Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Сураваттинак, С. Ю-Конг, М. Танаситтикосол,
О мультипликативной форме лагранжиана, *ТМФ*, 2016,
том 189, номер 3, 335–354

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9101>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 16:20:09

© 2016 г.

К. Сураваттинак*, С. Ю-Конг*^{†‡},
М. Танаситтикосол*

О МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ФОРМЕ ЛАГРАНЖИАНА

Получен альтернативный класс лагранжианов в так называемой мультипликативной форме для системы с одной степенью свободы в нерелятивистском и релятивистском случаях. Эту новую форму лагранжианов можно представить как однопараметрический класс с параметром λ , полученный с помощью расширения стандартной аддитивной формы лагранжиана, поскольку обе формы приводят к одному и тому же уравнению движения. Следует отметить, что мультипликативную форму лагранжиана можно рассматривать как производящую функцию для получения бесконечной иерархии лагранжианов, которые приводят к одному и тому же уравнению движения. Тот факт, что данное множество лагранжианов нетривиально, подтверждает, что функция Лагранжа неединственна.

Ключевые слова: неединственность, мультипликативная форма, гамильтониан.

DOI: 10.4213/tmf9101

1. ВВЕДЕНИЕ

Лагранжев формализм является одним из стандартных методов в классической механике. Функция Лагранжа и связанные с ней уравнения движения выражаются в терминах обобщенных координат. Преимущество этого метода заключается в том, что он способствует определению сохраняющихся величин с помощью циклических переменных. Кроме того, можно применить теорему Нётер для нахождения законов сохранения. Лагранжиан в виде, который в этой статье называется аддитивной формой, можно выразить в терминах скалярных функций энергии. Используя преобразование Лежандра, возможно построить функцию Гамильтона и изучить систему с точки зрения гамильтонова формализма.

Работа С. Ю-Конга поддержана Thailand Research Fund (Theoretical and Computational Physics Group) (грант № TaCS2558-2).

---

*Theoretical and Computational Physics Group, Department of Physics, Faculty of Science, King Mongkut's University of Technology Thonburi, Thailand

[†]Theoretical and Computational Science Center, Faculty of Science, King Mongkut's University of Technology Thonburi, Thailand. E-mail: syookong@gmail.com

[‡]Ratchaburi Campus, King Mongkut's University of Technology Thonburi, Thailand

Хорошо известно, что лагранжиан не единствен. Можно умножить его на константу β или прибавить к нему константу α : $L \rightarrow \beta L + \alpha$, при этом уравнение движения системы не изменится, поскольку уравнения Эйлера–Лагранжа включают только производные лагранжиана. Можно также прибавить к лагранжиану полную производную: $L \rightarrow L + df(x, t)/dt$, что снова не изменит уравнения движения системы.

Интересный момент заключается в следующем. При наличии уравнений движения необходимо сначала найти соответствующий лагранжиан, если мы намерены использовать лагранжевы формализм. Некоторые попытки нахождения лагранжиана были предприняты в работе [1] (см. также ссылки в ней), но общий механизм поиска решения все еще не известен. В настоящей статье мы пытаемся найти ответы на следующие вопросы: существует ли альтернативная форма лагранжиана, а также связанного с ним гамильтониана, помимо стандартной аддитивной формы? И если это так, можно ли описать метод их получения?

Статья построена следующим образом. В разделе 2 мы осуществляем поиск мультипликативного лагранжиана для нерелятивистского случая с одной степенью свободы. Затем мы устанавливаем преобразование Лежандра между мультипликативным гамильтонианом и мультипликативным лагранжианом. Также непосредственно решена задача с мультипликативным гамильтонианом и проведено сравнение полученных результатов с результатом применения преобразования Лежандра. Мы приходим к интересному наблюдению, связанному с мультипликативной формой лагранжиана: ее можно рассматривать как производящую функцию для бесконечной иерархии лагранжианов. В разделе 3 идеи раздела 2 распространены на релятивистский случай для определения мультипликативного лагранжиана и мультипликативного гамильтониана. Также рассматривается бесконечная иерархия лагранжианов. Наконец, в разделе 4 приведены итоги с некоторыми замечаниями.

2. НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЙ СЛУЧАЙ

В этом разделе рассматривается система с одной степенью свободы, когда уравнение движения дается выражением

$$m\ddot{x} = -\frac{dV(x)}{dx}, \quad (2.1)$$

где $V(x)$ – потенциал. Лагранжиан можно записать в виде

$$L_N(x, \dot{x}) = T(\dot{x}) - V(x), \quad (2.2)$$

где $T(\dot{x}) = m\dot{x}^2/2$ – кинетическая энергия. Используя преобразование Лежандра, получаем гамильтониан

$$H_N(p, x) = p\dot{x} - L(x, \dot{x}) = T(p) + V(x), \quad (2.3)$$

где $T(p) = p^2/2m$ – кинетическая энергия, но записанная в терминах импульса $p = m\dot{x}$. Уравнение (2.1) можно представить в виде

$$\dot{p} = -\frac{dV(x)}{dx}. \quad (2.4)$$

Возникает вопрос: существуют ли альтернативные формы лагранжиана и гамильтониана, приводящие к такому же уравнению движения?

2.1. Мультипликативный лагранжиан. Чтобы ответить на вопрос, сформулированный выше, рассмотрим анзац лагранжиана¹⁾ $L = F(\dot{x})G(x)$, где F и G предстоит определить. Получаем, что функционал действия равен

$$S[x] = \int_0^T L(\dot{x}, x) dt = \int_0^T F(\dot{x})G(x) dt. \quad (2.5)$$

Согласно вариационному принципу находим, что

$$\begin{aligned} S[x + \delta x] &= \int_0^T L(\dot{x} + \delta \dot{x}, x + \delta x) dt = \int_0^T F(\dot{x} + \delta \dot{x})G(x + \delta x) dt, \\ S + \delta S + \dots &= \int_0^T \left(\left[F(\dot{x}) + \delta \dot{x} \frac{dF(\dot{x})}{d\dot{x}} + \dots \right] \left[G(x) + \delta x \frac{dG(x)}{dx} + \dots \right] \right) dt = \\ &= \int_0^T \left(F(\dot{x})G(x) + \delta \dot{x} \frac{dF(\dot{x})}{d\dot{x}} G(x) + \delta x F(\dot{x}) \frac{dG(x)}{dx} + \dots \right) dt, \\ \delta S &= \int_0^T \left(\delta \dot{x} \frac{dF(\dot{x})}{d\dot{x}} G(x) + \delta x F(\dot{x}) \frac{dG(x)}{dx} \right) dt = \\ &= \int_0^T \left(-\frac{d}{dt} \left(G(x) \frac{dF(\dot{x})}{d\dot{x}} \right) + F(\dot{x}) \frac{dG(x)}{dx} \right) \delta x dt, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где мы полагаем, что $\delta x(0) = \delta x(T) = 0$. Согласно (2.6) δS становится равным нулю, если

$$F(\dot{x}) \frac{dG(x)}{dx} - \frac{d}{dt} \left(G(x) \frac{dF(\dot{x})}{d\dot{x}} \right) = 0, \quad (2.7)$$

что можно рассматривать как новое уравнение Эйлера–Лагранжа, связанное с мультипликативным лагранжианом. Кроме того, уравнение (2.7) можно переписать в виде

$$\frac{1}{\ddot{x}G} \frac{dG}{dx} \left(F - \dot{x} \frac{dF}{d\dot{x}} \right) - \frac{d^2 F}{d\dot{x}^2} = 0. \quad (2.8)$$

Используя метод разделения переменных, положим

$$\frac{1}{\ddot{x}G} \frac{dG}{dx} = A \implies \frac{1}{G} \frac{dG}{dx} = A\ddot{x}. \quad (2.9)$$

С использованием уравнения движения (2.1) выражение (2.9) принимает вид

$$\frac{1}{G} \frac{dG}{dx} = -\frac{A}{m} \frac{dV(x)}{dx}. \quad (2.10)$$

Параметр A – константа, которая будет определена позже. Решение уравнения (2.9) приобретает вид

$$G(x) = \alpha_1 e^{-AV(x)/m}, \quad (2.11)$$

где α_1 – константа. С учетом (2.9) уравнение (2.8) теперь сводится к уравнению

$$A \left(F - \dot{x} \frac{dF}{d\dot{x}} \right) - \frac{d^2 F}{d\dot{x}^2} = 0, \quad (2.12)$$

¹⁾Это представление основано на результатах работы [2].

