Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Мартинес Алонсо, А. Б. Шабат, Гидродинамические редукции и решения универсальной иерархии, *ТМФ*, 2004, том 140, номер 2, 216–229

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf91>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 15:15:38

© 2004 г.

Л. Мартинес Алонсо*, А. Б. Шабат†

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ РЕДУКЦИИ И РЕШЕНИЯ УНИВЕРСАЛЬНОЙ ИЕРАРХИИ

Исследованы диагональные гидродинамические редукции иерархии интегрируемых гидродинамических цепочек. Рассмотрен вопрос о совместности этих редукций с ранее изученными дифференциальными редукциями.

Ключевые слова: системы гидродинамического типа, дифференциальные редукции, метод годографа.

1. ВВЕДЕНИЕ

В цикле работ [1]–[3] рассматривалась бесконечная иерархия интегрируемых систем [4], которая допускает многочисленные $(1+1)$ -редукции типа иерархий Бюргерса, Кортевега–де Фриза (КдФ) и нелинейного уравнения Шредингера, и, кроме того, различные классы “зависящих от энергии” иерархий [5], включая модель Камассы–Холма [6]. Это послужило мотивировкой термина *универсальная иерархия*, предложенного в нашей работе [1].

Рассматриваемую универсальную иерархию можно определить в терминах производящей функции $G = G(\lambda, \mathbf{x})$, зависящей от спектрального параметра λ и бесконечного набора переменных $\mathbf{x} := (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$ и допускающей разложения

$$G = 1 + \frac{g_1(\mathbf{x})}{\lambda} + \frac{g_2(\mathbf{x})}{\lambda^2} + \dots, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (1)$$

$$G = b_0(\mathbf{x}) + b_1(\mathbf{x})\lambda + b_2(\mathbf{x})\lambda^2 + \dots, \quad \lambda \rightarrow 0. \quad (2)$$

Иерархия задается системой эволюционных уравнений

$$\partial_n G = \langle A_n, G \rangle, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3)$$

где

$$\langle U, V \rangle := U(\partial_x V) - (\partial_x U)V$$

*Departamento de Física Teórica II, Universidad Complutense, Madrid, Spain.
E-mail: luism@fis.ucm.es

†Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Москва, Россия.
E-mail: shabat@itp.ac.ru

и

$$\begin{aligned} A_n &:= \lambda^n + g_1(\mathbf{x})\lambda^{n-1} + \cdots + g_{n-1}(\mathbf{x})\lambda + g_n(\mathbf{x}), & n \geq 0, \\ A_{-n} &:= \frac{b_0(\mathbf{x})}{\lambda^n} + \frac{b_1(\mathbf{x})}{\lambda^{n-1}} + \cdots + \frac{b_{n-1}(\mathbf{x})}{\lambda}, & n > 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Переписанная в терминах коэффициентов $\{g_n(\mathbf{x})\}_{n \geq 1} \cup \{b_n(\mathbf{x})\}_{n \geq 0}$ система (3) превращается в иерархию гидродинамических цепочек.

Другая полезная формулировка уравнений (3) получается, если ввести в рассмотрение следующую производящую функцию:

$$H := \frac{1}{G}.$$

Так как уравнения (3) эквивалентны уравнениям

$$\partial_n H = \partial_x (A_n H), \quad n \in \mathbb{Z},$$

становится ясно, что коэффициенты $\{h_n(\mathbf{x})\}_{n \geq 1}$ определяют бесконечный набор законов сохранения уравнений (3).

Иерархия (3) удовлетворяет [1]–[3] условиям совместности

$$\partial_n A_m - \partial_m A_n = \langle A_n, A_m \rangle, \quad n, m \in \mathbb{Z}. \quad (5)$$

Важно отметить, что в силу (5) пучок дифференциальных форм

$$\omega(\lambda) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} (H A_n) dx_n \quad (6)$$

является замкнутым по отношению к набору переменных $\mathbf{x}$, так как

$$\begin{aligned} \partial_m (H A_n) - \partial_n (H A_m) &= \partial_m H A_n - \partial_n A_m + H (\partial_m A_n - \partial_n A_m) = \\ &= \partial_x (H A_m) A_n - \partial_x (H A_n) A_m + H \langle A_n, A_m \rangle = 0. \end{aligned}$$

Соответствующая потенциальная функция $Q = Q(\lambda, \mathbf{x})$,

$$dQ = \omega,$$

приводит к еще одной полезной переформулировке рассматриваемых уравнений. Действительно, согласно (6)

$$\partial_n Q = A_n \partial_x Q, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (7)$$

Более того, уравнения (7) полностью определены в терминах Q , так как

$$G = \frac{1}{\partial_x Q}.$$

В разделе 2 мы покажем, что в силу (7) уравнения иерархии (3) включают в себя такие многомерные модели, как

$$\begin{aligned} u_{tx} &= u_x u_{yz} - u_{yx} u_z, \\ u_{yy} &= u_y u_{xz} - u_{xy} u_z, \\ u_{zx} &= u_x u_{yy} - u_{xy} u_y, \\ \left(\frac{u_t}{u_x} \right)_t &= \left(\frac{u_y}{u_x} \right)_z, \\ \left(\frac{u_t}{u_x} \right)_t &= \left(\frac{u_y}{u_x} \right)_x. \end{aligned} \tag{8}$$

