Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Р. Садыков, А. В. Апороски, Аналогии излучения
Вавилова–Черенкова в массиве невзаимодействующих
нанотрубок, *ТМФ*, 2016, том 188, номер 1, 169–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9096>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 11:57:58

© 2016 г.

Н. Р. Садыков*, А. В. Апороски*

АНАЛОГИ ИЗЛУЧЕНИЯ БАВИЛОВА–ЧЕРЕНКОВА В МАССИВЕ НЕВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ НАНОТРУБОК

Рассмотрен механизм генерации излучения, источником которого являются модулированные относительно переменной $z - vt$ поверхностные токи в массиве невзаимодействующих параллельных друг другу нанотрубок. Нанотрубки ориентированы перпендикулярно оси Oz , а скорость v больше скорости света в среде. На качественном уровне изучаемый процесс излучения аналогичен излучению Вавилова–Черенкова системой диполей. Показано, что с помощью данного метода можно генерировать интенсивные СВЧ- и терагерцовые излучения. Дана оценка величины миллиметрового излучения, которое можно получить с помощью массива нанотрубок.

Ключевые слова: эффект Вавилова–Черенкова, массив нанотрубок, наноленты, диполь.

DOI: 10.4213/tmf9096

1. ВВЕДЕНИЕ

Существует большое число процессов, связанных с излучением, поглощением и усилением электромагнитных волн при сверхсветовом движении зарядов и различных систем (диполи, атомы и т. д.). При движении излучателя в среде или вблизи среды со скоростями, превосходящими фазовую скорость света в этой среде, возникают качественно новые явления – эффект Вавилова–Черенкова для заряда, черенковское излучение дипольных и магнитных моментов в безграничной среде и в щелях или каналах, черенковское поглощение, испускание черенковских глюонов при прохождении через среду партонных токов (см., например, работы [1]–[7]). В общем случае источником излучения Вавилова–Черенкова может стать любая система зарядов или токов, способная создать электрическое и магнитное поле. Необходимо только, чтобы такая система двигалась в среде со скоростью, превышающей в некотором интервале частот фазовую скорость света. Тогда в этом же интервале частот будет испускаться излучение Вавилова–Черенкова.

*Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Снежинский физико-технический институт, Снежинск, Челябинская обл., Россия.
E-mail: n.r.sadykov@rambler.ru

Перспективным направлением является использование черенковского излучения для диагностики сгустка заряженных частиц. Например, можно получить недивергентное излучение от сгустков заряженных частиц с использованием периодических проволочных структур, таких как трехмерные объемные проволочные метаматериалы на основе бесконечно длинных проводов [8], [9] или плоские полубесконечные периодические проволочные структуры [10]. В работах [8]–[10] влияние проволочной сетки на черенковское излучение описывается в терминах метода усредненных граничных условий [11].

В качестве генератора продольного поверхностного тока, для которого возможно черенковское излучение, можно использовать массив углеродных нанотрубок [12] или другие удлиненные наночастицы. Такие структуры на основе нанотрубок на данный момент времени уже изготавливаются (см., например, статью [13]). В случае массива на основе нанотрубок возникают существенные количественные и, как следствие, существенные качественные отличия от свойств периодических проволочных структур. Размеры проволок значительно превосходят размеры нанотрубок, в результате чего скорость поверхностных волн в проволоках равна скорости света в вакууме. Действительно, если толщина скин-слоя в металлической проволоке значительно меньше его радиуса, то в этом случае при $\omega < \omega_p/(1 + \varepsilon_2)$ существуют нерадиационные поверхностные плазмон-поляритонные моды (surface plasmon-polariton (SPP) mode), а при $\omega > \omega_p$ существуют радиационные поверхностные плазмон-поляритонные моды (radiative plasmon-polariton (RPP) mode) [14]; здесь $\omega_p = 8.85 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ – объемная плазменная частота электронного газа. В случае SPP-мод частота колебаний может лежать в терагерцовой области, а фазовая скорость $v_p \approx 2 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ [14], что соизмеримо со скоростью света. В случае RPP-мод в окрестности мод скорости при выполнении условия $\omega \geq \omega_p$ фазовая скорость поверхностных волн v_p удовлетворяет соотношению

$$v_p \approx c \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_p^2} - 1} \rightarrow 0.$$

Условие $\omega \geq \omega_p$ соответствует оптическому диапазону частот.

Если толщина скин-слоя в металлической проволоке равна или больше радиуса слоя, то существуют продольные и поперечные плазмонные моды. Поперечная плазмонная мода совпадает с дисперсией асимметричной плазмонной моды в двумерной электронной системе двойной толщины без проводящего экрана, а продольная плазмонная мода совпадает с дисперсией симметричной плазмонной моды. В нанотрубках скорость поверхностных волн определяется коэффициентом замедления β , она значительно меньше скорости света в вакууме. Величина коэффициента замедления равна [15], [16]

$$\beta \approx \sqrt{\frac{4\alpha X v_F}{\pi c}} \approx 0.02.$$

Здесь $\alpha = 1/137$ – постоянная тонкой структуры, v_F – скорость электронов в точке Ферми нанотрубки,

$$X = -2K_0(\sqrt{\kappa^2 - k^2} R)I_0(\sqrt{\kappa^2 - k^2} R) \approx 15,$$

где $K_0(\xi)$ и $I_0(\xi)$ – модифицированные функции Бесселя (см. работы [16], [17]). Поскольку скорость распространения поверхностных волн на два-три порядка меньше

Рис. 1. Фрагмент упрощенной схемы предполагаемого эксперимента в среде на основе совокупности массивов удлиненных нанотрубок.