и решение для F дается выражением

$$F(\dot{x}) = \alpha_2 \dot{x} - \alpha_3 \left(e^{-A\dot{x}^2/2} + \dot{x}A \int_0^{\dot{x}} e^{-Av^2/2} dv \right), \quad (2.13)$$

где α_2 и α_3 – константы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Уравнение (2.8) можно переписать следующим образом:

$$\frac{1}{G} \frac{dG}{dx} \left(F - \dot{x} \frac{dF}{d\dot{x}} \right) - \frac{1}{m} \frac{d^2 F}{d\dot{x}^2} \frac{dV}{dx} = - \frac{d^2 F}{d\dot{x}^2} \left(\dot{x} + \frac{1}{m} \frac{dV}{dx} \right) \equiv A(x, \dot{x}).$$

Для того чтобы уравнения движения с различными лагранжианами совпадали, условие $A(x, \dot{x}) = 0$ должно выполняться при произвольных независимых переменных x и $\dot{x}$, что снова приводит к формулам (2.11) и (2.13).

Используя полученные F и G , находим мультипликативную форму лагранжиана, которая дается выражением

$$L(x, \dot{x}) = \left[k_1 \dot{x} - k_2 \left(e^{-A\dot{x}^2/2} + \dot{x}A \int_0^{\dot{x}} e^{-Av^2/2} dv \right) \right] e^{-AV(x)/m}, \quad (2.14)$$

где $k_1 = \alpha_1 \alpha_2$ и $k_2 = \alpha_1 \alpha_3$ – константы, которые необходимо определить. Чтобы найти все остальные константы, применим разложение

$$L = \left(k_1 \dot{x} - k_2 \left[1 - \frac{A\dot{x}^2}{2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{A\dot{x}^2}{2} \right)^2 - \dots \right] - k_2 \dot{x}A \int_0^{\dot{x}} \left[1 - \frac{Av^2}{2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{Av^2}{2} \right)^2 - \dots \right] dv \right) \left[1 - \frac{AV(x)}{m} + \frac{1}{2!} \left(\frac{AV(x)}{m} \right)^2 - \dots \right]. \quad (2.15)$$

Если считать величину A обратной величине квадрата скорости: $A = \lambda^{-2}$, $k_1 = 0$ и выразить k_2 в единицах энергии $-m\lambda^2$, то лагранжиан (2.15) в пределе, когда λ устремляется в бесконечность, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} L &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(m\lambda^2 \left[1 - \frac{\dot{x}^2}{2\lambda^2} + \dots \right] + m\dot{x} \int_0^{\dot{x}} \left[1 - \frac{v^2}{2\lambda^2} + \dots \right] dv \right) \times \\ &\quad \times \left(1 - \frac{V(x)}{m\lambda^2} + \dots \right) = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} m\lambda^2 \left(1 + \frac{\dot{x}^2}{2\lambda^2} + \dots \right) \left(1 - \frac{V(x)}{m\lambda^2} + \dots \right) = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} m\lambda^2 \left(1 + \frac{\dot{x}^2}{2\lambda^2} - \frac{V(x)}{m\lambda^2} + \dots \right), \\ \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (L - m\lambda^2) &= \frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x) = L_N, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где L_N – стандартный лагранжиан в аддитивной форме (2.2). Таким образом, лагранжиан принимает вид

$$L_\lambda(x, \dot{x}) = m\lambda^2 \left(e^{-\dot{x}^2/2\lambda^2} + \frac{\dot{x}}{\lambda^2} \int_0^{\dot{x}} e^{-v^2/2\lambda^2} dv \right) e^{-V(x)/m\lambda^2}, \quad (2.17)$$

и его можно считать однопараметрическим с параметром λ расширенным классом лагранжианов. Действительно, лагранжиан (2.14) представляет собой стандартный лагранжиан в предельном случае (2.16).

Далее, импульс дается выражением

$$p_\lambda = \frac{\partial L_\lambda}{\partial \dot{x}} = m \left(\int_0^{\dot{x}} e^{-v^2/2\lambda^2} dv \right) e^{-V(x)/m\lambda^2}, \quad (2.18)$$

с помощью которого в пределе, когда λ устремляется в бесконечность, мы получаем стандартный импульс: $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} p_\lambda = p = m\dot{x}$.

Теперь находим, что

$$\frac{\partial L_\lambda}{\partial x} = \left(e^{-\dot{x}^2/2\lambda^2} + \frac{\dot{x}}{\lambda^2} \int_0^{\dot{x}} e^{-v^2/2\lambda^2} dv \right) e^{-V(x)/m\lambda^2} \left(-\frac{dV(x)}{dx} \right), \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial x \partial \dot{x}} = \frac{1}{\lambda^2} \left(\int_0^{\dot{x}} e^{-v^2/2\lambda^2} dv \right) e^{-V(x)/m\lambda^2} \left(-\frac{dV(x)}{dx} \right). \quad (2.20)$$

Подставляя (2.19) и (2.20) в уравнения Эйлера–Лагранжа

$$\frac{\partial L_\lambda}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_\lambda}{\partial \dot{x}} \right) = 0,$$

с помощью соотношения

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_\lambda}{\partial \dot{x}} \right) = \dot{x} \frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial \dot{x}^2} + \dot{x} \frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial x \partial \dot{x}} \quad (2.21)$$

получаем, что

$$\begin{aligned} 0 &= \left(e^{-\dot{x}^2/2\lambda^2} + \frac{\dot{x}}{\lambda^2} \int_0^{\dot{x}} e^{-v^2/2\lambda^2} dv \right) e^{-V(x)/m\lambda^2} \left(-\frac{dV(x)}{dx} \right) - \\ &\quad - m\ddot{x} \left(e^{-\dot{x}^2/2\lambda^2} \right) e^{-V(x)/m\lambda^2} - \frac{\dot{x}}{\lambda^2} \left(\int_0^{\dot{x}} e^{-v^2/2\lambda^2} dv \right) e^{-V(x)/m\lambda^2} \left(-\frac{dV(x)}{dx} \right) = \\ &= e^{-\dot{x}^2/2\lambda^2} \left(-\frac{dV(x)}{dx} - m\ddot{x} \right). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Из уравнения (2.22) следует уравнение движения (2.1), и это завершает наш поиск альтернативного класса лагранжианов.

