e_a^r \wedge e_r^a + \sum_{k < r < s} e_r^s \wedge e_s^r, \sum_{a \leq k < r} e_a^r \wedge e_r^a \right].$$

Второй член исчезает, первый член имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \left[\sum_{a < b \leq k} e_a^b \wedge e_b^a, \sum_{c \leq k < r} e_c^r \wedge e_r^c \right] &= \sum_{a < b \leq k} \sum_{c \leq k < r} e_a^b \wedge e_b^r \wedge e_r^c \delta_c^a - e_b^a \wedge e_a^r \wedge e_r^c \delta_c^b + \\ &+ e_a^b \wedge e_r^a \wedge e_c^r \delta_b^c - e_b^a \wedge e_r^b \wedge e_c^r \delta_a^c = \sum_{c < b \leq k} e_c^b \wedge e_b^r \wedge e_r^c - \\ &- \sum_{a < c \leq k} e_c^a \wedge e_a^r \wedge e_r^c + \sum_{a < c \leq k} e_a^c \wedge e_r^a \wedge e_r^c - \sum_{c < b \leq k} e_b^c \wedge e_r^b \wedge e_r^c = 0. \end{aligned}$$

Третий член исчезает аналогичным образом. Утверждение, относящееся к $S(n, k)$, следует из леммы 3.2.

4. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПРОБЛЕМА НА $\text{Gr}(n, k)$

Поскольку пуассоновы структуры Брюа и ККС совместны, они задают бигамильтонову систему [5]. Важным следствием этого факта является то, что существует пучок однородных пуассоновых структур $\pi_t = \pi_{\text{bp}} + t\Omega_{\text{kks}}^{-1}$, $t \in \mathbb{R}$, на грассманиане $\text{Gr}(n, k)$. Более того, $(1, 1)$ -тензор $N = \pi_{\text{bp}}\Omega_{\text{kks}}: T\text{Gr}(n, k) \rightarrow T\text{Gr}(n, k)$ является тензором Нийенхейса, поэтому $(\text{Gr}(n, k), \Omega_{\text{kks}}^{-1}, N)$ является структурой ПН.

Докажем, что собственные числа тензора Нийенхейса являются переменными Гельфанда–Цетлина. Доказательство основано на использовании контрвариантной связности, заданной на пуассоновом векторном расслоении $\mathcal{E}_k$, введенном в п. 3.1.

Определение пуассонова векторного расслоения через скобку

$$\{\cdot, \cdot\}_{\mathcal{E}}: C^\infty(M) \otimes \Gamma(\mathcal{E}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{E}),$$

где $\Gamma(\mathcal{E})$ обозначает гладкие сечения [15], можно также сформулировать с помощью плоской контрвариантной связности $\nabla: \Gamma(\mathcal{E}) \rightarrow \Gamma(TM \otimes \mathcal{E})$, заданной формулой

$$\iota_{\text{df}} \nabla(\sigma) = \{f, \sigma\}_{\mathcal{E}}, \quad f \in C^\infty(M), \quad \sigma \in \Gamma(\mathcal{E}).$$

Пусть $\nabla_0: \Gamma(\mathcal{E}_k) \rightarrow \Gamma(T\text{Gr}(n, k) \otimes \mathcal{E}_k)$ – плоская контрвариантная связность расслоения $\mathcal{E}_k$, введенная в конце п. 3.1, и пусть

$$\nabla_N = \Omega_{\text{kks}} \circ \nabla_0: \Gamma(\mathcal{E}_k) \rightarrow \Gamma(T^*\text{Gr}(n, k) \otimes \mathcal{E}_k) \equiv \Omega^1(\mathcal{E}_k).$$

Далее, пусть $C_\pm: \text{Herm}(n) \rightarrow \mathfrak{b}(n, \mathbb{C})_\pm$, где $\mathfrak{b}(n, \mathbb{C})_\pm = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}_\pm$ ($\mathfrak{a}$ означает алгебру действительных диагональных матриц, а $\mathfrak{n}_+$ ($\mathfrak{n}_-$) – строго верхняя (нижняя) диагональная комплексная матрица), имеет вид

$$C_+(h)_{ij} = \begin{cases} 2h_{ij}, & i < j, \\ h_{ii}, & i = j, \\ 0, & i > j, \end{cases} \quad h \in \text{Herm}(n), \quad (14)$$

и $C_- = C_+^\dagger$.

