Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Зотов, Старшие аналоги условия унитарности для
квантовых R -матриц, *ТМФ*, 2016, том 189, номер 2, 176–
185

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9097>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 16:25:42

© 2016 г.

А. В. Зотов*

СТАРШИЕ АНАЛОГИ УСЛОВИЯ УНИТАРНОСТИ ДЛЯ КВАНТОВЫХ R -МАТРИЦ

Выведено семейство тождеств n -го порядка для квантовых R -матриц типа Бакстера–Белавина в фундаментальном представлении. Набор тождеств включает условие унитарности как простейший случай (при $n = 2$). Тождество третьего порядка обеспечивает коммутативность связностей Книжника–Замолдичкова–Бернара. С другой стороны, оно же приводит к R -матричнозначным парам Лакса для классических интегрируемых систем типа Калоджеро. При выводе тождеств используется интерпретация квантовой R -матрицы как матричного обобщения функции Кронекера. Предложено доказательство тождеств старшего порядка для функций Кронекера, которое затем естественно обобщается на тождества для R -матриц.

Ключевые слова: классические интегрируемые системы, R -матричнозначные представления Лакса, дуальности.

DOI: 10.4213/tmf9097

1. ВВЕДЕНИЕ

Квантовая $GL(N, \mathbb{C})$ - R -матрица является решением квантового уравнения Янга–Бакстера

$$R_{12}^{\hbar}(z_1, z_2)R_{13}^{\hbar}(z_1, z_3)R_{23}^{\hbar}(z_2, z_3) = R_{23}^{\hbar}(z_2, z_3)R_{13}^{\hbar}(z_1, z_3)R_{12}^{\hbar}(z_1, z_2). \quad (1.1)$$

В фундаментальном представлении R -матрица $R_{12}^{\hbar} \in \text{Mat}(N, \mathbb{C})^{\otimes 2}$. При этом $R_{ab}^{\hbar}$ с $1 \leq a, b \leq n$ следует понимать как элемент пространства $\text{Mat}(N, \mathbb{C})^{\otimes n}$, равный тождественному оператору во всех компонентах тензорного произведения, кроме компонент с номерами a и b . Проекция на эти компоненты совпадает с $R_{12}^{\hbar}$. Рассматриваемые R -матрицы зависят только от разности спектральных параметров. Будем использовать обозначение

$$R_{ab}^{\hbar} = R_{ab}^{\hbar}(z_a - z_b). \quad (1.2)$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: zotov@mi.ras.ru

Класс R -матриц, с которыми мы будем работать, включает как простейший случай рациональную R -матрицу Янга [1]

$$R_{12}^{\text{Yang}}(z_1, z_2) = \frac{1 \otimes 1}{\hbar} + \frac{NP_{12}}{z_1 - z_2}, \quad P_{12} = \sum_{i,j=1}^N E_{ij} \otimes E_{ji}, \quad (1.3)$$

а также ее деформации [2]–[4], тригонометрические R -матрицы [2], [5] и эллиптическую R -матрицу Белавина–Бакстера [6], [7].

Помимо (1.1) R -матрица удовлетворяет условию унитарности $R_{12}^{\hbar} R_{21}^{\hbar} = 1 \otimes 1$. Мы будем использовать другую нормировку:

$$R_{12}^{\hbar} R_{21}^{\hbar} = N^2 \phi(N\hbar, z_1 - z_2) \phi(N\hbar, z_2 - z_1) 1 \otimes 1 = N^2 (\wp(N\hbar) - \wp(z_1 - z_2)) 1 \otimes 1, \quad (1.4)$$

где $\phi(\eta, z)$ – функция Кронекера [8]. В зависимости от выбора между рациональным, тригонометрическим и эллиптическим случаями она равна¹⁾

$$\phi(\eta, z) = \begin{cases} \frac{1}{\eta} + \frac{1}{z}, & \text{рациональный случай,} \\ \text{cth } \eta + \text{cth } z, & \text{тригонометрический случай,} \\ \frac{\vartheta'(0)\vartheta(\eta+z)}{\vartheta(\eta)\vartheta(z)}, & \text{эллиптический случай.} \end{cases} \quad (1.5)$$

Правая часть равенства (1.4) содержит функцию

$$\wp(z) = \begin{cases} \frac{1}{z^2}, & \text{рациональный случай,} \\ \frac{1}{\text{sh}^2 z}, & \text{тригонометрический случай,} \end{cases} \quad (1.6)$$