2.2. Мультипликативный гамильтониан. В предыдущем пункте мы нашли мультипликативную форму лагранжиана. В аддитивном случае гамильтониан и лагранжиан связаны с помощью преобразования Лежандра. Интересно выяснить, каким образом оно работает в случае мультипликативного лагранжиана. Согласно теореме Нётер

$$\frac{dL_\lambda}{dt} = \frac{\partial L_\lambda}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial L_\lambda}{\partial \dot{x}} \ddot{x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_\lambda}{\partial \dot{x}} \right) \dot{x} + \frac{\partial L_\lambda}{\partial \dot{x}} \ddot{x} \implies 0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_\lambda}{\partial \dot{x}} \dot{x} - L_\lambda(\dot{x}, x) \right), \quad (2.23)$$

откуда следует, что члены в скобках должны быть инвариантны относительно времени, что приводит к выражению

$$H_\lambda(p, x) \equiv \frac{\partial L_\lambda}{\partial \dot{x}} \dot{x} - L_\lambda(\dot{x}, x), \quad (2.24)$$

где H_λ – новый тип функции Гамильтона с параметром λ . Подставляя (2.18) в (2.24) и используя формулу $p = m\dot{x}$, находим, что

$$\begin{aligned} H_\lambda(p, x) &= m\lambda^2 \left[\left(\frac{1}{\lambda^2} \int_0^p e^{-\xi^2/2m^2\lambda^2} \frac{d\xi}{m} \right) \frac{p}{m} - m\lambda^2 \left(e^{-p^2/2m^2\lambda^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{p}{m^2\lambda^2} \int_0^p e^{-\xi^2/2m^2\lambda^2} \frac{d\xi}{m} \right) \right] e^{-V(x)/m\lambda^2} = \\ &= -m\lambda^2 e^{-p^2/2m^2\lambda^2} e^{-V(x)/m\lambda^2} = -m\lambda^2 e^{-H_N/m\lambda^2}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

и его можно рассматривать как однопараметрический с параметром λ расширенный класс гамильтонианов.

Покажем, как построить мультипликативный гамильтониан. Предположим, что гамильтониан имеет вид анзаца: $H_\lambda = K(p)B(x)$, и удовлетворяет уравнению Гамильтона

$$\dot{x} = \frac{\partial H_\lambda}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H_\lambda}{\partial x}. \quad (2.26)$$

Используя (2.26), производную по времени импульса $p = m\dot{x}$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} -\frac{\partial H_\lambda}{\partial x} &= m \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H_\lambda}{\partial p} \right), \\ -\frac{1}{m} \frac{\partial H_\lambda}{\partial x} &= \dot{p} \frac{\partial^2 H_\lambda}{\partial p^2} + \frac{p}{m} \frac{\partial^2 H_\lambda}{\partial p \partial x}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Подставляя H_λ в (2.27), получаем равенство

$$\frac{d^2 K}{dp^2} + \frac{1}{m\dot{p}B} \frac{dB}{dx} \left(p \frac{dK}{dp} + K \right) = 0. \quad (2.28)$$

Чтобы решить дифференциальное уравнение, введем определение

$$\frac{1}{m\dot{p}B} \frac{dB}{dx} \equiv W, \quad (2.29)$$

где W – константа, которую необходимо найти. Используя уравнение движения (2.4), мы получаем, что B принимает вид

$$B(x) = \beta_1 e^{-mWV(x)}, \quad (2.30)$$

где β_1 – константа. Подставляя (2.29) в (2.28), легко видеть, что

$$K(p) = \beta_2 e^{-Wp^2/2}, \quad (2.31)$$

где β_2 – также константа. Тогда мультипликативный гамильтониан дается выражением

$$H_\lambda(p, x) = \kappa e^{-Wp^2/2} e^{-mAV(x)},$$

в котором $\kappa = \beta_1\beta_2$ – новая константа. Чтобы определить параметры W и κ , мы можем действовать так же, как и в случае лагранжиана, выбрав $W = 1/m^2\lambda^2$,

$\kappa = -m\lambda^2$ и рассматривая предел, когда λ устремляется в бесконечность:

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda \rightarrow \infty} H_\lambda &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[-m\lambda^2 \left(1 - \frac{p^2}{2m^2\lambda^2} + \dots \right) \left(1 - \frac{V(x)}{m\lambda^2} + \dots \right) \right] = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[-m\lambda^2 \left(1 - \frac{p^2}{2m^2\lambda^2} - \frac{V(x)}{m\lambda^2} + \dots \right) \right], \\ \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (H_\lambda + m\lambda^2) &= \frac{p^2}{2m} + V(x) = H_N,\end{aligned}\tag{2.32}$$

где H_N – стандартный гамильтониан в аддитивной форме (2.3). Наконец, мультипликативный гамильтониан определяется формулой

$$H_\lambda(p, x) = -m\lambda^2 e^{-H_N/m\lambda^2},\tag{2.33}$$

идентичной формуле, полученной с помощью преобразования Лежандра.

Последний шаг заключается в том, чтобы показать, что гамильтониан (2.33) приводит к такому же уравнению движения, что и гамильтониан в ньютоновской механике. Чтобы осуществить это, подставим гамильтониан (2.33) в (2.27) и получим выражения

$$\begin{aligned}-\frac{dV(x)}{dx} &= -\frac{p^2}{m^2\lambda^2} \frac{dV(x)}{dx} + \dot{p} \left(-\frac{p^2}{m^2\lambda^2} + 1 \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{dV(x)}{dx} \left(-\frac{p^2}{m^2\lambda^2} + 1 \right) &= \dot{p} \left(-\frac{p^2}{m^2\lambda^2} + 1 \right) \Rightarrow -\frac{dV(x)}{dx} = \dot{p},\end{aligned}$$

последнее из которых есть не что иное, как уравнение движения (2.4).

2.3. Бесконечная иерархия лагранжианов. В предыдущих пунктах мы нашли альтернативные формы лагранжиана и гамильтониана для системы с одной степенью свободы. Новый параметр λ естественным образом появляется в системе как предел для дополнительных форм лагранжиана и гамильтониана. В настоящем разделе мы изучаем роль параметра λ с другой точки зрения. Для этого рассмотрим разложение мультипликативной формы лагранжиана (2.17):

$$\begin{aligned}\frac{L_\lambda}{m\lambda^2} &= \left(1 + \frac{T}{m\lambda^2} - \frac{1}{2!3} \left(\frac{T}{m\lambda^2} \right)^2 + \dots + \frac{(-1)^{j-1}}{j!2j-1} \left(\frac{T}{m\lambda^2} \right)^j + \dots \right) \times \\ &\times \left(1 - \frac{V}{m\lambda^2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{V}{m\lambda^2} \right)^2 + \dots + \frac{(-1)^j}{j!} \left(\frac{V}{m\lambda^2} \right)^j + \dots \right) = \\ &= 1 + \frac{1}{1!m\lambda^2} [T - V] - \frac{1}{2!(m\lambda^2)^2} \left[\frac{T^2}{3} + 2TV - V^2 \right] + \\ &+ \frac{1}{3!(m\lambda^2)^3} \left[\frac{T^3}{5} + T^2V + 3TV^2 - V^3 \right] + \dots + \\ &+ \frac{(-1)^{j-1}}{j!(m\lambda^2)^j} \left[\frac{T^j}{2j-1} + \frac{jT^{j-1}V}{2j-3} + \frac{j(j-1)T^{j-2}V^2}{2!(2j-5)} + \dots + jTV^{j-1} - V^j \right] + \dots,\end{aligned}\tag{2.34}$$