Следующее предложение можно доказать с помощью явных формул (13).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Для каждого сечения σ_i , заданного выражением (12), справедливо равенство*

$$\nabla_N(\sigma_i) = \sum_r d(C_-(\mu_{(n,k)})_{ir}) \sigma_r \in \Omega^1(\mathcal{E}_k),$$

где C_- – отображение, введенное по формуле (14).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Бивектор π на $U(n)$ можно записать в виде

$$\pi = i \left(\sum_{i,j; r < s} z_i^s \frac{\partial}{\partial z_i^r} \wedge z_j^r \frac{\partial}{\partial z_j^s} - \sum_{i,j; r < s} z_r^i \frac{\partial}{\partial z_s^i} \wedge z_s^j \frac{\partial}{\partial z_r^j} \right).$$

Несмотря на то что эта пуассонова структура выглядит голоморфной, у нее есть смешанные компоненты из-за того, что в $U(n)$ справедливо равенство $\sum_k z_i^k \bar{z}_j^k = \delta_i^j$, поэтому $\partial_z \bar{z} \neq 0$. Здесь мы используем соотношение $d\bar{z}_j^i = -\sum_{k,l} \bar{z}_k^i dz_k^l \bar{z}_j^l$. Нам нужно вычислить $N^* d\sigma_i = \Omega \pi^\# dz_i^j$ при $j = n - k + 1, \dots, n$ и $i = 1, \dots, n$. Прямые расчеты приводят к следующему результату:

$$\pi^\# dz_i^j = -i \sum_{l,r} (-1)^{r>j} z_i^r z_l^j \frac{\partial}{\partial z_l^r} - i \sum_{l,r} (-1)^{r>i} z_i^l z_r^j \frac{\partial}{\partial z_r^l},$$

где

$$(-1)^{r>j} = \begin{cases} 1, & r > j, \\ -1, & r < j, \\ 0, & r = j. \end{cases}$$

Таким образом, получаем равенство

$$N^* dz_i^j = - \sum_{l; r \leq n-k} z_i^r z_l^j d\bar{z}_l^r - \sum_r (-1)^{r>i} d\mu_{ir} z_r^j,$$

где $\mu_{ij} = \mu_{(n,k)}_{ij} = \sum_{s>n-k} z_i^s \bar{z}_j^s$ – отображение моментов $U(n)$ -действия. Перепишем второй член в виде

$$\sum_r (-1)^{r>i} d\mu_{ir} z_r^j = -2 \sum_{r<i} d\mu_{ir} z_r^j + \sum_{l; s \leq n-k} z_i^s \bar{z}_l^s dz_l^j - d\mu_{ii} z_i^j.$$

Подводя итог, получаем, что

$$N^* d\sigma_i = d\mu_{ii} \sigma_i + 2 \sum_{r<i} d\mu_{ir} \sigma_r = \sum_r d(C_-(\mu)_{ir}) \sigma_r.$$

Напомним, что переменные Гельфанда–Цетлина суть собственные числа $\lambda_\alpha^{(r)}$ верхнего левого минора $\mu_{(n,k)}^{(r)}$ порядка r оператора $\mu_{(n,k)}$. Обозначим через $C_-(d\mu_{(n,k)})^{(r)}$ верхний левый минор порядка r оператора $C_-(d\mu_{(n,k)})$. Следующая лемма является прямым следствием предложения 4.1.

ЛЕММА 4.1. *Каждый минор $\mu_{(n,k)}^{(r)}$, $r = 1, \dots, n$, удовлетворяет уравнению*

$$N^* d\mu_{(n,k)}^{(r)} = C_-(d\mu_{(n,k)})^{(r)} \mu_{(n,k)}^{(r)} + \mu_{(n,k)}^{(r)} C_-(d\mu_{(n,k)})^{(r)\dagger}. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проводится прямым вычислением согласно предложению 4.1.