а в эллиптическом случае $\wp(z)$ совпадает с эллиптической $\wp$ -функцией Вейерштрасса. В соотношении (1.4) уже использовано тождество

$$\phi(\eta, z) \phi(\eta, -z) = \wp(\eta) - \wp(z). \quad (1.7)$$

Как было обнаружено в работе [11] и позднее в [12], [9], R -матрицу Белавина можно рассматривать как матричное обобщение эллиптической функции Кронекера²⁾. В частности, она удовлетворяет матричному аналогу тождества Фэя [14], [8]

$$\phi(\hbar, z) \phi(\eta, w) = \phi(\hbar - \eta, z) \phi(\eta, z + w) + \phi(\eta - \hbar, w) \phi(\hbar, z + w), \quad (1.8)$$

известному как ассоциативное уравнение Янга–Бакстера [15]:

$$R_{ac}^{\hbar} R_{cb}^{\eta} = R_{ab}^{\eta} R_{ac}^{\hbar - \eta} + R_{cb}^{\eta - \hbar} R_{ab}^{\hbar}. \quad (1.9)$$

¹⁾Обозначения для эллиптических функций в нашей работе совпадают с обозначениями из работ [9] и [10] (см. раздел 4). В упомянутых работах можно найти определение эллиптической R -матрицы, удовлетворяющей обсуждаемым здесь свойствам и тождествам. Некоторые важные определения и свойства будут приведены в ходе изложения.

²⁾Впервые идея рассматривать R -матрицу как обобщение скалярной функции была предложена в статье [13]. В этой работе использовалась стандартная нормировка $R_{12}^{\hbar} R_{21}^{\hbar} = 1 \otimes 1$ для условия унитарности.

Используя это уравнение вместе с условием унитарности (1.4) и антисимметричности³⁾

$$R_{ab}^{\hbar}(z_a - z_b) = -R_{ba}^{-\hbar}(z_b - z_a), \quad (1.10)$$

можно вывести [12], [10], что $R_{ab}^{\hbar}$ удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера (1.1) и следующему кубическому тождеству:

$$\begin{aligned} R_{12}^{\hbar} R_{23}^{\hbar} R_{31}^{\hbar} + R_{13}^{\hbar} R_{32}^{\hbar} R_{21}^{\hbar} &= -N^3 \phi'(N\hbar) 1 \otimes 1 \otimes 1 = \\ &= N^3 (\phi(N\hbar, z_{12}) \phi(N\hbar, z_{23}) \phi(N\hbar, z_{31}) + \phi(N\hbar, z_{13}) \phi(N\hbar, z_{32}) \phi(N\hbar, z_{21})) 1 \otimes 1 \otimes 1, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где $z_{ab} = z_a - z_b$. Некоторые важные приложения этого тождества обсуждаются в разделе 4.

Целью работы является обобщение на старшие порядки по R условия унитарности (1.4) и тождества (1.11). Основной результат составляет

ТЕОРЕМА 1. Пусть R -матрица удовлетворяет условию унитарности (1.4) и ассоциативному уравнению Янга–Бакстера (1.9). Тогда она также удовлетворяет следующему набору тождеств n -го порядка ($n \in \mathbb{Z}_+$):

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_{n-1} \leq n, \\ i_c \neq a, i_b \neq i_c}} R_{ai_1}^{\hbar} R_{i_1 i_2}^{\hbar} \dots R_{i_{n-2} i_{n-1}}^{\hbar} R_{i_{n-1} a}^{\hbar} &= \\ = \underbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}_n N^n \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_{n-1} \leq n, \\ i_c \neq a, i_b \neq i_c}} \phi(N\hbar, z_a - z_{i_1}) \phi(N\hbar, z_{i_1} - z_{i_2}) \dots \phi(N\hbar, z_{i_{n-1}} - z_a), \end{aligned} \quad (1.12)$$

где a – фиксированный индекс, $1 \leq a \leq n$. Для $n \geq 3$ тождества (1.12) можно переписать в виде

$$\sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_{n-1} \leq n, \\ i_c \neq a, i_b \neq i_c}} R_{ai_1}^{\hbar} R_{i_1 i_2}^{\hbar} \dots R_{i_{n-2} i_{n-1}}^{\hbar} R_{i_{n-1} a}^{\hbar} = \underbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}_n (-N)^n \frac{d^{(n-2)} \phi(\eta)}{d\eta^{(n-2)}} \Big|_{\eta=N\hbar}. \quad (1.13)$$

