Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Варзугин, Сила взаимодействия вращающихся черных дыр, находящихся в равновесии, *ТМФ*, 1998, том 116, номер 3, 367–378

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf910>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 18:14:00

© 1998 г.

Г. Г. Варзугин*

СИЛА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВРАЩАЮЩИХСЯ ЧЕРНЫХ ДЫР, НАХОДЯЩИХСЯ В РАВНОВЕСИИ

Изучены свойства построенной в предыдущей работе задачи Римана, решения которой соответствуют равновесной конфигурации черных дыр. Найдены значения метрических коэффициентов на оси симметрии, и вычислена сила взаимодействия черных дыр.

1. ВВЕДЕНИЕ

В предыдущей работе [1] мы исследовали аксиально-симметричные стационарные решения уравнений Эйнштейна в вакууме, описывающие равновесную конфигурацию вращающихся черных дыр. Под равновесной конфигурацией мы понимали стационарное решение, обладающее несвязным горизонтом событий. Все такие решения удовлетворяют некоторой граничной задаче для системы эллиптических нелинейных уравнений, которая легко может быть получена из работы [2], где впервые были сформулированы условия регулярности оси симметрии и горизонта событий. Исследуя эту граничную задачу, мы показали, что она сводится к матричной задаче Римана с рациональной матрицей сопряжения. Было также отмечено, что решения, отвечающие стационарной равновесной конфигурации черных дыр, по всей видимости, обладают конической сингулярностью на оси симметрии, которая и препятствует их падению друг на друга. Следует заметить, что в случае вращающихся черных дыр присутствие конической сингулярности при любых значениях параметров решения не столь очевидно с физической точки зрения, т.к. можно допустить, что вращение черных дыр приводит к силам отталкивания, которые могут компенсировать гравитационное притяжение.

Интересно отметить, что сама коническая сингулярность позволяет ввести понятие силы взаимодействия черных дыр. Мы остановимся на этом подробнее в следующем разделе. Аналитическое выражение для силы взаимодействия между черными дырами Шварцшильда известно очень давно [3]. В настоящей работе мы обобщим этот результат на случай вращающихся черных дыр, что и составляет основную цель данной работы.

* Научно-исследовательский институт физики Санкт-Петербургского государственного университета, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: varzugin@snoopy.phys.spbu.ru

2. ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА

В цилиндрической системе координат аксиально-симметричная метрика имеет форму

$$ds^2 = -V dt^2 + 2W dt d\phi + X d\phi^2 + \frac{X}{\rho^2} e^\beta (d\rho^2 + dz^2),$$

где метрические коэффициенты зависят только от ρ и z . Уравнения Эйнштейна разбиваются на две системы нелинейных уравнений, первая из которых приводится к виду

$$(\rho g, \rho g^{-1})_{,\rho} + (\rho g, z g^{-1})_{,z} = 0, \quad g = \begin{pmatrix} -V & W \\ W & X \end{pmatrix}, \quad \det g = -\rho^2, \quad (2.1)$$

а вторая — к виду

$$\left(\ln \left(\frac{X}{\rho^2} e^\beta \right) \right)_{,\zeta} = \frac{i}{2\rho} (1 + \operatorname{tr}(\rho g, \zeta g^{-1})^2), \quad \partial_\zeta = \frac{1}{2}(\partial_z - i\partial_\rho). \quad (2.2)$$

Пусть горизонт событий имеет N несвязных компонент и $z_1, \dots, z_{2N}$ — z -координаты точек пересечения горизонта событий и оси симметрии, а Ω_j — угловая скорость j -й черной дыры. В окрестности i -й черной дыры выберем систему координат

$$\rho^2 = (\lambda^2 - m_i^2)(1 - \mu^2), \quad m_i = \frac{z_{2i} - z_{2i-1}}{2}, \\ z - \frac{z_{2i} + z_{2i-1}}{2} = \lambda\mu, \quad |\mu| \leq 1.$$

В этой системе координат условия регулярности оси симметрии и горизонта событий могут быть записаны так [2]:

$$\begin{pmatrix} 1 & \Omega_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Omega_i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda^2 - m_i^2) \widehat{V}(\lambda, \mu) & \rho^2 \widehat{W}(\lambda, \mu) \\ \rho^2 \widehat{W}(\lambda, \mu) & (1 - \mu^2) \widehat{X}(\lambda, \mu) \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

