Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Герджиков, Г. Г. Граховски, Р. И. Иванов, N -волновые уравнения с $\mathcal{PT}$ -симметрией, *ТМФ*, 2016, том 188, номер 3, 397–415

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9095>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 12:14:45

© 2016 г. В. С. Герджиков*, Г. Г. Граховски*[†], Р. И. Иванов[‡]

N -ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ С $\mathcal{PT}$ -СИММЕТРИЕЙ

Изучаются расширения N -волновых систем с $\mathcal{PT}$ -симметрией (пространственное отражение и обращение времени). Описаны типы нелокальных редукций, которые приводят к интегральным уравнениям, инвариантным относительно $\mathcal{P}$ - и $\mathcal{T}$ -симметрий. Получены соответствующие ограничения на фундаментальные аналитические решения и данные рассеяния. На примерах трехволновых (связанных с алгеброй $sl(3, \mathbb{C})$) и четырехволновых (связанных с алгеброй $so(5, \mathbb{C})$) систем описаны свойства различных типов одно- и двухсолитонных решений. Показано, что $\mathcal{PT}$ -симметричные трехволновые уравнения при особом выборе параметров могут обладать регулярными мультисолитонными решениями.

Ключевые слова: интегрируемые системы, $\mathcal{PT}$ -симметрии, метод обратной задачи рассеяния, солитонные решения.

DOI: 10.4213/tmf9095

1. ВВЕДЕНИЕ

N -волновые уравнения [1]–[3]

$$i[J, Q_t] - i[I, Q_x] + [[I, Q], [J, Q]] = 0 \quad (1)$$

образуют один из важнейших классов интегральных нелинейных эволюционных уравнений (НЛЭУ) и имеют различные приложения в физике (например, в нелинейной оптике, физике плазмы, механике жидкостей, квантовой теории поля). В общем случае предполагается, что $Q(x, t)$ – бесследовая матрица размера $n \times n$ с нулевой диагональю, а J и I – постоянные диагональные матрицы:

$$J = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n), \quad I = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n), \quad \text{tr } J = \text{tr } I = 0. \quad (2)$$

Нижние индексы x и t в уравнении (1) обозначают производные. Обычно можно выбрать $Q(x, t)$ как эрмитову матрицу, $Q(x, t) = Q^\dagger(x, t)$.

---

*Institute for Nuclear Research and Nuclear Energy, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, Bulgaria. E-mail: gerjikov@inrne.bas.bg

[†]Department of Mathematical Sciences, University of Essex, Colchester, UK.
E-mail: grah@essex.ac.uk

[‡]School of Mathematical Sciences, Dublin Institute of Technology, Dublin, Ireland.
E-mail: rivanov@dit.ie

В основе интегрируемости N -волновой системы лежит ее представление Лакса, открытое Захаровым и Манаковым [1], [2]. Его можно сформулировать как условие $[L, M] = 0$, т. е. два обыкновенных дифференциальных оператора L и M , заданные как

$$\begin{aligned} L\psi &\equiv i \frac{\partial \psi}{\partial x} + U(x, t, \lambda)\psi(x, t, \lambda) = 0, & U(x, t, \lambda) &= [J, Q](x, t) - \lambda J, \\ M\psi &\equiv i \frac{\partial \psi}{\partial t} + V(x, t, \lambda)\psi(x, t, \lambda) = 0, & V(x, t, \lambda) &= [I, Q](x, t) - \lambda I, \end{aligned} \quad (3)$$

коммутируют для любого значения спектрального параметра λ . Тогда для решения N -волнового уравнения можно применить метод обратной задачи рассеяния [1], [2], [4], [5]: соответствующая спектральная задача для оператора L известна как (матричная) спектральная задача Захарова–Шабата.

N -волновые модели взаимодействия описывают особый класс взаимодействий волна–волна, которые нечувствительны к физической природе волн и имеют общий характер. Это объясняет, почему они широко применяются в физике и привлекают внимание ученых на протяжении нескольких десятилетий [6]–[18].

В последнее время искусственные неоднородные среды вызвали большой интерес в нелинейной оптике. Это объясняется тем, что такие среды обладают рядом свойств, которые не наблюдаются в однородных средах. Новые свойства, связанные с резонансным взаимодействием сред и света, наблюдаются в фотонных кристаллах, случайных лазерах и т. д. (новейший обзор можно найти в работе [19]). Важным классом подобных моделей, допускающим строгое изучение, являются так называемые $\mathcal{PT}$ -симметричные (parity + time) системы [20]–[27]. Изначально интерес к данным системам возник в квантовой механике [23], [25]. В работах [23] было показано, что квантовые системы с неэрмитовым гамильтонианом допускают состояния с действительными собственными значениями, т. е. эрмитовость гамильтониана не является необходимым условием для существования действительного спектра. С помощью подобных гамильтонианов можно построить новую квантовую механику [23]–[26]. Отправной точкой является тот факт, что в случае неэрмитова гамильтониана с действительным спектром модуль волновой функции собственных состояний не зависит от времени даже в случае комплексных потенциалов.

Исторически первый псевдоэрмитов гамильтониан с действительным спектром – это $\mathcal{PT}$ -симметричный гамильтониан из работ [23]. Псевдоэрмитовость здесь означает, что гамильтониан $\mathcal{H}$ коммутирует с операторами пространственного отражения $\mathcal{P}: x \rightarrow -x$ и обращения времени $\mathcal{T}: t \rightarrow -t$: мы имеем $\mathcal{PT}\mathcal{H} = \mathcal{H}\mathcal{PT}$.

По теореме Винера операторы симметрий либо линейны и унитарны, либо антилинейны и антиунитарны. Тип операторов $\mathcal{P}$ и $\mathcal{T}$ определяется их действием на мнимую единицу i . Прямое вычисление показывает, что $\mathcal{P}$ – линейный и унитарный оператор. Поскольку дважды примененное пространственное отражение возвращает к исходному состоянию, волновые функции $\psi(x, t)$ и $\mathcal{P}^2\psi(x, t)$ могут отличаться лишь фазовым множителем ϕ : $\mathcal{P}^2\psi(x, t) = e^{i\phi}\psi(x, t)$. Чтобы четность волновой функции была наблюдаемой величиной, оператор $\mathcal{P}$ должен быть эрмитовым. Единственный фазовый множитель, который оставляет $\mathcal{P}$ эрмитовым, – это тривиальный: $\mathcal{P}^2\psi(x, t) = \psi(x, t)$.

Предположив, что волновая функция скалярная, приходим к следующему действию оператора пространственного отражения на пространстве состояний:

$$\mathcal{P}\psi(x, t) = \psi(-x, t). \quad (4)$$

Применяя те же аргументы к (антилинейному и антиунитарному) оператору $\mathcal{T}$ обращения времени, мы можем показать, что он должен действовать на пространстве состояний следующим образом:

$$\mathcal{T}\psi(x, t) = \psi^*(x, -t). \quad (5)$$

Таким образом, гамильтониан и волновая функция $\mathcal{PT}$ -симметричны, если

$$\mathcal{H}(x, t) = \mathcal{H}^*(-x, -t), \quad \psi(x, t) = \psi^*(-x, -t). \quad (6)$$

Интегрируемые системы с $\mathcal{PT}$ -симметрией всесторонне изучались последние двадцать лет (см., например, работы [28], [29]). Недавно в статьях [30], [31] было предложено нелокальное интегральное уравнение типа нелинейного уравнения Шредингера, обладающее $\mathcal{PT}$ -симметрией в силу инвариантности так называемого индуцированного потенциала $V(x, t) = \psi(x, t)\psi^*(-x, -t)$ относительно одновременного действия преобразований четности и обращения времени (см. формулы (6)). В этих работах также получено односолитонное решение для данной модели и показано, что в нем за конечное время возникает особенность. Впоследствии были найдены нелокальные $\mathcal{PT}$ -симметричные обобщения модели Абловица–Ладика [32]. Все эти модели интегрируемы с помощью метода обратной задачи рассеяния [33].

Цель настоящей статьи – изучение $\mathcal{PT}$ -симметричных расширений N -волновых уравнений: мы даем краткий обзор $\mathcal{PT}$ -редукции для трех- и четырехволновых систем (с операторами Лакса, связанными с алгебрами $sl(3, \mathbb{C})$ и $so(5, \mathbb{C})$ соответственно) и получаем ограничения, которые такие редукции налагают на данные рассеяния для операторов Лакса. Также мы выводим одно- и двухсолитонные решения.

Работа организована следующим образом. В разделе 2 содержится предварительная информация о группе редукций Михайлова. В разделе 3 приведены базовые примеры трех- и четырехволновых взаимодействий, а также сформулированы условия на редукцию, совместимые с $\mathcal{PT}$ -симметрией. В разделе 4 построены фундаментальные аналитические решения (ФАР) для операторов Лакса и получены ограничения, которые $\mathcal{PT}$ -симметрия налагает на эти решения, на матрицу рассеяния $T(\lambda, t)$ и множители разложения Гаусса для $T(\lambda, t)$. Кроме того, мы обсуждаем, как влияют редукции на положение на оси дискретных собственных значений оператора L . В разделе 5 получены и проанализированы солитонные решения трехволновых систем, связанных с алгеброй $sl(3, \mathbb{C})$.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В этом разделе мы приводим основные факты о прямой задаче рассеяния для пары Лакса (3) и описываем основные типы ее локальных и нелокальных редукций. Задача редукции [34] играет основную роль в теории интегрируемых систем. Класс нелокальных редукций включает $\mathcal{P}$ - и $\mathcal{T}$ -симметрии [30], [33], [35].

