Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Г. Гриневич, П. М. Сантини, Одна лемма из интегральной геометрии и её приложения: нелокальность в уравнении Павлова и томографическая задача с непрозрачным параболическим объектом, *ТМФ*, 2016, том 189, номер 1, 59–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9098>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 11:38:27

© 2016 г.

П. Г. Гриневич^{*†‡}, П. М. Сантини^{§¶}

ОДНА ЛЕММА ИЗ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ: НЕЛОКАЛЬНОСТЬ В УРАВНЕНИИ ПАВЛОВА И ТОМОГРАФИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА С НЕПРОЗРАЧНЫМ ПАРАБОЛИЧЕСКИМ ОБЪЕКТОМ

Будучи записанными в эволюционной форме, многомерные интегрируемые бездисперсионные уравнения точно так же, как и солитонные уравнения в размерности $2+1$, становятся нелокальными. В частности, уравнение Павлова приводится к виду $v_t = v_x v_y - \partial_x^{-1} \partial_y [v_y + v_x^2]$, где формальный интеграл ∂_x^{-1} становится асимметричным интегралом $-\int_x^\infty dx'$. Показано, что этот результат можно угадать, используя, по-видимому, новую лемму из интегральной геометрии. Она утверждает, что интеграл от достаточно общей гладкой функции $f(X, Y)$ по параболе в (X, Y) -плоскости выражается через интегралы по прямым, не пересекающим эту параболу. Ожидается, что данный результат может найти применения в двумерных линейных задачах томографии с непрозрачными параболическими препятствиями.

Ключевые слова: бездисперсионные уравнения в частных производных, преобразование рассеяния, задача Коши, векторные поля, уравнение Павлова, нелокальность, томография с препятствием.

DOI: 10.4213/tmf9098

П. Г. Гриневич был частично поддержан РФФИ (грант № 13-01-12469 офи_м2), Программой поддержки ведущих научных школы (грант НШ-4833.2014.1), программой “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики” Президиума РАН, а также Sezione di Roma INFN и программой PRIN 2010/11 No JJ4KPA_004 University Rome-3.

^{*}Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Черноголовка, Россия.
E-mail: pgg@landau.ac.ru

[†]Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

[‡]Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Московская обл., Россия

[§]Dipartimento di Fisica, Università di Roma “La Sapienza”, Roma, Italy

[¶]Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Roma, Roma, Italy.
E-mail: paolo.santini@roma1.infn.it

1. ВВЕДЕНИЕ

Многомерные интегрируемые бездисперсионные уравнения, активно изучавшиеся в последние годы (ссылки на многочисленные источники, посвященные данному вопросу, можно найти, например, в работе [1]), записываются как условия коммутативности $[L, M] = 0$ для пары векторных полей, зависящих от параметра. Новый подход к обратному преобразованию рассеяния для векторных полей был разработан на формальном уровне в работах [2]–[5], посвященных решению задачи Коши, исследованию асимптотик при больших временах и выяснению вопроса, является ли нелинейность достаточно сильной, чтобы в отсутствие дисперсии привести к градиентной катастрофе за конечное время (см. также работы [6], [7]). Новые свойства указанного обратного преобразования рассеяния (возникающие в этой задаче операторы неограничены, собственные функции образуют кольцо, обратная задача изначально нелинейна), а также отсутствие явных регулярных локализованных решений влекут за собой необходимость построения строгой теории. Эта задача была недавно решена в работе [8] для модельного примера так называемого уравнения Павлова [9]–[11]

$$v_{xt} + v_{yy} + v_x v_{xy} - v_y v_{xx} = 0, \quad v = v(x, y, t) \in \mathbb{R}, \quad x, y, t \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

возникающего в теории гидродинамических цепочек [9] и в дифференциальной геометрии при построении специальных примеров метрик Эйнштейна–Вейля [11]. Оно было впервые выведено в статье [12] как конформная симметрия второго небесного уравнения.

В представлении (1.1) уравнение Павлова не является эволюционным. Чтобы перейти к эволюционной записи, его необходимо проинтегрировать по переменной x :

$$v_t = v_x v_y - \partial_x^{-1} \partial_y [v_y + v_x^2], \quad (1.2)$$

где ∂_x^{-1} обозначает оператор, формально обратный к ∂_x . Понятно, что он определен с точностью до выбора константы интегрирования, произвольно зависящей от переменных y и t . С другой стороны, обратное преобразование рассеяния для интегрируемых бездисперсионных уравнений в частных производных дает единственное решение задачи Коши при заданном начальном условии $v(x, y, 0)$, отвечающее некоторому специальному выбору константы интегрирования.

