Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Славнов, Нелинейное тождество для фазы рассеяния в интегрируемых моделях, *ТМФ*, 1998, том 116, номер 3, 362–366

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf909>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 12:58:07

© 1998 г.

Н. А. Славнов*

НЕЛИНЕЙНОЕ ТОЖДЕСТВО ДЛЯ ФАЗЫ РАССЕЯНИЯ В ИНТЕГРИРУЕМЫХ МОДЕЛЯХ

Фаза рассеяния в квантовых интегрируемых моделях находится из линейных интегральных уравнений специального вида. Мы доказываем, что решения этих уравнений удовлетворяют некоторым нелинейным тождествам, которые, в частности, связывают значения фазы рассеяния на границах сферы Ферми.

В работе [1] было найдено новое нелинейное тождество для фазы рассеяния в квантовых интегрируемых моделях. В настоящей статье мы дадим обобщение этого тождества и покажем, что последнее является следствием некоторых простых свойств интегральных преобразований достаточно общего вида. Тожество, которое будет обсуждаться, справедливо для широкого класса интегрируемых моделей, однако для того чтобы конкретизировать наши формулы, мы рассматриваем хорошо известный пример одномерного бозе-газа с дельта-функциональным взаимодействием.

Основным уравнением, описывающим термодинамику одномерного бозе-газа, является уравнение Янга–Янга для энергии одночастичного возбуждения [2]

$$\varepsilon(\lambda) = \lambda^2 - h - \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda - \mu) \ln(1 + e^{-\varepsilon(\mu)/T}) d\mu. \quad (1)$$

Здесь λ – спектральный параметр, $h > 0$ – химический потенциал и $T \geq 0$ – температура. Ядро $K(\lambda - \mu)$ равно

$$K(\lambda - \mu) = \frac{2c}{(\lambda - \mu)^2 + c^2}, \quad (2)$$

где $c > 0$ – константа связи. Уравнение (1) имеет единственное решение [2]. Ниже мы будем использовать следующие свойства функции $\varepsilon(\lambda)$: эта функция является четной, $\varepsilon(\lambda) = \varepsilon(-\lambda)$; она имеет два вещественных корня $\varepsilon(\pm q_T) = 0$, где $q_T > 0$; $\varepsilon(\lambda) > 0$ при $|\lambda| > q_T$ и $\varepsilon(\lambda) < 0$ при $|\lambda| < q_T$.

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

S -матрица данной модели, определяющая рассеяние частицы со спектральным параметром λ на частице со спектральным параметром μ , есть

$$S(\lambda, \mu) = \exp\{2\pi i F(\lambda, \mu)\}, \quad (3)$$

где фаза рассеяния $F(\lambda, \mu)$ может быть найдена из интегрального уравнения [3]

$$F(\lambda, \mu) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda - \nu) \vartheta(\nu) F(\nu, \mu) d\nu = \frac{1}{2\pi} \Phi(\lambda - \mu). \quad (4)$$

Здесь $\vartheta(\lambda)$ – фермиевский вес,

$$\vartheta(\lambda) = (1 + e^{\varepsilon(\lambda)/T})^{-1}, \quad (5)$$

и $\Phi(\lambda)$ – так называемая “голая” фаза

$$\Phi(\lambda) = i \ln \left(\frac{ic + \lambda}{ic - \lambda} \right). \quad (6)$$

Заметим, что ядро уравнений (1) и (4) является производной от “голой” фазы:

$$K(\lambda - \mu) = \Phi'(\lambda - \mu). \quad (7)$$

Уравнение (4) также имеет единственное решение.

