Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Литт, У. Х. Бассичис, Модифицированный метод Боголюбова в применении к простой бозонной модели, *ТМФ*, 2017, том 190, номер 1, 124–137

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9088>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 17:38:27

© 2017 г.

О. Литт*, У. Х. Бассичис*

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД БОГОЛЮБОВА В ПРИМЕНЕНИИ К ПРОСТОЙ БОЗОННОЙ МОДЕЛИ

При помощи не являющейся калибровочно-инвариантной модификации точного гамильтониана получен аналог гамильтониана для простой точно решаемой бозонной модели. Собственные значения найденного оператора близки к собственным значениям исходного гамильтониана. Одночастичное приближение к новому двухчастичному оператору проводится в духе боголюбовской аппроксимации. Так как возникают только операторы числа частиц, не требуется искать отдельные s -численные аппроксимации для операторов рождения и уничтожения в основном состоянии. Для простой модели результаты новой аппроксимации по целому ряду параметров ближе к точным значениям, чем при применении стандартного метода Боголюбова. Превосходство в точности сильно возрастает при увеличении сил взаимодействия в модели.

Ключевые слова: модифицированная боголюбовская аппроксимация.

DOI: 10.4213/tmf9088

1. ВВЕДЕНИЕ

С экспериментальным открытием конденсации Бозе–Эйнштейна в разреженном газе [1] вновь возник интерес к теоретическому объяснению данного явления. Теоретические достижения в этой области хорошо освещены в обзоре Загребнова и Бру [2] и книгах [3] и [4]. Основополагающей для теоретического анализа являлась идея Боголюбова [5]. Так как из конденсации следует, что основное состояние системы бозонов было макроскопически занятым, операторы рождения и уничтожения для этого состояния можно приблизить s -числами. Более того, входящими в гамильтониан слагаемыми, не содержащими операторы основного состояния, можно пренебречь. Точность этих приближений интенсивно изучалась в различных предельных случаях [2]. Для изучения слабо взаимодействующих захваченных бозонов были построены обобщения теории Боголюбова [6]. Десятилетия назад Фолди и Бассичис [7] предложили модель для частиц Бозе–Эйнштейна, ограниченных размерностью единица, где существуют только одно основное состояние и одно возбужденное.

*Texas A&M University, College Station, Texas, United States of America.
E-mail: oplitt@yahoo.com, bassichis_w@hotmail.com

Гамильтониан модели оказался точно решаемым и потому был применен для проверки боголюбовских аппроксимаций.

Простая двухуровневая модель с тех пор использовалась для многих целей, в частности для проверки различных других аппроксимационных схем [8]. В последнее время возник интерес к одномерным бозонным моделям из-за физической реализуемости систем, в которых бозоны, в частности ^4He , ограничены в квазиодномерной среде [9]. В оригинальной работе предлагаемое улучшение боголюбовской аппроксимации, основанное на казалось бы более точной численной аппроксимации, при проверке неожиданно показало большее расхождение с точными значениями, чем боголюбовская аппроксимация. Так как предлагавшееся улучшение основывалось лишь на численном приближении, оно не имело бы большого значения для более общих проблем, связанных с бозонами, даже если бы оно и показало лучшие результаты.

В настоящей работе мы предлагаем другую схему аппроксимации, основанную на анзаце и, возможно, имеющую более широкую область применения. Мы начинаем с подходящей для этого случая процедуры, переводящей с помощью не являющегося калибровочно-инвариантным преобразованием гамильтониан в другой оператор. После этого полученный двухчастичный оператор можно приблизить одночастичным оператором аналогично тому, как это делается в рамках боголюбовской аппроксимации, в которой операторы основного и возбужденного состояний рассматриваются по отдельности. Показано, что такая аппроксимация приводит к более точным результатам, чем результаты, получающиеся при боголюбовской аппроксимации, в широком диапазоне сил взаимодействия и числа частиц. Возможно, эта аппроксимация окажется полезной и для более реалистичных моделей, в которых точные решения недостижимы и требуется применение аппроксимаций.