В недавней работе [13] было установлено правило выбора константы интегрирования. Точнее, авторы показали, что формализм обратной задачи рассеяния, который является нелинейным аналогом прямого и обратного преобразований Радона (см. [5]), соответствует следующей эволюционной форме уравнения Павлова:

$$v_t(x, y, t) = v_x(x, y, t) v_y(x, y, t) + \int_x^{+\infty} [v_y(x', y, t) + (v_x(x', y, t))^2]_y dx', \quad t \geq 0. \quad (1.3)$$

Более того, для любых гладких начальных данных с компактным носителем и любого $t > 0$ решения тождественно по y и t удовлетворяют условию

$$\partial_y \mathcal{M}(y, t) \equiv 0, \quad \text{где} \quad \mathcal{M}(y, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [v_y(x, y, t) + (v_x(x, y, t))^2] dx, \quad (1.4)$$

но, в отличие от условий Манакова для уравнения Кадомцева–Петвиашвили (КП) [14] и бездисперсионного уравнения КП [15]–[17], нельзя подобрать такие быстро убывающие гладкие начальные данные, чтобы это условие было выполнено при $t = 0$.

Отметим, что проблема нелокальности характерна не только для бездисперсионных уравнений в частных производных, но и является общей чертой солитонных уравнений с двумя пространственными переменными. Поэтому проблема правильного выбора констант интегрирования важна для данного класса задач, при этом обратное преобразование рассеяния позволяет получить естественный ответ. Данная проблема впервые была поставлена и обсуждалась в работе [18] для уравнения КП. Ее полное решение для уравнения КП было дано в статье [19] и позднее в статье [20].

В оставшейся части введения мы приводим основные формулы обратного преобразования рассеяния для уравнения Павлова (см., например, работу [8]), которые будут использованы ниже.

1.1. Обратное преобразование рассеяния для уравнения Павлова. Уравнение Павлова записывается как условие коммутативности $[L, M] = 0$ следующей пары векторных полей:

$$L \equiv \partial_y + (\lambda + v_x)\partial_x, \quad M \equiv \partial_t + (\lambda^2 + \lambda v_x - v_y)\partial_x. \quad (1.5)$$

Предполагая по аналогии с работой [8], что данные Коши имеют компактный носитель,

$$v(x, y, 0) = 0 \quad \text{при} \quad |x| > D_x \quad \text{или} \quad |y| > D_y, \quad (1.6)$$

являются гладкими и удовлетворяют некоторым условиям малости нормы, мы определяем спектральные данные, используя следующую процедуру.

1. Определяем функции Йоста $\varphi_{\pm}(x, y, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, как решения уравнения

$$L\varphi_{\pm}(x, y, \lambda) = 0$$

с граничными условиями

$$\varphi_{\pm}(x, y, \lambda) \rightarrow x - \lambda y \quad \text{при} \quad y \rightarrow \pm\infty,$$

используя соответствующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \lambda + v_x(x, y). \quad (1.7)$$

2. Если обозначить через $x_{-}(y, \tau, \lambda)$ решение уравнения (1.7) с асимптотикой

$$x_{-}(y, \tau, \lambda) = \tau + \lambda y + o(1) \quad \text{при} \quad y \rightarrow -\infty,$$

то классические временные данные рассеяния определяются формулой

$$\sigma(\tau, \lambda) = \lim_{y \rightarrow +\infty} [x_{-}(y, \tau, \lambda) - \tau - \lambda y], \quad (1.8)$$

или, что эквивалентно,

$$\sigma(\tau, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} v_x(x_{-}(y, \tau, \lambda), y) dy.$$

В линейном пределе $v \ll 1$ данные рассеяния $\sigma(\tau, \lambda)$ сводятся к преобразованию Радона функции $v_x(x, y)$ [5].