Раздел 3 посвящен основной нашей задаче: характеризовать *гидродинамические редукции* уравнений (3). Эти редукции задаются решениями вида $G = G(\lambda, \mathbf{R})$, где $\mathbf{R} = (R^1, \dots, R^N)$ обозначает конечный набор функций (*инварианты Римана*), удовлетворяющих системе гидродинамических уравнений диагонального вида

$$\partial_n R^i = \Lambda_n^i(\mathbf{R}) \partial_x R^i, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{9}$$

Такого типа редукции рассматривались ранее в контексте бездисперсионной иерархии Кадомцева–Петвиашвили [7] и использовались также в работе [8] при исследовании интегрируемости квазилинейных систем в размерности $(2 + 1)$. В рассматриваемом случае (3) нам удалось описать редукции всей иерархии потоков и получить точное описание этих редукций. Ниже в теореме 1 мы подытоживаем наше исследование. Следует отметить, что аналогичные результаты для первого из потоков (3) были получены в недавней работе [9]. В п. 3.2 рассмотрен вопрос о совместимости гидродинамических и дифференциальных редукций. В разделе 4 обсуждается применение обобщенного метода годографа [10] для построения частных решений системы (3).

Мы будем в дальнейшем пользоваться следующими обозначениями. Под G_∞ и G_0 понимаются разложения (1) и (2) производящей функции G при $\lambda \rightarrow \infty$ и $\lambda \rightarrow 0$, соответственно. Далее, пусть $\mathbb{V}$ – пространство формальных рядов Лорана

$$V = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \lambda^n.$$

Мы обозначаем через $\mathbb{V}_{r,s}$, $r \leq s$, подпространство

$$V = \sum_{n=r}^s a_n \lambda^n$$

и через $P_{r,s}: \mathbb{V} \mapsto \mathbb{V}_{r,s}$ соответствующие проекторы. Для заданного $V \in \mathbb{V}$ мы вводим обозначение

$$(V)_{r,s} := P_{r,s}(V).$$

В частности, это позволяет переписать соотношения (4) в виде

$$A_{-n} = (\lambda^{-n} G_0)_{-\infty, -1}, \quad n \geq 1.$$

2. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ, ВОЗНИКАЮЩИЕ В ИЕРАРХИИ

2.1. Многомерные модели. Рассматривая потенциал $Q(\lambda, \mathbf{x})$ дифференциальной формы (6)

$$Q = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (H A_n) x_n \quad (10)$$

и используя (1), (2), нетрудно заметить, что Q допускает разложения вида

$$Q = \sum_{n \geq 0} \lambda^n x_n + \frac{q_1(\mathbf{x})}{\lambda} + \frac{q_2(\mathbf{x})}{\lambda^2} + \dots, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (11)$$

$$Q = \sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{\lambda^n} + p_0(\mathbf{x}) + p_1(\mathbf{x})\lambda + p_2(\mathbf{x})\lambda^2 + \dots, \quad \lambda \rightarrow 0. \quad (12)$$

Подстановка (11) в формулу (10) и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях λ позволяет выразить дифференциалы функций $q_n(\mathbf{x})$ и $p_n(\mathbf{x})$ через коэффициенты разложений (1) и (2). В частности, мы находим, что

$$q_1 = b_0 x_{-1} + \sum_{n \geq 1} (b_n x_{-n-1} - g_n x_{n-1}),$$

$$p_0 = \frac{1}{b_0} \left(x_0 + \sum_{n \geq 1} (g_n x_n - b_n x_{-n}) \right).$$

Отсюда следует

$$q_1 = \frac{1}{\partial_x p_0} \left(x_{-1} - \sum_{n \neq -1} \partial_{n+1} p_0 x_n \right), \quad (13)$$

$$p_0 = \frac{1}{\partial_{-1} q_1} \left(x_0 - \sum_{n \neq 0} \partial_{n-1} q_1 x_n \right). \quad (14)$$

Равенство смешанных производных функций q_1 и p_0 в этих тождествах сразу приводит к многомерным нелинейным уравнениям для g_n и b_n . Например, начав с

$$\partial_m \partial_{-1} q_1 = \partial_{-1} \partial_m q_1, \quad m \neq -1,$$

и используя (13), мы получаем следующее нелинейное уравнение:

$$\partial_n \partial_0 p_0 = \partial_x p_0 (\partial_{-1} \partial_{n+1} p_0) - (\partial_{-1} \partial_x p_0) \partial_{n+1} p_0, \quad n \neq -1. \quad (15)$$

Точно так же равенство смешанных производных

$$\partial_m \partial_n q_1 = \partial_n \partial_m q_1, \quad m, n \neq -1,$$

и формула (13) приводят к нелинейному уравнению

$$\partial_m \left(\frac{\partial_{n+1} p_0}{\partial_x p_0} \right) = \partial_n \left(\frac{\partial_{m+1} p_0}{\partial_x p_0} \right), \quad m, n \neq -1. \quad (16)$$

Аналогичные уравнения можно получить и для функции q_1 . Различный выбор n, m в уравнениях (15) и (16) приводит непосредственно к моделям (8).