где $\widehat{X}, \widehat{V}$ — гладкие функции, не обращающиеся в нуль. Используя (2.3), легко получить граничные условия для системы (2.1)

$$\rho g, \rho g^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & O(1) \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \rho \rightarrow 0, \quad z \in \Gamma, \quad (2.4a)$$

$$\widehat{\Omega}_i \rho g, \rho g^{-1} \widehat{\Omega}_i^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ O(1) & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho \rightarrow 0, \quad z \in I_i, \quad \widehat{\Omega}_i = \begin{pmatrix} 1 & \Omega_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.4b)$$

$$\rho g, z g^{-1} = O(1), \quad \rho \rightarrow 0, \quad z \in R. \quad (2.4b)$$

Здесь Γ — ось симметрии, состоящая из $N + 1$ связных компонент,

$$\Gamma = \cup \Gamma_j = R \setminus \cup I_i \quad (j = 1, \dots, N + 1, \quad i = 1, \dots, N), \quad I_i = (z_{2i-1}, z_{2i}).$$

Символ $O(1)$ использован для обозначения равномерно ограниченных функций на соответствующем интервале. В качестве условий на бесконечности мы требуем, чтобы

$$W = \rho^2 O\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad X = \rho^2 \left(1 + O\left(\frac{1}{r}\right)\right), \quad r = \sqrt{\rho^2 + z^2}. \quad (2.5)$$

Граничных условий (2.4), (2.5) достаточно для построения решения первой группы уравнений Эйнштейна (2.1).

Рассмотрим теперь свойства решений системы (2.2). При помощи (2.3) нетрудно проверить, что при $\rho = 0$ и $z \in \Gamma$

$$\partial_z \beta = 0, \quad \beta|_{\Gamma_i} = b_i, \quad (2.6)$$

где b_i – некоторые константы. Отметим, что условие регулярности решения на оси симметрии ($X^{,a} X_{,a} / (4X) \rightarrow 1$ на оси симметрии) выполнено тогда и только тогда, когда дополнительно к (2.3) мы требуем, чтобы

$$b_i = 0. \quad (2.7)$$

Для асимптотически плоских решений ($\beta \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$) требование (2.7) автоматически удовлетворяется на крайних компонентах оси симметрии, но не может быть выполнено на оставшихся компонентах (см. [4–7]). В общем случае последнее утверждение пока не является доказанным. В этой работе мы вычислим константы b_i , но, к сожалению, аналитическое выражение для них оказывается слишком сложным для анализа разрешимости уравнения (2.7).

Параметры b_i имеют и самостоятельный смысл. А именно, величину

$$F_i = \frac{1}{4}(e^{-b_i/2} - 1) \quad (2.8)$$

можно рассматривать как силу взаимодействия черных дыр. Здесь и далее предполагается, что $b_1 = b_{N+1} = 0$. Поясним происхождение данной интерпретации. Предположим, что требование (2.7) не выполнено, тогда тензор кривизны становится сингулярным в окрестности соответствующих компонент оси симметрии, а тензор энергии-импульса не обращается в нуль на этих компонентах. Будем считать, что множество сингулярных точек заполнено “материей”, которая и препятствует падению черных дыр друг на друга. Напряжение на единицу площади в направлении z есть $T(e_z, e_z)$, где T – тензор энергии-импульса, а e_z – нормированный вектор, параллельный $\partial/\partial z$. В качестве определения силы взаимодействия черных дыр естественно выбрать интеграл

$$\int_{S_\varepsilon} T(e_z, e_z) ds,$$

вычислив который, мы получим формулу (2.8) [4]. Здесь S_ε есть $\rho\phi$ -координатная 2-поверхность ($\rho \leq \varepsilon$), а ds – элемент площади этой поверхности.