Произведения R -матриц в суммах из (1.12), (1.13) содержат все возможные комбинации попарно различных значений индексов из множества $\{1, \dots, n\}$. Количество слагаемых в сумме равно $(n-1)!$. Действительно, так как a фиксировано, индекс i_1 может принимать $n-1$ возможное значение. После фиксации i_1 следующий индекс i_2 имеет $n-2$ возможных значений из множества $\{1, \dots, n\} \setminus \{a, i_1\}$ и т. д. Следовательно, суммарное количество возможных наборов индексов равно $(n-1)!$. Например, для $n=3$ равенство (1.13) воспроизводит (1.11), а для $n=4$ дает

$$\begin{aligned} R_{12}^{\hbar} R_{23}^{\hbar} R_{34}^{\hbar} R_{41}^{\hbar} + R_{12}^{\hbar} R_{24}^{\hbar} R_{43}^{\hbar} R_{31}^{\hbar} + R_{13}^{\hbar} R_{32}^{\hbar} R_{24}^{\hbar} R_{41}^{\hbar} + R_{13}^{\hbar} R_{34}^{\hbar} R_{42}^{\hbar} R_{21}^{\hbar} + \\ + R_{14}^{\hbar} R_{42}^{\hbar} R_{23}^{\hbar} R_{31}^{\hbar} + R_{14}^{\hbar} R_{43}^{\hbar} R_{32}^{\hbar} R_{21}^{\hbar} = N^4 \phi''(N\hbar) 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1. \end{aligned} \quad (1.14)$$

³⁾ Это свойство антисимметричности представляет собой матричный аналог свойства функции Кронекера $\phi(\eta, z) = -\phi(-\eta, -z)$. В работе [11] $R^{\hbar}(z)$ интерпретировалась как классическая r -матрица, свойство антисимметричности – как условие унитарности, а условие (1.4) не использовалось.

Утверждение теоремы предполагает, конечно, что для $n \geq 3$ сумма произведений функций Кронекера в правой части тождества (1.12) равна $(-1)^n \wp^{(n-2)}(N\hbar)$. Скорее всего, это соотношение известно, однако найти его в литературе нам не удалось⁴⁾. В следующем разделе мы предлагаем простой способ вывода этих тождеств, который естественно обобщается на случай R -матричных тождеств. Их доказательство приведено в разделе 3. Аналог тождества (1.12) при $n = 1$ обсуждается в разделе 4.

2. СТАРШИЕ ТОЖДЕСТВА ДЛЯ ФУНКЦИЙ КРОНЕКЕРА

В этом разделе мы доказываем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Функция Кронекера $\phi(\eta, z)$ удовлетворяет следующему набору тождеств n -го порядка для $n > 2$:*

$$\sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_{n-1} \leq n, \\ i_c \neq a, i_b \neq i_c}} \phi(\eta, z_a - z_{i_1}) \phi(\eta, z_{i_1} - z_{i_2}) \dots \phi(\eta, z_{i_{n-1}} - z_a) = (-1)^n \frac{d^{(n-2)} \wp(\eta)}{d\eta^{(n-2)}}. \quad (2.1)$$

Прежде чем перейти к доказательству, определим еще одну важную для наших целей функцию – первую функцию Эйзенштейна⁵⁾

$$E_1(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}, & \text{рациональный случай,} \\ \text{cth } z, & \text{тригонометрический случай,} \\ \frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)}, & \text{эллиптический случай,} \end{cases} \quad E_1(-z) = -E_1(z). \quad (2.2)$$

Она появляется в разложении функции Кронекера в окрестности полюса $\eta = 0$,

$$\phi(\eta, z) = \eta^{-1} + E_1(z) + \eta \frac{E_1^2(z) - \wp(z)}{2} + O(\eta^2), \quad (2.3)$$

а также в формуле для производной

$$\frac{d}{d\eta} \phi(\eta, z) = (E_1(\eta + z) - E_1(\eta)) \phi(\eta, z) \quad (2.4)$$

и тождестве Фэя (1.8) для вырожденного случая $\eta = \hbar$:

$$\phi(\eta, z) \phi(\eta, w) = \phi(\eta, z + w) (E_1(\eta) + E_1(z) + E_1(w) - E_1(z + w + \eta)). \quad (2.5)$$

Используя равенства (2.4) и (2.5), получаем

$$\frac{d}{d\eta} \phi(\eta, z) \equiv \phi'(\eta, z) = (E_1(z + y) - E_1(y)) \phi(\eta, z) - \phi(\eta, z + y) \phi(\eta, -y). \quad (2.6)$$

Заметим, что это соотношение верно для любого $y \in \mathbb{C}$, тогда как его левая часть от y не зависит.