2.2. Двумерные интегрируемые модели. В работах [1], [2] была развита теория дифференциальных редукций рассматриваемой иерархии, полученных наложением на $G \approx G_\infty$ дифференциальных связей вида

$$(\mathcal{F}(\lambda, G, G_x, G_{xx}, \dots))_{-\infty, -1} = 0, \quad x := x_0. \quad (17)$$

В частности, с произвольным полиномом $a = a(\lambda)$ по спектральному параметру λ можно связать следующие три класса редукций:

а) редукции нулевого порядка

$$a(\lambda)G = U(\lambda, \mathbf{x}), \quad U := (a(\lambda)G)_{0, +\infty}; \quad (18)$$

б) редукции первого порядка

$$G_x + a(\lambda) = U(\lambda, \mathbf{x})G, \quad U := \left(\frac{a(\lambda)}{G} \right)_{0, +\infty}; \quad (19)$$

в) редукции второго порядка

$$\frac{1}{2}GG_{xx} - \frac{1}{4}G_x^2 + a(\lambda) = U(\lambda, \mathbf{x})G^2, \quad U := \left(\frac{a(\lambda)}{G^2} \right)_{0, +\infty}. \quad (20)$$

Редукция первого порядка для линейной функции $a(\lambda)$ определяет иерархию Бюргера. С другой стороны, дифференциальная связь (20) приводит к иерархии КдФ и ее обобщениям, связанным с оператором Шредингера с зависящим от энергии потенциалом. В частности, в случаях линейной и квадратичной зависимостей от спектрального параметра λ функции $a(\lambda)$ мы получаем иерархии КдФ и нелинейного уравнения Шредингера, соответственно. Действительно, вводя в рассмотрение функции $\psi(\lambda, \mathbf{x})$:

$$\psi(\lambda, \mathbf{x}) := e^{D_{\mathbf{x}}^{-1}\phi}, \quad \phi := -\frac{1}{2} \frac{H_{\mathbf{x}}}{H} \pm \sqrt{a(\lambda)} H, \quad (21)$$

с использованием (20) непосредственным дифференцированием находим

$$\begin{aligned} \partial_n \psi &= -\frac{1}{2}(\partial_n \ln H) \psi \pm \sqrt{a} A_n H \psi = \\ &= A_n \left(-\frac{1}{2} D_x \ln H \pm \sqrt{a} H \right) \psi - \frac{1}{2} A_{n,x} \psi = A_n \psi_x - \frac{1}{2} A_{n,x} \psi, \\ \psi_{xx} &= (\phi_x + \phi^2) \psi = (\{D_x, H\} + aH^2) \psi = U \psi. \end{aligned}$$

Таким образом, функции ψ являются волновыми функциями интегрируемых иерархий, ассоциированных с оператором Шредингера с потенциалом, зависящим от энергии. Закон эволюции потенциала U для потока (3) задается уравнением

$$\partial_n U = -\frac{1}{2} A_{n,xxx} + 2U A_{n,x} + U_x A_n, \quad (22)$$

которое возникает как простое следствие (3) и (20).

Дополнительные редуцированные иерархии, включающие нелинейные интегрируемые модели, такие как известное уравнение Камассы–Холма, можно получить аналогичным образом (см. [1]–[3]).

3. ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ РЕДУКЦИИ И РЕШЕНИЯ

3.1. Гидродинамические редукции. Переходя к гидродинамическим редукциям бесконечномерной системы (3), мы рассмотрим семейства решений этой системы вида

$$G = G(\lambda, \mathbf{R}), \quad (23)$$

где вектор-функция $\mathbf{R} = (R^1, \dots, R^N)$ удовлетворяет набору систем гидродинамических уравнений диагонального вида (9). Наша задача теперь – найти явный вид системы (9), т.е. определить $G(\lambda, \mathbf{R})$ и *характеристические скорости* Λ_n^i . Подстановка (23) в (3) с использованием (9) после выделения коэффициентов при производных $\partial_x R^i$, $i = 1, \dots, N$, приводит к уравнениям

$$(D_i G) \Lambda_n^i = A_n(D_i G) - (D_i A_n)G, \quad 1 \leq i \leq N, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (24)$$