2. ОДНОМЕРНАЯ БОЗОННАЯ МОДЕЛЬ

Рассматриваемая система подробно описана в оригинальной статье. Имеются всего три состояния для частиц: основное с нулевой кинетической энергией и два возбужденных. Возбужденные состояния имеют равные, но противоположно направленные импульсы, кинетическая энергия единственной возбужденной частицы полагается равной единице. Операторы рождения и уничтожения для основного состояния обозначаются как $a_0^\dagger$, a_0 , а для возбужденных состояний — $a_+^\dagger$, a_+ и $a_-^\dagger$, a_- . В простейшем варианте модели предполагается, что возбужденные частицы не взаимодействуют. В этом случае гамильтониан имеет вид

$$H = a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- + g[a_0^\dagger a_0(a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_-) + (a_0^\dagger)^2 a_+ a_- + a_0^2 a_+^\dagger a_-^\dagger]. \quad (1)$$

Существуют два оператора, коммутирующих с гамильтонианом: операторы числа частиц $N_{\text{ор}} = a_0^\dagger a_0 + a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_-$ и $\Delta_{\text{ор}} = a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-$. В оригинальной статье гамильтониан действовал на пространстве, заданном собственными значениями операторов $N_{\text{ор}}$, $\Delta_{\text{ор}}$ и $a_-^\dagger a_-$, обозначенном $|N, \Delta, n_- \rangle$. Для простоты будем рассматривать только состояния с $\Delta = 0$. Для системы N частиц результирующую квадратную матрицу размера $(N/2 + 1) \times (N/2 + 1)$ можно диагонализировать для получения точных энергий и волновой функции основного состояния, а также всего

спектра. Для наших целей удобнее записывать базисные состояния без нормирующего множителя:

$$|n_0, n_+, n_-\rangle = (a_0^\dagger)^{n_0} (a_+^\dagger)^{n_+} (a_-^\dagger)^{n_-} |0\rangle, \quad (2)$$

и для специального случая $\Delta = 0$ базис принимает вид

$$|n_0, n\rangle = (a_0^\dagger)^{n_0} (a_+^\dagger)^n (a_-^\dagger)^n |0\rangle. \quad (3)$$

В базисе (3) матричные элементы гамильтониана не равны нулю только для состояний с одинаковым полным числом частиц, т. е. при $n'_0 + 2n' = n_0 + 2n$. Логично пронумеровать базисные состояния для построения матрицы в соответствии с числом $N = n_0 + 2n$. Тогда бесконечная матрица состоит из блоков, стоящих на диагонали, размерности $(N/2 + 1) \times (N/2 + 1)$, $0 < N < \infty$.

3. БОГОЛЮБОВСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Рассматриваемую модель можно использовать для проверки боголюбовской аппроксимации, показавшей свою полезность для широкого ряда приложений [3]. В рамках этой аппроксимации все операторы в основном состоянии заменяются c -числами:

$$a_0^\dagger \rightarrow N_0^{1/2}, \quad a_0 \rightarrow N_0^{1/2}. \quad (4)$$

Получающийся одночастичный оператор $h_{\text{в}}$, где строчная буква в его обозначении указывает на то, что это одночастичный оператор, имеет вид

$$h_{\text{в}} = a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- + gN_0[a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- + a_+ a_- + a_+^\dagger a_-^\dagger]. \quad (5)$$

Оператор (5) можно диагонализировать с помощью канонического преобразования. Это даст значение энергии основного состояния, волновую функцию $|gs\rangle$ и точный спектр состояния. Оператор (5) больше не коммутирует с оператором полного числа частиц, так что число N не является подходящей квантовой величиной. Параметр N_0 описывает число частиц в состоянии с нулевым импульсом. Его можно считать равным числу N , на которое не влияет истощение основного состояния. Более точную аппроксимацию можно получить, если потребовать, чтобы среднее полное число частиц системы, определенное как $N_0 + \langle gs|a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_-|gs\rangle$, равнялось желаемому полному числу частиц системы N . Это можно осуществить, используя итеративную процедуру.