⁴⁾ Возможно, тождества такого типа можно вывести из формул для эллиптических определителей Коши, полученных Ройсенарсом [16].

⁵⁾ Она простым образом связана с дзета-функцией Вейерштрасса: $E_1(z) = \zeta(z) + z\vartheta'''(0)/3\vartheta'(0)$.

Непосредственный способ доказательства тождеств типа (2.1) состоит в сравнении полюсов и вычетов левой и правой частей тождества. Легко убедиться, что левая часть равенства (2.1) является двоякопериодической функцией от η и $z_1, \dots, z_n$. Более того, можно проверить, что вычеты на диагоналях $z_i = z_j$ равны нулю. Это, однако, означает лишь, что левая часть есть двоякопериодическая функция от η с особенностью типа $1/\eta^n$ в окрестности $\eta = 0$. Таким способом определить эту функцию однозначно сложно, т.е. сложно доказать отсутствие (в правой части) членов $c_k(\tau) \frac{d^k \wp(\eta)}{d\eta^k}$ с $k < n - 2$. Вместо этого мы предлагаем другой способ доказательства тождества (2.1), основанный на соотношении (2.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ. Доказывать тождество (2.1) будем с помощью индукции по n . Для $n = 3$ имеем хорошо известное равенство

$$\phi(\eta, z_1 - z_2)\phi(\eta, z_2 - z_3)\phi(\eta, z_3 - z_1) + \phi(\eta, z_1 - z_3)\phi(\eta, z_3 - z_2)\phi(\eta, z_2 - z_1) = -\wp'(\eta),$$

которое можно проверить непосредственно, сравнив полюсы и вычеты. Используя (2.5), а затем (1.7), его можно переписать в более узнаваемом виде

$$E_1(\eta + z) + E_1(\eta - z) - 2E_1(\eta) = \frac{\wp'(\eta)}{\wp(\eta) - \wp(z)}, \quad z = z_a - z_b.$$

Пусть равенство (2.1) верно для n . Продифференцируем обе его части по η . Тогда правая часть примет вид

$$-(-1)^{n+1} \frac{d^{n-1} \wp(\eta)}{d\eta^{n-1}}, \quad (2.7)$$

что совпадает с правой частью равенства (2.1) для $n := n + 1$, взятой с противоположным знаком. Для левой части получим

$$\sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_{n-1} \leq n, \\ i_c \neq a, i_b \neq i_c}} (\phi'_{ai_1}(\eta)\phi_{i_1i_2}(\eta) \dots \phi_{i_{n-1}a}(\eta) + \dots + \phi_{ai_1}(\eta)\phi_{i_1i_2}(\eta) \dots \phi'_{i_{n-1}a}(\eta)), \quad (2.8)$$

где использованы обозначения

$$\phi_{ij}(\eta) = \phi(\eta, z_i - z_j), \quad \phi'_{ij}(\eta) = \frac{d}{d\eta} \phi(\eta, z_i - z_j). \quad (2.9)$$

Подставим в (2.8) формулу (2.6), выбирая каждый раз y так, что для $\phi'_{ij}(\eta)$ имеет место равенство $y = z_j - z_{n+1}$. Ответ для (2.8) после подстановки состоит из членов двух типов: вида $\phi^n E_1$ и вида ϕ^{n+1} . Члены первого типа взаимно сокращаются для каждого выражения в скобках в (2.8) в силу свойства антисимметричности (2.2) функции E_1 . Действительно, суммируя все такие слагаемые с фиксированными значениями индексов $i_1, \dots, i_{n-1}$, получаем