скорости света в вакууме, условие синхронизма требует на такую же величину замедлить электромагнитную волну [18], и это намного больше, чем теоретическая оценка [15], полученная для углеродных нанотрубок. Наличие малой величины β приводит к тому, что первая резонансная частота для нанотрубки длиной 10 мкм соответствует миллиметровому излучению в вакууме.

Настоящая работа является продолжением работы [12], где рассмотрен механизм генерации излучения, источником которого являются модулированные относительно переменной $z - vt$ поверхностные токи в массиве невзаимодействующих нанотрубок (см. рис. 1), при этом фазовая скорость v считается равной скорости света в среде, $v = c/\sqrt{\epsilon}$ (реализуется плоский фронт излучения).

По аналогии с работой [12] в качестве системы токов мы рассматриваем систему поверхностных токов в удлиненных невзаимодействующих наночастицах с металлическим типом проводимости, например в углеродных нанотрубках или нанолентах. В отличие от работы [12] мы полагаем, что скорость v больше скорости света в среде, $v > c/\sqrt{\epsilon}$ (реализуется конический фронт излучения).

Будем считать, что все наночастицы и действующие на них электрические поля направлены вдоль оси Ox . Токи можно получить, например, за счет нелинейных процессов в удлиненных нанотрубках [19], нанолентах [20] или при распространении излучения двухчастотного CO_2 -лазера вдоль оси Oz в среде на основе массива наночастиц при наличии постоянного электрического поля [19] (осцилляции Блоха). Токи также можно получить [16], [21] при распространении коротких высокоинтенсивных наносекундных электрических импульсов с субнаносекундной шириной переднего фронта (продольные плазмон-поляритоны) в массиве удлиненных наночастиц [22]. Величина поверхностного тока определяется типом проводимости наночастиц: чем меньше ширина запрещенной зоны, тем больше величина поверхностного тока [15], [23]. Поэтому в дальнейшем нас будет интересовать наночастицы с металлическим типом проводимости.

Рассмотрим среду на основе совокупности массивов удлиненных наночастиц. Для наглядности на рис. 1 приведена упрощенная схема гипотетического эксперимента. Среда представляет собой три массива удлиненных нанотрубок. Наносекундный

электрический импульс распространяется в волноводе вдоль оси Oz со скоростью v ($\operatorname{tg} \theta = c/v\sqrt{\varepsilon}$ – тангенс угла между фазовой скоростью и волновым вектором черенковских волн), и профиль E_0 наносекундного электрического импульса имеет только x -компоненту, $E_0 = E_{0x}$. Такой импульс можно получить, например, внутри металлического волновода, состоящего из двух параллельных полосок (можно также рассмотреть два коаксиальных цилиндра, но в этом случае изменится геометрия рассматриваемой задачи). Нанотрубка представляет собой электрический колебательный контур, для которого единичный интервал цепи характеризуется кинетической индуктивностью, активным электрическим сопротивлением и квантовой электрической емкостью на единицу длины [23]–[25]. В результате наносекундный импульс вызывает в нанотрубках резонансные (гармонические) колебания поверхностного тока вдоль оси Ox со сверхвысокой частотой [16], [21].

Совокупность поверхностных токов задает распределенный в пространстве ток (объемный ток), причем он оказывается периодически модулированным относительно переменной $z - vt$, где z – координата, v – фазовая скорость (совпадающая со скоростью наносекундного электрического импульса в волноводе), с которой распространяется передний фронт объемного тока [16], [19]–[21]. Поскольку поверхностный ток вдоль оси наночастицы равен первой производной по времени от дипольного момента, наличие объемного тока эквивалентно процессу распространения в среде поляризации $P_x = d_x n$ со сверхсветовой скоростью v ; здесь n – концентрация наночастиц, $d_x = d_x(z)$ есть x -компонента периодически модулированного относительно переменной z дипольного момента частиц. Таким образом, реализуется ситуация, аналогичная случаю черенковского излучения.

Приступим к рассмотрению сформулированной задачи.

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ КОМПОНЕНТ 4-ПОТЕНЦИАЛА $A^I = (\phi, \mathbf{A})$

Для диэлектрической среды диэлектрическая проницаемость однозначно определяется величиной поляризации. В рассматриваемой задаче поляризация складывается из дипольного момента наночастиц и поляризации среды при отсутствии наночастиц. Поскольку в нашем случае дипольный момент наночастиц определяет объемный ток, в дальнейшем диэлектрическую проницаемость ε будем считать постоянной, $\varepsilon = \operatorname{const}$ (эта величина понадобится для синхронизации скорости наносекундного электрического импульса $v \geq c/\sqrt{\varepsilon}$, где c – скорость света в вакууме). При этом плотность тока определяется поляризацией.

Из уравнений Максвелла с учетом калибровки Лоренца [2]

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

следуют волновые уравнения для компонент 4-потенциала $A^i = (\phi, \mathbf{A})$:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \Delta \phi - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi \tilde{\rho}}{\varepsilon}, \quad (2)$$

где $\mathbf{A} = \mathbf{e}_x A_x(t, \mathbf{r})$, $\phi = \phi(t, \mathbf{r})$ и $j^i = (\tilde{\rho}, \mathbf{j})$ – плотность 4-тока. При постоянных значениях электрической и магнитной проницаемостей ($\varepsilon = \operatorname{const}$, $\mu = 1$) верны

соотношения

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\text{grad } \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (3)$$

где $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ – векторы электрической и магнитной индукций, а $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ – векторы электрического и магнитного полей.

Рассмотрим в качестве трехмерной структуры совокупность массивов удлиненных параллельных наночастиц (например, нанотрубок или нанолент) с металлическим типом проводимости. Будем считать, что взаимодействием между наночастицами можно пренебречь, т. е. предположим, что величина концентрации не слишком велика, чтобы исключить взаимное влияние наночастиц (см. рис. 1).