3. Спектральные данные $\chi_{\pm}(\tau, \lambda)$ определяются как решения следующей задачи Римана–Гильберта:

$$\sigma(\tau, \lambda) + \chi_+(\tau + \sigma(\tau, \lambda), \lambda) - \chi_-(\tau, \lambda) = 0, \quad \tau, \lambda \in \mathbb{R}, \quad (1.9)$$

где функции $\chi_{\pm}(\tau, \lambda)$ аналитичны по τ в верхней и нижней полуплоскостях $\mathbb{C}^{\pm}$ соответственно и $\chi_{\pm}(\tau, \lambda) \rightarrow 0$ при $|\tau| \rightarrow \infty$.

Если потенциал $v(x, y, t)$ эволюционирует по времени t в соответствии с уравнением Павлова, то эволюция данных рассеяния и спектральных данных описывается простыми формулами

$$\sigma(\tau, \lambda, t) = \sigma(\tau - \lambda^2 t, \lambda, 0), \quad \chi_{\pm}(\tau, \lambda, t) = \chi_{\pm}(\tau - \lambda^2 t, \lambda, 0). \quad (1.10)$$

Восстановление потенциала осуществляется в два шага.

1. Решаем следующее нелинейное интегральное уравнение для зависящих от времени вещественных собственных функций Йоста:

$$\psi_-(x, y, t, \lambda) - H_{\lambda} \chi_{-,I}(\psi_-(x, y, t, \lambda), \lambda) + \chi_{-,R}(\psi_-(x, y, t, \lambda), \lambda) = x - \lambda y - \lambda^2 t, \quad (1.11)$$

где $\chi_{-,I}$ и $\chi_{-,R}$ обозначают мнимую и вещественную части функции χ_- , а H_{λ} – преобразование Гильберта по переменной λ :

$$H_{\lambda} f(\lambda) = \frac{1}{\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\lambda')}{\lambda - \lambda'} d\lambda'.$$

В работе [8] доказано, что для данных Коши, удовлетворяющих некоторым явно выписанным условиям малости нормы, уравнение (1.11) однозначно разрешимо при всех $t \geq 0$.

2. Если зависящая от времени функция Йоста уже известна, то потенциал записывается как

$$v(x, y, t) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \chi_{-,I}(\psi_-(x, y, t, \lambda), \lambda) d\lambda. \quad (1.12)$$

В дополнение к сказанному выше в работе [8] было показано, что при тех же аналитических ограничениях на данные Коши функция

$$\omega(x, y, t, \lambda) = \psi_-(x, y, t, \lambda) - x + \lambda y + \lambda^2 t \quad (1.13)$$

лежит в пространствах $L^{\infty}(d\lambda)$ и $L^2(d\lambda)$ при всех вещественных x, y и $t \geq 0$, а также непрерывно зависит от этих переменных. Более того, при всех $x, y \in \mathbb{R}$ и $t \geq 0$ производные

$$\partial_x \omega, \quad \partial_y \omega, \quad \partial_t \omega, \quad \partial_x^2 \omega, \quad \partial_y^2 \omega, \quad \partial_x \partial_y \omega, \quad \partial_t \partial_x \omega$$

являются элементами пространства $L^2(d\lambda)$, непрерывно зависят от x, y, t и равномерно ограничены по норме на $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

Рис. 1. Контур интегрирования для $I_p(c_0, c_2)$ (парабола) и прямые интегрирования для $I_l(a, b)$ (штриховые прямые).

2. ЛЕММА ИЗ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

Зададимся вопросом, как можно угадать ответ, полученный в работе [13]? Рассмотрим следующую приближенную формулу для восстановления функции $v(x, y, t)$:

$$v(x, y, t) \sim -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \chi_{-,1}(\psi^{(0)}(x, y, t, \lambda), \lambda) d\lambda, \quad \psi^{(0)}(x, y, t, \lambda) = x - \lambda y - \lambda^2 t. \quad (2.1)$$

Она получается из (1.12) заменой $\omega(x, y, t, \lambda) = 0$ в формуле (1.13); это приближение работает при $|x| \gg 1$, поскольку в этой области волновая функция хорошо приближается своей нормировкой.

Воспользуемся следующим результатом из интегральной геометрии (авторам не удалось найти его в литературе).

ЛЕММА 2.1. *Предположим, что заданы достаточно хорошая функция $f(X, Y)$ на вещественной плоскости и парабола $X = c_0 - c_2 Y^2$. Рассмотрим следующее неполное преобразование Радона:*

$$I_l(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a + bY, Y) dY, \quad (2.2)$$

где интеграл берется только по прямым $X = d_0 + d_1 Y$, не пересекающим параболу $X = c_0 - c_2 Y^2$, но касание допускается (см. рис. 1). Тогда интеграл по параболе

$$I_p(c_0, c_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(c_0 - c_2 Y^2, Y) dY \quad (2.3)$$

выражается через неполные данные (2.2) и обращение преобразования Меллина (см. формулы (3.1), (3.2) ниже).