2.1. Прямое преобразование рассеяния и решения Йоста. Нашей отправной точкой являются так называемые решения Йоста для оператора $L(\lambda)$, определенные своими асимптотиками (см., например, работу [5] и ссылки в ней),

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x, t, \lambda) e^{i\lambda Jx} = \mathbb{1}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x, t, \lambda) e^{i\lambda Jx} = \mathbb{1} \quad (7)$$

(где $\mathbb{1}$ – единичная матрица) и матрица рассеяния

$$T(t, \lambda) = \hat{\psi}(x, t, \lambda)\phi(x, t, \lambda); \quad (8)$$

здесь и далее шляпка означает обратную матрицу, $\hat{X} \equiv X^{-1}$. Предполагается, что потенциал $q(x, t)$ стремится к нулю достаточно быстро при $|x| \rightarrow \infty$. Также заметим, что, поскольку $U(x, t, \lambda)$ и $V(x, t, \lambda)$ принимают значения в простых алгебрах Ли (алгебрах $sl(3)$ и $so(5)$, как в приведенных ниже примерах), решения Ёоста и матрица рассеяния $T(t, \lambda)$ должны принимать значения в соответствующей группе Ли.

Существенная трудность, возникающая здесь, связана с тем фактом, что решения Ёоста $\psi(x, t, \lambda)$ и $\phi(x, t, \lambda)$ существуют, только если потенциал $Q(x, t)$ имеет конечный носитель [36]. В таком случае не только решения Ёоста, но и матрица рассеяния $T(\lambda, t)$ становятся мероморфными функциями от λ . Более подробные и точные утверждения приведены в разделе 3.

2.2. Локальные и нелокальные редукции. Важный с методической точки зрения инструмент для построения новых интегральных НЛЭУ – это так называемая группа редукций [34]. Было бы правильным начать с локальных редукций:

$$C_1(U^\dagger(\kappa_1(\lambda))) = U(\lambda), \quad C_1(V^\dagger(\kappa_1(\lambda))) = V(\lambda), \quad (9.1)$$

$$C_2(U^T(\kappa_2(\lambda))) = -U(\lambda), \quad C_2(V^T(\kappa_2(\lambda))) = -V(\lambda), \quad (9.2)$$

$$C_3(U^*(\kappa_1(\lambda))) = -U(\lambda), \quad C_3(V^*(\kappa_1(\lambda))) = -V(\lambda), \quad (9.3)$$

$$C_4(U(\kappa_2(\lambda))) = U(\lambda), \quad C_4(V(\kappa_2(\lambda))) = V(\lambda). \quad (9.4)$$

Следствия, вытекающие из этих редукций, и ограничения, которые они налагают на ФАР и гауссовы множители матрицы рассеяния, хорошо известны (см. работы [34], [2], [8]–[10], [13]).

Важно заметить, что для N -волновых уравнений не существует редукций, совместимых по отдельности с $\mathcal{P}$ - или с $\mathcal{T}$ -симметриями. Тем не менее $\mathbb{Z}_2$ -редукции

$$C_1(U^\dagger(-x, -t, \kappa_1\lambda^*)) = -U(x, t, \lambda), \quad C_1(V^\dagger(-x, -t, \kappa_1\lambda^*)) = -V(x, t, \lambda), \quad (10.1)$$

$$C_2(U^T(-x, -t, \kappa_2\lambda)) = U(x, t, \lambda), \quad C_2(V^T(-x, -t, \kappa_2\lambda)) = V(x, t, \lambda), \quad (10.2)$$

$$C_3(U^*(-x, -t, \kappa_1\lambda^*)) = U(x, t, \lambda), \quad C_3(V^*(-x, -t, \kappa_1\lambda^*)) = V(x, t, \lambda), \quad (10.3)$$

$$C_4(U(-x, -t, \kappa_2\lambda)) = -U(x, t, \lambda), \quad C_4(V(-x, -t, \kappa_2\lambda)) = -V(x, t, \lambda), \quad (10.4)$$

очевидно, $\mathcal{PT}$ -симметричны [35]. Здесь $\kappa_i^2 = 1$, а C_i , $i = 1, \dots, 4$, суть инволютивные автоморфизмы соответствующих алгебр Ли. Далее представлены примеры подобных редукций для систем с трех- и четырехволновыми взаимодействиями; естественно называть такие редукции *нелокальными*.

3. ОСНОВНЫЕ ПРИМЕРЫ ТРЕХВОЛНОВЫХ И ЧЕТЫРЕХВОЛНОВЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

3.1. Примеры трехволновых взаимодействий. Рассмотрим пару Лакса вида (3), связанную с алгеброй $sl(3, \mathbb{C})$: в типичном представлении матрица потенциала принимает вид

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & q_1(x, t) & q_3(x, t) \\ p_1(x, t) & 0 & q_2(x, t) \\ p_3(x, t) & p_2(x, t) & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} J &= \text{diag}(a_1, a_2, a_3), \\ I &= \text{diag}(b_1, b_2, b_3). \end{aligned} \quad (11)$$

Предполагается, что матрицы $Q(x, t)$, I и J являются бесследовыми (т. е. операторы Лакса принимают значения в алгебре $sl(3, \mathbb{C})$), а собственные значения матриц I и J упорядочены следующим образом: $a_1 > a_2 > a_3$, $b_1 > b_2 > b_3$ (причем $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ и $b_1 + b_2 + b_3 = 0$).

Условие совместности $[L(\lambda), M(\lambda)] = 0$ приводит к общей системе уравнений трехволнового резонансного взаимодействия

$$\begin{aligned} i(a_1 - a_2)q_{1,t} - i(b_1 - b_2)q_{1,x} + \kappa q_3(x, t)p_2(x, t) &= 0, \\ i(a_2 - a_3)q_{2,t} - i(b_2 - b_3)q_{2,x} + \kappa q_3(x, t)p_1(x, t) &= 0, \\ i(a_1 - a_3)q_{3,t} - i(b_1 - b_3)q_{3,x} + \kappa q_1(x, t)q_2(x, t) &= 0; \end{aligned} \quad (12)$$

здесь константа взаимодействия κ есть

$$\kappa = a_1(b_2 - b_3) - a_2(b_1 - b_3) + a_3(b_1 - b_2). \quad (13)$$

Более того, существуют три “сопряженных” уравнения, формально получающихся из системы (12) заменой $p_k(x, t)$ на $q_k^*(x, t)$. Стандартная редукция $p_k(x, t) = q_k^*(x, t)$, $k = 1, 2, 3$, приводит к каноническому виду уравнений трехволнового резонансного взаимодействия [1], [2].

Система (12) является гамильтоновой [1], [2] и обладает иерархией попарно совместимых гамильтоновых структур [37], [5]. Канонический гамильтониан (1) задается выражением [1], [2], [10], [15], [17]

$$H_{3-w} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\sum_{k=1}^3 v_k \left(q_k \frac{\partial p_k}{\partial x} - p_k \frac{\partial q_k}{\partial x} \right) + \kappa (q_3 p_1 p_2 - p_3 q_1 q_2) \right). \quad (14)$$

Здесь $\{v_k\}$ – группа скоростей системы (12):

$$v_1 = \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2}, \quad v_2 = \frac{b_2 - b_3}{a_2 - a_3}, \quad v_3 = \frac{b_1 - b_3}{a_1 - a_3}.$$

ПРИМЕР 1. Если наложить редукцию (10.1) при $C_1 = \text{id}$ (здесь id – тождественное преобразование), то мы получим $a_k^* = \epsilon a_k$, $b_k^* = \epsilon b_k$ и $p_k(x, t) = -\epsilon q_k^*(-x, -t)$ для $k = 1, 2, 3$. Таким образом, общая трехволновая система (12) сводится к следующей нелокальной системе:

$$\begin{aligned} i(a_1 - a_2)q_{1,t} - i(b_1 - b_2)q_{1,x} - \epsilon \kappa q_3(x, t)q_2^*(-x, -t) &= 0, \\ i(a_2 - a_3)q_{2,t} - i(b_2 - b_3)q_{2,x} - \epsilon \kappa q_3(x, t)q_1^*(-x, -t) &= 0, \\ i(a_1 - a_3)q_{3,t} - i(b_1 - b_3)q_{3,x} + \kappa q_1(x, t)q_2(x, t) &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

ПРИМЕР 2. Если наложить редукцию (10.1) при

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то

$$\begin{aligned} a_3^* &= \epsilon a_1, & a_2^* &= \epsilon a_2, & b_3^* &= \epsilon b_1, & b_2^* &= \epsilon b_2, \\ p_1(x, t) &= -\epsilon q_2^*(-x, -t), & p_2(x, t) &= -\epsilon q_1^*(-x, -t), & p_3(x, t) &= -\epsilon q_3^*(-x, -t). \end{aligned} \quad (16)$$