На небольшом расстоянии между однослойными углеродными нанотрубками начинает проявляться влияние эффекта туннелирования между нанотрубками [16], [26]. Для оценки величины такого влияния рассмотрим туннелирование в двуслойной нанотрубке, где радиус R_2 внешней нанотрубки заменим расстоянием d между двумя однослойными нанотрубками, а радиус внутренней нанотрубки R_1 будем считать равным радиусу R однослойных нанотрубок. Тогда из системы дифференциальных уравнений, приведенной в работе [16] (см. уравнения (21)), следует, что взаимодействием двух одинаковых нанотрубок за счет эффекта туннелирования можно пренебречь (слабое взаимодействие), если для амплитуды Π_m вектора Герца, создаваемого поверхностным током m -й нанотрубки, выполняется условие

$$\left| \frac{\Pi_m(\kappa d_{ms})}{\Pi_m(\kappa R)} \right| \approx \left| \frac{K_0(\kappa d_{ms})}{K_0(\kappa R)} \right| = \chi \ll 1,$$

где d_{ms} – расстояние между центрами m -й и s -й нанотрубок, L – длина нанотрубок, Π – вектор Герца, соответствующий уединенной нанотрубке. Полагая $\chi = 0.1$, получаем $d_{ms}/L \sim 0.1$.

Следует подчеркнуть, что слабое взаимодействие приводит к тому, что резонансные частоты симметричной и антисимметричной мод незначительно отличаются от резонансной частоты уединенной нанотрубки. В дальнейшем будем считать, что расстояние между ближайшими соседними нанотрубками должно быть порядка или больше, чем длина нанотрубок. Например, в работе [27] описан эксперимент, в котором для создания катода на подложке перпендикулярно ее поверхности выращены нанотрубки так, что расстояние между соседними равно удвоенной длине нанотрубок, это соответствует минимальному влиянию окружения на эмиссию индивидуальной нанотрубки и дает в результате максимальный эмиссионный ток из катода. При не слишком большой концентрации вклад в поляризацию по сравнению с однородной средой незначителен.

Для упрощения математических выкладок предположим, что нанотрубки заполняют цилиндрическую область радиуса R . Случай неограниченной в поперечном направлении среды соответствует условию $R \rightarrow \infty$. Пусть центры масс нанотрубок имеют координаты $(m_x \Delta x, m_y \Delta y, m_z \Delta z)$, где m_x, m_y, m_z – целые числа, а $\Delta x, \Delta y$ и Δz – расстояния между центрами нанотрубок соответственно вдоль осей Ox, Oy и Oz , при этом $\omega \Delta z/c \ll 1$ (см. рис. 1). Плотность тока $\mathbf{j}(r, t) = \mathbf{e}_x j_0^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ в этом случае мы можем записать как (свободные заряды отсутствуют)

$$j_0^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{m_x, m_y, m_z} f(m_z \Delta z) \frac{\partial}{\partial t} [d_0 \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{v}t - \mathbf{e}_z m_z \Delta z - \mathbf{e}_x m_x \Delta x - \mathbf{e}_y m_y \Delta y)], \quad (4)$$

где скорость $\mathbf{v}$ параллельна оси Oz . Здесь $d_0 f(m_z \Delta z)$ – формфактор, который определяет амплитуду дипольного момента на заднем фронте электрического импульса как функцию от индекса m_z (этот формфактор имеет экспоненциально затухающую осциллирующую зависимость от координаты z); суммирование ведется по всем возможным значениям индексов m_x , m_y , m_z и $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Имеет место приближенное равенство

$$\sum_{m_x, m_y} e^{-ik_x m_x \Delta x - ik_y m_y \Delta y} \approx \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{0 \leq |\boldsymbol{\rho}| \leq R} e^{-i\mathbf{k}_\perp \boldsymbol{\rho}} d^2 \boldsymbol{\rho} = 2\pi \frac{R}{\Delta x \Delta y} \frac{J_1(k_\perp R)}{k_\perp}, \quad (5)$$

где $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$, $\mathbf{k}_\perp = (k_x, k_y)$, $k_\perp = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$, $\boldsymbol{\rho} = (x, y)$, $x = m_x \Delta x$, $y = m_y \Delta y$.

При выводе соотношения (5) мы учли, что $\frac{dJ_1(\xi)}{d\xi} = \xi J_0(\xi)$.

Используя преобразование Фурье

$$\tilde{A}^i(\omega, k) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int A^i(t, \mathbf{r}) e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3 \mathbf{r}, \quad (6a)$$

$$\tilde{\phi}(\omega, k) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int \phi^i(t, \mathbf{r}) e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3 \mathbf{r}, \quad (6б)$$

из формул (1) и (2) с учетом (4) и (5) получаем

$$\tilde{\mathbf{A}}(\omega, \mathbf{k}) = \mathbf{e}_x \frac{-i\omega}{\pi c} d_0 \frac{R}{\Delta x \Delta y} \frac{J_1(k_\perp R)}{k_\perp} \left[\sum_{m_z} f(m_z \Delta z) e^{-ik_z m_z \Delta z} \right] \frac{\delta(\omega - k_z v)}{k^2 - \varepsilon \omega^2 / c^2}, \quad (7a)$$

$$\tilde{\phi}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{ck_x}{\varepsilon \omega} \tilde{A}_x, \quad (7б)$$

где $k_x = \mathbf{k} \mathbf{e}_x$, $\tilde{A}_x = \mathbf{e}_x \tilde{\mathbf{A}}(\omega, \mathbf{k})$. Поскольку $\omega \Delta z / c \ll 1$, в (7) суммирование по индексу m_z можно заменить интегрированием:

$$\sum_{m_z} f(m \Delta z) e^{-ik_z m \Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) e^{-ik_z \zeta} d\zeta = \frac{2\pi}{\Delta z} \tilde{f}(k_z), \quad (8)$$

где $\tilde{f}(k)$ – фурье-образ функции $f(z)$.