В заключение этого раздела мы дадим краткий вывод полезного в дальнейшем представления для b_i [4, 5]. Приведем (2.2) к виду

$$\partial_\rho \beta = \frac{\rho}{2} \left(\left(\partial_\rho \ln \frac{X}{\rho^2} \right)^2 - \left(\partial_z \ln \frac{X}{\rho^2} \right)^2 + \frac{(\partial_\rho Y)^2 - (\partial_z Y)^2}{X^2} \right), \quad (2.9a)$$

$$\partial_z \beta = \partial_z \ln X (\rho \partial_\rho \ln X - 2) + \frac{\rho \partial_z Y \partial_\rho Y}{X^2}, \quad (2.9b)$$

где

$$dY = \frac{1}{\rho} * (X dW - W dX) \quad (*d\rho = dz, *dz = -d\rho).$$

Пусть C_ε — кривая, соединяющая Γ_{i+1} и Γ_i :

$$\rho = \varepsilon \sin \tau, \quad z - \frac{z_{2i} + z_{2i-1}}{2} = -\sqrt{\varepsilon^2 + m_i^2} \cos \tau, \quad 0 \leq \tau \leq \pi.$$

Тогда

$$b_{i+1} - b_i = \int_{C_\varepsilon} d\beta. \quad (2.10)$$

Левая часть (2.10) не зависит от ε . Устремляя ε к нулю и используя (2.3), (2.9), приходим к равенству

$$b_{i+1} - b_i = -2(\ln \hat{X}(z_{2i}) - \ln \hat{X}(z_{2i-1})), \quad (2.11)$$

здесь

$$\hat{X}(z_{2i}) = \hat{X}(m_i, 1), \quad \hat{X}(z_{2i-1}) = \hat{X}(m_i, -1).$$

Формула (2.11) будет полезна в следующих разделах и позволит вычислить b_i .

3. ПРОБЛЕМА РИМАНА

В работе [1] мы показали, что для любого решения граничной задачи (2.4), (2.5) существует кусочно-аналитическая матрица $\chi(\omega)$, удовлетворяющая условию сопряжения на мнимой оси,

$$\chi_-(\omega) = \chi_+(\omega) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix} T(k) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\omega \end{pmatrix}, \quad k = z + \frac{\omega^2 - \rho^2}{2\omega}, \quad (3.1a)$$

и нормированная на бесконечности:

$$\chi(\omega) \rightarrow I, \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (3.1b)$$

Рациональная матрица $T(k)$ определена следующим образом:

$$T(k) = \hat{D}_{N+1} T_N \hat{D}_N \dots T_1 \hat{D}_1, \quad (3.2)$$

здесь

$$T_j = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2M_j}{k - z_{2j-1}} & -4M_j \Omega_j \\ \frac{2L_j}{(k - z_{2j})(k - z_{2j-1})} & 1 + \frac{2M_j}{k - z_{2j}} \end{pmatrix}, \quad \hat{D}_j = \begin{pmatrix} 1 & -D_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Параметры M_j и L_j имеют физический смысл полной массы и углового момента (момента импульса) j -й черной дыры и связаны соотношением

$$M_j = m_j + 2\Omega_j L_j, \quad 2m_j = z_{2j} - z_{2j-1}. \quad (3.4)$$

Дополнительное требование симметричности матрицы $T(k)$ приводит к $2N + 1$ нелинейным алгебраическим уравнениям на параметры D_j, L_j, Ω_j , которые задают D_j, L_j как функции от Ω_j, z_j . В частности,

$$\sum_{j=1}^{N+1} D_j + \sum_{j=1}^N 4\Omega_j M_j = 0. \quad (3.5)$$

Пусть $d_1 = D_1, d_{i+1} = d_i + D_{i+1} + 4M_i \Omega_i$ и

$$t_{2j-1}(k) = C_{2j-1}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2\Omega_j(k-z_{2j-1})} & 1 \end{pmatrix} C_{2j-1},$$

$$t_{2j}(k) = C_{2j}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \Omega_j \\ 0 & \frac{1}{2(k-z_{2j})} \end{pmatrix} C_{2j},$$

где

$$C_{2j-1} = \begin{pmatrix} 1 & -d_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_{2j} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_j \\ -1/\Omega_j & 4M_j \end{pmatrix} C_{2j-1}.$$