где кинетическая энергия является функцией скорости: $T = T(\dot{x})$. Собирая коэффициенты в разложении, получаем последовательность $\{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \dots, \mathcal{L}_j, \dots\}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}\left(\frac{1}{1!(m\lambda^2)^1}\right): \quad \mathcal{L}_1 &\equiv T - V, \\ \mathcal{O}\left(\frac{1}{2!(m\lambda^2)^2}\right): \quad \mathcal{L}_2 &\equiv \frac{T^2}{3} + 2TV - V^2, \\ \mathcal{O}\left(\frac{1}{3!(m\lambda^2)^3}\right): \quad \mathcal{L}_3 &\equiv \frac{T^3}{5} + T^2V + 3TV^2 - V^3, \\ &\dots\dots\dots, \\ \mathcal{O}\left(\frac{1}{j!(m\lambda^2)^j}\right): \quad \mathcal{L}_j &\equiv \frac{T^j}{2j-1} + \frac{jT^{j-1}V}{2j-3} + \frac{j(j-1)T^{j-2}V^2}{2!(2j-5)} + \\ &+ \dots + jTV^{j-1} - V^j \quad \text{и т. д.,} \end{aligned} \quad (2.35)$$

которая образует бесконечное множество функций Лагранжа, называемое бесконечной иерархией лагранжианов. Кроме того, справедливы равенства

$$\mathcal{L}_{j-1} = \frac{1}{j} \frac{\partial \mathcal{L}_j}{\partial V}, \quad (2.36)$$

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{j!} \frac{\partial^{j-1} \mathcal{L}_j}{\partial V^{j-1}}, \quad (2.37)$$

если потенциальная энергия понимается как переменная величина. С помощью выражений (2.35) можно записать (2.34) в компактном виде:

$$L_\lambda = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{-1}{m\lambda^2} \right)^{j-1} \mathcal{L}_j, \quad (2.38)$$

где

$$\mathcal{L}_j = \sum_{k=0}^j \left[\frac{j! T^{j-k} V^k}{(j-k)! k! (2j - (2k+1))} \right]. \quad (2.39)$$

Интересно то, что лагранжианы в иерархии порождают уравнение движения (2.1). Чтобы показать это, применим следующие формулы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_j}{\partial x} &= \sum_{k=1}^j \left[\frac{j! T^{j-k} V^{k-1}}{(j-k)! (k-1)! (2j - (2k+1))} \right] \frac{dV}{dx} = \\ &= \sum_{k=0}^{j-1} \left[\frac{j! T^{j-k-1} V^k}{(j-k-1)! k! (2j - (2k+3))} \right] \frac{dV}{dx} = \\ &= \left(\sum_{k=0}^{j-2} \left[\frac{j! T^{j-k-1} V^k}{(j-k-1)! k! (2j - (2k+3))} \right] + \frac{j! V^{j-1}}{(j-1)! (-1)} \right) \frac{dV}{dx}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}_j}{\partial \dot{x}} &= \sum_{k=0}^{j-1} \left[\frac{j! T^{j-k-1} V^k}{(j-k-1)! k! (2j - (2k+1))} \right] m \dot{x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x} \frac{\partial^2 \mathcal{L}_j}{\partial x \partial \dot{x}} &= \sum_{k=1}^{j-1} \left[\frac{j! T^{j-k-1} V^{k-1}}{(j-k-1)!(k-1)!(2j-(2k+1))} \right] m \dot{x}^2 \frac{dV}{dx} = \\
&= \sum_{k=1}^{j-1} \left[\frac{j! T^{j-k} V^{k-1}}{(j-k-1)!(k-1)!(2j-(2k+1))} \right] 2 \frac{dV}{dx} = \\
&= \sum_{k=0}^{j-2} \left[\frac{2j! T^{j-k-1} V^k}{(j-k-2)!k!(2j-(2k+3))} \right] \frac{dV}{dx}, \\
\ddot{x} \frac{\partial^2 \mathcal{L}_j}{\partial^2 \dot{x}} &= \ddot{x} \left(\sum_{k=0}^{j-1} \left[\frac{j! T^{j-k-1} V^k}{(j-k-1)!k!(2j-(2k+1))} \right] m + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=0}^{j-2} \left[\frac{j! T^{j-k-2} V^k}{(j-k-2)!k!(2j-(2k+1))} \right] m^2 \dot{x}^2 \right) = \\
&= \sum_{k=0}^{j-1} \left[\frac{j! T^{j-k-1} V^k}{(j-k-1)!k!(2j-(2k+1))} \right] m \ddot{x} + \\
&\quad + \sum_{k=0}^{j-2} \left[\frac{2j! T^{j-k-1} V^k}{(j-k-2)!k!(2j-(2k+1))} \right] m \ddot{x} = \\
&= \left(\sum_{k=0}^{j-2} \left[\frac{j! T^{j-k-1} V^k}{(j-k-1)!k!} \left(\frac{1+2(j-k-1)}{(2j-(2k+1))} \right) \right] + \frac{j! V^{j-1}}{(j-1)!} \right) m \ddot{x} = \\
&= \left(\sum_{k=0}^{j-2} \left[\frac{j! T^{j-k-1} V^k}{(j-k-1)!k!} \right] + \frac{j! V^{j-1}}{(j-1)!} \right) m \ddot{x}.
\end{aligned}$$

Подставляем вышеприведенные результаты в уравнение Эйлера–Лагранжа

$$\frac{\partial \mathcal{L}_j}{\partial x} - \dot{x} \frac{\partial^2 \mathcal{L}_j}{\partial x \partial \dot{x}} - \ddot{x} \frac{\partial^2 \mathcal{L}_j}{\partial^2 \dot{x}} = 0,$$

что дает уравнение движения (2.1).

В соответствии со структурой бесконечной иерархии лагранжианов рассмотрим мультипликативную форму лагранжиана как производящую функцию для полиномов Лагранжа²⁾ в (2.35), а параметр λ – как математический инструмент для перехода от мультипликативной к аддитивной форме лагранжиана.

Будем искать гамильтониан, соответствующий каждому лагранжиану $\mathcal{L}_j$ в иерархии (2.35). Во-первых, начнем с применения преобразования Лежандра:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_j &= \dot{x} \frac{\partial \mathcal{L}_j}{\partial \dot{x}} - \mathcal{L}_j = \\
&= \sum_{k=0}^{j-1} \left[\frac{2j! T^{j-k} V^k}{(j-k-1)!k!(2j-(2k+1))} \right] - \sum_{k=0}^j \left[\frac{j! T^{j-k} V^k}{(j-k)!k!(2j-(2k+1))} \right] =
\end{aligned}$$

²⁾Разумеется, мы имеем в виду не интерполяционные полиномы Лагранжа, а полиномы относительно кинетической и потенциальной энергий.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{j-1} \left[\frac{j! T^{j-k} V^k}{(j-k)! k!} \left(\frac{2(j-k)-1}{(2j-(2k+1))} \right) - \frac{V^j}{(-1)} \right] = \\
&= \sum_{k=0}^{j-1} \left[\frac{j! T^{j-k} V^k}{(j-k)! k!} + V^j \right] = \sum_{k=0}^j \left[\frac{j! T^{j-k} V^k}{(j-k)! k!} \right] = (T+V)^j = H_N^j, \tag{2.40}
\end{aligned}$$

где кинетическая энергия выражается в терминах импульса: $T = T(p)$. Во-вторых, разложим мультипликативный гамильтониан:

$$H_\lambda = -m\lambda^2 e^{-(T+V)/m\lambda^2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{-1}{m\lambda^2} \right)^{j-1} (T+V)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{-1}{m\lambda^2} \right)^{j-1} \mathcal{H}_j. \tag{2.41}$$

Теперь мы получаем иерархию гамильтонианов

$$\{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3, \dots, \mathcal{H}_j, \dots\} = \{H_N, H_N^2, H_N^3, \dots, H_N^j, \dots\},$$

которую можно преобразовать в иерархию лагранжианов (2.35) с помощью преобразования Лежандра (2.40).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для гармонического осциллятора иерархию гамильтонианов можно получить благодаря тому, что существует пространственная матрица Лакса $\mathbf{L}$, задаваемая выражением [3]

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} p & \omega x \\ \omega x & -p \end{pmatrix}, \tag{2.42}$$

где масса считается равной единице. Сохраняющиеся величины или гамильтонианы здесь – это $\text{Tr}(\mathbf{L}^{2l}) = 2(2\mathcal{H})^l$, где $2\mathcal{H} = p^2 + \omega^2 x^2$, и $\text{Tr}(\mathbf{L}^{2l+1}) = 0$.