С учетом равенства (8) из (7) окончательно получаем

$$\tilde{A}_x = -\frac{2i\omega}{c} d_0 \frac{R}{\Delta x \Delta y \Delta z} \frac{J_1(k_\perp R)}{k_\perp} \frac{\delta(\omega - k_z v)}{k^2 - \varepsilon \omega^2 / c^2} \tilde{f}(k_z), \quad \tilde{\phi}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{ck_x}{\varepsilon \omega} \tilde{A}_x. \quad (9)$$

Совершив обратное преобразование Фурье, используя (6), выводим из (9) следующие выражения:

$$\begin{aligned} A(t, \mathbf{r}) &= -i\mathbf{e}_x \frac{4\pi}{cv} d_0 \frac{R}{\Delta x \Delta y \Delta z} \int_{-\infty}^{\infty} \omega \tilde{f}\left(\frac{\omega}{v}\right) e^{-i\omega(t-z/v)} d\omega \times \\ &\times \int_0^\infty \frac{J_0(k_\perp \rho) J_1(k_\perp R)}{k_\perp^2 - \omega^2(\varepsilon/c^2 - 1/v^2)} dk_\perp, \end{aligned} \quad (10a)$$

$$\begin{aligned} \phi(t, \mathbf{r}) &= \frac{4\pi}{\varepsilon v} d_0 \frac{R}{\Delta x \Delta y \Delta z} \frac{x}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}\left(\frac{\omega}{v}\right) e^{-i\omega(t-z/v)} d\omega \times \\ &\times \int_0^\infty \frac{k_\perp J_1(k_\perp \rho) J_1(k_\perp R)}{k_\perp^2 - \omega^2(\varepsilon/c^2 - 1/v^2)} dk_\perp, \end{aligned} \quad (10б)$$

где мы учли, что

$$J_m(\xi) = \frac{1}{2\pi i^m} \int_0^{2\pi} e^{i\xi \cos \chi} \cos(m\chi) d\chi.$$

Из соотношений (10) с учетом условия $v \geq c/\sqrt{\varepsilon}$ и равенств (П.9) и (П.13) (см. приложение) следует, что

$$A(t, \mathbf{r}) = \mathbf{e}_x \frac{2\pi^2 d_0}{vc\sqrt{\varepsilon/c^2 - 1/v^2}} \frac{R}{\Delta x \Delta y \Delta z} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}\left(\frac{\omega}{v}\right) J_1\left(R\omega\sqrt{\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2}}\right) H_0^{(1)}\left(\rho\omega\sqrt{\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2}}\right) e^{-i\omega(t-z/v)} d\omega, \quad (11a)$$

$$\phi(t, \mathbf{r}) = i \frac{2\pi^2 d_0}{\varepsilon v} \frac{R}{\Delta x \Delta y \Delta z} \frac{x}{\rho} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}\left(\frac{\omega}{v}\right) J_1\left(R\omega\sqrt{\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2}}\right) H_1^{(1)}\left(\rho\omega\sqrt{\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2}}\right) e^{-i\omega(t-z/v)} d\omega, \quad (11b)$$

где $\rho > R$. Заметим, что к равенствам (11) нельзя применить предельный переход $R \rightarrow \infty$ [12], так как в этом случае требуется $R \gg \rho$.

Из выражений (11) видно, что 4-потенциал аналогичен полю бегущей волны, т. е. система на основе массива удлинённых наночастиц аналогична антенне бегущей волны с быстрыми волнами ($v > c/\sqrt{\varepsilon}$). В этом случае излучение максимально в направлении, соответствующем углу θ относительно оси z , для которого $\cos \theta = c/(v\sqrt{\varepsilon})$, $0 < \theta < \pi/2$. Направление распространения максимального излучения совпадает с направлением распространения эффективной плоской волны. Такое излучение в определенном смысле является аналогом излучения Вавилова–Черенкова. В случае одномерной бегущей волны поле излучения аксиально симметрично и диаграмма направленности воронкообразная. При $v \rightarrow c/\sqrt{\varepsilon}$ конус прижимается к оси, а при $v = c/\sqrt{\varepsilon}$ излучение максимально в направлении оси. Случай $v = c/\sqrt{\varepsilon}$ был рассмотрен в работе [12].

3. МОЩНОСТЬ ИЗЛУЧЕНИЯ МАССИВА НАНОТРУБОК

Определим величину энергии излучения массива нанотрубок, локализованного в цилиндре радиуса R , приходящуюся на единицу длины цилиндра. Для этого получим выражение для компонент вектора Пойнтинга в дальней зоне излучения (при $\rho \gg R$). Сначала запишем выражения для компонент векторов электрического и магнитного полей. Из формул (11) с учетом (3) получаем

$$E_x(t, \mathbf{r}) = i \frac{2\pi^2 d_0}{vc^2\sqrt{\varepsilon/c^2 - 1/v^2}} \frac{R}{\Delta x \Delta y \Delta z} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \omega \tilde{f}\left(\frac{\omega}{v}\right) J_1\left(R\omega\sqrt{\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2}}\right) H_0^{(1)}\left(\rho\omega\sqrt{\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2}}\right) e^{-i\omega(t-z/v)} d\omega, \quad (12a)$$

$$E_z(t, \mathbf{r}) = \frac{2\pi^2 d_0}{\varepsilon v^2} \frac{R}{\Delta x \Delta y \Delta z} \frac{x}{\rho} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \omega \tilde{f}\left(\frac{\omega}{v}\right) J_1\left(R\omega\sqrt{\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2}}\right) H_1^{(1)}\left(\rho\omega\sqrt{\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2}}\right) e^{-i\omega(t-z/v)} d\omega, \quad (12b)$$