где $D_i := \partial/\partial R^i$. В дополнение к этим уравнениям должны выполняться условия коммутативности потоков (9), которые эквивалентны следующим соотношениям для характеристических скоростей:

$$\frac{D_j \Lambda_n^i}{\Lambda_n^j - \Lambda_n^i} = \frac{D_j \Lambda_m^i}{\Lambda_m^j - \Lambda_m^i}, \quad i \neq j, \quad m \neq n. \quad (25)$$

Рассмотрим сначала положительные потоки с $n \geq 1$. Для $G \approx G_\infty$ в силу (24) имеем

$$(D_i G) \Lambda_n^i = (\lambda^n G)_{-\infty, 0}(D_i G) - (D_i(\lambda^n G)_{-\infty, 0})G, \quad n \geq 1. \quad (26)$$

Подставляя в эти уравнения разложение $G \approx G_\infty$ и собирая коэффициенты при $1/\lambda$ и $1/\lambda^2$, получаем

$$D_i g_{n+1} = \Lambda_n^i D_i g_1, \quad (27)$$

$$D_i g_{n+2} = \Lambda_n^i D_i g_2 + g_{n+1}(D_i g_1) - (D_i g_{n+1})g_1. \quad (28)$$

Непосредственно отсюда находим

$$\Lambda_{n+1}^i = g_{n+1} + \Lambda_n^i(\Lambda_1^i - g_1), \quad (29)$$

откуда следует, что

$$\Lambda_n^i = A_n(\lambda) \Big|_{\lambda = \Lambda_1^i - g_1}, \quad n \geq 1. \quad (30)$$

Получим теперь уравнения для Λ_1^i и g_1 . Дифференцируя с этой целью (27), находим

$$D_j D_i g_{n+1} = D_j D_i g_1 \Lambda_n^i + D_i g_1 D_j \Lambda_n^i = D_i D_j g_1 \Lambda_n^j + D_j g_1 D_i \Lambda_n^i.$$

Следовательно,

$$D_{ij} g_1 = \frac{D_j \Lambda_n^i}{\Lambda_n^j - \Lambda_n^i} D_i g_1 + \frac{D_i \Lambda_n^j}{\Lambda_n^i - \Lambda_n^j} D_j g_1$$

и, в частности,

$$D_{ij}g_1 = \frac{D_j \Lambda_1^i}{\Lambda_1^j - \Lambda_1^i} D_i g_1 + \frac{D_i \Lambda_1^j}{\Lambda_1^i - \Lambda_1^j} D_j g_1, \quad i \neq j \quad (31)$$

(ср. (25)). С другой стороны, в силу (29)

$$\Lambda_2^i = g_2 + \Lambda_1^i (\Lambda_1^i - g_1),$$

так что с помощью (25) и (27) получаем

$$\frac{D_j \Lambda_1^i}{\Lambda_1^j - \Lambda_1^i} = \frac{D_j \Lambda_2^i}{\Lambda_2^j - \Lambda_2^i} = \frac{D_j \Lambda_1^i (2\Lambda_1^i - g_1) + (\Lambda_1^j - \Lambda_1^i) D_j g_1}{(\Lambda_1^j - \Lambda_1^i)(\Lambda_1^j + \Lambda_1^i - g_1)}, \quad i \neq j,$$

что сводится к соотношениям

$$D_j \Lambda_1^i = D_j g_1, \quad i \neq j.$$

Таким образом,

$$\Lambda_1^i = g_1 + f^i(R^i), \quad (32)$$

где функции f^i являются произвольными. Подставив эти выражения в (31), находим, что

$$D_{ij}g_1 = 0, \quad i \neq j,$$

и поэтому

$$g_1 = \sum_{k=1}^N h^k(R^k), \quad (33)$$

где h^k — произвольные функции.

Используя эти результаты, мы можем найти $G(\lambda, \mathbf{R})$ из уравнения (24) с $n = 1$. Действительно,

$$D_i \ln G = \frac{D_i A_1}{A_1 - \Lambda_1^i} = \frac{\dot{h}^i(R^i)}{\lambda - f^i(R^i)},$$

где $\dot{h}^i := D_i h^i$, и, следовательно,

$$G(\lambda, \mathbf{R}) = \exp \left(\sum_{i=1}^N \int^{R^i} \frac{\dot{h}^i(R^i)}{\lambda - f^i(R^i)} R^i \right). \quad (34)$$

Неопределенный интеграл обозначает здесь возможность добавления функций от λ , убывающих при $\lambda \rightarrow \infty$. Отметим, что формула (34) совпадает с формулой для производящей функции законов сохранения, найденной в работе [9].