3. РЕЛЯТИВИСТСКИЙ СЛУЧАЙ

В этом разделе мы распространяем идею поиска мультипликативных форм лагранжиана и гамильтониана на релятивистский случай системы с одной степенью свободы. Уравнение движения системы дается выражением

$$m\ddot{x}\gamma^3 = -\frac{dV(x)}{dx}, \tag{3.1}$$

где m определяется как масса покоя и $\gamma = 1/\sqrt{1 - \dot{x}^2/c^2}$. Параметр c – скорость света. Стандартные аддитивные формы релятивистских лагранжианов и гамильтонианов имеют вид

$$L_c(\dot{x}, x) = -\frac{mc^2}{\gamma} - V(x), \tag{3.2}$$

$$H_c(p, x) = \gamma mc^2 + V(x) = mc^2 \sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc} \right)^2} + V(x), \tag{3.3}$$

где $p = \gamma m\dot{x}$ – релятивистский импульс.

3.1. Мультипликативный релятивистский лагранжиан. В этом разделе мы применяем тот же метод, что и в разделе 2, для поиска мультипликативной формы релятивистского лагранжиана системы (3.1). Введем анзац лагранжиана $L = M(\dot{x})N(x)$, где $M(\dot{x})$ и $N(x)$ определены позже. Подставим лагранжиан в уравнение Эйлера–Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0, \quad (3.4)$$

получаем выражение

$$\frac{d^2 M}{d\dot{x}^2} + \left(\dot{x} \frac{dM}{d\dot{x}} - M \right) \frac{1}{\ddot{x}N} \frac{dN}{dx} = 0. \quad (3.5)$$

Используя уравнение движения в (3.5), приходим к равенству

$$\frac{d^2 M}{d\dot{x}^2} + \left(\dot{x} \frac{dM}{d\dot{x}} - M \right) \gamma^3 C_1 = 0, \quad (3.6)$$

где

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dx} = - \frac{C_1}{m} \frac{dV}{dx}, \quad (3.7)$$

и C_1 необходимо определить. Решая (3.6) и (3.7), мы получаем M и N в виде

$$M(\dot{x}) = -C_3 \left(e^{-C_1 c^2 \gamma} + C_1 \dot{x} \int_0^{\dot{x}} \gamma_v^3 e^{-C_1 c^2 \gamma_v} dv \right), \quad \gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (3.8)$$

$$N(x) = C_2 e^{-C_1 V(x)/m}, \quad (3.9)$$

где C_2 и C_3 – константы, значения которых необходимо найти. С использованием (3.8) и (3.9) мультипликативная форма лагранжиана принимает вид

$$L(x, \dot{x}) = -C_2 C_3 \left(e^{-C_1 c^2 \gamma} + C_1 \dot{x} \int_0^{\dot{x}} \gamma_v^3 e^{-C_1 c^2 \gamma_v} dv \right) e^{-C_1 V(x)/m}.$$

Выберем $C_2 C_3 = -m\lambda^2$ и $C_1 = 1/\lambda^2$, где λ снова выражается в единицах скорости. Мультипликативный релятивистский лагранжиан задается выражением

$$L_{\lambda,c}(x, \dot{x}) = m\lambda^2 \left(e^{-\gamma c^2/\lambda^2} + \frac{\dot{x}}{\lambda^2} \int_0^{\dot{x}} \gamma_v^3 e^{-\gamma_v c^2/\lambda^2} dv \right) e^{-V(x)/m\lambda^2} \quad (3.10)$$

и зависит от двух параметров λ и c . Чтобы понять роль этих параметров, рассмотрим следующие случаи.

3.1.1. Немумльтипликативный предел. Если значение λ велико, то мультипликативный релятивистский лагранжиан сводится к стандартному релятивистскому лагранжиану (3.2):

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} L_{\lambda,c}(x, \dot{x}) &= m\lambda^2 \left(1 - \frac{\gamma c^2}{\lambda^2} + \frac{\dot{x}}{\lambda^2} \int_0^{\dot{x}} \gamma_v^3 dv - \frac{V(x)}{m\lambda^2} \right) = \\ &= m\lambda^2 - mc^2 \left(\frac{1 - \dot{x}^2/c^2}{\sqrt{1 - \dot{x}^2/c^2}} \right) - V(x) = m\lambda^2 + L_c(\dot{x}, x). \end{aligned} \quad (3.11)$$

3.1.2. Нерелятивистский предел. Если рассмотреть предел $\dot{x} \ll c$, то мультипликативный релятивистский лагранжиан становится мультипликативным нерелятивистским лагранжианом:

$$\begin{aligned} \lim_{\dot{x} \ll c} L_{\lambda,c}(x, \dot{x}) &= \lim_{\dot{x} \ll c} m\lambda^2 \left[\exp\left(-\frac{c^2}{\lambda^2} \left[1 + \frac{\dot{x}^2}{2c^2} + \dots\right]\right) + \frac{\dot{x}}{\lambda^2} \int_0^{\dot{x}} \left(1 + \frac{3v^2}{2c^2} + \dots\right) \times \right. \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{c^2}{\lambda^2} \left[1 + \frac{v^2}{2c^2} + \dots\right]\right) dv \left. \right] e^{-V(x)/m\lambda^2} = m\lambda^2 e^{-c^2/\lambda^2} \times \\ &\quad \times \left(e^{-\dot{x}^2/2\lambda^2} + \frac{\dot{x}}{\lambda^2} \int_0^{\dot{x}} e^{-v^2/2\lambda^2} dv \right) e^{-V(x)/m\lambda^2} = e^{-c^2/\lambda^2} L_{\lambda}(x, \dot{x}), \end{aligned} \quad (3.12)$$

где множитель e^{-c^2/λ^2} не влияет на уравнение движения.