$$B_y(t, \mathbf{r}) = H_y(t, r) = i \frac{2\pi^2 d_0}{v^2 c \sqrt{\varepsilon/c^2 - 1/v^2}} \frac{R}{\Delta x \Delta y \Delta z} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \omega \tilde{f}\left(\frac{\omega}{v}\right) J_1\left(R\omega \sqrt{\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2}}\right) H_0^{(1)}\left(\rho\omega \sqrt{\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2}}\right) e^{-i\omega(t-z/v)} d\omega, \quad (12\text{В})$$

$$B_z(t, \mathbf{r}) = H_z(t, r) = \frac{2\pi^2 d_0}{v c} \frac{R}{\Delta x \Delta y \Delta z} \frac{y}{\rho} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \omega \tilde{f}\left(\frac{\omega}{v}\right) J_1\left(R\omega \sqrt{\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2}}\right) H_1^{(1)}\left(\rho\omega \sqrt{\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2}}\right) e^{-i\omega(t-z/v)} d\omega. \quad (12\text{Г})$$

Используя равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} M(t)N(t) dt = 2\pi \int_0^{\infty} (M_{\omega}N_{\omega}^* + M_{\omega}^*N_{\omega}) d\omega,$$

выводим из (12) выражения для компонент плотности потока энергии (вектора Пойнтинга):

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_x dt = -\frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_z H_y dt = \\ = i \frac{x}{2\rho} \frac{(2\pi^2 d_0)^2}{\varepsilon v^4 \sqrt{\varepsilon/c^2 - 1/v^2}} \left(\frac{R}{\Delta x \Delta y \Delta z}\right)^2 \int_0^{\infty} \omega^2 \left|\tilde{f}\left(\frac{\omega}{v}\right)\right|^2 J_1^2\left(R\omega \sqrt{\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2}}\right) \times \\ \times H_1^{(1)}\left(\rho\omega \sqrt{\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2}}\right) \left\{H_0^{(1)}\left(\rho\omega \sqrt{\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2}}\right)\right\}^* d\omega + \text{к.с.}, \quad (13\text{а})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_y dt = -\frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_x H_z dt = \\ = -i \frac{y}{2\rho} \frac{(2\pi^2 d_0)^2}{v^2 c^2 \sqrt{\varepsilon/c^2 - 1/v^2}} \left(\frac{R}{\Delta x \Delta y \Delta z}\right)^2 \int_0^{\infty} \omega^2 \left|\tilde{f}\left(\frac{\omega}{v}\right)\right|^2 J_1^2\left(R\omega \sqrt{\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2}}\right) \times \\ \times H_0^{(1)}\left(\rho\omega \sqrt{\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2}}\right) \left\{H_1^{(1)}\left(\rho\omega \sqrt{\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2}}\right)\right\}^* d\omega + \text{к.с.}, \quad (13\text{б})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_z dt = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_x H_y dt = \\ = \frac{(2\pi^2 d_0)^2}{v^3 c^2 (\varepsilon/c^2 - 1/v^2)} \left(\frac{R}{\Delta x \Delta y \Delta z}\right)^2 \int_0^{\infty} \omega^2 \left|\tilde{f}\left(\frac{\omega}{v}\right)\right|^2 J_1^2\left(R\omega \sqrt{\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2}}\right) \times \\ \times \left|H_0^{(1)}\left(\rho\omega \sqrt{\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2}}\right)\right|^2 d\omega. \quad (13\text{в})$$

В дальней зоне излучения верны равенства

$$H_1^{(1)}(\xi)H_0^{(1)}(\xi)^* + \text{к.с.} = 0, \quad iH_1^{(1)}(\xi)H_0^{(1)}(\xi)^* + \text{к.с.} = 2|H_0^{(1)}(\xi)|^2,$$

таким образом, из (13) вытекают формулы

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} S_x dt &= -\frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_z H_y dt = \\ &= \frac{x}{\rho} \frac{(2\pi^2 d_0)^2}{\varepsilon v^4 \sqrt{\varepsilon/c^2 - 1/v^2}} \left(\frac{R}{\Delta x \Delta y \Delta z} \right)^2 \times \\ &\times \int_0^{\infty} \omega^2 \left| \tilde{f}\left(\frac{\omega}{v}\right) \right|^2 J_1^2 \left(R\omega \sqrt{\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2}} \right) \left| H_0^{(1)} \left(\rho\omega \sqrt{\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2}} \right) \right|^2 d\omega, \end{aligned} \quad (14a)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} S_y dt &= -\frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_x H_z dt = \\ &= \frac{y}{2\rho} \frac{(2\pi^2 d_0)^2}{v^2 c^2 \sqrt{\varepsilon/c^2 - 1/v^2}} \left(\frac{R}{\Delta x \Delta y \Delta z} \right)^2 \times \\ &\times \int_0^{\infty} \omega^2 \left| \tilde{f}\left(\frac{\omega}{v}\right) \right|^2 J_1^2 \left(R\omega \sqrt{\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2}} \right) \left| H_0^{(1)} \left(\rho\omega \sqrt{\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2}} \right) \right|^2 d\omega, \end{aligned} \quad (14б)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} S_z dt &= \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_x H_z dt = \\ &= \frac{(2\pi^2 d_0)^2}{v^2 c^2 (\varepsilon/c^2 - 1/v^2)} \left(\frac{R}{\Delta x \Delta y \Delta z} \right)^2 \times \\ &\times \int_0^{\infty} \omega^2 \left| \tilde{f}\left(\frac{\omega}{v}\right) \right|^2 J_1^2 \left(R\omega \sqrt{\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2}} \right) \left| H_0^{(1)} \left(\rho\omega \sqrt{\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2}} \right) \right|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (14в)$$