Найдем теперь характеристические скорости Λ_n^i для *отрицательных потоков* с $n \leq -1$. Для $G \approx G_0$ мы получаем из (24) следующую систему уравнений:

$$(D_i G) \Lambda_{-n}^i = (\lambda^{-n} G)_{0,\infty} (D_i G) - (D_i (\lambda^{-n} G)_{0,\infty}) G, \quad n \geq 1. \quad (35)$$

Подставив в эту систему разложение (2) функции $G \approx G_0$, мы получаем для коэффициентов при λ^0 и λ

$$\begin{aligned} D_i b_n &= (b_n + \Lambda_{-n}^i) D_i \ln b_0, \\ b_0 D_i b_{n+1} &= (b_n + \Lambda_n^i) D_i b_1 + b_{n+1} (D_i b_0) - (D_i b_n) b_1. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает следующее рекуррентное соотношение для характеристических скоростей:

$$\Lambda_{-n-1}^i = \frac{\Lambda_{-1}^i}{b_0} (b_n + \Lambda_{-n}^i), \quad (36)$$

из которого следует, что

$$\Lambda_{-n}^i = A_{-n}(\lambda) \Big|_{\lambda=b_0/\Lambda_{-1}^i}, \quad n \geq 1. \quad (37)$$

Здесь неизвестной является только Λ_{-1}^i , так как согласно (34)

$$b_0 = \exp \left(- \sum_{i=1}^N \int^{R^i} \frac{\dot{h}^i(R^i)}{f^i(R^i)} R^i \right).$$

Для определения Λ_{-1}^i мы используем (36) при $n = 1$

$$\Lambda_{-2}^i = \frac{\Lambda_{-1}^i}{b_0} (b_1 + \Lambda_{-1}^i)$$

и условия коммутативности потоков с $n = -1$ и $n = -2$

$$\frac{D_j \Lambda_{-1}^i}{\Lambda_{-1}^j - \Lambda_{-1}^i} = \frac{D_j \Lambda_{-2}^i}{\Lambda_{-2}^j - \Lambda_{-2}^i}.$$

Исключение Λ_{-2}^i дает теперь

$$D_j \ln \Lambda_{-1}^i = D_j \ln b_0, \quad i \neq j.$$

Следовательно,

$$\Lambda_{-1}^i = b_0 g^i(R^i), \quad (38)$$

где g^i — произвольные функции.

Теперь мы полностью определили вид уравнений (9). Однако фактически мы имели дело только с частью этой бесконечной системы и нам еще предстоит доказать, что выполняются все уравнения (24), (25).

Рассмотрим сначала уравнения (24) с $n \geq 1$:

$$D_i \ln G = \frac{D_i A_n}{A_n - \Lambda_n^i}, \quad n \geq 1,$$

которые в силу (30), (32)–(34) эквивалентны

$$D_i A_n(\lambda) = \frac{\dot{h}^i}{\lambda - f^i} (A_n(\lambda) - A_n(\lambda)|_{\lambda=f^i}). \quad (39)$$

Для проверки этого тождества представим $A_n(\lambda)$ в виде

$$\begin{aligned} A_n(\lambda) &= (\lambda^n G)_{0,\infty} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\infty} \frac{(\tilde{\lambda}^n G(\tilde{\lambda}))_{0,\infty}}{\tilde{\lambda} - \lambda} d\tilde{\lambda} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\infty} \frac{\tilde{\lambda}^n G(\tilde{\lambda})}{\tilde{\lambda} - \lambda} d\tilde{\lambda} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\infty} \frac{\tilde{\lambda}^n}{\tilde{\lambda} - \lambda} \exp\left(\sum_{i=1}^N \int^{R^i} \frac{\dot{h}^i}{\tilde{\lambda} - f^i} R^i\right) d\tilde{\lambda}, \end{aligned}$$

где γ_∞ — положительно ориентированная замкнутая петля вокруг бесконечности в комплексной плоскости $\tilde{\lambda}$, причем λ и f^i предполагаются лежащими внутри петли. Дифференцируя это выражение по R^i , получаем

$$\begin{aligned} D_i A_n(\lambda) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\infty} \frac{\dot{h}^i \tilde{\lambda}^n G(\tilde{\lambda})}{(\tilde{\lambda} - \lambda)(\tilde{\lambda} - f^i)} d\tilde{\lambda} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\infty} \frac{\dot{h}^i A_n(\tilde{\lambda})}{(\tilde{\lambda} - \lambda)(\tilde{\lambda} - f^i)} d\tilde{\lambda} = \\ &= \frac{\dot{h}^i}{\lambda - f^i} (A_n(\lambda) - A_n(\lambda)|_{\lambda=f^i}), \end{aligned}$$

что дает (39). Равенство (25) также является следствием этого тождества, так как

$$\frac{D_j A_n(\lambda)|_{\lambda=f^i}}{A_n(\lambda)|_{\lambda=f^j} - A_n(\lambda)|_{\lambda=f^i}} = \frac{\dot{h}^j}{f^j - f^i}, \quad i \neq j,$$

и поэтому

$$\frac{D_j \Lambda_n^i}{\Lambda_n^j - \Lambda_n^i} = \frac{D_j \Lambda_1^i}{\Lambda_1^j - \Lambda_1^i}, \quad n > 1.$$