Рис. 2. Контурсы интегрирования при $t > 0$ (парабола) и при $t = 0$ (штриховые прямые).

Предположим, что $t > 0$ и $x > D_x$. Пользуясь тем, что $v(x, y, 0) = 0$ при $x > D_x$, мы получаем, что интеграл от $\chi_{-,1}(\tau, \lambda)$ вдоль любой прямой, не пересекающей параболу $x - \lambda y - \lambda^2 t$, равен нулю (с точностью до погрешности аппроксимации), см. рис. 2. Чтобы найти $v(x, y, t)$ в нашем приближении, мы должны вычислить интеграл от функции $\chi_{-,1}(\tau, \lambda)$ по параболе, однако согласно лемме 2.1 он равен нулю, откуда следует, что v_t, v_x, v_y обращаются в нуль при достаточно больших положительных x и положительных t . Тем самым из уравнения (1.2) вытекает, что $\partial_x^{-1}(\cdot) = -\int_x^{+\infty}(\cdot) dx'$.

Рассмотрим теперь совершенно другое приложение леммы 2.1. Отметим, что аналогичная лемма для случая, когда парабола заменена на окружность, известна в литературе [21] и используется в томографии.

Пусть мы имеем дело с двумерной линейной томографической задачей с выпуклым непрозрачным препятствием. В этой ситуации нам известны интегралы лишь по прямым, не пересекающим препятствие (частичные данные преобразования Радона). Если функция $f(X, Y)$ лежит в пространстве Шварца, то задача восстановления по частичным данным преобразования Радона однозначно разрешима согласно “теореме о дыре”, однако не является корректно поставленной [22]. В классе полиномиально убывающих потенциалов однозначная разрешимость обратной задачи (задачи о восстановлении функции $f(X, Y)$) уже не имеет места.

Рассмотрим, например, функцию

$$f(X, Y) = \operatorname{Re} \frac{1}{(X - X_0 + i(Y - Y_0))^n}, \quad n \geq 2,$$

для которой точка (X_0, Y_0) лежит внутри препятствия. Для всех прямых, не пересекающих препятствие, интеграл по ним от $f(X, Y)$ равен нулю, поскольку $f(X, Y) -$

гармоническая функция. Более того, $f(X, Y)$ хорошо локализована при больших n . Это означает, что для более общих потенциалов их гармоническая часть не дает вклада в прямое частное преобразование Радона [22]. Тем самым для задач с препятствием естественно пытаться восстановить не весь потенциал, но лишь некоторые его интегральные характеристики типа интеграла по границе препятствия. Мера на границе должна удовлетворять следующему условию: интеграл от любой гармонической вне препятствия функции должен равняться нулю.

Обсудим класс эллиптических и параболических препятствий, для которых можно выразить интеграл по границе препятствия в терминах частных данных преобразования Радона:

- препятствие ограничено эллипсом $x^2/\alpha^2 + y^2/\beta^2 = 1$, т. е. запрещенная область задается неравенством $x^2/\alpha^2 + y^2/\beta^2 \leq 1$;
- препятствие ограничено параболой $x = -cy^2$, т. е. запрещенная область задается неравенством $x + cy^2 \leq 0$.

В первом случае мы намерены выразить интеграл

$$I_e(r) = \frac{1}{r} \int_{x^2/\alpha^2 + y^2/\beta^2 = r^2} f(x, y) \sqrt{\frac{dx^2}{\alpha^2} + \frac{dy^2}{\beta^2}}, \quad r \geq 1, \quad (2.4)$$

через частичные данные преобразования Радона. С помощью преобразований масштаба $\tilde{x} = x/\alpha$, $\tilde{y} = y/\beta$ интеграл (2.4) сводится к случаю препятствия, ограниченного окружностью:

$$I_e(r) = \frac{1}{r} \int_{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = r^2} f(\tilde{x}, \tilde{y}) ds, \quad ds^2 = d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2, \quad r \geq 1, \quad (2.5)$$

и мы можем воспользоваться следующей леммой из интегральной геометрии [21].