Тогда в силу (3.5) и легко проверяемого тождества

$$T_j \begin{pmatrix} 1 & -d_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} t_{2j-1}^{-1} t_{2j}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -d_j - 4M_j \Omega_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

мы получим, что

$$T(k) = t_{2N}(k) t_{2N-1}(k) \dots t_2(k) t_1(k). \quad (3.6)$$

Заметим теперь, что матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix} t_{2j}(k) t_{2j-1}(k) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\omega \end{pmatrix}$$

не имеет особенности при $\omega = 0$ и стремится к единичной матрице при $\omega \rightarrow \infty$,

$$\left. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix} t_{2j}(k) t_{2j-1}(k) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\omega \end{pmatrix} \right|_{\omega=0} = \begin{pmatrix} 1 & -8M_j(2M_j\Omega_j + d_j)/\rho^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

А значит, этими же свойствами обладает и матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix} T(k) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\omega \end{pmatrix},$$

задача Римана (3.1) корректно определена при любых D_j, L_j, Ω_j , удовлетворяющих (3.5).

Единственными особенностями матрицы сопряжения являются простые полюсы в точках

$$\omega_i^\pm = (z_i - z) \pm \sqrt{(z_i - z)^2 + \rho^2}, \quad \omega_i^- = -\frac{\rho^2}{\omega_i^+}.$$

Тогда из (3.1) заключаем, что $\chi_\pm(\omega)$ – рациональные функции с простыми полюсами в точках $\omega_i^\pm$ ($\omega_i^+ > 0, \omega_i^- < 0$):

$$\chi_\pm(\omega) = I + \sum_{j=1}^{2N} \frac{A_j^\pm}{\omega - \omega_j^\pm}, \quad (3.8)$$

где $A_j^\pm$ не зависят от ω . Так как $T(k)$ унимодулярна, то $\det \chi_\pm(\omega) = 1$, а $\det A_j^\pm = 0$. Пусть ξ_j – собственный вектор A_j^- , тогда

$$A_j^- \xi_j = 0, \quad A_j^- = a_j \xi_j^\sigma, \quad \xi_j^\sigma = (-\xi_j^2, \xi_j^1) \quad (3.9)$$

и a_j – вектор-столбец. Далее, заметим, что унимодулярность $\chi_-(\omega)$ имеет место тогда и только тогда, когда существует константа v_i такая, что

$$a_i = v_i \lim_{\omega \rightarrow \omega_i^-} \chi_-(\omega) \xi_i. \quad (3.10)$$

Уравнения (3.9), (3.10) дают систему линейных уравнений на a_i :

$$a_i = v_i \xi_i + v_i \sum_{i \neq k} \frac{\xi_k^\sigma \xi_i}{\omega_i^- - \omega_k^-} a_k, \quad (3.10a)$$

а параметры v_i, ξ_i легко находятся по матрице сопряжения.

Определим матрицу

$$G_i(k) = t_{i-1}(k) \dots t_1(k)$$

и векторы

$$c_{2j} = C_{2j}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_{2j-1} = C_{2j-1}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\xi_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega_i^- \end{pmatrix} G_i^{-1}(z_i) c_i, \quad (3.11)$$

а

$$v_i = \frac{\omega_i^- v_i^0}{u_i \omega_i^- - v_i^0 \xi_i^\sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xi_i}, \quad (3.12)$$

где

$$v_{2j}^0 = \frac{\Omega_j}{\omega_{2j}^- - \omega_{2j}^+}, \quad v_{2j-1}^0 = -\frac{1}{\Omega_j} \frac{1}{\omega_{2j-1}^- - \omega_{2j-1}^+}$$

и

$$u_i = 1 + (\omega_i^- - \omega_i^+) v_i^0 c_i^\sigma \partial_k G_i(z_i) G_i^{-1}(z_i) c_i.$$

Заметим также, что

$$\xi_i^\sigma = \omega_i^- c_i^\sigma G_i(z_i) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\omega_i^- \end{pmatrix}.$$

Выбранный нами способ решения задачи Римана близок к работе [8]. Как будет ясно из последующего рассмотрения, для цели построения точных решений системы нелинейных уравнений (2.1) можно в качестве матрицы T выбрать любую симметричную матрицу. Такой способ построения точных решений, очевидно, отличается от способа, использованного для этих целей в работах [9, 10], но не приводит к новым решениям системы (2.1). В частности, исследуемое нами решение содержится в классе $2N$ солитонных решений на фоне пространства Минковского из работы [10].