Окончательно получаем из (14) в дальней зоне излучения выражение для потока Φ_ρ через боковую поверхность цилиндра длины L и радиуса ρ :

$$\begin{aligned} \Phi_\rho &= \frac{2(2\pi^2 d_0)^2}{v^2 (\varepsilon/c^2 - 1/v^2)} \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{\varepsilon v^2} \right) \left(\frac{R}{\Delta x \Delta y \Delta z} \right)^2 \times \\ &\times \int_0^{\infty} \omega \left| \tilde{f}\left(\frac{\omega}{v}\right) \right|^2 J_1^2 \left(R\omega \sqrt{\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2}} \right) L d\omega, \end{aligned} \quad (15)$$

где мы учли равенство

$$\oint_{\sqrt{x^2+y^2}=\rho} (x dy - y dx) = 2\pi\rho^2.$$

Из формул (14) также следует выражение для потока Φ_z вдоль оси Oz через поперечную площадь цилиндра $\pi\rho^2$:

$$\begin{aligned} \Phi_z &= \frac{4(2\pi^2 d_0)^2}{v^2 c^2 (\varepsilon/c^2 - 1/v^2)^{3/2}} \left(\frac{R}{\Delta x \Delta y \Delta z} \right)^2 \times \\ &\times \int_0^{\infty} \omega \left| \tilde{f}\left(\frac{\omega}{v}\right) \right|^2 J_1^2 \left(R\omega \sqrt{\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2}} \right) \rho d\omega. \end{aligned} \quad (16)$$

Поскольку $\rho = Lv\sqrt{\varepsilon/c^2 - 1/v^2}$, при выполнении условия $v \approx c/\sqrt{\varepsilon}$ из выражений (15) и (16) следует равенство $\Phi_\rho = \Phi_z$, т. е. справедлив закон сохранения энергии.

Пусть выполняются условия

$$\rho\omega\sqrt{\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2}} \gg 1, \quad R\omega\sqrt{\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2}} \ll 1.$$

Тогда $J_1^2(R\omega\sqrt{\varepsilon/c^2 - 1/v^2}) \approx R^2\omega^2(\varepsilon/c^2 - 1/v^2)$. Поскольку величина $R^2/(\Delta x \Delta y \Delta z)$ пропорциональна линейной концентрации наночастиц (числу частиц на единицу длины цилиндра радиуса R), поток Φ_ρ через боковую поверхность цилиндра радиуса ρ пропорционален квадрату линейной концентрации наночастиц. Такая закономерность объясняется тем, что в случае малого радиуса R излучающие свойства массива нанотрубок эквивалентны свойствам в случае, когда все нанотрубки расположены вдоль одной прямой (при этом мы пренебрегаем взаимным влиянием нанотрубок).

Оценим величину излучения, приходящегося на единицу длины, для системы на основе нанотрубок. Функция $\tilde{f}$ имеет резко выраженный максимум в точке ω_0 . Поскольку для поляризации верно соотношение $P_x = d_0/(\Delta x \Delta y \Delta z)$ [12], в дальнейшем положим в (14), что максимальное значение тока определяется выражением

$$|j_x| = \left| \frac{\partial P_x}{\partial t} \right| = \frac{\omega_0 d_0}{\Delta x \Delta y \Delta z}.$$

По аналогии с работами [19], [21] выберем

$$f(z) = \begin{cases} e^{-z/z_0} \cos \frac{\omega_0 z}{v}, & z > 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases}$$

В результате с учетом (8) получаем

$$|\tilde{f}(k_z)|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \frac{k_z^2 + 1/z_0^2}{(\omega_0^2/v^2 - k_z^2 + 1/z_0^2)^2 + 4k_z^2/z_0^2}. \quad (17)$$

Полагая, что $R\omega_0\sqrt{\varepsilon/c^2 - 1/v^2} \approx 1$, мы можем оценить интеграл в формуле (15):

$$\int_0^\infty \omega \left| \tilde{f}\left(\frac{\omega}{v}\right) \right|^2 J_1^2\left(R\omega\sqrt{\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2}}\right) d\omega \approx \frac{v\omega_0 z_0}{8\pi^2}.$$

В результате из (15) следует соотношение

$$\frac{\Phi_\rho}{L} \approx \frac{\pi}{2} j_x^2 \frac{\omega_0 R^4}{v c^2} z_0 = \frac{1}{8} \frac{j_x^2}{\varepsilon_0} \frac{\omega_0 R^4}{v c^2} z_0 \approx 16 \text{ Дж/м}$$

при $z_0 = 1 \text{ мм}$, $R = 0.1 \text{ м}$, $\omega_0 = 10^{12} \text{ с}^{-1}$ и $v = c$, $j_x = 10^5 \text{ А/м}^2$ (см. работу [19]).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе рассмотрено излучение Вавилова–Черенкова в ограниченной в поперечном направлении среде на основе удлинённых наночастиц. Источником излучения являются модулированные относительно переменной $z - vt$ поверхностные токи в массиве невзаимодействующих нанотрубок. Нанотрубки ориентированы перпендикулярно к оси Oz , и выполняется условие $v > c/\sqrt{\varepsilon}$, при этом в дальней зоне излучения (при $\rho \gg R$) мы имеем конический фронт генерируемого излучения. Случай $v = c/\sqrt{\varepsilon}$ рассмотрен в работе [19] (среда на основе удлинённых наночастиц является неограниченной в поперечном направлении, $R \rightarrow \infty$). Механизм излучения эквивалентен излучению Вавилова–Черенкова системой диполей, которые движутся со сверхсветовой скоростью вдоль оси Oz , и амплитуда которых модулирована как $f(z) = e^{-z/z_0} \cos(\omega_0 z/v)$. Поток Φ_ρ через боковую поверхность цилиндра радиуса ρ и длины L в дальней зоне излучения при выполнении условия $R\omega_0\sqrt{\varepsilon/c^2 - 1/v^2} \approx 1$ определяется выражением (15), и при $z_0 = 1$ мм, $R = 0.1$ м, $\omega_0 = 10^{12}$ с⁻¹ и $v = c$, $j_x = 10^5$ А/м² величина излучения, приходящегося на единицу длины, для системы на основе нанотрубок равна $\Phi_\rho/L \approx 16$ Дж/м.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вычислим интегралы