Взятие обоих пределов из (3.11), (3.12) приводит к стандартному нерелятивистскому лагранжиану:

$$\lim_{\substack{\dot{x} \ll c, \\ \lambda \rightarrow \infty}} L_{\lambda,c}(x, \dot{x}) = m\lambda^2 - mc^2 + L_N(\dot{x}, x). \quad (3.13)$$

Покажем напоследок, что мультипликативный лагранжиан (3.10) порождает правильное уравнение движения. Находим, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{\lambda,c}}{\partial \dot{x}} &= me^{-V/m\lambda^2} \int_0^{\dot{x}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \exp\left(-\frac{c^2}{\lambda^2} \left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right]^{-1/2}\right) dv, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{\lambda,c}}{\partial \dot{x}} \right) &= m\ddot{x} e^{-V/m\lambda^2} \left(1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}\right)^{-3/2} \exp\left(-\frac{c^2}{\lambda^2} \left[1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}\right]^{-1/2}\right) - \\ &\quad - \frac{\dot{x} e^{-V/m\lambda^2}}{\lambda^2} \left[\int_0^{\dot{x}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \exp\left(-\frac{c^2}{\lambda^2} \left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right]^{-1/2}\right) dv \right] \frac{dV}{dx}, \\ \frac{\partial L_{\lambda,c}}{\partial x} &= -e^{-V/m\lambda^2} \left(\exp\left(-\frac{c^2}{\lambda^2} \left[1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}\right]^{-1/2}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\dot{x}}{\lambda^2} \int_0^{\dot{x}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \exp\left(-\frac{c^2}{\lambda^2} \left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right]^{-1/2}\right) dv \right) \frac{dV}{dx}. \end{aligned}$$

Подставляем эти выражения в уравнение Эйлера–Лагранжа

$$\frac{\partial L_{\lambda,c}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{\lambda,c}}{\partial \dot{x}} \right) = 0,$$

что приводит к уравнению (3.1).

3.2. Мультипликативный релятивистский гамильтониан. В предыдущем пункте мы построили мультипликативный релятивистский гамильтониан. В этом разделе мы получаем соответствующий релятивистский гамильтониан. Начнем

с простого преобразования Лежандра

$$\begin{aligned} H_{\lambda,c} &= \dot{x} \frac{\partial L_{\lambda,c}}{\partial \dot{x}} - L_{\lambda,c} = \dot{x} \left(\int_0^{\dot{x}} \gamma_v^3 e^{-\gamma_v c^2 / \lambda^2} dv \right) e^{-V(x)/m\lambda^2} - \\ &\quad - m\lambda^2 \left(e^{-\gamma c^2 / \lambda^2} + \frac{\dot{x}}{\lambda^2} \int_0^{\dot{x}} \gamma_v^3 e^{-\gamma_v c^2 / \lambda^2} dv \right) e^{-V(x)/m\lambda^2} = \\ &= -m\lambda^2 e^{-\gamma c^2 / \lambda^2} e^{-V(x)/m\lambda^2} = -m\lambda^2 e^{-H_c/m\lambda^2}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

которое приводит к мультипликативной форме.

Далее, построим непосредственно мультипликативный релятивистский гамильтониан. Используем анзац гамильтониана $H_{\lambda,c}(p, x) = P(p)Q(x)$ и применим уравнение Гамильтона

$$\dot{x} = \frac{\partial H_{\lambda,c}}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H_{\lambda,c}}{\partial x}. \quad (3.15)$$

Приравнивая эти два уравнения, получаем выражения

$$\begin{aligned} -\frac{\partial H_{\lambda,c}}{\partial x} &= \frac{d}{dt} \left(\gamma m \frac{\partial H_{\lambda,c}}{\partial p} \right), \\ -\frac{1}{m} \frac{\partial H_{\lambda,c}}{\partial x} &= \gamma \left(\dot{p} \frac{\partial^2 H_{\lambda,c}}{\partial p^2} + \frac{p}{\gamma m} \frac{\partial^2 H_{\lambda,c}}{\partial p \partial x} \right) + \frac{\partial H_{\lambda,c}}{\partial p} \frac{p \dot{p}}{\gamma m^2 c^2}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Подставляя $H_{\lambda,c}$ в (3.16), приходим к формуле

$$\gamma \frac{d^2 P}{dp^2} + \frac{1}{m \dot{p} Q} \frac{dQ}{dx} \left(p \frac{dP}{dp} + P \right) + \frac{p}{\gamma m^2 c^2} \frac{dP}{dp} = 0. \quad (3.17)$$

Положим теперь

$$\frac{1}{m \dot{p} Q} \frac{dQ}{dx} = C_4 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{Q} \frac{dQ}{dx} = -m \frac{dV}{dx} C_4, \quad (3.18)$$

где использовано равенство $\dot{p} = -dV/dx$ и C_4 – константа, подлежащая определению. Тогда получаем, что

$$\gamma \frac{d^2 P}{dp^2} + \frac{p}{\gamma m^2 c^2} \frac{dP}{dp} + C_4 \left(p \frac{dP}{dp} + P \right) = 0. \quad (3.19)$$

Решая уравнения (3.18) и (3.19), получаем функции P и Q , приводящие к гамильтониану

$$H_{\lambda,c} = C_5 e^{-C_4 m^2 c^2 \gamma} e^{-C_4 m V(x)},$$

где C_5 – константа, также подлежащая определению. Теперь положим $C_4 = 1/m^2 \lambda^2$ и $C_5 = -m\lambda^2$ и запишем мультипликативный релятивистский гамильтониан в виде

$$H_{\lambda,c}(p, x) = -m\lambda^2 e^{-\gamma c^2 / \lambda^2} e^{-V(x)/m\lambda^2}, \quad (3.20)$$

что совпадает с (3.14).

3.2.1. *Немультипликативный предел.* Для случая очень больших λ

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} H_{\lambda,c} &= - \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[m\lambda^2 \left(1 - \frac{\gamma c^2}{\lambda^2} + \frac{\gamma^2 c^4}{2!\lambda^4} + \dots \right) \left(1 - \frac{V}{m\lambda^2} + \frac{V^2}{2!m^2\lambda^4} + \dots \right) \right] = \\ &= -m\lambda^2 + H_c, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где H_c – стандартный релятивистский гамильтониан.

3.2.2. *Нерелятивистский предел.* Если рассматривать нерелятивистский предел $p \ll mc$, то мультипликативный гамильтониан (3.20) можно свести к виду

$$\lim_{p \ll mc} H_{\lambda,c} = - \lim_{p \ll mc} \left[m\lambda^2 e^{-c^2/\lambda^2} \left(1 + \frac{p^2}{2m^2c^2} + \dots \right) e^{-V/m\lambda^2} \right] = e^{-c^2/\lambda^2} H_\lambda, \quad (3.22)$$

где H_λ – мультипликативный нерелятивистский гамильтониан.

И вновь взятие обоих пределов из (3.21), (3.22) приводит к стандартному нерелятивистскому гамильтониану:

$$\lim_{\substack{p \ll mc, \\ \lambda \rightarrow \infty}} H_{\lambda,c}(p, x) = -m\lambda^2 + mc^2 + H_N(p, x). \quad (3.23)$$

На последнем этапе покажем, что мультипликативный релятивистский гамильтониан порождает правильное релятивистское уравнение движения. Поставляя гамильтониан (3.20) в (3.16), получаем выражения

$$\begin{aligned} -e^{-\gamma c^2/\lambda^2} e^{-V/m\lambda^2} \frac{dV}{dx} &= e^{-\gamma c^2/\lambda^2} e^{-V/m\lambda^2} \left[\left(1 - \frac{p^2}{\gamma m^2 \lambda^2} \right) \dot{p} - \frac{p^2}{\gamma m^2 \lambda^2} \frac{dV}{dx} \right] \implies \\ \implies 0 &= e^{-\gamma c^2/\lambda^2} e^{-V/m\lambda^2} \left[\left(1 - \frac{p^2}{\gamma m^2 \lambda^2} \right) \left(\dot{p} + \frac{dV}{dx} \right) \right] \implies \dot{p} = -\frac{dV}{dx}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

последнее из которых есть уравнение движения (3.1).