По-другому боголюбовские результаты можно получить посредством диагонализации оператора $h_{\text{в}}$ в подходящем базисе. Использование блока состояний на диагонали пространства, относящегося к точному гамильтониану, не приводит к удобному способу получения результата Боголюбова. Это следует из того, что $h_{\text{в}}$ не сохраняет полного числа частиц. Более того, так как $h_{\text{в}}$ не содержит операторов в состоянии нулевого импульса, для единственных ненулевых матричных элементов верно равенство $n'_0 = n_0$, а значит, слагаемые в блоках с фиксированным номером N на диагоналях с номерами $\langle n_0, n'|a_+ a_-|n_0, n\rangle$ и $\langle n_0, n'|a_+^\dagger a_-^\dagger|n_0, n\rangle$ равны нулю при $n' \neq n$. Оператор $h_{\text{в}}$ также объединяет состояния вне этих блоков на диагонали, так что нумерация состояний, которая была удобной для точного гамильтониана, приведет к образованию матрицы бесконечного размера.

Если вместо этого перенумеровать базисные состояния так, чтобы все состояния с номером, равным n_0 , были сгруппированы и затем упорядочены по возрастанию

номера n , то вся матрица окажется состоящей из бесконечного числа несвязанных идентичных матриц, характеризующихся параметром n_0 . Матрицы идентичны, поскольку все матричные элементы не зависят от n_0 . Хотя нам нужно диагонализировать только одну такую матрицу, матрица не “обрезается” по числу рассматриваемых частиц, как это происходит для точного гамильтониана. То, что это ведет к возможному существованию компонент собственной функции, имеющих в возбужденном состоянии большее число частиц, чем имеется в системе, является разумным, только если не найдется положительного значения N_0 , удовлетворяющего указанному выше уравнению для N . На практике, однако, не требуется диагонализировать бесконечную матрицу. Для системы N частиц изменение минимального собственного значения матрицы при разложении на более чем $N/2 + 1$ слагаемых можно найти посредством прямого вычисления, и, как показано ниже, оно является малым. Этот факт также можно понять исходя из теории возмущений, так как вклад минимального собственного значения, включающего состояние $|k\rangle$, обратно пропорционален величине $E_0 - E_k$, быстро растущей при $k > N/2 + 1$.

Оператор h_B можно диагонализировать в таком “обрезанном” базисе либо при N_0 , равном числу частиц, т.е. используя аппроксимацию без учета истощения, либо считая, что N_0 – параметр. Вместо определения N_0 с помощью итераций его можно получить посредством диагонализации матрицы для разных значений N_0 , чтобы определить значение, отвечающее желаемому значению N , с помощью соотношения

$$N = N_0 + \langle a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- \rangle. \quad (6)$$

Среднее здесь находится с использованием собственной функции основного состояния. Эта процедура дает результат, практически совпадающий с результатом канонического преобразования, если размер базиса положить равным $N/2 + 1$, а малые поправки, возникающие при использовании базисов больших размеров, не влияют на приведенный результат.

4. ДРУГОЙ ПОДХОД

В попытке найти уточнение боголюбовской аппроксимации точный гамильтониан можно разделить на две части. Первая часть, H_0 , сохраняет число частиц в основном состоянии, вторая, H_P , изменяет число частиц в основном состоянии:

$$H_0 = a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- + g a_0^\dagger a_0 (a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_-), \quad (7)$$

$$H_P = g a_0^{\dagger 2} a_+ a_- + g a_0^2 a_+^\dagger a_-^\dagger. \quad (8)$$

В качестве первого шага в рассматриваемой процедуре эти операторы можно представить в виде скалярных произведений в евклидовой метрике:

$$H_0 = (a_+^\dagger, a_-^\dagger, g a_0^\dagger a_0, g a_0^\dagger a_0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \\ a_+^\dagger a_+ \\ a_-^\dagger a_- \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$H_P = g(a_0, a_0^\dagger) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 a_+^\dagger a_-^\dagger \\ a_0^\dagger a_+ a_- \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Наша цель – получить одночастичный оператор боголюбовского типа, который может иметь приложения за рамками данной модели. Даже если чисто численное улучшение аппроксимации, предложенное в статье [7], приводит к поправкам в правильном направлении, оно не допускает дальнейшего обобщения. В этой связи была предложена следующая процедура. Вместо использования евклидовой метрики с оператором H_R предлагается рассмотреть оператор, получаемый при замене этой метрики на отражающую метрику $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Соответствующий оператор имеет вид

$$H_R = g(a_0, a_0^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 a_+^\dagger a_-^\dagger \\ a_0^\dagger a_+ a_- \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Полный аналог гамильтониана $\tilde{H} = H_0 + H_R$ при такой замене записывается как

$$\tilde{H} = a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- + g[a_0^\dagger a_0 (a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_-) + a_0 a_0^\dagger a_+ a_- + a_0^\dagger a_0 a_+^\dagger a_-], \quad (12)$$

где символ $\tilde{H}$ используется для указания на то, что этот оператор более не является гамильтонианом.