Покажем теперь, как восстановить решение системы (2.1), зная решение задачи Римана (3.1). Пусть

$$D_1 = \partial_z - \frac{2\omega^2}{\omega^2 + \rho^2} \partial_\omega, \quad D_2 = \partial_\rho + \frac{2\omega\rho}{\omega^2 + \rho^2} \partial_\omega.$$

Так как $D_1 k = D_2 k = 0$, то из (3.1) легко видеть, что “логарифмические” производные $D\Psi\Psi^{-1}$ от функций

$$\Psi_\pm(\omega) = \chi_\pm(\omega) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$$

не имеют никаких особенностей, кроме простых полюсов в точках $\pm i\rho$. Следовательно,

$$D_1 \Psi_-(\omega) \Psi_-^{-1}(\omega) = \frac{-i\rho \partial_\omega \Psi_-(i\rho) \Psi_-^{-1}(i\rho)}{\omega - i\rho} + \frac{i\rho \partial_\omega \Psi_-(-i\rho) \Psi_-^{-1}(-i\rho)}{\omega + i\rho}, \quad (3.13a)$$

$$D_2 \Psi_-(\omega) \Psi_-^{-1}(\omega) = \frac{\rho \partial_\omega \Psi_-(i\rho) \Psi_-^{-1}(i\rho)}{\omega - i\rho} + \frac{\rho \partial_\omega \Psi_-(-i\rho) \Psi_-^{-1}(-i\rho)}{\omega + i\rho}. \quad (3.13b)$$

Учтем теперь, что $\overline{T}(\overline{\omega}) = T(\omega)$, и определим вещественную матрицу

$$g = -\chi_-(0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\rho^2 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Тогда, рассматривая (3.13) при $\omega = 0$, мы получим, что

$$\partial_\zeta g g^{-1} = \partial_\omega \Psi_-(i\rho) \Psi_-^{-1}(i\rho), \quad \bar{\partial}_\zeta g g^{-1} = \partial_\omega \Psi_-(-i\rho) \Psi_-^{-1}(-i\rho). \quad (3.15)$$

Условием совместности уравнений (3.13) является система (2.1), и, следовательно, (3.14) есть решение (2.1).

С этого момента будем считать, что параметры d_i , M_i найдены из требования симметричности $T(k)$. Тогда

$$\sum_{i=1}^N M_i (d_i + 2\Omega_i M_i) = 0 \quad \left(\lim_{k \rightarrow \infty} k (T_{21}(k) - T_{12}(k)) = 0 \right) \quad (3.16)$$

и $\chi_-(0) = \chi_+(0)$ (см. (3.7)). Из последнего тождества и единственности решения задачи Римана мы получим редуцированную задачу:

$$\chi_-(\omega) = -g\tilde{\chi}_+^{-1}\left(-\frac{\rho^2}{\omega}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/\rho^2 \end{pmatrix} \quad (\tilde{T}(-\rho^2/\omega) = T(\omega)). \quad (3.17)$$

Здесь $\tilde{T}$ обозначает транспонированную матрицу. Устремляя в (3.17) ω к нулю или бесконечности, видим, что g — симметричная матрица.

Изучим свойства решения задачи Римана при $\rho \rightarrow 0$. Пусть $z \in \Gamma_{m+1}$, тогда

$$\omega_i^+ \rightarrow 2(z_i - z), \quad \omega_i^- \rightarrow 0, \quad i \geq 2m+1, \quad \rho \rightarrow 0, \quad (3.18a)$$

и

$$\omega_i^+ \rightarrow 0, \quad \omega_i^- \rightarrow 2(z_i - z), \quad i \leq 2m, \quad \rho \rightarrow 0. \quad (3.18b)$$

Используя формулу $\omega_i^+ = -\rho^2/\omega_i^-$, легко проверить, что все коэффициенты линейной системы (3.10) хорошо определены и при $\rho = 0$, поэтому естественно предположить существование предела $\lim_{\rho \rightarrow 0} a_i$. Это предположение обеспечивает существование всех пределов, использованных ниже.