3.3. Бесконечная иерархия релятивистских лагранжианов. В предыдущих пунктах мы получили мультипликативные релятивистские лагранжиан и гамильтониан, которые приводят к такому же релятивистскому уравнению движения, что и стандартные лагранжиан и гамильтониан. Были также последовательно осуществлены переходы к пределам по параметру λ и по параметру c .

В настоящем разделе рассмотрим альтернативный предел по параметру λ , называемый пертурбативным пределом. Начнем с разложения мультипликативного релятивистского лагранжиана по параметру λ :

$$\begin{aligned} L_{\lambda,c} &= m\lambda^2 \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(-\frac{c^2}{\lambda^2} \right)^j \gamma^j + \frac{\dot{x}}{\lambda^2} \int_0^{\dot{x}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(-\frac{c^2}{\lambda^2} \right)^j \gamma_v^{j+3} dv \right] e^{-V/m\lambda^2} = \\ &= m\lambda^2 \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(-\frac{c^2}{\lambda^2} \right)^j \gamma^j - \frac{\dot{x}}{c^2} \int_0^{\dot{x}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j-1)!} \left(-\frac{c^2}{\lambda^2} \right)^j \gamma_v^{j+2} dv \right] e^{-V/m\lambda^2} = \\ &= m\lambda^2 \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(-\frac{c^2}{\lambda^2} \right)^j \left(\gamma^j - \frac{j\dot{x}}{c^2} \int_0^{\dot{x}} \gamma_v^{j+2} dv \right) \right] e^{-V/m\lambda^2}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Интересно отметить, что все лагранжианы в (3.28) порождают одно и то же релятивистское уравнение движения (3.1). Чтобы доказать это утверждение, вычислим производные

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}_{j,c}}{\partial \dot{x}} &= \sum_{k=0}^{j-1} \left[\frac{j!}{(j-k)!k!} \left(\frac{j-k}{c^2} \right) \int_0^{\dot{x}} \gamma_v^{j-k+2} dv (mc^2)^{j-k} V^k \right], \\ \dot{x} \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{j,c}}{\partial \dot{x}^2} &= \sum_{k=0}^{j-1} \left[\frac{j!}{(j-k)!k!} \left(\frac{j-k}{c^2} \right) \gamma_v^{j-k+2} (mc^2)^{j-k} V^k \right] \ddot{x}, \\ \dot{x} \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{j,c}}{\partial x \partial \dot{x}} &= \sum_{k=1}^{j-1} \left[\frac{j!}{(j-k)!(j-1)!} \left(\frac{j-k}{c^2} \right) \int_0^{\dot{x}} \gamma_v^{j-k+2} dv (mc^2)^{j-k} V^{k-1} \right] \dot{x} \frac{dV}{dx}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}_{j,c}}{\partial x} &= - \sum_{k=1}^j \left[\frac{j!}{(j-k)!(k-1)!} (mc^2)^{j-k} \mathcal{P}_{j-k} V^{k-1} \right] \frac{dV}{dx}.\end{aligned}$$

Подставляя их в уравнение Эйлера–Лагранжа

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{j,c}}{\partial x} - \dot{x} \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{j,c}}{\partial x \partial \dot{x}} = \ddot{x} \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{j,c}}{\partial \dot{x}^2}, \quad (3.31)$$

получаем релятивистское уравнение движения (3.1).

Используя преобразование Лежандра, находим гамильтониан, который соответствует лагранжиану $\mathcal{L}_{j,c}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{j,c} &= \dot{x} \frac{\partial \mathcal{L}_{j,c}}{\partial \dot{x}} - \mathcal{L}_{j,c} = \\ &= - \sum_{k=0}^{j-1} \left[\frac{j!}{(j-k)!k!} (mc^2)^{j-k} \left(- \frac{(j-k)\dot{x}}{c^2} \int_0^{\dot{x}} \gamma_v^{j-k+2} dv - \mathcal{P}_{j-k} \right) V^k \right] - V^j = \\ &= \sum_{k=0}^j \frac{j!}{(j-k)!k!} (\gamma mc^2)^{j-k} V^k = (\gamma mc^2 + V)^j = H_c^j.\end{aligned} \quad (3.32)$$

Из уравнения (3.32) следует, что, применяя преобразование Лежандра к каждому лагранжиану в иерархии, можно построить бесконечную иерархию гамильтонианов $\{\mathcal{H}_{1,c}, \mathcal{H}_{2,c}, \dots, \mathcal{H}_{j,c}, \dots\} = \{H_c, H_c^2, \dots, H_c^j, \dots\}$. Иными словами, можно непосредственно разложить мультипликативный релятивистский гамильтониан:

$$\begin{aligned}H_{\lambda,c} &= -m\lambda^2 \left(1 - \frac{\gamma c^2}{\lambda^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma c^2}{\lambda^2} \right)^2 + \dots \right) \left(1 - \frac{V}{m\lambda^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{V}{m\lambda^2} \right)^2 + \dots = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{-1}{m\lambda^2} \right)^{j-1} (\gamma mc^2 + V)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{-1}{m\lambda^2} \right)^{j-1} \mathcal{H}_{j,c}.\end{aligned} \quad (3.33)$$

Наконец, покажем, что гамильтонианы в бесконечной иерархии также порождают одно и то же уравнение движения. Используя выражения (3.16), находим, что

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial \mathcal{H}_{j,c}}{\partial x} &= \frac{d}{dt} \left(\gamma m \frac{\partial \mathcal{H}_{j,c}}{\partial p} \right) \implies \\
 \implies -H_c^{j-1} \frac{dV}{dx} &= H_c^{j-1} \dot{p} + p(j-1) \mathcal{H}_c^{j-2} \left(\frac{p}{\gamma m} \dot{p} + \dot{x} \frac{dV}{dx} \right) \implies \\
 \implies -\left(H_c^{j-1} + (j-1) H_c^{j-2} \frac{p^2}{\gamma m} \right) \frac{dV}{dx} &= \left(H_c^{j-1} + (j-1) H_c^{j-2} \frac{p^2}{\gamma m} \right) \dot{p} \implies \\
 \implies -\frac{dV}{dx} &= \dot{p},
 \end{aligned}$$

где последняя формула совпадает с искомым уравнением движения.

4. ВЫВОДЫ

Для систем с одной степенью свободы мы нашли альтернативный класс (называемый мультипликативной формой) лагранжианов L_λ , который является расширенным классом лагранжианов с параметром λ , в релятивистском и нерелятивистском случаях. Замечательный результат при этом заключается в том, что мультипликативная форма лагранжиана является на самом деле производящей функцией для бесконечной иерархии лагранжианов, порождающих одно и то же уравнение движения. Насколько нам известно, нетривиальная (в терминах полиномов от кинетической и потенциальной энергий) совокупность лагранжианов получена впервые. Кроме того, результаты настоящей статьи являются еще одним подтверждением особенности лагранжиана, называемой неединственностью, если речь идет не о неединственности, которая обусловлена умножением лагранжиана на константу или прибавлением к нему полной производной по времени.

Рассматриваемая проблема еще не решена для более высоких степеней свободы. В приложении к настоящей статье мы предпринимаем успешную попытку использования нашей идеи для построения мультипликативной формы лагранжиана в случае двух степеней свободы, рассматривая систему двух идентичных частиц, взаимодействующих посредством четной потенциальной функции. Другая проблема заключается в том, что не известно, существуют ли другие классы лагранжианов помимо рассмотренных аддитивных и мультипликативных форм. Если они существуют, то может существовать и универсальная форма лагранжиана. Это направление в исследованиях также заслуживает внимания.