$$\begin{aligned} 0 = & \phi_{ai_1}(\eta)\phi_{i_1i_2}(\eta) \dots \phi_{i_{n-1}a}(\eta) (E_1(z_a - z_{i_1} + z_{i_1} - z_{n+1}) - E_1(z_{i_1} - z_{n+1}) + \\ & + E_1(z_{i_1} - z_{i_2} + z_{i_2} - z_{n+1}) - E_1(z_{i_2} - z_{n+1}) + \dots + \\ & + E_1(z_{i_{n-1}} - z_a + z_a - z_{n+1}) - E_1(z_a - z_{n+1})). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Сумма всех членов второго типа (вида ϕ^{n+1}) есть в точности левая часть равенства (2.1) для $n := n + 1$ с общим противоположным знаком:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_{n-1} \leq n, \\ i_c \neq a, i_b \neq i_c}} (\phi'_{ai_1}(\eta) \phi_{i_1 i_2}(\eta) \dots \phi_{i_{n-1} a}(\eta) + \dots + \phi_{ai_1}(\eta) \phi_{i_1 i_2}(\eta) \dots \phi'_{i_{n-1} a}(\eta)) = \\
 & = - \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_{n-1} \leq n, \\ i_c \neq a, i_b \neq i_c}} (\phi_{a, n+1}(\eta) \phi_{n+1, i_1}(\eta) \phi_{i_1 i_2}(\eta) \dots \phi_{i_{n-1} a}(\eta) + \dots + \\
 & \quad + \phi_{ai_1}(\eta) \phi_{i_1 i_2}(\eta) \dots \phi_{i_{n-1}, n+1}(\eta) \phi_{n+1, a}(\eta)) = \\
 & = - \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_{n-1} \leq n, \\ i_c \neq a, i_b \neq i_c}} \phi_{ai_1}(\eta) \phi_{i_1 i_2}(\eta) \dots \phi_{i_n a}(\eta). \tag{2.11}
 \end{aligned}$$

В справедливости последнего равенства легко убедиться, рассмотрев структуру индексов суммирования. Значения всех индексов в каждом члене различны и отличны от “внешнего” индекса⁶⁾ a . Такое же выражение получается и из членов второго типа после подстановки. В то же время количество слагаемых второго типа в (2.8) (и, следовательно, в (2.11)) равно $n!$ (до дифференцирования по η было $(n-1)!$ слагаемых⁷⁾, а далее к каждому из них применялось правило Лейбница), что совпадает с числом слагаемых в (2.1) для $n := n + 1$.

Сравнение выражений (2.11) и (2.7) завершает доказательство предложения.

3. СТАРШИЕ ТОЖДЕСТВА ДЛЯ R -МАТРИЦ

В этом разделе мы докажем теорему 1. Доказательство аналогично приведенному выше доказательству предложения 1.

R -матричным аналогом первой функции Эйзенштейна (2.2) является классическая r -матрица $r_{ab}(z)$. Она появляется в классическом пределе так же, как и функция E_1 в (2.3):

$$R_{12}^{\hbar}(z) = \frac{1}{\hbar} 1 \otimes 1 + r_{12}(z) + \hbar m_{12}(z) + O(\hbar^2). \tag{3.1}$$

Аналогично функции E_1 классическая r -матрица кососимметрична⁸⁾:

$$r_{ab}(z_a - z_b) = -r_{ba}(z_b - z_a), \quad m_{ab} = m_{ba} = \frac{1}{2}(r_{ab}^2 - 1 \otimes 1 N^2 \wp(z_a - z_b)). \tag{3.2}$$

R -матричный аналог равенства (2.6) следует из ассоциативного уравнения Янга–Бакстера (1.9) и равенства (3.1) в пределе $\eta \rightarrow \hbar$:

$$\partial_{\hbar} R_{ab}^{\hbar} \equiv J_{ab}^{\hbar} = R_{ab}^{\hbar} r_{ac} + r_{cb} R_{ab}^{\hbar} - R_{ac}^{\hbar} R_{cb}^{\hbar}. \tag{3.3}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Равенство (1.12) при $n = 2$ есть условие унитарности (1.4), равенство (1.12) при $n = 3$ – это известное из работ [12], [10] тождество (1.11), а для $n = 1$ это равенство выполнено в смысле соотношения (4.1), выписанного ниже.

⁶⁾Значение “внешнего” индекса a на самом деле несущественно (см. ниже замечание 1).

⁷⁾См. комментарий после формулы (1.13).

⁸⁾Это является следствием как унитарности (в $\hbar^{-1}$ -, $\hbar^0$ -порядках разложения), так и условия (1.10) (в $\hbar^0$ -, $\hbar^1$ -порядках разложения). Матрица $r_{12}(z)$ из (3.1) – это классическая r -матрица Белавина–Дринфельда [17].

Докажем равенство (1.13). Тогда (1.12) следует из скалярного аналога (1.13) – предложения 1. Идея доказательства воспроизводит ход рассуждений для (2.1).