$$\tilde{I}_a = \int_0^\infty \frac{J_0(x)x}{x^2 + \Lambda^2} dx, \quad \tilde{I}_b = \int_0^\infty \frac{J_0(x)J_1(\xi x)}{x^2 + \Lambda^2} dx, \quad \tilde{I}_c = \int_0^\infty \frac{xJ_1(x)J_1(\xi x)}{x^2 + \Lambda^2} dx, \quad (\text{П.1})$$

где $\xi < 1$, что равносильно условию $R < \rho$. С учетом равенства

$$J_n(z) = \frac{H_n^{(1)}(z) + H_n^{(2)}(z)}{2}$$

с помощью теории вычетов несложно доказать (см. книгу [28]), что

$$\tilde{I}_a = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{xH_0^{(1)}(x)}{x^2 + \Lambda^2} dx = \frac{\pi}{2} iH_0^{(1)}(i\Lambda) = K_0(\Lambda), \quad (\text{П.2})$$

где выполнено аналитическое продолжение [28] функций Ханкеля первого и второго рода $H_0^{(1)}(x\rho)$ и $H_0^{(2)}(x\rho)$: для $z = R_0$

$$\begin{aligned} z' = -z = R_0 e^{i\pi} &\iff H_0^{(1)}(z') = -H_0^{(2)}(z), \\ z' = -z = R_0 e^{-i\pi} &\iff H_0^{(2)}(z') = -H_0^{(1)}(z). \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

На рис. 2 маркеры-кружки соответствуют значениям интеграла $\tilde{I}_a$ из (П.1), а сплошная кривая – график функции Макдональда $K_0(\Lambda)$. При замене $\Lambda \rightarrow -i\Lambda$ интеграл (П.2) преобразуется как

$$\tilde{I}_a \rightarrow \hat{I}_a = i\frac{\pi}{2} H_0^{(1)}(\Lambda). \quad (\text{П.4})$$

С помощью теории вычетов докажем равенство

$$\tilde{I}_b = \frac{K_0(\Lambda)I_1(\xi\Lambda)}{\Lambda}, \quad (\text{П.5})$$

Рис. 2. Сравнение результатов численных расчетов интегралов (П.1) с аналитическими выражениями.

где $I_n(\xi\Lambda) = J_n(i\xi\Lambda)e^{-i\pi n/2}$, $\xi < 1$. Для этого представим интеграл $\tilde{I}_b$ в виде суммы $\tilde{I}_b = \tilde{I}_{b1} + \tilde{I}_{b2}$, где

$$\tilde{I}_{b1} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{H_0^{(1)}(x)J_1(\xi x)}{x^2 + \Lambda^2} dx, \quad \tilde{I}_{b2} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{H_0^{(2)}(x)J_1(\xi x)}{x^2 + \Lambda^2} dx \quad (\text{П.6})$$

и $\xi < 1$. С учетом соотношений (П.3) и равенства $J_1(\xi x) = -J_1(-\xi x)$ интеграл I_{b2} преобразуем к виду

$$\tilde{I}_{b2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \frac{H_0^{(1)}(x)J_1(\xi x)}{x^2 + \Lambda^2} dx. \quad (\text{П.7})$$

Окончательно получаем

$$\tilde{I}_b = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{H_0^{(1)}(x)J_1(\xi x)}{x^2 + \Lambda^2} dx = \frac{\pi}{2\Lambda} H_0^{(1)}(i\Lambda\xi)J_1(i\xi\Lambda) = \frac{K_0(\Lambda)I_1(\xi\Lambda)}{\Lambda}. \quad (\text{П.8})$$

На рис. 2 маркеры-ромбы соответствуют значениям интеграла $\tilde{I}_b$ из (П.1), а сплошная кривая – график функции $K_0(\Lambda)I_1(\xi\Lambda)/\Lambda$ при $\xi = 0.5$. При замене $\Lambda \rightarrow -i\Lambda$ интеграл (П.8) преобразуется как

$$\tilde{I}_b \rightarrow \tilde{I}_b = i\frac{\pi}{2} \frac{H_0^{(1)}(\Lambda)J_1(\xi\Lambda)}{\Lambda}. \quad (\text{П.9})$$

С помощью теории вычетов докажем равенство

$$\tilde{I}_c = \int_0^\infty \frac{xJ_1(\xi x)J_1(x)}{x^2 + \Lambda^2} dx = I_1(\xi\Lambda)K_1(\Lambda), \quad (\text{П.10})$$

где $\xi < 1$. Для этого представим интеграл $\tilde{I}_c$ в виде суммы $\tilde{I}_c = \tilde{I}_{c1} + \tilde{I}_{c2}$, где

$$\tilde{I}_{c1} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{x H_1^{(1)}(x) J_1(\xi x)}{x^2 + \Lambda^2} dx, \quad \tilde{I}_{c2} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{x H_1^{(2)}(x) J_1(\xi x)}{x^2 + \Lambda^2} dx. \quad (\text{П.11})$$