Так как целью является получение одночастичной аппроксимации двухчастичного оператора аналогично тому, как это сделано в боголюбовской аппроксимации, операторы рождения и уничтожения для основного состояния исключаются. Эти операторы возникают в операторе $\tilde{H}$ только в комбинациях, при которых сохраняется число частиц, в отличие от ситуации, когда они появляются в боголюбовском гамильтониане. Боголюбовский способ нумерации базисных состояний подходит и для этого случая, так как операторы не связывают состояния с различными значениями n_0 , но связывают состояния с разным числом частиц.

Для системы N частиц оператор числа частиц $a_0^\dagger a_0$ предлагается заменить на операторы

$$a_0^\dagger a_0 = N - a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_- \quad (13)$$

и

$$a_0 a_0^\dagger = a_0^\dagger a_0 + 1 = N + 1 - a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-. \quad (14)$$

Здесь N теперь – не параметр, аналогичный боголюбовскому N_0 , а полное число частиц системы. Далее, так как $a_0^\dagger a_0$ есть оператор числа частиц и не может иметь отрицательных собственных значений, то же самое условие должно выполняться и для заменяющих операторов.

При данной замене аналогичный гамильтониану оператор можно записать как

$$\begin{aligned} \tilde{H} = & a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- + g[(N - a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-)(a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_-)] + \\ & + g[(N + 1 - a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-)a_+ a_- + (N - a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-)a_+^\dagger a_-^\dagger]. \end{aligned} \quad (15)$$

5. РЕЗУЛЬТИРУЮЩИЕ МАТРИЦЫ

Ненулевые элементы точного гамильтониана в пространстве $|n_0, n\rangle$ имеют вид

$$\begin{aligned}\langle n_0, n | H_E | n_0, n \rangle &= 2n + 2gn_0n, \\ \langle n_0 + 2, n - 1 | H_E | n_0, n \rangle &= gn(n_0 + 1)^{1/2}(n_0 + 2)^{1/2}, \\ \langle n_0 - 2, n + 1 | H_E | n_0, n \rangle &= g(n + 1)(n_0 - 1)^{1/2}n_0^{1/2}.\end{aligned}$$

Боголюбовский аналог гамильтониана имеет ненулевые матричные элементы только между состояниями с одинаковыми значениями n_0 , причем не зависящие от n_0 . Ненулевые матричные элементы в пространстве $|n_0, n\rangle$ с фиксированным n_0 суть

$$\begin{aligned}\langle n | h_B | n \rangle &= 2n + 2gN_0n, \\ \langle n - 1 | h_B | n \rangle &= gnN_0, \\ \langle n + 1 | h_B | n \rangle &= g(n + 1)N_0,\end{aligned}$$

где вновь N_0 – полное число частиц в системе, где истощение не учитывается. Иначе N_0 – это параметр, представляющий число частиц в основном состоянии, который определяется так, чтобы среднее числа частиц в системе совпадало с желаемым полным числом частиц. Аналог гамильтониана, полученный с использованием отражающей метрики $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, имеет ненулевые матричные элементы между теми же состояниями, что и боголюбовский оператор. Значение n_0 должно быть таким же, чтобы два состояния были связаны и матричные элементы не зависели от n_0 . Они имеют вид

$$\begin{aligned}\langle n | \tilde{H} | n \rangle &= 2n + 2gn(N - 2n), \\ \langle n - 1 | \tilde{H} | n \rangle &= gn(N + 3 - 2n), \\ \langle n + 1 | \tilde{H} | n \rangle &= g(n + 1)(N - 2 - 2n),\end{aligned}$$

где N – полное число частиц в системе.