Введем матрицу

$$\begin{aligned} \chi_1(\omega) &= \chi_-(\omega) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix} G_{2m+1}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\omega \end{pmatrix} = \chi_+(\omega) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix} Q_{2m+1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\omega \end{pmatrix} = \\ &= I + \sum_{i=1}^{2m} \frac{B_i^1}{\omega - \omega_i^+} + \sum_{i=2m+1}^{2N} \frac{B_i^1}{\omega - \omega_i^-}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

здесь

$$Q_i(k) = t_{2N}(k) \dots t_i(k), \quad T(k) = Q_i(k) G_i(k). \quad (3.20)$$

Из (3.18) видим, что

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \chi_1(\omega) = I + \frac{B}{\omega}. \quad (3.21)$$

Далее, пусть

$$\chi_2(\omega) = \chi_+(\omega) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix} \tilde{G}_{2m+1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\omega \end{pmatrix}.$$

Приняв во внимание тождества

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix} \tilde{t}_{2j-1} \tilde{t}_{2j} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\omega \end{pmatrix} \Big|_{\omega=0} = I, \\ &\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix} \tilde{t}_{2j-1} \tilde{t}_{2j} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\omega \end{pmatrix} \Big|_{\omega=\infty} = \begin{pmatrix} 1 & 8M_j(d_j + 2M_j\Omega_j) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

замечаем, что

$$\chi_+(0) = \chi_2(0), \quad \chi_2(\infty) = \begin{pmatrix} 1 & 8 \sum_{j=1}^m M_j(d_j + 2M_j\Omega_j) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

В терминах χ_1, χ_2 задача Римана (3.1) переписывается в виде

$$\chi_2(\omega) = \chi_1(\omega) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix} Q_{2m+1}^{-1} \tilde{G}_{2m+1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\omega \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

а редуцированная задача (3.17) – в виде

$$\chi_2(\omega) = -g\tilde{\chi}_1^{-1} \left(-\frac{\rho^2}{\omega} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/\rho^2 \end{pmatrix} = B^0 + \sum_{i=1}^{2m} \frac{B_i^2}{\omega - \omega_i^-} + \sum_{i=2m+1}^{2N} \frac{B_i^2}{\omega - \omega_i^+}. \quad (3.24)$$

Устремляя в (3.23) $\rho \rightarrow 0$ и учитывая (3.21), получаем

$$\chi_2(\omega) = B^0 + \sum_{i=1}^{2N} \frac{B_i^2}{\omega - 2(z_i - z)} = \left(I + \frac{B}{\omega} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix} \gamma_{m+1}(\omega) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\omega \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

где

$$\gamma_{m+1}(\omega) = Q_{2m+1}^{-1} \left(z + \frac{\omega}{2} \right) \tilde{G}_{2m+1} \left(z + \frac{\omega}{2} \right).$$

Функция $\chi_2(\omega)$ не имеет особенностей при $\omega = 0$. Это возможно только тогда, когда

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma_{m+1}^{12}(0)/\gamma_{m+1}^{22}(0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Окончательно

$$\chi_-(0) = \begin{pmatrix} 1/\gamma_{m+1}^{22}(0) & (\gamma_{m+1}^{22}(0)\partial_\omega \gamma_{m+1}^{12}(0) - \gamma_{m+1}^{12}(0)\partial_\omega \gamma_{m+1}^{22}(0))/\gamma_{m+1}^{22}(0) \\ 0 & \gamma_{m+1}^{22}(0) \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Напомним, что $\chi_-(0) = \chi_+(0) = \chi_2(0)$. Заметим теперь, что $\gamma_{m+1}(0)$ – симметричная вещественная матрица с единичным определителем, а $\gamma_{m+1}^{22}(0) \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty$, следовательно,

$$\gamma_{m+1}^{22}(0) > 0. \quad (3.27)$$

Так как

$$\frac{\hat{X}}{\lambda^2 - m_i^2} \Big|_{\Gamma_{i+1}} = \gamma_{i+1}^{22}(0, z), \quad \frac{\hat{X}}{\lambda^2 - m_i^2} \Big|_{\Gamma_i} = \gamma_i^{22}(0, z),$$