Доказывать равенство (1.13) будем с помощью индукции по n . Пусть оно верно для n . Умножим (тензорно) обе части равенства (1.13) на 1 (здесь 1 – единичная матрица размера $N \times N$) и продифференцируем их по $\hbar$. Правая часть примет вид

$$- \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{n+1} (-N)^{n+1} \frac{d^{(n-1)} \wp(\eta)}{d\eta^{(n-1)}} \Big|_{\eta=N\hbar}, \quad (3.4)$$

что совпадает с правой частью равенства (1.13), взятой при $n := n+1$ с противоположным знаком.

Левая часть принимает вид

$$\sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_{n-1} \leq n, \\ i_c \neq a, i_b \neq i_c}} (J_{ai_1}^{\hbar} R_{i_1 i_2}^{\hbar} \cdots R_{i_{n-2} i_{n-1}}^{\hbar} R_{i_{n-1} a}^{\hbar} + \cdots + R_{ai_1}^{\hbar} R_{i_1 i_2}^{\hbar} \cdots R_{i_{n-2} i_{n-1}}^{\hbar} J_{i_{n-1} a}^{\hbar}). \quad (3.5)$$

Это выражение аналогично (2.8). Как и в скалярном случае, подставляя $J_{ab}^{\hbar}$ из (3.3) при $c = n+1$, получаем левую часть равенства (1.13), взятую для $n := n+1$ с общим противоположным знаком. Ответ получается из членов вида $-R_{i, n+1}^{\hbar} R_{n+1, j}$ в (3.3).

Прокомментируем сокращение членов, содержащих классические r -матрицы r_{ab} . Вклад от таких членов в выражение в скобках в (3.5) равен

$$\begin{aligned} & (R_{ai_1}^{\hbar} r_{a, n+1} + r_{n+1, i_1} R_{ai_1}^{\hbar}) R_{i_1 i_2}^{\hbar} \cdots R_{i_{n-1} a}^{\hbar} + \\ & + R_{ai_1}^{\hbar} (R_{i_1 i_2}^{\hbar} r_{i_1, n+1} + r_{n+1, i_2} R_{i_1 i_2}^{\hbar}) R_{i_2 i_3}^{\hbar} \cdots R_{i_{n-1} a}^{\hbar} + \cdots + \\ & + R_{ai_1}^{\hbar} R_{i_1 i_2}^{\hbar} \cdots R_{i_{n-2} i_{n-1}}^{\hbar} (R_{i_{n-1} a}^{\hbar} r_{i_{n-1}, n+1} + r_{n+1, a} R_{i_{n-1} a}^{\hbar}). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Первое и последнее слагаемые (и только они) содержат $r_{a, n+1}$. Эти слагаемые сокращаются, так как $r_{a, n+1}$ можно передвинуть в первом члене⁹⁾ на предпоследнее место, а также в силу свойства антисимметричности (3.2). Все оставшиеся члены собираются в коммутатор

$$[r_{n+1, i_1} + r_{n+1, i_2} + \cdots + r_{n+1, i_{n-1}}, R_{ai_1}^{\hbar} R_{i_1 i_2}^{\hbar} \cdots R_{i_{n-1} a}^{\hbar}]$$

в силу того, что все r -матрицы вида $r_{n+1, k}$ в своем произведении можно передвинуть влево, а r -матрицы с индексами $r_{k, n+1}$ – вправо. Этот коммутатор равен нулю, так как произведение R -матриц является скалярным оператором по предложению индукции. Таким образом, выражение (3.6) также равно нулю. Теорема доказана.

4. НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ И ФОРМУЛЫ

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Группа перестановок набора $(z_1, \dots, z_n)$ преобразует R -матричные тождества (1.12), (1.13) с некоторым “внешним” индексом a в тождество того же вида для другого $\tilde{a} \neq a$. Для этого нужно переобозначить $\{z_k\}$ и подействовать на (1.12), (1.13) произведением соответствующих операторов перестановки (с обеих сторон). В скалярном случае тождество (2.1) инвариантно относительно действия

⁹⁾Произведение $R_{i_1 i_2}^{\hbar} \cdots R_{i_{n-2} i_{n-1}}^{\hbar}$ не содержит индексов a и $n+1$ и, следовательно, коммутирует с $r_{a, n+1}$.

группы перестановок: его левая часть в действительности не зависит от индекса a , так как функции ϕ в произведениях можно переупорядочить так, что (2.1) примет вид исходного тождества для другого индекса $\tilde{a} \neq a$.