ЛЕММА 2.2. *Предположим, что нам даны достаточно хорошая функция $f(x, y)$ на вещественной плоскости и окружность $x^2 + y^2 = r^2$. Тогда интеграл*

$$I_c(r) = \frac{1}{r} \int_{x^2 + y^2 = r^2} f(x, y) ds, \quad ds^2 = dx^2 + dy^2, \quad (2.6)$$

выражается через неполные данные преобразования Радона

$$I_\ell(r_1, \phi) = \int_{\ell(r_1, \phi)} f(x, y) ds, \quad r_1 \geq r, \quad (2.7)$$

где $\ell(r_1, \phi)$ обозначает прямую, удаленную от начала координат на расстояние r_1 , а ϕ – угол между перпендикуляром, опущенным из начала координат, и осью x . Как и ранее, рассматриваются только прямые, не пересекающие препятствие.

Во втором случае естественные интегральные характеристики задаются формулой

$$I_p(c_0) = \int_{x + cy^2 = c_0} f(x, y) dy, \quad c_0 > 0, \quad (2.8)$$

и можно воспользоваться леммой 2.1.

Мы ожидаем, что леммы 2.1 и 2.2 можно обобщить на более широкие классы выпуклых препятствий.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ЛЕММ

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.1. Без потери общности мы можем положить $c_2 = 1$. Прямая $x = a + by$ не пересекает параболу, если и только если $(a, b) \in U(c_0)$, где

$$U(c_0) = \left\{ (a, b) \mid a \geq \frac{b^2}{4} + c_0 \right\}.$$

Найдем интеграл

$$\begin{aligned} J(c_0) &= \iint_{U(c_0)} I_\ell(a, b) da db = \iint_{U(c_0)} da db \int_{-\infty}^{+\infty} f(a + by, y) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dy \iint_{a - c_0 \geq b^2/4} f(a + by, y) da db. \end{aligned}$$

Положим $\tau = a + by$, тогда $da db = d\tau db$. Имеем

$$\begin{aligned} J(c_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dy \iint_{\tau - c_0 \geq b^2/4 + by} f(\tau, y) d\tau db = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{\tau \geq c_0 - y^2} d\tau \int_{b^2/4 + by \leq \tau - c_0} f(\tau, y) db = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{\tau \geq c_0 - y^2} f(\tau, y) d\tau \int_{b^2/4 + by \leq \tau - c_0} db = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{\tau \geq c_0 - y^2} f(\tau, y) 4\sqrt{y^2 + \tau - c_0} d\tau. \end{aligned}$$

Пусть $\tau = \tau' - y^2$, тогда

$$\begin{aligned} J(c_0) &= 4 \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{\tau' \geq c_0} f(\tau' - y^2, y) \sqrt{\tau' - c_0} d\tau' = \\ &= \int_{\tau' \geq c_0} \left[\sqrt{\tau' - c_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau' - y^2, y) dy \right] d\tau' = \\ &= 4 \int_{\tau' \geq c_0} \sqrt{\tau' - c_0} I_p(\tau') d\tau'. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Тем самым наша задача свелась к обращению преобразования Абеля [23]:

$$I_p(\tau) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{d\tau} \int_{\tau}^{\infty} \frac{J'(c_0)}{\sqrt{c_0 - \tau}} dc_0. \tag{3.2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.2. Введем на множестве прямых на плоскости координаты (r, ϕ) , где r обозначает расстояние до начала координат и ϕ – угол между горизонтальной осью и перпендикуляром, опущенным из начала координат на прямую. Обозначим через l координату на каждой из прямых, причем мы считаем, что $l = 0$ в основании перпендикуляра; пусть (R, ψ) – полярные координаты точки на прямой (см. рис. 3). Мы получаем следующую замену координат:

$$R = \sqrt{r^2 + l^2}, \quad \psi = \phi + \arctg \frac{l}{r}. \tag{3.3}$$

Рис. 3. Координаты (r, ϕ) .