В пределе $T \rightarrow 0$ (основное состояние [4, 5]) уравнение (4) упрощается. Действительно, в этом пределе фермиевский вес $\vartheta(\lambda)$ стремится к функции Хэвисайда $\vartheta(\lambda) \rightarrow \theta(q^2 - \lambda^2)$, где $q = \lim_{T \rightarrow 0} q_T$ является значением спектрального параметра на границе сферы Ферми. Уравнение (4) превращается в

$$F_0(\lambda, \mu) - \frac{1}{2\pi} \int_{-q}^q K(\lambda - \nu) F_0(\nu, \mu) d\nu = \frac{1}{2\pi} \Phi(\lambda - \mu), \quad (8)$$

где $F_0(\lambda, \mu) = \lim_{T \rightarrow 0} F(\lambda, \mu)$. Тожество, найденное в работе [1], связывает значения фазы рассеяния на границах сферы Ферми

$$(1 - F_0(q, q))(1 + F_0(-q, -q)) + F_0(q, -q)F_0(-q, q) = 1. \quad (9)$$

Такое нелинейное тождество для решения линейного интегрального уравнения (8) выглядит довольно неожиданным. Однако это всего лишь частный случай более общего тождества, справедливого для фазы рассеяния при конечной температуре,

$$F(\lambda, \mu) - F(-\mu, -\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda, \nu) F(-\mu, -\nu) \partial_\nu \vartheta(\nu) d\nu. \quad (10)$$

Легко видеть, что в пределе $T \rightarrow 0$ производная от фермиевского веса становится линейной комбинацией дельта-функций $\partial_\lambda \vartheta(\lambda) = \delta(\lambda + q) - \delta(\lambda - q)$, следовательно, тождество (10) приводит к соотношению

$$F_0(\lambda, \mu) - F_0(-\mu, -\lambda) = F_0(\lambda, -q)F_0(-\mu, q) - F_0(\lambda, q)F_0(-\mu, -q). \quad (11)$$

Полагая, наконец, $\lambda = \mu = q$, мы приходим к (9).

Что касается доказательства основного тождества (10), то оно основывается на довольно простом наблюдении. Рассмотрим некоторую функцию двух переменных $\phi(\lambda, \mu)$, обладающую свойством

$$\phi(\lambda, \mu) = \phi(-\mu, -\lambda). \quad (12)$$

В частности, можно выбрать произвольную функцию, зависящую от разности аргументов. Определим $f(\lambda, \mu)$ как образ функции $\phi(\lambda, \mu)$ при интегральном преобразовании следующего вида:

$$f(\lambda, \mu) = \phi(\lambda, \mu) + \int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda, \xi)\phi(\xi, \mu) d\xi. \quad (13)$$

Мы не накладываем никаких ограничений на ядро $r(\lambda, \mu)$ и функцию $\phi(\lambda, \mu)$, за исключением существования преобразования (13). Другими словами, интеграл в правой части (13) должен быть сходящимся.

Легко видеть, что образ функции $\phi(\lambda, \mu)$ обладает свойством

$$f(\lambda, \mu) - f(-\mu, -\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} [r(\lambda, \nu)f(-\mu, -\nu) - r(-\mu, -\nu)f(\lambda, \nu)] d\nu. \quad (14)$$

Для того чтобы проверить последнее равенство, надо просто подставить $f(\lambda, \mu)$ из (13) в (14) и воспользоваться свойством (12).

Фактически равенство (14) может рассматриваться как производящее соотношение, порождающее тождества для функции $f(\lambda, \mu)$, являющейся образом функции $\phi(\lambda, \mu)$ при преобразовании (13). В самом деле, если ядро $r(\lambda, \mu)$ зависит от $f(\lambda, \mu)$, то преобразование (13) превращается в уравнение для f . В свою очередь, равенство (14) становится тождеством для f .

Рассмотрим пример, связанный с уравнением (4). Формальное решение этого уравнения может быть дано в терминах резольвенты:

$$F(\lambda, \mu) = \frac{1}{2\pi}\Phi(\lambda - \mu) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R(\lambda, \nu)\Phi(\nu - \mu) d\nu, \quad (15)$$

где

$$R(\lambda, \mu) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda - \nu)\vartheta(\nu)R(\nu, \mu) d\nu = \frac{1}{2\pi}K(\lambda - \mu)\vartheta(\mu). \quad (16)$$

Функция $\Phi(\lambda - \mu)$ зависит от разности аргументов и, следовательно, удовлетворяет свойству (12). Поэтому в силу (14)

$$F(\lambda, \mu) - F(-\mu, -\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} [R(\lambda, \nu)F(-\mu, -\nu) - R(-\mu, -\nu)F(\lambda, \nu)] d\nu. \quad (17)$$