Уравнение (15) в работе [6] называется *мастер-уравнением* и является ключевым уравнением, которое надо решить при диагонализации тензора Нийенхейса для эрмитовых симметричных пространств. В статье [6] показано, что собственные числа тензора Нийенхейса определяются отличными от констант собственными числами решения мастер-уравнения. Мы предлагаем другое доказательство этого факта.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Для любой переменной Гельфанда–Цетлина $\lambda_\alpha^{(r)}$ число $2\lambda_\alpha^{(r)}$ является собственным числом тензора Нийенхейса $N^* = \Omega_{\text{kks}} \pi_{\text{bp}}^\#$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим как $v_\alpha^{(r)} \in \mathbb{C}^r$ нормированный собственный вектор, соответствующий $\lambda_\alpha^{(r)}$. Легко проверить, что для плотного открытого подмножества, в котором собственные числа оператора $\mu_{(n,k)}^{(r)}$ различны, справедливы равенства

$$\lambda_\alpha^{(r)} = (v_\alpha^{(r)}, \mu_{(n,k)}^{(r)} v_\alpha^{(r)}), \quad d\lambda_\alpha^{(r)} = (v_\alpha^{(r)}, d\mu_{(n,k)}^{(r)} v_\alpha^{(r)}),$$

где $(\cdot, \cdot)$ – эрмитово внутреннее произведение. Таким образом, мы видим, что

$$\begin{aligned} N^* d\lambda_\alpha^{(r)} &= (v_\alpha^{(r)}, N^* d\mu_{(n,k)}^{(r)} v_\alpha^{(r)}) = (v_\alpha^{(r)}, (C_-(d\mu_{(n,k)})^{(r)} \mu_{(n,k)}^{(r)} + \\ &+ \mu_{(n,k)}^{(r)} C_-(d\mu_{(n,k)})^{(r)\dagger}) v_\alpha^{(r)}) = \lambda_\alpha^{(r)} (v_\alpha^{(r)}, (C_-(d\mu_{(n,k)})^{(r)} + \\ &+ C_-(d\mu_{(n,k)})^{(r)\dagger}) v_\alpha^{(r)}) = 2\lambda_\alpha^{(r)} (v_\alpha^{(r)}, d\mu_{(n,k)}^{(r)} v_\alpha^{(r)}) = 2\lambda_\alpha^{(r)} d\lambda_\alpha^{(r)}. \end{aligned}$$

Поскольку переменные Гельфанда–Цетлина независимы, то структура ПН на грассманиане $\text{Gr}(n, k)$ имеет максимальный ранг. Как следствие существует интегрируемая модель на симплектическом группоиде, интегрирующая структуру Брюа–Пуассона. Остается нерешенной проблема объяснения поведения поверхностей уровней собственных чисел $\lambda_\alpha^{(r)}$ с кратностью больше одного. Мы надеемся, что явный подход, описанный в данной работе, поможет прояснить этот вопрос.

Список литературы

- [1] E. Hawkins, *J. Symplectic Geom.*, **6**:1 (2008), 61–125.
- [2] F. Bonechi, N. Ciccoli, N. Staffolani, M. Tarlini, *J. Geom. Phys.*, **62**:8 (2012), 1851–1865.
- [3] F. Bonechi, N. Ciccoli, J. Qiu, M. Tarlini, *Commun. Math. Phys.*, **331**:2 (2014), 851–885.
- [4] F. Bonechi, *Multiplicative integrable models from Poisson–Nijenhuis structures*, arXiv: 1507.01500.
- [5] S. Khoroshkin, A. Radul, V. Rubtsov, *Commun. Math. Phys.*, **152**:2 (1993), 299–315.
- [6] F. Bonechi, J. Qiu, M. Tarlini, *Complete integrability from Poisson–Nijenhuis structures on compact hermitian symmetric spaces*, arXiv: 1503.07339.
- [7] T. Nishinou, Y. Nohara, K. Ueda, *Adv. Math.*, **224**:2 (2010), 648–706.
- [8] V. Guillemin, S. Sternberg, *J. Funct. Anal.*, **52**:1 (1983), 106–128.
- [9] I. Vaisman, *Rend. Sem. Univ. Politec. Torino*, **52**:4 (1994), 377–394.

- [10] F. Magri, C. Morosi, *A Geometrical Characterization of Hamiltonian Systems Through the Theory of Poisson–Nijenhuis Manifolds*, University of Milan, Milan, 1984.
- [11] V. Chari, A. Pressley, *Quantum Groups*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.
- [12] S. Zakrzewski, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **30**:18 (1997), 6535–6543.
- [13] P. Podlès, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **28**:5 (1992), 709–745.
- [14] G.B. Podkolzin, L.I. Vainerman, *Pacific J. Math.*, **188**:1 (1999), 179–199.
- [15] V.L. Ginzburg, *J. Symplectic Geom.*, **1**:1 (2001), 121–170.