В результате получаем следующую нелокальную трехволновую систему:

$$\begin{aligned} i(a_1 - a_2)q_{1,t} - i(b_1 - b_2)q_{1,x} - \kappa q_3(x, t)q_1^*(-x, -t) &= 0, \\ i(a_2 - a_3)q_{2,t} - i(b_2 - b_3)q_{2,x} - \kappa q_3(x, t)q_2^*(-x, -t) &= 0, \\ i(a_1 - a_3)q_{3,t} - i(b_1 - b_3)q_{3,x} + \kappa q_1(x, t)q_2(x, t) &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

3.2. Примеры четырехволновых взаимодействий. Еще одним важным примером являются четырехволновые уравнения. Их операторы Лакса связаны с алгеброй $so(5, \mathbb{C})$. В типичном представлении алгебры $so(5, \mathbb{C})$ потенциал $Q(x, t)$ принимает вид

$$Q(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & q_1(x, t) & q_3(x, t) & q_4(x, t) & 0 \\ p_1(x, t) & 0 & q_2(x, t) & 0 & q_4(x, t) \\ p_3(x, t) & p_2(x, t) & 0 & q_2(x, t) & -q_3(x, t) \\ p_1(x, t) & 0 & p_2(x, t) & 0 & q_1(x, t) \\ 0 & p_4(x, t) & -p_3(x, t) & p_1(x, t) & 0 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

а элементы подалгебры Картана J и I могут быть представлены как диагональные матрицы:

$$J = \text{diag}(a_1, a_2, 0, -a_2, -a_1), \quad I = \text{diag}(b_1, b_2, 0, -b_2, -b_1). \quad (19)$$

Представление нулевой кривизны (1) приводит к четырехволновой системе [10]

$$\begin{aligned} i(a_1 - a_2)q_{1,t} - i(b_1 - b_2)q_{1,x} + 2\kappa q_3(x, t)p_2(x, t) &= 0, \\ ia_2q_{2,t} - ib_2q_{2,x} + \kappa[q_4(x, t)p_3(x, t) + q_3(x, t)p_1(x, t)] &= 0, \\ ia_1q_{3,t} - ib_1q_{3,x} + \kappa[q_4(x, t)p_2(x, t) - q_1(x, t)q_2(x, t)] &= 0, \\ i(a_1 + a_2)q_{4,t} - i(b_1 + b_2)q_{4,x} - 2\kappa q_3(x, t)q_2(x, t) &= 0, \end{aligned} \quad (20)$$

где константа взаимодействия $\kappa = a_1b_2 - a_2b_1$. Кроме того, имеется набор четырех “сопряженных” уравнений, формально полученных из (20) заменой функций $p_k(x, t)$ на $q_k^*(x, t)$. Стандартная редукция $p_k(x, t) = q_k^*(x, t)$, $k = 1, \dots, 4$, приводит к каноническому виду уравнений четырехволнового резонансного взаимодействия [2], [9], [10]. В данном случае мы имеем локальную редукцию (10.1).

ПРИМЕР 3. Наложим редукцию (10.3) при

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Это дает $C_1 J^* C_1 = J$ и $C_1 Q^*(-x, -t) C_1^{-1} = Q(x, t)$, или, в компонентах, $a_2 = a_1^*$ и

$$\begin{aligned} p_1(x, t) &= q_1^*(-x, -t), & p_2(x, t) &= p_3^*(-x, -t), & p_4(x, t) &= -p_4^*(-x, -t), \\ q_2(x, t) &= q_3^*(-x, -t), & q_4(x, t) &= -q_4^*(-x, -t). \end{aligned} \quad (22)$$

Таким образом, мы имеем следующие нелокальные аналоги классических четырехволновых уравнений:

$$\begin{aligned} i(a_1 - a_2)q_{1,t} - i(b_1 - b_2)q_{1,x} + \kappa q_3(x, t)p_3^*(-x, -t) &= 0, \\ ia_2q_{2,t} - ib_2q_{2,x} + \kappa[q_4(x, t)p_2^*(-x, -t) + q_1^*(-x, -t)q_1^*(-x, -t)] &= 0, \\ ia_2p_{2,t} - ib_2p_{2,x} - \kappa[p_4(x, t)q_2^*(-x, -t) + q_1(x, t)p_2^*(-x, -t)] &= 0, \\ i(a_1 + a_2)q_{4,t} - i(b_1 + b_2)q_{4,x} - \kappa q_2(x, t)q_2^*(-x, -t) &= 0, \\ i(a_1 + a_2)p_{4,t} - i(b_1 + b_2)p_{4,x} + \kappa p_2(x, t)p_2^*(-x, -t) &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

ПРИМЕР 4. Редукция (10.3) при $C_3 = \text{id}$ эквивалентна редукции (10.1) в случае $C_1 = w_0$, где w_0 – (внутренний) автоморфизм алгебры $so(5, \mathbb{C})$, переводящий вектор с наибольшим весом в вектор с наименьшим весом (см., например, работу [9]). Это приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} a_{1,2}^* &= -\epsilon a_{1,2}, & b_{1,2}^* &= -\epsilon b_{1,2}, \\ q_k(x, t) &= \epsilon q_k^*(-x, -t), & p_k(x, t) &= \epsilon p_k^*(-x, -t), & k &= 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

В результате мы имеем четырехволновую систему (для восьми действительных функций $q_k(x, t)$ и $p_k(x, t)$, $k = 1, \dots, 4$), аналогичную (20).

ПРИМЕР 5. Налагая редукцию (10.1) с матрицей C_1 , заданной формулой (21), получаем, что $a_2^* = a_1$, $b_2^* = b_1$ и

$$\begin{aligned} p_1(x, t) &= p_1^*(-x, -t), & p_2(x, t) &= q_3^*(-x, -t), & p_3(x, t) &= q_2^*(-x, -t), \\ p_4(x, t) &= -q_4^*(-x, -t), & q_1(x, t) &= q_1^*(-x, -t). \end{aligned} \quad (24)$$

В результате получаем пятиволновую систему (содержащую две “действительные” (p_1 и q_1) и три комплексные (q_2 , q_3 и q_4) функции):

$$\begin{aligned} i(a_1 - a_2)q_{1,t} - i(b_1 - b_2)q_{1,x} + \kappa q_3(x, t)q_3^*(-x, -t) &= 0, \\ i(a_1 - a_2)p_{1,t} - i(b_1 - b_2)p_{1,x} - \kappa q_2(x, t)q_2^*(-x, -t) &= 0, \\ ia_2q_{2,t} - ib_2q_{2,x} + \kappa[q_4(x, t)q_2^*(-x, -t) + q_3(x, t)p_1(x, t)] &= 0, \\ ia_1q_{3,t} - ib_1q_{3,x} + \kappa[q_3^*(-x, -t)q_4(x, t) - q_1(x, t)q_2(x, t)] &= 0, \\ i(a_1 + a_2)q_{4,t} - i(b_1 + b_2)q_{4,x} - \kappa q_2(x, t)q_3(x, t) &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Это пример редукции, которая налагает условие симметричности непосредственно на профиль “действительных” решений.

Все эти примеры и их редукции допускают гамильтонову формулировку. Условия редукции приводят к ограничениям для соответствующих гамильтонианов, симплектических форм и интегралов движения [9].

4. ФАР И ИХ РЕДУКЦИИ

При построении ФАР соответствующего оператора Лакса L нужно отдельно рассматривать случаи действительной и комплексной матрицы J .

4.1. Случай действительной матрицы $J \in sl(3)$. Важное понятие ФАР для общих $(n \times n)$ -систем Захарова–Шабата с действительной матрицей J из уравнения (1) было представлено в работах [38]. Если J имеет действительные собственные значения, то решения Йоста для оператора L существуют при всех действительных λ . Их можно рассматривать как решения системы интегральных уравнений типа Вольтерра. Действительно, введем функции

$$Y_+(x, t, \lambda) = \psi(x, t, \lambda)e^{iJ\lambda x}, \quad Y_-(x, t, \lambda) = \phi(x, t, \lambda)e^{iJ\lambda x}, \quad (26)$$

тогда $Y_{\pm}(x, t, \lambda)$ должны удовлетворять уравнению

$$Y_{\pm;jk}(x, t, \lambda) = \delta_{jk} + i \int_{\pm\infty}^x dy e^{-i\lambda(a_j - a_k)(x-y)} ([J, Q(y, t)]Y_{\pm}(x, t, \lambda))_{jk}. \quad (27)$$

Считаем, что собственные значения оператора J упорядочены, $a_1 > a_2 > \dots > a_n$, а также что $\text{tr } J = 0$.