С другой стороны, резольвента очевидным образом зависит от $F(\lambda, \mu)$, т.к., дифференцируя (4) по μ , мы имеем

$$\partial_{\mu} F(\lambda, \mu) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda - \nu) \vartheta(\nu) \partial_{\mu} F(\nu, \mu) d\nu = -\frac{1}{2\pi} K(\lambda - \mu). \quad (18)$$

Сравнивая с (16), получаем

$$R(\lambda, \mu) = -\partial_{\mu} F(\lambda, \mu) \vartheta(\mu). \quad (19)$$

Подставляя это выражение в (17), мы приходим к соотношению

$$\begin{aligned} F(\lambda, \mu) - F(-\mu, -\lambda) = & - \int_{-\infty}^{\infty} [F(\lambda, \nu) \vartheta(-\nu) \partial_{\nu} F(-\mu, -\nu) + \\ & + F(-\mu, -\nu) \vartheta(\nu) \partial_{\nu} F(\lambda, \nu)] d\nu, \end{aligned} \quad (20)$$

интегрируя в котором первое слагаемое по частям, получаем

$$F(\lambda, \mu) - F(-\mu, -\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda, \nu) F(-\mu, -\nu) \partial_{\nu} \vartheta(\nu) d\nu. \quad (21)$$

Здесь мы использовали $\vartheta(\lambda) = \vartheta(-\lambda)$. Таким образом, нелинейное тождество (10) для фазы рассеяния при конечной температуре доказано.

Заметим, что мы не использовали явного вида ядра $K(\lambda - \mu)$, “голой” фазы $\Phi(\lambda - \mu)$ и фермиевского веса $\vartheta(\lambda)$. Наше доказательство было основано на более общих свойствах уравнения (4). Во-первых, мы использовали разрешимость этого уравнения. Это обеспечивает нам существование резольвенты. Во-вторых, мы использовали то обстоятельство, что “голая” фаза зависит от разности аргументов. Как мы видели, это свойство не является необходимым и может быть заменено на более слабое:

$$\Phi(\lambda, \mu) = \Phi(-\mu, -\lambda).$$

В-третьих, наиболее важным свойством является связь между ядром $K(\lambda, \mu)$ и функцией $\Phi(\lambda, \mu)$: $K(\lambda, \mu) = -\partial_{\mu} \Phi(\lambda, \mu)$. Это позволяет нам выразить резольвенту уравнения (4) через решение этого уравнения $R(\lambda, \mu) = -\partial_{\mu} F(\lambda, \mu) \vartheta(\mu)$. Наконец, для того

чтобы свести (20) к (21), мы воспользовались симметрией фермиевского веса $\vartheta(\lambda) = \vartheta(-\lambda)$.

Перечисленные свойства справедливы для уравнений, описывающих фазу рассеяния, в широком классе квантовых интегрируемых моделей (см., например, работу [6] и ссылки в ней). Эти интегральные уравнения возникают в специальном пределе уравнений Бете, и можно сказать, что нелинейное тождество для фазы рассеяния является следствием уравнений Бете.

Хотелось бы поблагодарить Ю. М. Зиновьева и С. А. Фролова за полезные обсуждения.

Данная работа была выполнена при частичной поддержке РФФИ (№ 96-01-166) и INTAS (№ 93-1038).

Список литературы

- [1] *V. E. Korepin, N. A. Slavnov.* The New Identity for the Scattering Matrix of Exactly Solvable Models (принято в European Journal of Physics); solv-int/9712005.
- [2] *C. N. Yang, C. P. Yang.* J. Math. Phys. 1969. V. 10. P. 1115.
- [3] *В. Е. Корепин.* ТМФ. 1979. Т. 41. № 2. С. 169.
- [4] *E. H. Lieb, W. Liniger.* Phys. Rev. 1963. V. 130. P. 1605.
- [5] *E. H. Lieb.* Phys. Rev. 1963. V. 130. P. 1616.
- [6] *V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin.* Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993.

Поступила в редакцию 28.IV.1998 г.