Рассмотрим теперь соотношения (24) при $n \leq -1$:

$$D_i \ln G = \frac{D_i A_{-n}}{A_{-n} - \Lambda_{-n}^i}, \quad n \geq 1.$$

В силу (34), (37) и (38) эти уравнения принимают вид

$$D_i A_{-n}(\lambda) = \frac{\dot{h}^i}{\lambda - f^i} (A_{-n}(\lambda) - A_{-n}(\lambda)|_{\lambda=1/g^i}). \quad (40)$$

Для доказательства этих уравнений представим $A_{-n}(\lambda)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} A_{-n}(\lambda) &= (\lambda^{-n} G)_{-\infty,-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{(\tilde{\lambda}^{-n} G(\tilde{\lambda}))_{-\infty,-1}}{\tilde{\lambda} - \lambda} d\tilde{\lambda} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{\tilde{\lambda}^{-n} G(\tilde{\lambda})}{\tilde{\lambda} - \lambda} d\tilde{\lambda} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{\tilde{\lambda}^{-n}}{\tilde{\lambda} - \lambda} \exp\left(\sum_{i=1}^N \int^{R^i} \frac{\dot{h}^i}{\tilde{\lambda} - f^i} R^i\right) d\tilde{\lambda}, \end{aligned}$$

где γ_0 — петля с отрицательной ориентацией вокруг $\tilde{\lambda} = 0$, причем λ и f^i предполагаются лежащими вне петли. Дифференцируя это выражение по R^i , получаем

$$\begin{aligned} D_i A_{-n}(\lambda) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{\dot{h}^i \tilde{\lambda}^{-n} G(\tilde{\lambda})}{(\tilde{\lambda} - \lambda)(\tilde{\lambda} - f^i)} d\tilde{\lambda} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{\dot{h}^i A_{-n}(\tilde{\lambda})}{(\tilde{\lambda} - \lambda)(\tilde{\lambda} - f^i)} d\tilde{\lambda} = \frac{\dot{h}^i}{\lambda - f^i} (A_{-n}(\lambda) - A_{-n}(\lambda)|_{\lambda=f^i}). \end{aligned}$$

Таким образом, уравнения (40) выполняются, если положить

$$g^i(R^i) = \frac{1}{f^i(R^i)}.$$

Остальные соотношения коммутативности (25) проверяются просто.

Следующая теорема подводит итог проведенному нами анализу.

ТЕОРЕМА 1. *Гидродинамические редукции иерархии (3) задаются формулами*

$$G(\lambda, \mathbf{R}) = \exp\left(\sum_{i=1}^N \int^{R^i} \frac{\dot{h}^i(R^i)}{\lambda - f^i(R^i)} R^i\right), \quad (41)$$

$$\partial_n R^i = \Lambda_n^i(\mathbf{R}) \partial_x R^i, \quad \Lambda_n^i(\mathbf{R}) := A_n(\lambda) \big|_{\lambda=f^i(R^i)}, \quad (42)$$

где функции h^i и f^i являются произвольными.

Так как уравнения (9) инвариантны относительно точечных преобразований вида $R^i \rightarrow \tilde{R}^i(R^i)$, можно в дальнейшем считать, что $h^i(R^i) = R^i$, а это, в свою очередь, приводит к более простой формуле для производящей функции:

$$G(\lambda, \mathbf{R}) = \exp\left(\sum_{i=1}^N \int^{R^i} \frac{R^i}{\lambda - f^i(R^i)}\right). \quad (43)$$

Заметим в этой связи, что примеры простейших гидродинамических редукций (41) дают следующие две формулы:

$$\begin{aligned} f^i(R^i) &= c_i, & G &= \exp\left(\sum_{i=1}^N \frac{R^i}{\lambda - c_i}\right), \\ f^i(R^i) &= -\frac{R^i}{\epsilon_i}, & G &= \prod_{i=1}^N \left(\frac{\epsilon_i \lambda + R^i}{\epsilon_i \lambda + \lambda_i}\right)^{\epsilon_i}, \end{aligned}$$

где ϵ_i — произвольные постоянные.

Заметим еще, что характеристические скорости гидродинамических систем (42) можно выразить через полиномы Шура,

$$\exp\left(\sum_{n \geq 1} k^n x_n\right) = \sum_{n \geq 0} k^n S_n(x_1, \dots, x_n),$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} \Lambda_n^i(\mathbf{R}) &= \sum_{j=0}^n S_j(I_1, \dots, I_j) (f^i(R^i))^{n-j}, & n &\geq 0, \\ \Lambda_{-n}^i(\mathbf{R}) &= e^{-I_0} \sum_{j=0}^{n-1} S_j(I_{-1}, \dots, I_{-j}) (f^i(R^i))^{-n+j}, & n &> 0, \end{aligned}$$