Уравнения Вольтерра (27) имеют решения при любых действительных λ . Аналитические продолжения в область $\lambda \in \mathbb{C}_+$ (в область $\lambda \in \mathbb{C}_-$) возможны только для первого столбца матрицы $Y_-(x, t, \lambda)$ и последнего столбца матрицы $Y_+(x, t, \lambda)$ (соответственно для первого столбца матрицы $Y_-(x, t, \lambda)$ и последнего столбца матрицы $Y_+(x, t, \lambda)$). В работах [38] Шабат предложил заменить интегральные уравнения (27) на два набора интегральных уравнений

$$\xi_{jk}^+(x, t, \lambda) = \delta_{jk} + i \int_{\epsilon_{jk}\infty}^x dy e^{-i\lambda(a_j - a_k)(x-y)} ([J, Q(y, t)]\xi^+(y, t, \lambda))_{jk}, \quad (28)$$

$$\xi_{jk}^-(x, t, \lambda) = \delta_{jk} + i \int_{-\eta_{jk}\infty}^x dy e^{-i\lambda(a_j - a_k)(x-y)} ([J, Q(y, t)]\xi^-(y, t, \lambda))_{jk}, \quad (29)$$

где

$$\epsilon_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{при } j < k, \\ -1 & \text{при } j \geq k, \end{cases}, \quad \eta_{jk} = \begin{cases} -1 & \text{при } j \leq k, \\ 1 & \text{при } j > k. \end{cases}$$

Тогда, как показано в [38], уравнения (28) (уравнения (29)) имеют решения $\xi^{\pm}(x, t, \lambda)$ (соответственно $\xi^-(x, t, \lambda)$), которые можно аналитически продолжить на $\lambda \in \mathbb{C}_+$ (соответственно на $\lambda \in \mathbb{C}_-$). Решения $\xi^{\pm}(x, t, \lambda)$ также можно рассматривать как решения проблемы Римана–Гильберта в мультипликативной форме [2], [38], [39], [8]:

$$\xi^+(x, t, \lambda) = \xi^-(x, t, \lambda)G(x, t, \lambda), \quad G(x, t, \lambda) = e^{i\lambda Jx}G_0(t, \lambda)e^{-i\lambda Jx}, \quad (30)$$

с канонической нормировкой $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \xi^{\pm}(x, t, \lambda) = \mathbb{1}$.

Положим $\chi^{\pm}(x, t, \lambda) = \xi^{\pm}(x, t, \lambda)e^{-i\lambda Jx}$, тогда $\chi^{\pm}(x, t, \lambda)$ являются ФАР для оператора L . К тому же, как показано в [2] и [40], ФАР связаны с решениями Йоста:

$$\chi^{\pm}(x, t, \lambda) = \phi(x, t, \lambda)S^{\pm}(t, \lambda), \quad \chi^{\pm}(x, t, \lambda) = \psi(x, t, \lambda)T^{\mp}(t, \lambda)D^{\pm}(\lambda), \quad (31)$$

где $S^\pm$, $T^\pm$ и $D^\pm$ – гауссовы множители матрицы рассеяния:

$$T(t, \lambda) = T^-(t, \lambda) D^+(\lambda) \hat{S}^+(t, \lambda) = T^+(t, \lambda) D^-(\lambda) \hat{S}^-(t, \lambda). \quad (32)$$

Другими словами, матрицы $T^-(t, \lambda)$ и $S^-(t, \lambda)$ (матрицы $T^+(t, \lambda)$ и $S^+(t, \lambda)$) являются ниже- (соответственно выше-) треугольными, их диагональные элементы равны 1; матрицы $D^\pm(\lambda)$ являются диагональными и допускают аналитическое продолжение в области $\lambda \in \mathbb{C}_\pm$ соответственно. Тогда матрица сшивки записывается как $G_0(t, \lambda) = \hat{S}^-(t, \lambda) S^+(t, \lambda)$. Вместе с $\chi^\pm(x, t, \lambda)$ также можно использовать функции $\tilde{\chi}^\pm(x, t, \lambda)$, определенные как

$$\tilde{\chi}^\pm(x, t, \lambda) = \phi(x, t, \lambda) S^\pm(t, \lambda) \hat{D}^\pm(\lambda), \quad \tilde{\chi}^\pm(x, t, \lambda) = \psi(x, t, \lambda) T^\mp(t, \lambda), \quad (33)$$

т. е. $\tilde{\chi}^\pm(x, t, \lambda) = \chi^\pm(x, t, \lambda) \hat{D}^\pm(\lambda)$.

4.2. Случай комплексной матрицы $J \in sl(3)$. Выше была упомянута проблема, что решения Йоста $\psi(x, t, \lambda)$ и $\phi(x, t, \lambda)$ существуют, только если потенциал $Q(x, t)$ имеет конечный носитель [36]. В этом случае не только решения Йоста, но и матрица рассеяния $T(\lambda, t)$ и коэффициенты (8) ее разложения Гаусса становятся мероморфными функциями от λ . Тем не менее, следуя работам [36] и [41], можно построить и доказать существование ФАР $\chi_\nu(x, t, \lambda)$ для L . Построение основано на наборе интегральных уравнений

$$\xi_{\nu;jk}(x, t, \lambda) = \delta_{jk} + i \int_{\varepsilon_{\nu;jk} 0}^x dy e^{-i\lambda(a_j - a_k)(x-y)} ([J, Q(y, t)] \xi_\nu(y, t, \lambda))_{jk}, \quad (34)$$

где специально подобранные множители $\varepsilon_{\nu;jk}$ принимают значения ± 1 . Очевидно, что при любом выборе $\varepsilon_{\nu;jk}$ решение уравнений (34) будет также решением для оператора Лакса.

Пропустив детали, коротко изложим идею построения ФАР. Первый шаг состоит в определении областей (секторов) Ω_ν на плоскости переменной λ , где функций $\xi_\nu(x, t, \lambda)$ аналитичны. В каждой из этих областей уравнения (34) имеют решение при условии, что все экспоненты $e^{-i\lambda(a_j - a_k)(x-y)}$ убывают при $x, y \rightarrow \pm\infty$. Области Ω_ν разделяются линиями l_ν , на которых экспоненты $e^{-i\lambda(a_j - a_k)(x-y)}$ осциллируют. Другими словами, линии l_ν состоят из точек λ , удовлетворяющих уравнению

$$\operatorname{Im} \lambda(a_j - a_k) = 0. \quad (35)$$

Таким образом, необходимо решить набор алгебраических уравнений (35) для всех возможных $j \neq k$; знаки величин $\varepsilon_{\nu;jk}$ могут быть выбраны произвольно. Решение уравнения (35) определяется уравнением

$$\arg \lambda = -\arg(a_j - a_k) = -\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}(a_j - a_k)}{\operatorname{Re}(a_j - a_k)} = -\beta_{jk}; \quad (36)$$

другими словами, каждая линия l_ν в действительности представляет собой луч, образующий угол $-\beta_{jk}$ с действительной осью λ .

В зависимости от размера матриц и от выбора собственных значений a_k оператора J мы имеем различные наборы лучей, описывающих спектр оператора L . Заметим, что количество лучей всегда является четным и равно $2h$. В самом деле, если

l_ν – луч, образующий угол $-\beta_{jk}$ с действительной осью λ , то луч $l_{\nu+h}$, образующий угол $\pi - \beta_{jk}$, также будет удовлетворять уравнению (36) и лежать в непрерывном спектре оператора L . На рис. 1 показан спектр (3×3) -операторов L при особом выборе J , согласованном с редукцией.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Обратим особое внимание на то, что операторы L и M имеют совпадающие (непрерывные) спектры. Очевидно, можно подойти к оператору M так же, как к L , и построить для него ФАР, которые будут аналитичны в секторах, определенных собственными значениями оператора I . Чтобы J и I определяли одинаковые секторы аналитичности Ω_ν , они должны иметь (с точностью до общей константы) одинаковые наборы собственных значений. Однако если $I = \text{const} \cdot J$, то константа взаимодействия $\kappa = 0$. Поэтому далее мы выбираем $I = J^*$, что обеспечивает совпадение спектров операторов L и M , а также то, что константа взаимодействия $\kappa \neq 0$.

Следующий шаг состоит в том, чтобы вывести соотношения между решениями Йоста и ФАР $\chi_\nu(x, t, \lambda)$ в каждом секторе Ω_ν .

Более точно, наложим на (3×3) -оператор Лакса редукцию (10.1). Это можно сделать двумя способами:

$$s_0 U^\dagger(-x, -t, -\lambda^*) s_0^{-1} = -U(x, t, \lambda), \quad (37a)$$

$$s_0 U^\dagger(-x, -t, \lambda^*) s_0^{-1} = -U(x, t, \lambda), \quad (37b)$$

где $s_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Из этих редукций непосредственно следуют два вида условий:

$$s_0 J^\dagger s_0^{-1} = J, \quad s_0 Q^\dagger(-x, -t) s_0^{-1} = Q(x, t), \quad (38a)$$

$$s_0 J^\dagger s_0^{-1} = -J, \quad s_0 Q^\dagger(-x, -t) s_0^{-1} = -Q(x, t). \quad (38b)$$

Также нам понадобятся два набора ФАР:

$$\begin{aligned} \chi_\nu(x, t, \lambda) &= \phi(x, t, \lambda) S_\nu^+(\lambda, t) = \psi(x, t, \lambda) T_\nu^-(\lambda, t) D_\nu^+(\lambda), & \lambda \in l_\nu^+, \\ \chi_\nu(x, t, \lambda) &= \phi(x, t, \lambda) S_{\nu+1}^-(\lambda, t) = \psi(x, t, \lambda) T_{\nu+1}^+(\lambda, t) D_{\nu+1}^-(\lambda), & \lambda \in l_{\nu+1}^-, \end{aligned} \quad (39)$$

и

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_\nu(x, t, \lambda) &= \phi(x, t, \lambda) S_\nu^+(\lambda, t) \hat{D}_\nu^+(\lambda) = \psi(x, t, \lambda) T_\nu^-(\lambda, t), & \lambda \in l_\nu^+, \\ \tilde{\chi}_\nu(x, t, \lambda) &= \phi(x, t, \lambda) S_{\nu+1}^-(\lambda, t) \hat{D}_{\nu+1}^-(\lambda) = \psi(x, t, \lambda) T_{\nu+1}^+(\lambda, t), & \lambda \in l_{\nu+1}^-, \end{aligned} \quad (40)$$

где условие $\lambda \in l_\nu^\pm$ означает, что $\lambda = \lambda' e^{\pm i0}$ с $\lambda' \in l_\nu$.