Например, для $n = 3$, очевидно, имеем

$$\begin{aligned} & \phi(\eta, z_1 - z_2)\phi(\eta, z_2 - z_3)\phi(\eta, z_3 - z_1) + \phi(\eta, z_1 - z_3)\phi(\eta, z_3 - z_2)\phi(\eta, z_2 - z_1) = \\ & = \phi(\eta, z_2 - z_1)\phi(\eta, z_1 - z_3)\phi(\eta, z_3 - z_2) + \phi(\eta, z_2 - z_3)\phi(\eta, z_3 - z_1)\phi(\eta, z_1 - z_2). \end{aligned}$$

Здесь $a = 1$ и $\tilde{a} = 2$. Это соотношение справедливо и для произвольных n , a , $\tilde{a}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. R -матричное тождество (1.12) имеет смысл и в случае $n = 1$: для $R_{ab}^h(z)$ можно отождествить a -ю и b -ю компоненты тензорного произведения, сохранив условие $z \neq 0$. Тогда

$$R_{aa}^h(z) = 1_a N \phi\left(Nh, \frac{z}{N}\right), \quad (4.1)$$

где 1_a – единичная матрица размера $N \times N$, стоящая в качестве a -й компоненты. Для доказательства равенства (4.1) рассмотрим наиболее общий случай – эллиптическую R -матрицу Белавина [6]. В наших обозначениях и с нашей нормировкой она имеет вид

$$R_{12}^h(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N} \varphi_\alpha(z, \omega_\alpha + \hbar) T_\alpha \otimes T_{-\alpha} \in \text{Mat}(N, \mathbb{C})^{\otimes 2}, \quad (4.2)$$

где

$$\varphi_\alpha(z, \omega_\alpha + \hbar) = \exp\left(2\pi i \frac{\alpha_2}{N} z\right) \phi(z, \omega_\alpha + \hbar), \quad \omega_\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 \tau}{N}, \quad (4.3)$$

а $\{T_\alpha\}$ – специальный базис в пространстве $\text{Mat}(N, \mathbb{C})$:

$$T_\alpha T_\beta = \kappa_{\alpha, \beta} T_{\alpha + \beta}, \quad \kappa_{\alpha, \beta} = \exp\left(\frac{\pi i}{N} (\beta_1 \alpha_2 - \beta_2 \alpha_1)\right), \quad (4.4)$$

другими словами,

$$T_\alpha T_{-\alpha} = 1_{N \times N} \quad (4.5)$$

(подробнее см. приложение в работе [10]). Из соотношений (4.2) и (4.5) следует, что

$$R_{11}^h(z) = 1_{N \times N} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N} \varphi_\alpha(z, \omega_\alpha + \hbar). \quad (4.6)$$

Сумма в левой части данного равенства равна $N\phi(Nh, z/N)$. Это частный случай конечного преобразования Фурье функции Кронекера [9].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Квантовые R -матрицы используются для построения классических пар Лакса в системах типа Калоджеро [12]. В gl_n -случае такая матрица Лакса имеет вид

$$\mathcal{L}(\hbar) = \sum_{a,b=1}^n \tilde{E}_{ab} \otimes \mathcal{L}_{ab}(\hbar), \quad \mathcal{L}_{ab}(\hbar) = \delta_{ab} p_a 1_a \otimes 1_b + \nu(1 - \delta_{ab}) R_{ab}^h(z_a - z_b), \quad (4.7)$$

где $\tilde{E}_{ab}$ – стандартный базис в пространстве $\text{Mat}(n, \mathbb{C})$, набор R -матричных спектральных параметров $\{z_a\}$ – координаты калоджеровских частиц, p_a – импульсы

частиц, а $\hbar$ играет роль спектрального параметра. Формула (4.7) является обобщением формулы Кричевера [18].

В работе [12] было сделано следующее предположение: диагональные элементы (блоки) матрицы $\text{tr } \mathcal{L}^k(\hbar)$ суть скалярные операторы с коэффициентами, которые равны этому же элементу, вычисленному для матрицы $\text{tr } l^k(\hbar)$ – (обычной) кричеверовской матрицы Лакса $l_{ab}(\hbar) = p_a \delta_{ab} + \nu(1 - \delta_{ab})N\phi(N\hbar, z_a - z_b)$. Для $n = 2$ это утверждение следует из условия унитарности (1.4), а для $n = 3$ – из кубического тождества (1.11). Утверждение теоремы 1, очевидно, относится к тому же типу. В действительности тождество (1.12) можно рассматривать как часть упомянутого предположения для $k = n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из квантового уравнения Янга–Бакстера (1.1) и кубического тождества (1.11) следует, что