При том, что в рамках боголюбовской аппроксимации предлагаются замены

$$n_0 \rightarrow N_0, \quad (n_0 + 1)^{1/2}(n_0 + 2)^{1/2} \rightarrow N_0, \quad (n_0 - 1)^{1/2}n_0^{1/2} \rightarrow N_0,$$

попытка ее улучшения, предложенная в статье [7], основывается на заменах

$$(n_0 + 1)^{1/2}(n_0 + 2)^{1/2} \rightarrow N_0 + 2, \quad (n_0 - 1)^{1/2}n_0^{1/2} \rightarrow N_0, \quad n_0 \rightarrow N_0.$$

Использование этих замен привело к результатам, которые сильнее отличаются от точных значений, чем результаты, основанные на боголюбовской аппроксимации.

Матричные элементы оператора $\tilde{H}$ отвечают заменам

$$(n_0 + 1)^{1/2}(n_0 + 2)^{1/2} \rightarrow N - 2n + 3, \quad (n_0 - 1)^{1/2}n_0^{1/2} \rightarrow N - 2n - 2, \quad n_0 \rightarrow N - 2n,$$

близким по духу к заменам из статьи [7]. Получающиеся собственные значения, отвечающие энергиям основного и возбужденного состояний, близки к точным значениям. Хотя данная процедура дает аппроксимирующий оператор с собственными

значениями, более близкими к точным значениям, чем при боголюбовской аппроксимации, она не дает выигрыша при проведении точных вычислений, так как оператор все еще является двухчастичным. Преимущество боголюбовской аппроксимации состоит в том, что в ней участвует одночастичный оператор, матричные значения которого можно найти с куда меньшими усилиями, чем это требуется для двухчастичных операторов. Одночастичное приближение для $\tilde{H}$ получено в следующем разделе.

6. АППРОКСИМАЦИЯ БОГОЛЮБОВСКОГО ТИПА

В духе боголюбовской аппроксимации двухчастичный оператор $\tilde{H}$ можно свести к одночастичному оператору, заменяя оператор числа частиц для основного состояния на c -число. После этого можно провести замену вида

$$a_0^\dagger a_0 = N - a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-, \quad (16)$$

используя среднее число частиц в основном состоянии. При уничтожении двух частиц в возбужденном состоянии оно равно $N_0 + 2$, а среднее значение после рождения двух частиц в возбужденном состоянии равно $N_0 - 2$. Получающийся одночастичный оператор

$$h = a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- + g[N_0(a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_-) + (N_0 + 3)a_+ a_- + (N_0 - 2)a_+^\dagger a_-^\dagger] \quad (17)$$

имеет коэффициенты на внедиагональных элементах, которые значительно отличаются от аналогичных коэффициентов боголюбовского оператора. Матричные элементы этого одночастичного оператора (17) на пространстве $|n\rangle$ равны

$$\begin{aligned} \langle n|h|n\rangle &= 2n + 2gN_0n, \\ \langle n-1|h|n\rangle &= gn(N_0 + 3), \\ \langle n+1|h|n\rangle &= g(n+1)(N_0 - 2). \end{aligned}$$

Оператор h (17), как показано в следующем разделе, значительно превосходит боголюбовский оператор по точности аппроксимации в широком диапазоне параметров.

7. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Одночастичный боголюбовский оператор

$$h_B = a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- + gN_0[a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- + a_+ a_- + a_+^\dagger a_-^\dagger] \quad (18)$$

и новый одночастичный оператор h такой, что

$$h = a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- + g[N_0(a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_-) + (N_0 + 3)a_+ a_- + (N_0 - 2)a_+^\dagger a_-^\dagger], \quad (19)$$

можно диагонализировать для систем N частиц и любой силы взаимодействия g . Очевидно, разница между получающимися аппроксимациями энергии основного состояния и их отклонения от точного значения становятся пренебрежимо малы при силе взаимодействия, стремящейся к нулю. Можно ожидать большего различия между h и h_B при росте числа частиц в системе. Так как N_0 вычисляется отдельно для

Рис. 1. Боголюбовская и новая аппроксимации энергии основного состояния для экстремально слабых сил взаимодействия. Так как в этой области доминирует кинетическая энергия, согласие с точной энергией основного состояния для обоих случаев не удивительно.