Чтобы объяснить обозначения, введенные выше, используем тот факт [41], что каждому лучу l_ν можно сопоставить корень α_ν алгебры $sl(3)$ и ее подалгебры $sl_\nu(2)$, порожденной операторами E_α , $E_{-\alpha}$ и H_α (см. табл. 1). Тогда соответствующая матрица рассеяния $T_\nu(\lambda)$, рассчитанная для $\lambda \in l_\nu$, принимает значения в $sl_\nu(2)$, а гауссовы множители $S_\nu^\pm(\lambda)$, $T_\nu^\pm(\lambda)$ и $D_\nu^\pm(\lambda)$ задаются как

$$\begin{aligned} S_\nu^\pm(\lambda) &= \exp(s_{\nu, \alpha_\nu}^\pm(\lambda) E_{\pm \alpha_\nu}), & T_\nu^\pm(\lambda) &= \exp(t_{\nu, \alpha_\nu}^\pm(\lambda) E_{\pm \alpha_\nu}), \\ D_\nu^\pm(\lambda) &= \exp(d_{\nu, \alpha_\nu}^\pm(\lambda) H_{\pm \alpha_\nu}). \end{aligned} \quad (41)$$

ТАБЛИЦА 1. Соотношения между лучами l_ν , корнями α_ν и углами, образованными лучами l_ν и действительной осью. Здесь $\beta_{12} = \operatorname{arctg}(j_1/3j_0)$ в случае (38a) и $\gamma_{12} = \operatorname{arctg}(3j_1/j_0)$ в случае (38б), где $a_1 = j_0 + ij_1$.

Случай (38a)

Луч	l_0	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5
Корень	$-e_1 + e_2$	$e_2 - e_3$	$e_1 - e_3$	$e_1 - e_2$	$-e_2 + e_3$	$-e_1 + e_3$
Угол	β_{12}	$\pi/2$	$\pi - \beta_{12}$	$\pi + \beta_{12}$	$-\pi/2$	$-\beta_{12}$

Случай (38б)

Луч	l_0	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5
Корень	$e_1 - e_2$	$e_1 - e_3$	$e_2 - e_3$	$-e_1 + e_2$	$-e_1 + e_3$	$-e_2 + e_3$
Угол	$-\gamma_{12}$	0	γ_{12}	$\pi - \gamma_{12}$	π	$\pi + \gamma_{12}$

Хорошо известно, что локальные редукции налагают ограничения на каждое из решений Йоста $\psi(x, t, \lambda)$ и $\phi(x, t, \lambda)$ по отдельности. Изучаемые в настоящей работе нелокальные редукции связаны с двумя решениями Йоста следующим образом:

$$s_0 \psi^\dagger(-x, -t, -\lambda^*) s_0^{-1} = \hat{\phi}(x, t, \lambda), \quad (42a)$$

$$s_0 \psi^\dagger(-x, -t, \lambda^*) s_0^{-1} = \hat{\phi}(x, t, \lambda). \quad (42б)$$

Наша следующая задача – получить ограничения, которые нелокальные редукции налагают на ФАР. Прежде всего найдем, как отображения $\lambda \rightarrow -\lambda^*$ и $\lambda \rightarrow \lambda^*$ влияют на линии l_ν и секторы Ω_ν : имеем

$$\lambda \leftrightarrow -\lambda^* : \quad l_\nu^+ \leftrightarrow l_{4-\nu}^-, \quad \Omega_\nu \leftrightarrow \Omega_{3-\nu}, \quad (43a)$$

$$\lambda \leftrightarrow \lambda^* : \quad l_\nu^+ \leftrightarrow l_{8-\nu}^-, \quad \Omega_\nu \leftrightarrow \Omega_{7-\nu}, \quad (43б)$$

где $4 - \nu$, $3 - \nu$ и $8 - \nu$, $7 - \nu$ взяты по модулю 6.

Далее сравним соотношения (7) с (39) и (40), фиксируя λ так, чтобы оно принимало значения, близкие к лучам l_ν . Это позволяет получить ограничения на данные рассеяния.

В случае (43a) находим

$$s_0(\chi_\nu(-x, -t, -\lambda^*))^\dagger s_0^{-1} = \widehat{\chi}_{3-\nu}(x, t, \lambda), \quad (44)$$

где $3 - \nu$ взято по модулю 6. Отсюда следуют ограничения на гауссовы множители матрицы рассеяния. Пропуская детали, получаем

$$\begin{aligned} s_0(S_\nu^+(-\lambda^*))^\dagger s_0^{-1} &= \widehat{T}_{4-\nu}^+(\lambda), & s_0(S_\nu^-(-\lambda^*))^\dagger s_0^{-1} &= \widehat{T}_{4-\nu}^-(\lambda), \\ s_0(D_\nu^+(-\lambda^*))^\dagger s_0^{-1} &= D_{4-\nu}^+(\lambda). \end{aligned} \quad (45)$$

В случае (43б) имеем

$$s_0(\chi_\nu(-x, -t, -\lambda^*))^\dagger s_0^{-1} = \widehat{\chi}_{7-\nu}(x, t, \lambda), \quad (46)$$

где $7 - \nu$ взято по модулю 6. Ограничения на гауссовы множители матрицы рассеяния таковы:

$$\begin{aligned} s_0(S_\nu^+(\lambda^*))^\dagger s_0^{-1} &= \widehat{T}_{8-\nu}^+(\lambda), & s_0(S_\nu^-(\lambda^*))^\dagger s_0^{-1} &= \widehat{T}_{8-\nu}^-(\lambda), \\ s_0(D_\nu^+(\lambda^*))^\dagger s_0^{-1} &= D_{8-\nu}^+(\lambda), \end{aligned} \quad (47)$$

где опять-таки $7 - \nu$ и $8 - \nu$ взяты по модулю 6.

Заметим, что нули и полюсы функций $D_\nu^\pm(\lambda)$ определяют дискретные собственные значения оператора L . Из соотношений (45) следует, что если λ_k является дискретным собственным значением, то $-\lambda_k^*$ – также собственное значение в случае (42a). В случае (42б) из формулы (47) вытекает, что если λ_k – дискретное собственное значение, то λ_k^* – тоже собственное значение оператора L .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Аналогичное спаривание дискретных собственных значений λ_k и $-\lambda_k^*$, как в случае (43a), было обнаружено в работе [30] для спектра $\mathcal{P}$ -симметричной (2×2) -системы Захарова–Шабата. Существенное различие с нашим случаем состоит в том, что в [30] и λ_k , и $-\lambda_k^*$ лежат в одной области аналитичности, а из рис. 1а видно, что в нашем случае два собственных значения должны лежать в разных областях аналитичности.

4.3. Случай комплексной матрицы $J \in so(5)$. Система корней Δ алгебры $so(5)$ – это специальный набор из восьми векторов в двумерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^2$. Если ввести в $\mathbb{E}^2$ ортонормированный базис $\{e_1, e_2\}$, то

$$\Delta = \{e_1 \pm e_2, -e_1 \pm e_2, \pm e_1, \pm e_2\}.$$

Любой элемент J подалгебры Картана является линейной комбинацией двух базисных элементов: $J = a_1 H_{e_1} + a_2 H_{e_2}$. Можно сопоставить элементу J вектор $\vec{J} = a_1 e_1 + a_2 e_2$. Подробные сведения о системе корней алгебры $so(5)$ и других простых алгебр Ли можно найти в монографии [42]. Четырехволновая система с действительной J и ее солитонные решения изучались в работах [2], [9], [10], [43], [44].

Далее мы рассмотрим случай комплексной матрицы J ; точнее, возьмем $a_1 = a_2^*$. Как в предыдущем пункте, обратим особое внимание на то, чтобы у операторов M и L совпадали непрерывные спектры: потребуем $I = a_2 H_{e_1} + a_1 H_{e_2} = J^*$.

Построение ФАР аналогично случаю алгебры $sl(3)$, описанному выше (см. также работы [41], [45]). Пропустив детали, заметим, что непрерывный спектр оператора L расположен на четырех прямых, пересекающихся в начале отсчета (см. рис. 2):

$$\operatorname{Im} \lambda(\alpha, \vec{J}) = 0, \quad \alpha \in \Delta. \quad (48)$$

С каждой из прямых l_ν связан корень α , для которого $\operatorname{Im} \lambda(\alpha, \vec{J}) = 0$ при $\lambda \in l_\nu$ (см. табл. 2).

Таблица 2. Каждому лучу l_ν , заданному в (48) и определяющему непрерывный спектр оператора Лакса в случае алгебры $so(5)$, соответствует корень α_ν алгебры $so(5)$ и угол, образованный этим лучом с действительной осью; здесь $\varphi_1 = \arg a_1$.