Зафиксируем некоторое r . Тогда

$$\begin{aligned} d\psi \wedge dR &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} & \frac{\partial \psi}{\partial l} \\ \frac{\partial R}{\partial \phi} & \frac{\partial R}{\partial l} \end{pmatrix} d\phi \wedge dl = \det \begin{pmatrix} 1 & \frac{r}{r^2 + l^2} \\ 0 & \frac{l}{\sqrt{l^2 + r^2}} \end{pmatrix} d\phi \wedge dl = \\ &= \frac{l}{\sqrt{l^2 + r^2}} d\phi \wedge dl \end{aligned}$$

и

$$d\phi \wedge dl = \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} d\psi \wedge dR.$$

Обозначим как $I_\ell(r, \phi)$ следующий интеграл:

$$I_\ell(r, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x(l, \phi), y(l, \phi)) dl.$$

Найдем интеграл

$$\begin{aligned} J(r) &= \int_0^{2\pi} I_\ell(r, \phi) d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} f(x(l, \phi), y(l, \phi)) dl = \\ &= \int_0^{2\pi} d\psi \int_r^\infty f(R \cos \psi, R \sin \psi) \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} dR = \int_r^\infty I_c(R) \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} dR, \end{aligned}$$

где

$$I_c(R) = \int_0^{2\pi} f(R \cos \psi, R \sin \psi) d\psi.$$

Тем самым наша задача свелась к обращению преобразования Абеля:

$$I_c(R) = -\frac{2}{\pi} \int_R^\infty \frac{J'(r)}{\sqrt{r^2 - R^2}} dr. \quad (3.4)$$

Благодарности. Авторы хотели бы выразить свою благодарность Р. Г. Новикову за консультации по вопросам томографии.

Список литературы

- [1] S. V. Manakov, P. M. Santini, *J. Phys.: Conf. Ser.*, **482**:1, 012029, 11 pp., arXiv:1312.2740.
- [2] S. V. Manakov, P. M. Santini, *Inverse scattering problem for vector fields and the heavenly equation*, arXiv:nlin/0512043.
- [3] S. V. Manakov, P. M. Santini, *Phys. Lett. A*, **359**:6 (2006), 613–619.
- [4] S. V. Manakov, P. M. Santini, *Письма в ЖЭТФ*, **83**:10 (2006), 534–538.
- [5] С. В. Манаков, П. М. Сантини, *ТМФ*, **152**:1 (2007), 147–156.
- [6] S. V. Manakov, P. M. Santini, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **41**:5 (2008), 055204, 23 pp.
- [7] S. V. Manakov, P. M. Santini, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **42**:9 (2009), 095203, 16 pp.
- [8] P. G. Grinevich, P. M. Santini, D. Wu, *Nonlinearity*, **28**:11 (2015), 3709–3754.
- [9] M. V. Pavlov, *J. Math. Phys.*, **44**:8 (2003), 4134–4156.
- [10] E. V. Ferapontov, K. R. Khusnutdinova, *Commun. Math. Phys.*, **248**:1 (2004), 187–206.
- [11] M. Dunajski, *J. Geom. Phys.*, **51**:1 (2004), 126–137.
- [12] M. Dunajski, *The nonlinear graviton as an integrable system*, PhD thesis, Oxford, 1998.
- [13] P. G. Grinevich, P. M. Santini, *Stud. Appl. Math.*, **137**:1 (2016), 10–27, arXiv:1507.08205.
- [14] Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили, *Докл. АН СССР*, **192**:4 (1970), 753–756.
- [15] C. C. Lin, E. Reissner, H. S. Tien, *J. Math. Phys.*, **27** (1948), 220–231.
- [16] R. Timman, “Unsteady motion in transonic flow”, *Symposium Transsonicum* (Aachen, 3–7 September, 1962), International Union of Theoretical and Applied Mechanics (IUTAM), ed. K. Oswatitsch, Springer, Berlin, 1964, 394–401.
- [17] Е. А. Заболоцкая, Р. В. Хохлов, *Акуст. журн.*, **15**:1 (1969), 40–47.
- [18] M. J. Ablowitz, J. Villarroel, *Stud. Appl. Math.*, **85**:3 (1991), 195–213.
- [19] M. Boiti, F. Pempinelli, A. Pogrebkov, *Acta Appl. Math.*, **39**:1–3 (1995), 175–192.
- [20] A. S. Fokas, L.-Y. Sung, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **125**:1 (1999), 113–138.
- [21] A. M. Cormack, *J. Appl. Phys.*, **34**:9 (1963), 2722–2727.
- [22] Ф. Наттерер, *Математические аспекты компьютерной томографии*, Мир, М., 1990.
- [23] L. Sylow, S. Lie (eds.), *Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel*, Johnson Reprint Corp., New York, 1988.