а $\lambda^2 - m_i^2 \rightarrow (z - z_{2i})(z - z_{2i-1})$ при $\rho \rightarrow 0$, находим

$$\hat{X}(z_{2i}) = m_i \operatorname{res}_{z_{2i}} \gamma_{i+1}^{22}(0, z), \quad \hat{X}(z_{2i-1}) = -m_i \operatorname{res}_{z_{2i-1}} \gamma_i^{22}(0, z). \quad (3.28)$$

Отметим также, что

$$\operatorname{res}_{z_{2i}} \gamma_{i+1}^{22}(0, z) > 0, \quad \operatorname{res}_{z_{2i-1}} \gamma_i^{22}(0, z) < 0.$$

Последние неравенства следуют из (3.27). Формулы (2.11), (3.28) дают искомое аналитическое выражение для констант b_i и силы взаимодействия черных дыр (2.8).

4. СИЛА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ ЧЕРНЫХ ДЫР

В случае двух черных дыр ось симметрии имеет три компоненты связности. Нормируем β так, чтобы $b_1 = b_3 = 0$. Тогда

$$F = \frac{1}{4} \left(\frac{\hat{X}(z_2)}{\hat{X}(z_1)} - 1 \right), \quad (4.1)$$

а

$$\hat{X}(z_2) = m_1 \operatorname{res}_{z_2} \gamma_2^{22}(0, z), \quad \hat{X}(z_1) = -m_1 \operatorname{res}_{z_1} \gamma_1^{22}(0, z). \quad (4.2)$$

Выражение (4.1) зависит от $d_i, \Omega_i, L_i, M_i, z_i$. Эти параметры не являются независимыми и должны удовлетворять системе нелинейных алгебраических уравнений

$$\operatorname{res}_{z_i} T_{12}(k) = \operatorname{res}_{z_i} T_{21}(k), \quad M_i = m_i + 2\Omega_i L_i. \quad (4.3)$$

Из (3.16) легко видеть, что

$$d_1 = -2M_1\Omega_1 + M_2d, \quad d_2 = -2M_2\Omega_2 - M_1d. \quad (4.4)$$

Используя (4.3), (4.4), можно исключить параметры $d_1, d_2, \Omega_1, \Omega_2$ из выражения для силы взаимодействия (4.1). К сожалению, полученная таким образом формула чрезвычайно громоздка. Однако в одном простом случае ситуация значительно упрощается. А именно, пусть черные дыры вращаются в противоположных направлениях и имеют одинаковые полные и неприводимые массы:

$$M_1 = M_2 = M, \quad m_1 = m_2 = m, \quad \Omega_1 = -\Omega_2 = \Omega.$$

Положим

$$z_1 = -m_1, \quad z_2 = m_1, \quad z_3 = R - m_2, \quad z_4 = R + m_2. \quad (4.5)$$

Тогда

$$L = 2M^2(m + M) \frac{R + 2M}{R - 2M} \Omega, \quad M = m + 2\Omega L, \quad L_1 = -L_2 = L, \quad d = 0 \quad (4.6)$$

и

$$F = \frac{M^2}{R^2 - 4M^2}. \quad (4.7)$$

По определению $R \geq 2m$. Используя (4.6), нетрудно показать, что $2M \leq R$ (равенство достигается только в предельном случае $R = 2m$), следовательно, $F > 0$ и стремится к бесконечности, когда $R \rightarrow 2m$. Заметим, что величина силы взаимодействия в рассматриваемом случае в точности совпадает с ее значением в случае двух черных дыр Шварцшильда с одинаковыми массами, равными M . Сила взаимодействия двух невращающихся черных дыр ($\Omega_1 = \Omega_2 = 0$) определяется следующей формулой:

$$F = \frac{m_1 m_2}{R^2 - (m_1 + m_2)^2}. \quad (4.8)$$

Легко видеть, что в рассмотренных случаях F стремится к ньютоновскому пределу при $R \rightarrow \infty$. Последний результат можно обобщить. А именно: при $R \rightarrow \infty$ имеет место оценка