где

$$I_n := \operatorname{sgn} n \sum_{i=1}^N \int^{R^i} (f^i(R^i))^{n-1} R^i.$$

3.2. Совместность с дифференциальными редукциями. Естественно рассмотреть вопрос о совместности гидродинамических редукций с дифференциальными связями (19) и (20). Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Гидродинамические редукции (43), совместные с дифференциальными связями второго (или первого) порядка, характеризуются условиями*

$$f^i(R^i) = -R^i + c_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

и соответствуют производящим функциям вида

$$G(\lambda, \mathbf{R}) = \alpha(\lambda) \prod_{i=1}^N (\lambda + R^i - c_i).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подстановка (43) в уравнение (20) дифференциальной связи второго порядка дает

$$\frac{a(\lambda)}{G^2} = U - \frac{1}{2} \sum_i \left(f^i \frac{(\partial_x R^i)^2}{(\lambda - f^i)^2} + \frac{\partial_{xx} R^i}{\lambda - f^i} \right) - \frac{1}{4} \left(\sum_i \frac{\partial_x R^i}{\lambda - f^i} \right)^2.$$

Следовательно, функция G должна иметь полюс первого порядка при $\lambda = f^i(R^i)$, и поэтому из (43) следует, что

$$\exp \left(\int^{R^i} \frac{R^i}{\lambda - f^i(R^i)} \right) = (\lambda - f^i(R^i)) H(\lambda, R^i),$$

где H отлично от нуля при $\lambda = f^i(R^i)$. Дифференцируя это соотношение по R^i , получаем

$$\frac{1}{\lambda - f^i} = -\frac{f^i}{\lambda - f^i} + \mathcal{O}(1), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Таким образом, доказано утверждение теоремы в случае дифференциальной связи второго порядка. Доказательство для связей первого порядка проводится аналогично.

3.3. Метод годографа. Общее решение системы уравнений (42) можно получить, используя метод *обобщенного годографа* [10]. Это решение определяется неявной формулой

$$x + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \Lambda_n^i(\mathbf{R}) x_n = \Gamma^i(\mathbf{R}), \quad i = 1, \dots, N, \quad (44)$$

где функции Γ^i задаются общим решением линейной системы уравнений

$$\frac{D_j \Gamma^i}{\Gamma^j - \Gamma^i} = \frac{1}{f^j - f^i}, \quad i \neq j. \quad (45)$$

Введение потенциала $\Phi(\mathbf{R})$,

$$\Gamma^i = D_i \Phi, \quad i = 1, \dots, N,$$

приводит систему (45) к виду

$$(f^i - f^j)D_i D_j \Phi = D_i \Phi - D_j \Phi, \quad i \neq j, \quad (46)$$

характерному для теории преобразований Лапласа. Общее решение (46) зависит от N произвольных функций одной переменной.

Нетрудно заметить, что производящая функция (43) дает для уравнений (46) однопараметрическое семейство решений [9]. Таким образом, используя принцип линейной суперпозиции, можно построить интересные решения системы (45), начиная с функций $G(\lambda, \mathbf{R})$ специального вида. Например,

$$\begin{aligned} \Lambda_n^i &= D_i \Phi, & \Phi &:= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\infty} \lambda^n G(\lambda, \mathbf{R}) d\lambda, & n &\geq 0, \\ \Lambda_{-n}^i &= D_i \Phi, & \Phi &:= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \lambda^{-n} G(\lambda, \mathbf{R}) d\lambda, & n &> 0. \end{aligned}$$

Более того, общее решение уравнений (46) в ряде случаев можно выразить в терминах $G(\lambda, \mathbf{R})$.

4. ПРИМЕРЫ

Выбор

$$f^i(R^i) = \frac{R^i}{n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

приводит к (не нормированной при $\lambda \rightarrow \infty$) производящей функции

$$G(\lambda, \mathbf{R}) = \prod_{i=1}^N \left(\lambda - \frac{R^i}{n} \right)^{-n}.$$

Следовательно, выбрав в комплексной плоскости λ для каждого $i = 1, \dots, N$ замкнутую, положительно ориентированную петлю γ_i вокруг $\lambda_i = R^i/n$, мы получаем соответствующее общее решение (46) в виде

$$\Phi := \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} \phi_i(\lambda) G(\lambda, \mathbf{R}) d\lambda, \quad (47)$$

где функции $\phi_i(\lambda)$ являются произвольными. В частности, при $n = 1$ это дает

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \phi_i(R^i) \prod_{k \neq i} \frac{1}{R^i - R^k}. \quad (48)$$

Аналогично рассматривается случай

$$f^i(R^i) = -\frac{R^i}{n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

в котором

$$G(\lambda, \mathbf{R}) = \prod_{i=1}^N \left(\lambda + \frac{R^i}{n} \right)^n.$$

Для построения общего решения (46) мы выбираем в комплексной плоскости λ для $i = 1, \dots, N$ путь $\gamma_i(R^i)$ с концом в точке $\lambda_i = -R^i/n$. Это дает

$$\Phi := \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i(R^i)} \phi_i(\lambda) G(\lambda, \mathbf{R}) d\lambda, \quad (49)$$

где функции $\phi_i(\lambda)$ произвольны.