Из соотношения (П.6) с учетом формул аналитического продолжения (П.3) имеем $H_1^{(1)}(z') = H_1^{(2)}(z)$ и, используя равенство $J_1(\xi x) = -J_1(-\xi x)$, по аналогии с выводом (П.8) получаем

$$\tilde{I}_c = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{H_1^{(1)}(x) J_1(\xi x)}{x^2 + \Lambda^2} dx = \frac{\pi}{2} i H_1^{(1)}(i\Lambda x) J_1(i\xi\Lambda) = K_1(\Lambda) I_1(\xi\Lambda). \quad (\text{П.12})$$

На рис. 2 маркеры-кресты соответствуют значениям интеграла $\tilde{I}_c$ из (П.1), а сплошная кривая – график функции $K_1(\Lambda) I_1(\xi\Lambda)$ при $\xi = 0.5$. При замене $\Lambda \rightarrow -i\Lambda$ интеграл (П.12) преобразуется как

$$\tilde{I}_c \rightarrow \tilde{I}_c = i \frac{\pi}{2} H_1^{(1)}(\Lambda x) J_1(\xi\Lambda). \quad (\text{П.13})$$

Список литературы

- [1] И. Е. Тамм, И. М. Франк, *Докл. АН СССР*, **14**:3 (1937), 107–112.
- [2] Б. М. Болотовский, *УФН*, **62**:3 (1957), 201–246.
- [3] J. V. Jelley, *Čerenkov Radiation and its Applications*, Pergamon Press, London, 1958.
- [4] И. М. Франк, *УФН*, **68**:3 (1959), 397–415.
- [5] В. Л. Гинзбург, *УФН*, **69** (1959), 537–564.
- [6] М. И. Файнгольд, *ТМФ*, **47**:3 (1981), 395–406.
- [7] И. М. Дремин, *ТМФ*, **170**:1 (2012), 133–139.
- [8] A. V. Tyukhtin, V. V. Vorobev, *Phys. Rev. E*, **89**:1 (2014), 013202, 8 pp.
- [9] D. E. Fernandes, S. I. Maslovski, M. G. Silveirinha, *Phys. Rev. B*, **85**:15 (2012), 155107, 13 pp.
- [10] A. V. Tyukhtin, V. V. Vorobev, S. N. Galyamin, *Phys. Rev. E*, **91**:6 (2015), 063202, 7 pp.
- [11] М. И. Конторович, М. И. Астрахан, В. П. Акимов, Г. А. Ферсман, *Электродинамика сетчатых структур*, Радио и связь, М., 1987.
- [12] Н. Р. Садыков, Е. А. Ахлюстина, Д. А. Пешков, *ТМФ*, **184**:2 (2015), 307–314.
- [13] A. Vul', K. Reich, E. Eidelman, M. L. Terranova, A. Ciorba, S. Orlanducci, V. Sessa, M. Rossi, *Adv. Sci. Lett.*, **3**:2 (2010), 110–116.
- [14] J. A. Dionne, L. A. Sweatlock, H. A. Atwater, A. Polman, *Phys. Rev. B*, **72**:7 (2005), 075405, 11 pp.
- [15] G. Ya. Slepian, S. A. Maksimenko, A. Lakhtakia, O. Yevtushenko, A. V. Gusakov, *Phys. Rev. B*, **60**:24 (1999), 17136–17149.
- [16] Н. Р. Садыков, *ТМФ*, **177**:1 (2013), 163–176.
- [17] А. И. Ведерников, А. О. Говоров, А. В. Чаплик, *ЖЭТФ*, **120**:4 (2001), 979–985.
- [18] K. G. Batrakov, S. A. Maksimenko, P. P. Kuzhir, C. Thomsen, *Phys. Rev. B*, **79**:12 (2009), 125408, 12 pp.
- [19] Н. Р. Садыков, Н. А. Скоркин, Е. А. Ахлюстина, *ФТП*, **47**:9 (2013), 1258–1263.
- [20] Е. А. Ахлюстина, Д. А. Пешков, Л. М. Ахлюстин, Н. Р. Садыков, *Вестн. МИФИ*, **3**:6 (2014), 680–685.
- [21] Н. Р. Садыков, Н. А. Скоркин, *ФТП*, **46**:8 (2012), 1043–1048.

- [22] N. S. Ginzburg, A. W. Cross, A. A. Golovanov, G. A. Mesyats, M. S. Pedos, A. D. R. Phelps, I. V. Romanchenko, V. V. Rostov, S. N. Rukin, K. A. Sharypov, V. G. Shpak, S. A. Shunailov, M. R. Ulmaskulov, M. I. Yalandin, I. V. Zotova, *Phys. Rev. Lett.*, **115**:11 (2015), 114802, 5 pp.
- [23] P. Burke, S. Li, Z. Yu, *IEEE Trans. Nanotechnol.*, **5**:4 (2006), 314–334.
- [24] C. Forestiere, A. Maffucci, S. A. Maksimenko, G. Miano, G. Ya. Slepyan, *IEEE Trans. Nanotechnol.*, **11**:3 (2012), 554–564.
- [25] C. Rutherglen, P. Burke, *Small*, **5**:8 (2009), 884–906.
- [26] M. V. Shuba, G. Ya. Slepyan, S. A. Maksimenko, C. Thomson, A. Lakhtakia, *Phys. Rev. B*, **79**:15 (2009), 17, 155403.
- [27] K. B. K. Teo, E. Minoux, L. Hudanski, F. Peauger, J.-P. Schnell, L. Gangloff, P. Legagneux, D. Dieumegard, G. A. J. Amaratunga, W. I. Milne, *Nature*, **437**:7061 (2005), 968.
- [28] А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров, *Специальные функции математической физики*, Физматлит, М., 1978.

Поступила в редакцию 3.11.2015,
после доработки 12.01.2016