Луч	l_0	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7
Корень	$e_1 + e_2$	e_2	$e_1 - e_2$	e_1	$-(e_1 + e_2)$	$-e_2$	$-(e_1 - e_2)$	$-e_1$
Угол	0	φ_1	$\pi/2$	$\pi - \varphi_1$	π	$\pi + \varphi_1$	$-\pi/2$	$-\varphi_1$

Аналогично предыдущим рассуждениям как частные случаи мы можем доказать формулы из работ [41], [45]:

$$\begin{aligned} \chi_\nu(x, t, \lambda) &= \phi(x, t, \lambda) S_\nu^+(\lambda, t) = \psi(x, t, \lambda) T_\nu^-(\lambda, t) D_\nu^+(\lambda), & \lambda \in l_\nu^+, \\ \chi_\nu(x, t, \lambda) &= \phi(x, t, \lambda) S_{\nu+1}^-(\lambda, t) = \psi(x, t, \lambda) T_{\nu+1}^+(\lambda, t) D_{\nu+1}^-(\lambda), & \lambda \in l_{\nu+1}^-, \end{aligned} \quad (49)$$

и

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_\nu(x, t, \lambda) &= \phi(x, t, \lambda) S_\nu^+(\lambda, t) \widehat{D}_\nu^+(\lambda) = \psi(x, t, \lambda) T_\nu^-(\lambda, t), & \lambda \in l_\nu^+, \\ \tilde{\chi}_\nu(x, t, \lambda) &= \phi(x, t, \lambda) S_{\nu+1}^-(\lambda, t) \widehat{D}_{\nu+1}^-(\lambda) = \psi(x, t, \lambda) T_{\nu+1}^+(\lambda, t), & \lambda \in l_{\nu+1}^-, \end{aligned} \quad (50)$$

где $\nu = 0, 1, \dots, 7$.

Матрица рассеяния $T_\nu(\lambda, t)$ при $\lambda \in l_\nu$ принимает значения в подгруппе $SL_\nu(2)$ группы $SO(5)$, порожденной операторами E_{α_ν} , $E_{-\alpha_\nu}$ и H_{α_ν} . Напомним, через $S_\nu^\pm(\lambda)$, $T_\nu^\pm(\lambda)$ и $D_\nu^\pm(\lambda)$ мы обозначили гауссовы множители оператора $T_\nu(\lambda, t)$ (см. соотношение (32)); мы имеем

$$\begin{aligned} S_\nu^\pm(\lambda) &= \exp(s_{\nu, \alpha_\nu}^\pm(\lambda) E_{\pm \alpha_\nu}), & T_\nu^\pm(\lambda) &= \exp(t_{\nu, \alpha_\nu}^\pm(\lambda) E_{\pm \alpha_\nu}), \\ D_\nu^\pm(\lambda) &= \exp(d_{\nu, \alpha_\nu}^\pm(\lambda) H_{\pm \alpha_\nu}). \end{aligned} \quad (51)$$

Условие $\lambda \in l_\nu^\pm$ обозначает, что $\lambda = \lambda' e^{\pm i0}$, где $\lambda' \in l_\nu$.

Функции $\xi^\pm(x, t, \lambda)$ можно понимать как решения

$$\xi^+(x, t, \lambda) = \xi^-(x, t, \lambda) G(x, t, \lambda), \quad G(x, t, \lambda) = e^{i\lambda Jx} G_0(t, \lambda) e^{-i\lambda Jx} \quad (52)$$

с канонической нормировкой $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \xi^\pm(x, t, \lambda) = \mathbb{1}$.

Сведение задачи обратного рассеяния к проблеме Римана–Гильберта прежде всего позволяет применить метод одевания для построения солитонных решений соответствующих четырехволновых уравнений.

5. МЕТОД ОДЕВАНИЯ И СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ

Метод одевания связывает ФАР двух операторов Лакса:

$$\chi_\nu^{(1)}(x, t, \lambda) = g(x, t, \lambda) \chi_\nu^{(0)}(x, t, \lambda), \quad (53)$$

где $\chi_\nu^{(1)}(x, t, \lambda)$ и $\chi_\nu^{(0)}(x, t, \lambda)$ – операторы Лакса с потенциалами Q_1 и Q_0 . Предполагается, что $Q_0 = 0$, так что соответствующее “простое” решение $\chi_\nu^{(0)}(x, t, \lambda) = e^{-i\lambda Jx}$. Очевидно, одевающий множитель должен удовлетворять уравнению

$$ig_x + [J, Q]g - g[J, Q_0] - \lambda[J, g] = 0. \quad (54)$$

Более того, функция $q(x, t, \lambda)$ должна удовлетворять всем условиям, которые редукция налагает на оператор Лакса:

$$s_0 g^\dagger(-x, -t, -\lambda^*) s_0^{-1} = \hat{g}(x, t, \lambda), \quad (55a)$$

$$s_0 g^\dagger(-x, -t, \lambda^*) s_0^{-1} = \hat{g}(x, t, \lambda). \quad (55b)$$

Далее мы выпишем одно- и двухсолитонные решения для нелокальных редукций из класса (55a). Решения из класса (55b) получаются аналогичным образом.

Дополнительно о методе одевания можно прочитать в работах [2], [46], [44], [41].

5.1. Односолитонное решение. Предположим, что для $\mathfrak{g} \simeq sl(3, \mathbb{C})$ одевающий множитель $g(x, t, \lambda)$ и обратный к нему $\hat{g}(x, t, \lambda)$ имеют простые полюсы в точках $\lambda = \lambda_1^-$ и $\lambda = \lambda_1^+$ соответственно:

$$g(x, t, \lambda) = 1 + \frac{\lambda_1^- - \lambda_1^+}{\lambda - \lambda_1^-} P_1(x, t), \quad \hat{g}(x, t, \lambda) = 1 + \frac{\lambda_1^+ - \lambda_1^-}{\lambda - \lambda_1^+} P_1(x, t), \quad (56)$$

где $P_1(x, t)$ – проектор ранга 1, заданный как

$$P_1(x, t) = \frac{|n_0(x, t)\rangle \langle m_0(x, t)|}{\langle m_0(x, t)| n_0(x, t)\rangle}, \quad P_1^2(x, t) = P_1(x, t). \quad (57)$$

Из (55) следует, что

$$g(x, t, \lambda) s_0 g^\dagger(-x, -t, -\lambda^*) s_0^{-1} = \mathbb{1}; \quad (58)$$

это означает, что

$$P_1(x, t) = s_0 P_1^\dagger(-x, -t) s_0^{-1}, \quad \lambda_1^+ = -(\lambda_1^-)^* = \alpha_1 + i\beta_1. \quad (59)$$

Из общей теории метода одевания [3] известно, что $q(x, t, \lambda)$ должна удовлетворять уравнениям

$$i \frac{dg}{dx} + ([J, Q_1] - \lambda J)g + g\lambda J = 0, \quad i \frac{dg}{dt} + ([J^*, Q_1] - \lambda J^*)g + g\lambda J^* = 0, \quad (60)$$

где $Q_1(x, t)$ – одетый потенциал, определенный односолитонным решением. В частности, анализируя вычет при $\lambda \rightarrow \lambda_1^-$ и предел при $\lambda \rightarrow \infty$ данных уравнений, получаем

$$i \frac{d\langle m_0|}{dx} + \lambda_1^- \langle m_0(x, t)| J = 0, \quad i \frac{d\langle m_0|}{dt} + \lambda_1^- \langle m_0(x, t)| J^* = 0, \quad (61)$$

$$[J, Q_1(x, t)] = -2\alpha_1 [J, P_1(x, t)].$$

Таким образом,

$$m_{0k}(x, t) = m_{00k} e^{R_k + i\Omega_k}, \quad n_{0k}(x, t) = (-1)^{k+1} m_{00\bar{k}}^* e^{-R_{\bar{k}} + i\Omega_{\bar{k}}}, \quad \bar{k} = 4 - k, \quad (62)$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= (\alpha_1 j_1 - \beta_1 j_0)x - (\alpha_1 j_1 + \beta_1 j_0)t, & \Omega_1 &= -(\alpha_1 j_0 + \beta_1 j_1)x - (\alpha_1 j_0 - \beta_1 j_1)t, \\ R_2 &= 2\beta_1 j_0(x + t), & \Omega_2 &= 2\alpha_1 j_0(x + t), \\ R_3 &= -(\alpha_1 j_1 + \beta_1 j_0)x + (\alpha_1 j_1 - \beta_1 j_0)t, & \Omega_3 &= -(\alpha_1 j_0 - \beta_1 j_1)x - (\alpha_1 j_0 + \beta_1 j_1)t. \end{aligned}$$

Для простоты также предположим, что $m_{003} = m_{001}^*$. Тогда знаменатель в определении (57) проектора $P_1(x, t)$ принимает вид

$$\langle n_0(x, t) | m_0(x, t) \rangle = e^{-i\Omega_2} \Delta_1(x, t), \quad (63)$$

где $\Delta_1(x, t) = 2|m_{001}|^2 \operatorname{ch}(R_1 - R_3) - |m_{002}|^2 e^{3i\Omega_2}$. Окончательно получаем для одно-солитонного решения

$$\begin{aligned} Q_{1;12}(x, t) &= -\frac{2\alpha_1}{\Delta_1} m_{001} m_{002} e^{R_2 - R_3} e^{i(\Omega_2 - \Omega_1)}, \\ Q_{1;21}(x, t) &= \frac{2\alpha_1}{\Delta_1} m_{001} m_{002}^* e^{R_1 - R_2} e^{i(\Omega_2 - \Omega_3)}, \\ Q_{1;13}(x, t) &= -\frac{2\alpha_1}{\Delta_1} |m_{001}|^2 e^{i(\Omega_3 - \Omega_1)}, \\ Q_{1;31}(x, t) &= -\frac{2\alpha_1}{\Delta_1} |m_{001}|^2 e^{i(\Omega_1 - \Omega_3)}, \\ Q_{1;23}(x, t) &= \frac{2\alpha_1}{\Delta_1} m_{001}^* m_{002} e^{R_3 - R_2} e^{i(\Omega_2 - \Omega_1)}, \\ Q_{1;32}(x, t) &= -\frac{2\alpha_1}{\Delta_1} m_{001}^* m_{002} e^{R_2 - R_1} e^{i(\Omega_2 - \Omega_3)}. \end{aligned} \quad (64)$$

Если к тому же предположить, что $2|m_{01}|^2 > |m_{02}|^2$, то знаменатель никогда не обращается в ноль, и солитон не имеет сингулярностей.