$$[r_{ab}, m_{ac} + m_{bc}] + [r_{ac}, m_{ab} + m_{bc}] = 0, \quad (4.8)$$

где r_{ab} и m_{ab} определены через классический предел (3.1) (см. детали в работе [12]). Это уравнение гарантирует коммутативность различных связностей Книжника–Замолотчикова–Бернара¹⁰⁾

$$\begin{aligned} \nabla_a &= \partial_{z_a} + \sum_{b: b \neq a} r_{ab}(z_a - z_b), \quad a = 1, \dots, n, \\ \nabla_\tau &= \partial_\tau + \sum_{b > c} m_{bc}(z_b - z_c), \end{aligned} \quad (4.9)$$

а именно $[\nabla_a, \nabla_\tau] = 0$ (равенство $[\nabla_a, \nabla_b] = 0$ следует из классического уравнения Янга–Бакстера). Полученные тождества (1.12), (1.13) дают набор уравнений для r_{ab} , m_{ab} и старшие члены разложения (3.1). Простейшим примером является коэффициент при $1/\hbar^{n-2}$ в (1.13):

$$\sum_{c < a < b} [r_{ca}, r_{ab}]_+ + [r_{ab}, r_{bc}]_+ + [r_{bc}, r_{ca}]_+ = -(n-2) \sum_{b \neq c} m_{bc}. \quad (4.10)$$

Список литературы

- [1] C. N. Yang, *Phys. Rev. Lett.*, **19**:23 (1967), 1312–1315.
- [2] И. В. Чередник, *ТМФ*, **43**:1 (1980), 117–119.
- [3] A. Smirnov, *Central Eur. J. Phys.*, **8**:4 (2010), 542–554, arXiv:0903.1466.
- [4] A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, *JHEP*, **07** (2014), 012, 38 pp., arXiv:1405.7523; G. Aminov, S. Arthamonov, A. Smirnov, A. Zotov, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **47**:30 (2014), 305207, 19 pp., arXiv:1402.3189.
- [5] A. Antonov, K. Hasegawa, A. Zabrodin, *Nucl. Phys. B*, **503**:3 (1997), 747–770, arXiv: hep-th/9704074.
- [6] R. J. Baxter, *Ann. Phys.*, **70**:1 (1972), 193–228.
- [7] A. A. Belavin, *Nucl. Phys. B*, **180**:2 (1981), 189–200.
- [8] А. Вейль, *Эллиптические функции по Эйзенштейну и Кронекеру*, Мир, М., 1978.

¹⁰⁾Тожества (4.8) можно получить также из вырожденного ассоциативного уравнения Янга–Бакстера (3.3).

- [9] А. М. Левин, М. А. Ольшанецкий, А. В. Зотов, *ТМФ*, **184**:1 (2015), 41–56, arXiv: 1501.07351.
- [10] A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **49**:1 (2016), 014003, 19 pp., arXiv: 1507.02617.
- [11] A. Polishchuk, *Adv. Math.*, **168**:1 (2002), 56–95.
- [12] A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, *JHEP*, **10** (2014), 109, 28 pp., arXiv: 1408.6246.
- [13] V. V. Bazhanov, Yu. G. Stroganov, “On connection between the solutions of the quantum and classical triangle equations”, *Труды международного семинара по проблемам физики высоких энергий и квантовой теории поля*. Т. 1 (Протвино, июль 1983 г.), Ин-т физики высоких энергий, Протвино, 1983, 51–53; Л. А. Тахтаджян, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, **133** (1984), 258–276.
- [14] J. D. Fay, *Theta Functions on Riemann Surfaces*, Lecture Notes in Mathematics, **352**, Springer, Berlin, 1973; Д. Мамфорд, *Лекции о тэта-функциях*, Мир, М., 1988.
- [15] S. Fomin, A. N. Kirillov, *Discrete Math.*, **153**:1–3 (1996), 123–143.
- [16] S. N. M. Ruijsenaars, *Commun. Math. Phys.*, **110**:2 (1987), 191–213.
- [17] А. А. Белавин, В. Г. Дринфельд, *Функц. анализ и его прил.*, **16**:3 (1982), 1–29.
- [18] И. М. Кричевер, *Функц. анализ и его прил.*, **14**:4 (1980), 45–54.

Поступила в редакцию 8.11.2015,
после доработки 18.12.2015