Рис. 2. Боголюбовская и новая аппроксимации энергии основного состояния для сил взаимодействия, сравнимых с кинетической энергией. Результаты новой аппроксимации существенно ближе к точным, чем результаты боголюбовской аппроксимации.

каждого оператора, результаты использования двух операторов отличаются сильнее при большем числе частиц.

Результаты для $N = 8$ показаны на рис. 1–3 с тремя различными по порядку величинами g . Для наименьшего рассмотренного значения g , $g < 0.1$, результаты боголюбовской аппроксимации немного ближе к точным значениям, чем результаты новой аппроксимации. Обе аппроксимации можно считать достаточно точными. Имеется очень малое истощение состояния с нулевым импульсом, при котором N_0

Рис. 3. Боголюбовская и новая аппроксимации энергии основного состояния для больших сил взаимодействий. Как и ожидалось, результаты аппроксимации становятся менее точными с ростом сил взаимодействий. Новые результаты все еще ближе к точным значениям, чем результаты боголюбовской аппроксимации.

имеет минимальное значение, равное 7.9 для данного диапазона g . Это отвечает истощению состояния с нулевым импульсом от 0.1% до 1% для g из данной области.

Для больших значений g (от 0.1 до 1) ошибка при боголюбовской аппроксимации вырастает до 10%, тогда как отклонение новых результатов от точных значений ограничено 1%. В этой области истощение состояния с нулевым импульсом достигает 10% для боголюбовского оператора и лишь 5% для h (17), как показано на рис. 4. Для еще больших значений g (от 1 до 8) отклонение результатов новой аппроксимации от точных значений лежит в рамках от 2% до 6%, тогда как для боголюбовской — от 10% до 18%. Истощение уровня с нулевым импульсом насыщается при $N = 8$ примерно на 20% для h_B и примерно на 9% для h , как показано на рис. 5. Аналогично, при $N = 16$ боголюбовские результаты немного ближе к точным значениям, чем результаты для h при малых энергиях g , но ошибка боголюбовской аппроксимации возрастает до 13.9% при $g = 8$, тогда как ошибка для h составляет всего 1.4%. При $g = 8$ величины соответствующего истощения для h и h_B составляют 12.5% и 18% соответственно.

Результаты для $N = 32$ показаны на рис. 6 и 7. Новые результаты опять в основном ближе к точным значениям, чем при боголюбовской аппроксимации. Разница между боголюбовским приближением и точным значением растет от 6% до 12% при возрастании g от 1 до 8, в то время как для новой аппроксимации она убывает от 2% до 0.2% в том же диапазоне сил взаимодействий.

Здесь, однако, истощения состояния с нулевым импульсом практически одинаковы — 17.9% для h_B при $g = 8$ и 17.1% для h_1 . Для $N = 64$ аналогичные результаты

Рис. 4. Истощение основного состояния при двух аппроксимациях для сил взаимодействия, меньших кинетической энергии. Среднее число частиц в основном состоянии найдено с применением обоих методов при выполнении требования совпадения общего числа частиц с желаемым числом частиц. При всех рассмотренных параметрах истощение слабее при новой аппроксимации.

Рис. 5. Истощение основного состояния при двух аппроксимациях для сил взаимодействия, больших кинетической энергии. Среднее число в основном состоянии найдено для обоих методов при помощи требования совпадения общего числа частиц с желаемым числом частиц. Видна неожиданная насыщенность истощения для обоих методов.

получены для энергий, указанных на рис. 8–10. Для наименьших значений g боголюбовские результаты снова несколько ближе к точным, чем новые. Для более сильных взаимодействий с g от 0.1 до 1 новые результаты отличаются от точных менее чем на 1%, тогда как боголюбовские отклоняются до 4%. Для наибольших значений g соответствующие ошибки равны 7.6% для новых результатов и 11.6% для боголюбовских. Однако при данном значении N истощение состояния с нулевым импульсом становится для h большим, чем для h_b , с насыщенностью 16.6% для боголюбовской и 26% для новой аппроксимации. Следовательно, является ли новая аппроксимация более близкой к точным результатам, чем боголюбовская, определяется не степенью истощения, а скорее силой взаимодействия.