Легко проверить, что при $x \rightarrow \pm\infty$ решение стремится к нулю, т.е. попадает в класс потенциалов, для которых были построены ФАР.

5.2. Двухсолитонные решения. Рассмотрим двухсолитонное решение, соответствующее двум дискретным собственным значениям λ_1 и λ_2 , так что анзац g принимает вид

$$g(x, t, \lambda) = \mathbb{1} + \frac{A_1(x, t)}{\lambda - \lambda_1^-} + \frac{A_2(x, t)}{\lambda - \lambda_2^-} \quad (65)$$

для некоторых вычетов $A_1(x, t)$ и $A_2(x, t)$. Из условия (58) следует, что оператор $\hat{g}(x, t, \lambda)$ должен иметь простые полюсы в точках $\lambda_k^+ = -(\lambda_k^-)^*$. Более того, это приводит к следующей системе уравнений для A_1, A_2 :

$$\left(\mathbb{1} - \frac{A_1(x, t)}{\lambda_k^+ - \lambda_1^-} - \frac{A_2(x, t)}{\lambda_k^+ - \lambda_2^-} \right) s_0 A_k^\dagger(-x, -t) s_0^{-1} = 0, \quad k = 1, 2. \quad (66)$$

Эти уравнения являются условиями равенства нулю вычетов операторов (58) в точках $-\lambda_k^+$ и $-\lambda_k^*$.

Теперь одевающий множитель (65) связывает ФАР для “простого” оператора Лакса с ФАР для оператора L_2 , в котором потенциал Q_2 является двухсолитонным решением трехволнового уравнения. Как и ранее, предполагаем, что $A_k(x, t)$ – вырожденные матрицы ранга один:

$$A_k(x, t) = |n_k(x, t)\rangle\langle m_k(x, t)|, \quad (67)$$

где $|n_k(x, t)\rangle$ – трехкомпонентные вектор-столбцы, а $\langle m_k(x, t)|$ – трехкомпонентные вектор-строки. Система (66) порождает следующую линейную систему двух уравнений:

$$\begin{pmatrix} s_0 |m_1^*(-x, -t)\rangle \\ s_0 |m_2^*(-x, -t)\rangle \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |n_1(x, t)\rangle \\ |n_2(x, t)\rangle \end{pmatrix} = 0, \quad (68)$$

где

$$F_{kp} = \frac{\langle m_p(x, t) | s_0 | m_k^*(-x, -t) \rangle}{\lambda_k^+ + \lambda_p^{+,*}}. \quad (69)$$

Система (68) позволяет связать n -векторы с m -векторами. Более того, условие (54) требует, чтобы вычеты удовлетворяли уравнениям

$$\begin{aligned} i \frac{dA_k}{dx} + [J, Q]A_k - \lambda_k^- [J, A_k] &= 0, \\ i \frac{dA_k}{dt} + [J^*, Q]A_k - \lambda_k^- [J^*, A_k] &= 0, \end{aligned} \quad k = 1, 2. \quad (70)$$

Эти дифференциальные уравнения приводят к следующим уравнениям для $|n\rangle$ и $\langle m|$:

$$\begin{aligned} i \frac{d\langle m_k |}{dx} + \lambda_k^- \langle m_k | J &= 0, & i \frac{d|n_k\rangle}{dx} + ([J, Q_2] - \lambda_k^- J) |n_k\rangle &= 0, \\ i \frac{d\langle m_k |}{dt} + \lambda_k^- \langle m_k | J^* &= 0, & i \frac{d|n_k\rangle}{dt} + ([J, Q_2] - \lambda_k^- J^*) |n_k\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (71)$$

Этот результат показывает, что если $\langle m_k |$ удовлетворяет “простому” уравнению при $\lambda = \lambda_k^-$, то векторы $|n_k\rangle$ являются собственными функциями спектральной задачи при $\lambda = \lambda_k^-$ для (пока неизвестного) двухсолитонного решения $Q_2(x, t)$. Можно легко найти решение $|m_k\rangle$, а потом восстановить $|n_k\rangle$ из (68):

$$\langle m_k | = \langle m_{k0} | e^{i\lambda_k^- (Jx + J^*t)}. \quad (72)$$

Положив $\lambda_k^\pm = \pm\alpha_k + i\beta_k$, находим

$$\begin{pmatrix} |n_1(x, t)\rangle \\ |n_2(x, t)\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_2(x, t)} \begin{pmatrix} F_{22} & -F_{12} \\ -F_{21} & F_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0 |m_1^*(-x, -t)\rangle \\ s_0 |m_2^*(-x, -t)\rangle \end{pmatrix}, \quad (73)$$

где $\Delta_2(x, t) = F_{12}F_{21} - F_{11}F_{22}$. Очевидно, функция $\Delta_2(x, t)$ является $\mathcal{PT}$ -инвариантной. Двухсолитонное решение можно получить из уравнения

$$[J, Q_2(x, t)] = [J, A_1(x, t) + A_2(x, t)] = [J, |n_1(x, t)\rangle\langle m_1(x, t)| + |n_2(x, t)\rangle\langle m_2(x, t)|]. \quad (74)$$

Таким образом, двухсолитонные решения являются сложными рациональными функциями от экспонент, например от $e^{-R_k \pm i\Omega_k}$. В общем случае достаточно сложно понять, имеет решение особенности или нет.

Тем не менее при специальном выборе параметров двухсолитонные решения упрощаются и становится видно, что они регуляры. Пусть $\lambda_1^+ = -\lambda_2^+ = \alpha_1 + i\beta_1$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle m_1(x, t) | &= \langle \mu_0 | e^{\mathbf{R} + i\mathbf{\Omega}}, & |m_1^*(-x, -t)\rangle &= e^{-\mathbf{R} + i\mathbf{\Omega}} |\mu_0^*\rangle, \\ \langle m_2(x, t) | &= \langle \tilde{\mu}_0 | e^{-\mathbf{R} - i\mathbf{\Omega}}, & |m_2^*(-x, -t)\rangle &= e^{\mathbf{R} - i\mathbf{\Omega}} |\mu_0^*\rangle, \end{aligned} \quad (75)$$

где $\mathbf{R} = \text{diag}(R_1, R_2, R_3)$ и $\mathbf{\Omega} = \text{diag}(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$.

Далее, как и в односолитонном случае, предположим, что $\mu_{03} = \mu_{01}^*$, $\tilde{\mu}_{03} = \tilde{\mu}_{01}^*$ и $\tilde{\mu}_{02} = 0$. Тогда выражения для F_{kp} упрощаются и принимают вид

$$\begin{aligned} F_{11} &= \frac{e^{-i\Omega_2}}{\alpha_1} \left(|\mu_{01}|^2 \text{ch}(R_1 - R_3) - \frac{1}{2} |\nu_{02}|^2 e^{-3i\Omega_2} \right), & F_{12} &= \frac{e^{R_2}}{i\beta_1} |\mu_{01} \tilde{\mu}_{01}| \cos(\Omega_1 - \Omega_3 - \sigma_{01}), \\ F_{21} &= -\frac{e^{-R_2}}{i\beta_1} |\mu_{01} \tilde{\mu}_{01}| \cos(\Omega_1 - \Omega_3 + \sigma_{01}), & F_{22} &= -\frac{e^{i\Omega_2}}{\alpha_1} |\mu_{01}|^2 \text{ch}(R_1 - R_3), \end{aligned}$$

где $\sigma_{01} = \arg \mu_{01} + \arg \tilde{\mu}_{01}$. Подставляя эти выражения в Δ_2 , получаем

$$\begin{aligned} \Delta_2(x, t) &= \frac{1}{\alpha_1^2} |\tilde{\mu}_{01}|^2 \text{ch}(R_1 - R_3) \left(|\mu_{01}^2| \text{ch}(R_1 - R_3) - \frac{1}{2} |\mu_{02}|^2 e^{-3i\Omega_2} \right) + \\ &+ \frac{1}{\beta_1^2} |\mu_{01} \tilde{\mu}_{01}|^2 \cos(\Omega_1 - \Omega_3 + \sigma_{01}) \cos(\Omega_1 - \Omega_3 - \sigma_{01}). \end{aligned}$$

Эта функция не имеет нулей, если, как и в односолитонном случае, предположить, что $2|\mu_{01}| > |\mu_{02}|$, и потребовать дополнительно, чтобы $\sigma_{01} = 0$ или $\sigma_{01} = \pi$. Тогда соответствующее двухсолитонное решение будет регулярным.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построены фундаментальные аналитические решения для нелокальных редукций трех- и четырехволновых систем (связанных с алгебрами $sl(3, \mathbb{C})$ и $so(5, \mathbb{C})$ соответственно), обладающие $\mathcal{PT}$ -симметрией, и кратко описаны спектральные свойства соответствующих операторов Лакса. Кроме того, получены одно- и двухсолитонные решения трехволнового уравнения с комплексной матрицей J .