Рассмотрим более детально случай

$$f^i(R^i) = -R^i, \quad i = 1, 2.$$

В этом случае

$$\Phi = (\theta_1(-R^1) - \theta_2(-R^2))(R^1 - R^2) + 2 \int^{-R^1} \theta_1(\lambda) d\lambda + 2 \int^{-R^2} \theta_2(\lambda) d\lambda,$$

где $\theta_i(\lambda)$ произвольны. Для нормированной производящей функции получаем формулу

$$G(\lambda, \mathbf{R}) = \frac{(\lambda + R^1)(\lambda + R^2)}{(\lambda + \lambda_0)^2}, \quad \lambda_0 \neq 0. \quad (50)$$

Используя формулу годографа, можно представить общее решение гидродинамических уравнений (42) при $n = -1$ и $n = -2$ в следующем виде:

$$x + A_{-1}(\lambda)|_{\lambda=-R^1} y + A_{-2}(\lambda)|_{\lambda=-R^2} z = D_i \Phi, \quad i = 1, 2, \quad (51)$$

где $y := x_{-1}, z := x_{-2}$. В силу (50) это дает

$$b_0 = c^2 R^1 R^2, \quad b_1 = c^2 (R^1 + R^2) - 2c^3 R^1 R^2, \quad c := \frac{1}{\lambda_0},$$

что позволяет переписать формулу (51):

$$\begin{aligned} (x - c^2 z) - c^2 (y - 2cz) R^2 &= \dot{\theta}_1(-R^1)(R^2 - R^1) - \theta_1(-R^1) - \theta_2(-R^2), \\ (x - c^2 z) - c^2 (y - 2cz) R^1 &= \dot{\theta}_2(-R^2)(R^1 - R^2) - \theta_1(-R^1) - \theta_2(-R^2). \end{aligned} \quad (52)$$

Это означает, в частности, что

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(x - c^2 z, y - 2cz),$$

т.е. $\mathbf{R}$ постоянно на прямых

$$\vec{x} := (x, y, z) = (x_0, y_0, 0) + (2c, c^2, 1)s.$$

Заметим, что приведенные выше формулы позволяют построить соответствующие решения

$$u(x, y, z) := \int^y b_0(\mathbf{R}) dy + \int^z b_1(\mathbf{R}) dz$$

нелинейного уравнения

$$u_{yy} = u_u u_{zx} - u_{yx} u_z.$$

Благодарности. Авторы благодарны проф. Е. В. Ферапонтову за полезные дискуссии. А.Б. Шабат пользовался поддержкой гранта РФФИ № 04-01-00403, Президентского гранта поддержки ведущих научных школ № НШ 1716.2003.1 и гранта Испанского Министерства культуры и спорта. Л. Мартинес Алонсо был поддержан грантом DG CYT, проект BFM2002-01607.

Список литературы

- [1] *L. Martínez Alonso, A. B. Shabat.* Phys. Lett. A. 2002. V. 300. P. 58.
- [2] *L. Martínez Alonso, A. B. Shabat.* J. Nonlinear Math. Phys. 2003. V. 10. № 2. P. 229; On the prolongation of a hierarchy of hydrodynamic chains. In: New Trends in Integrability and Partial Solvability. Proc. of NATO Adv. Res. Workshop (Cadiz, Spain, 12–16 June 2002). NATO Sci. Ser. V. 132. Eds. A.B. Shabat et al. Dordrecht: Kluwer, 2004. P. 263.
- [3] *А. Б. Шабат.* ТМФ. 2003. Т. 136. № 2. С. 197.
- [4] *В. Г. Мухалев.* Функц. анализ и его прилож. 1992. Т. 26. № 2. С. 79.
- [5] *M. Jaulent, I. Miodek.* Lett. Math. Phys. 1976. V. 1. P. 243; Lett. Nuovo Cimento. 1977. V. 20. P. 655; *L. Martínez Alonso.* J. Math. Phys. 1980. V. 21. P. 2342; *M. Antonowicz, A. P. Fordy.* Physica D. 1987. V. 28. P. 345; *A. N. W. Hone.* Phys. Lett. A. 1998. V. 249. P. 46.
- [6] *R. Camassa, D. Holm.* Phys. Rev. Lett. 1993. V. 71. P. 1661.
- [7] *J. Gibbons, Y. Kodama.* Phys. Lett. A. 1989. V. 135. P. 167; *J. Gibbons, S. P. Tsarev.* Phys. Lett. A. 1996. V. 211. P. 19; 1999. V. 258. P. 263; *M. Mañas, L. Martínez Alonso, E. Medina.* J. Phys. A. 2002. V. 35. P. 401.
- [8] *E. V. Ferapontov, K. R. Khusnutdinova.* On integrability of $(2 + 1)$ -dimensional quasilinear systems. nlin.SI/0305044.
- [9] *M. V. Pavlov.* Integrable hydrodynamic chains. nlin.SI/0301010.
- [10] *С. П. Царев.* Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 5. С. 1048.

Поступила в редакцию 17.IX.2003 г.