Рис. 6. Боголюбовская и новая аппроксимации энергии основного состояния для сил взаимодействия, сравнимых с кинетической энергией. Результаты новой аппроксимации значительно точнее, чем боголюбовской. Хотя в этой области новые результаты существенно ближе к точным, чем боголюбовские, степень их согласия с точными исключительна для данного числа частиц.

Рис. 7. Боголюбовская и новая аппроксимации энергии основного состояния для больших сил взаимодействия. Как и ожидалось, результаты аппроксимации становятся менее точными с ростом сил взаимодействия. Новые результаты остаются более точными, чем при боголюбовской аппроксимации.

Рис. 8. Боголюбовская и новая аппроксимации энергии основного состояния для экстремально слабых сил взаимодействия. Так как в этой области доминирует кинетическая энергия, согласие с точной энергией основного состояния для обоих случаев не удивительно.

Рис. 9. Боголюбовская и новая аппроксимации энергии основного состояния для сил взаимодействия, сравнимых с кинетической энергией. Результаты новой аппроксимации существенно ближе к точным, чем результаты боголюбовской аппроксимации.

Рис. 10. Боголюбовская и новая аппроксимации энергии основного состояния для больших сил взаимодействий. Как и ожидалось, результаты аппроксимации становятся менее точными с ростом сил взаимодействия. Новые результаты все еще ближе к точным значениям, чем результаты боголюбовской аппроксимации.

8. ИТОГИ

Ранее боголюбовская аппроксимация была применена для простой одномерной бозонной модели. Преимущество этой аппроксимации состоит в замене двухчастичного взаимодействия на одночастичный оператор. Расхождения, связанные с заменой операторов рождения и уничтожения в состоянии с нулевым импульсом, как оказалось, увеличиваются с ростом сил взаимодействия. Аналогичный боголюбовскому одночастичный оператор был получен с помощью процедуры с участием только оператора числа частиц для состояния с нулевым импульсом. Результаты использования нового оператора систематически оказываются более точными, чем при использовании боголюбовского оператора, исключение составляет лишь случай крайне слабых сил взаимодействия. Построенная процедура может оказаться применима и к более реалистичным моделям, в которых точные вычисления невыполнимы.

Список литературы

- [1] K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, W. Ketterle, “Bose–Einstein condensation in a gas of sodium atoms”, *Phys. Rev. Lett.*, **75**:22 (1995), 3969–3973.
- [2] V. A. Zagrebnov, J. B. Bru, “The Bogoliubov model of weakly imperfect Bose gas”, *Phys. Rep.*, **350**:5–6 (2001), 291–434.
- [3] E. H. Lieb, R. Seiringer, J. P. Solovej, J. Yngvason, *The Mathematics of the Bose Gas and Its Condensation*, Oberwolfach Seminars, **34**, Birkhäuser, Basel, 2005.
- [4] A. F. Verbeure, *Many Body Boson Systems. Half a Century Later*, Theoretical and Mathematical Physics, **2011**, Springer, London, 2011.
- [5] Н. Н. Боголюбов, “К теории сверхтекучести”, *Изв. АН СССР. Сер. физ.*, **11**:1 (1947), 77–90.

- [6] A. Rovenchak, “Weakly-interacting bosons in a trap within approximate second quantization approach”, *J. Low Temp. Phys.*, **148**:3 (2007), 411–416.
- [7] W. H. Bassichis, L. L. Foldy, “Analysis of the Bogoliubov method applied to a simple boson model”, *Phys. Rev.*, **133**:4A (1964), A935–A943.
- [8] M. Razavy, R. B. Ludwig, “Clustering of levels in a solvable many-body problem with a degenerate ground state”, *Phys. Rev. A*, **33**:3 (1986), 1519–1524.
- [9] E. Krotscheck, M. D. Miller, J. Wojdylo, “Variational approach to the many-boson problem in one dimension”, *Phys. Rev. B*, **60**:18 (1999), 13028—13037.

Поступила в редакцию 23.10.2015,
после доработки 19.04.2016