Анализ односолитонных решений показывает, что они могут быть регулярными при всех x и t , если векторы поляризации удовлетворяют некоторым условиям (см. п. 5.1). Мы нашли специальный набор параметров для двухсолитонных решений $\mathcal{PT}$ -симметричных трехволновых уравнений, который обеспечивает их регулярность. Эти примеры показывают, что $\mathcal{PT}$ -симметричные трехволновые уравнения могут иметь регулярные мультисолитонные решения при особом выборе параметров. Подобный анализ можно применить и к четырехволновым $\mathcal{PT}$ -симметричным уравнениям. В будущем мы намерены провести их детальное описание.

Благодарности. Мы благодарим анонимного рецензента за внимательное чтение текста и полезные замечания.

Список литературы

- [1] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, *Точная теория резонансного взаимодействия волновых пакетов в нелинейных средах*, Препринт ИЯФ СОАН СССР 74-41, Новосибирск, 1974; В. Е. Захаров, С. В. Manakov, *ЖЭТФ*, **69**:5 (1975), 1654–1673.
- [2] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: метод обратной задачи*, Наука, М., 1980.
- [3] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, *Функц. анализ и его прил.*, **8**:3 (1974), 43–53; **13**:3 (1979), 13–22.
- [4] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, М., 1986.
- [5] V. S. Gerdjikov, G. Vilasi, A. B. Yanovski, *Integrable Hamiltonian Hierarchies. Spectral and Geometric Methods*, Lecture Notes in Physics, **748**, Springer, Berlin, 2008.
- [6] J. R. Ackerhalt, P. W. Milonni, *Phys. Rev. A*, **33**:5 (1986), 3185–3198.
- [7] E. V. Ferapontov, *Diff. Geom. Appl.*, **5**:4 (1995), 335–369.
- [8] V. S. Gerdjikov, “Algebraic and analytic aspects of soliton type equations”, *The Legacy of the Inverse Scattering Transform in Applied Mathematics* (South Hadley, MA, USA, June 17–21, 2001), Contemporary Mathematics, **301**, eds. J. Bona, R. Choudhury, D. Kaup, AMS, Providence, RI, 2002, 35–68, arXiv: nlin.SI/0206014.
- [9] V. S. Gerdjikov, G. G. Grahovski, N. A. Kostov, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **34**:44 (2001), 9425–9461, arXiv: nlin.SI/0006001.
- [10] V. S. Gerdjikov, G. G. Grahovski, R. I. Ivanov, N. A. Kostov, *Inverse Problems*, **17**:4 (2001), 999–1015, arXiv: nlin.SI/0009034.
- [11] V. S. Gerdjikov, G. G. Grahovski, N. A. Kostov, *Eur. Phys. J. B*, **29**:2 (2002), 243–248.
- [12] V. S. Gerdjikov, N. A. Kostov, *Phys. Rev. A*, **54**:5 (1996), 4339–4350.
- [13] V. S. Gerdjikov, N. A. Kostov, T. I. Valchev, *SIGMA*, **3** (2007), 039, 19 pp., arXiv: nlin.SI/0703002.
- [14] E. Ibragimov, A. A. Struthers, D. J. Kaup, J. D. Khaydarov, K. D. Singer, *Phys. Rev. E*, **59**:5 (1999), 6122–6137.
- [15] D. J. Kaup, *Stud. Appl. Math.*, **55**:1 (1976), 9–44.
- [16] D. J. Kaup, *Stud. Appl. Math.*, **62**:1 (1980), 75–83; *Phys. D*, **1**:1 (1980), 45–67.

- [17] D. J. Kaup, A. Reiman, A. Bers, *Rev. Modern Phys.*, **51**:2 (1979), 275–309.
- [18] В. Е. Захаров, *Докл. АН СССР*, **228**:6 (1976), 1314–1316.
- [19] А. А. Зябловский, А. П. Виноградов, А. А. Пухов, А. В. Дорофеев, А. А. Лисянский, *УФН*, **184**:11 (2014), 1177–1198.
- [20] F. K. Abdullaev, Y. V. Kartashov, V. V. Konotop, D. A. Zezyulin, *Phys. Rev. A*, **83**:4 (2011), 041805, 4 pp.
- [21] I. V. Barashenkov, *Phys. Rev. A*, **90**:4 (2014), 045802, 4 pp.
- [22] I. V. Barashenkov, D. E. Pelinovsky, P. Dubard, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **48**:32 (2015), 325201, 28 pp.
- [23] C. M. Bender, S. Boettcher, *Phys. Rev. Lett.*, **80**:24 (1998), 5243–5246; C. M. Bender, S. Boettcher, P. N. Meisinger, *J. Math. Phys.*, **40**:6 (1999), 2201–2229.
- [24] C. M. Bender, *Rep. Progr. Phys.*, **70**:6 (2007), 947–1018, arXiv: hep-th/0703096.
- [25] A. Mostafazadeh, *J. Math. Phys.*, **43**:1 (2002), 205–214, arXiv: math-ph/0107001; 2814–2816, arXiv: math-ph/0110016; 3944–3951, arXiv: math-ph/0203005.
- [26] A. Mostafazadeh, *J. Math. Phys.*, **44**:3 (2003), 974–989, arXiv: math-ph/0209018; *J. Phys. A: Math. Gen.*, **36**:25 (2003), 7081–7091, arXiv: quant-ph/0304080.
- [27] C. E. Rüter, K. G. Makris, R. El-Ganainy, D. N. Christodoulides, M. Segev, D. Kip, *Nature Phys.*, **6** (2010), 192–195.
- [28] A. Fring, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **40**:15 (2007), 4215–4224, arXiv: math-ph/0701036.
- [29] A. Fring, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, **371**:1989 (2013), 20120046, 18 pp.
- [30] M. J. Ablowitz, Z. H. Musslimani, *Phys. Rev. Lett.*, **110**:6 (2013), 064105, 5 pp.
- [31] V. S. Gerdjikov, A. Saxena, *Complete integrability of nonlocal nonlinear Schrödinger equation*, arXiv: 1510.0480.
- [32] M. J. Ablowitz, Z. H. Musslimani, *Phys. Rev. E*, **90**:3 (2014), 032912, 5 pp.
- [33] M. J. Ablowitz, Z. H. Musslimani, *Nonlinearity*, **29**:3 (2016), 915–946.
- [34] A. V. Mikhailov, *Phys. D*, **3**:1–2 (1981), 73–117.
- [35] T. I. Valchev, *Phys. Lett. A*, **379**:34–35 (2015), 1877–1880.
- [36] R. Beals, R. R. Coifman, *Commun. Pure Appl. Math.*, **37**:1 (1984), 39–90; *Inverse Problems*, **3** (1987), 577–594.
- [37] V. S. Gerdjikov, P. P. Kulish, *Phys. D*, **3**:3 (1981), 549–564.
- [38] А. Б. Шабат, *Функц. анализ и его прил.*, **9**:3 (1975), 75–78; *Дифференц. уравнения*, **15**:10 (1979), 1824–1834.
- [39] E. V. Doktorov, S. B. Leble, *A Dressing Method in Mathematical Physics*, Mathematical Physics Studies, **28**, Springer, Dordrecht, 2007.
- [40] V. S. Gerdjikov, *Inverse Problems*, **2**:1 (1986), 51–74.
- [41] V. S. Gerdjikov, A. B. Yanovski, *J. Math. Phys.*, **35**:7 (1994), 3687–3725.
- [42] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups and Symmetric Spaces*, Graduate Studies in Mathematics, **34**, AMS, Providence, RI, 2001.
- [43] G. G. Grahovski, “On the reductions and scattering data for the generalized Zakharov–Shabat systems”, *Nonlinear Physics: Theory and Experiment. II* (Gallipoli, Italy, June 27–July 6, 2002), eds. M. J. Ablowitz, M. Boiti, F. Pempinelli, B. Prinari, World Sci., Singapore, 2003, 71–78; G. G. Grahovski, M. Condon, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **15**, suppl. 3 (2008), 197–208, arXiv: 0710.3302.
- [44] R. Ivanov, *Nucl. Phys. B*, **694**:3 (2004), 509–524, arXiv: math-ph/0402031.
- [45] V. S. Gerdjikov, A. B. Yanovski, *Stud. Appl. Math.*, **134**:2 (2015), 145–180.
- [46] V. S. Gerdjikov, D. J. Kaup, N. A. Kostov, T. I. Valchev, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **41**:31 (2008), 315213, 36 pp.

Рис. 2. Непрерывный спектр (5×5) -оператора Лакса с комплексной матрицей J после действия редукций (10.1) или (10.3).