$$F = \frac{M_1 M_2}{R^2} + O\left(\frac{1}{R^4}\right). \quad (4.9)$$

Для получения (4.9) достаточно ограничиться приближенным решением системы (4.3):

$$d = -\frac{2L_2 M_1 + 2L_1 M_2}{M_1 M_2} \frac{1}{R^2} + 4\left(L_1 + L_2 + \frac{2L_1 M_2^2 + 2L_2 M_1^2}{M_1 M_2}\right) \frac{1}{R^3} + O\left(\frac{1}{R^4}\right),$$

$$\Omega_i = \frac{L_i a_i}{2M_i^2(M_i + m_i)}$$

и

$$a_1 = 1 - \frac{4M_2}{R} + \frac{8M_2^2}{R^2} + O\left(\frac{1}{R^3}\right), \quad a_2 = 1 - \frac{4M_1}{R} + \frac{8M_1^2}{R^2} + O\left(\frac{1}{R^3}\right).$$

Обсудим теперь общие свойства уравнений связи угловых скоростей и угловых моментов (4.3). Особо отметим, что равенство $L_2 = \Omega_2 = 0$ не может быть выполнено ни при каких значениях оставшихся параметров. Это означает, что если $L_2 = 0$ и вторая черная дыра не дает вклада в общий угловой момент, наблюдатель, приближающийся к ней, все же обнаружит, что эта черная дыра совершает вращение с некоторой угловой скоростью. Мы рассматриваем такое поведение как вполне естественное. Действительно, понятие угловой скорости связано с поведением геодезических в окрестности черной дыры. А именно, пробная частица, приближающаяся к черной дыре, будет вовлечена в ее вращение, а угловая скорость этого вращения станет равной угловой скорости черной дыры, когда частица достигнет горизонта событий. Следовательно, отличие от нуля угловой скорости обусловлено тем, что первая черная дыра вовлекает вторую в свое вращение. Такое объяснение вполне соответствует поведению Ω_2 на больших расстояниях: если $L_2 = 0$, то $\Omega_2 = O(1/R^3)$.

Вернемся к точному решению (4.6). Имея в виду предыдущее обсуждение, будем считать независимыми параметрами угловые моменты каждой из черных дыр. Тогда при $R \rightarrow 2m$ имеем $\Omega \rightarrow 0$, а $M \rightarrow m$, т.е., приближаясь друг к другу, черные дыры теряют полную массу и “тормозят” вращение друг друга.

Разумеется, реалистичное решение для конфигурации двух черных дыр не может быть стационарным. Однако, как мы только что видели, стационарное решение допускает достаточно реалистичное физическое толкование и демонстрирует, по крайней мере качественно, эффекты, возникающие при взаимодействии черных дыр. На наш взгляд, это обусловлено тем, что уравнения Эйнштейна определяют не только гравитационное поле, но и законы движения материальных тел [11].

Эта работа была поддержана РФФИ, код проекта 96-01-00548.

Список литературы

- [1] Г. Г. Варзугин. ТМФ. 1997. Т. 111. С. 345.
- [2] B. Carter. Black hole equilibrium states. In: Black Hole. Eds C. DeWitt and B.S. DeWitt. N.Y.: Gordon and Breach, 1975.
- [3] R. Bach, H. Weyl. Math. Z. 1921. V. 13. P. 132.
- [4] G. Weinstein. Commun. Pure Appl. Math. 1990. V. 43. P. 903.
- [5] G. Weinstein. Commun. Pure Appl. Math. 1992. V. 45. P. 1183.
- [6] G. Weinstein. Trans. Am. Math. Soc. 1994. V. 343. P. 899.
- [7] Y. Li, G. Tian. Manuscripta Math. 1991. V. 73. P. 83.
- [8] R. Beals, R. Coifman. Pure Appl. Math. 1984. V. 37. P. 39.
- [9] В. А. Белинский, В. Е. Захаров. ЖЭТФ. 1955. Т. 75. С. 1953.
- [10] В. А. Белинский, В. Е. Захаров. ЖЭТФ. 1979. Т. 77. С. 3.
- [11] В. А. Фок. ЖЭТФ. 1939. Т. 9. С. 375.

Поступила в редакцию 25.II.1998 г.