В заключение мы бы хотели сделать еще одно замечание, связанное с квантованием системы. Известно, что для стандартной аддитивной формы лагранжиана можно провести квантование системы с помощью интегралов по траекториям Фейнмана. Возникает вопрос, как выглядит метод квантования Фейнмана для мультипликативного лагранжиана. Мы рассмотрим его в наших следующих работах.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Одномерная двухчастичная система

В этом разделе идея статьи распространяется на случай одномерной системы с двумя идентичными частицами. Гамильтониан системы дается выражением

$$H_N(p_1, p_2, x_1, x_2) = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + V(x_1 - x_2), \quad (\text{П.1})$$

где $V(x_1 - x_2)$ – четная функция, которая может иметь следующий вид:

$$V(x_1 - x_2) = \begin{cases} g^2(x_1 - x_2)^2, & \text{гармоническое взаимодействие,} \\ \frac{g^2}{(x_1 - x_2)^2}, & \text{взаимодействие Калоджеро–Мозера [4],} \end{cases} \quad (\text{П.2})$$

где g – постоянная связи. Уравнения движения для каждой частицы записываются как

$$\ddot{x}_1 = \frac{1}{m} \frac{\partial V(x_1 - x_2)}{\partial x_1}, \quad (\text{П.3})$$

$$\ddot{x}_2 = -\frac{1}{m} \frac{\partial V(x_1 - x_2)}{\partial x_2}. \quad (\text{П.4})$$

Аддитивный лагранжиан системы дается выражением

$$L_N(\dot{x}_1, \dot{x}_2, x_1, x_2) = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - V(x_1 - x_2), \quad (\text{П.5})$$

которое можно получить, применяя преобразование Лежандра $L_N = p_1\dot{x}_1 + p_2\dot{x}_2 - H_N$. Чтобы разделить переменные x_1 и x_2 в (П.3) и (П.4), используем новый набор переменных, а именно $X = x_1 + x_2$ и $x = x_1 - x_2$. Тогда уравнения (П.3) и (П.4) можно переписать как уравнения

$$\ddot{X} = 0, \quad (\text{П.6})$$

$$\ddot{x} = -\frac{2}{m} \frac{dV(x)}{dx}. \quad (\text{П.7})$$

Уравнение (П.6) описывает движение центра масс, тогда как (П.7) – движение системы в терминах относительного положения двух частиц.

Теперь найдем мультипликативный лагранжиан, применяя новые переменные X и x , соответствующие уравнениям (П.6) и (П.7). Применяя результаты, полученные для одной частицы, запишем мультипликативный лагранжиан для двух частиц, описывающий движение свободной частицы и частицы в потенциале:

$$L_\lambda(\dot{X}, \dot{x}, x) = \frac{m\lambda^2}{2} (f(\dot{X}) + f(\dot{x})g(x)), \quad (\text{П.8})$$

где f и g определены в разделе 2, но мы приводим выражения для них еще раз:

$$f(\dot{u}) = e^{-\dot{u}^2/2\lambda^2} + \frac{\dot{u}}{\lambda^2} \int_0^{\dot{u}} e^{-\xi^2/2\lambda^2} d\xi, \\ g(u) = e^{-2V(u)/m\lambda^2}.$$

Чтобы понять, каким образом лагранжиан, определяемый выражением (П.8), приводит к уравнениям движения, задаваемым выражениями (П.6), (П.7), подставим сначала лагранжиан в уравнение Эйлера–Лагранжа для переменной X :

$$\frac{\partial L_\lambda}{\partial X} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_\lambda}{\partial \dot{X}} \right) = 0 \implies 0 - \frac{d}{dt} \left(\frac{df(\dot{X})}{d\dot{X}} \right) = 0 \implies \ddot{X} \left(m \int_0^{\dot{X}} e^{-\xi^2/2\lambda^2} d\xi \right) = 0,$$

что приводит к равенству $\ddot{X} = 0$. Далее, подставим лагранжиан в уравнение Эйлера–Лагранжа для переменной x :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L_\lambda}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_\lambda}{\partial \dot{x}} \right) &= 0 \implies f(\dot{x}) \frac{dg(x)}{dx} - \ddot{x} g(x) \frac{d^2 f(\dot{x})}{d\dot{x}^2} - \dot{x} \frac{dg(x)}{dx} \frac{df(\dot{x})}{d\dot{x}} = 0 \implies \\
 \implies f(\dot{x}) e^{-2V(x)/m\lambda^2} \left(\frac{-2}{m\lambda^2} \frac{dV(x)}{dx} \right) - \ddot{x} e^{-2V(x)/m\lambda^2} \frac{d^2 f(\dot{x})}{d\dot{x}^2} &\implies \\
 \implies -\dot{x} e^{-2V(x)/m\lambda^2} \left(\frac{-2}{m\lambda^2} \frac{dV(x)}{dx} \right) \frac{df(\dot{x})}{d\dot{x}} &= 0 \implies \\
 \implies \left(\frac{-2}{m\lambda^2} \frac{dV(x)}{dx} \right) \left(f(\dot{x}) - \dot{x} \frac{df(\dot{x})}{d\dot{x}} \right) - \ddot{x} \frac{d^2 f(\dot{x})}{d\dot{x}^2} &= 0 \implies \\
 \implies \left(\frac{-2}{m\lambda^2} \frac{dV(x)}{dx} - \frac{\ddot{x}}{\lambda^2} \right) \left(e^{-\frac{\dot{x}^2}{2\lambda^2}} \right) &= 0 \implies \ddot{x} = -\frac{2}{m} \frac{dV(x)}{dx}.
 \end{aligned}$$

Последнее уравнение и в самом деле является уравнением движения для переменной x .

Дополнительно заметим, что в пределе, когда λ устремляется в бесконечность, мультипликативный лагранжиан описывается формулами

$$\begin{aligned}
 \lim_{\lambda \rightarrow \infty} L_\lambda &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[m\lambda^2 \left(1 + \frac{\dot{X}^2}{4\lambda^2} + \frac{\dot{x}^2}{4\lambda^2} - \frac{V(x)}{m\lambda^2} + \dots \right) \right] = \\
 &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[m\lambda^2 + \frac{m(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2}{4} + \frac{m(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2}{4} - V(x_1 - x_2) + \dots \right] = \\
 &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[m\lambda^2 + \frac{m\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m\dot{x}_2^2}{2} - V(x_1 - x_2) + \dots \right], \\
 \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \{L_\lambda - m\lambda^2\} &= \frac{m\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m\dot{x}_2^2}{2} - V(x_1 - x_2) = L_N,
 \end{aligned}$$

последняя из которых задает аддитивный лагранжиан.

Мультипликативная форма гамильтониана определяется выражением

$$H_\lambda = -\frac{m\lambda^2}{2}(k(P) + k(p)b(x)), \quad (\text{П.9})$$

где

$$k(p) = e^{-p^2/2m^2\lambda^2}, \quad (\text{П.10})$$

$$b(x) = e^{-V/m\lambda^2} \quad (\text{П.11})$$

и $p = p_1 - p_2$, $P = p_1 + p_2$, а $p_1 = m\dot{x}_1$, $p_2 = m\dot{x}_2$ — импульсы для первичной и вторичной частиц соответственно. Легко показать, что гамильтониан, задаваемый выражением (П.9), приводит к уравнениям движения (П.6), (П.7). Во-первых, рассмотрим уравнение движения для центра масс:

$$-\frac{\partial H_\lambda}{\partial X} = m \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H_\lambda}{\partial P} \right) \implies 0 = -\frac{m^2\lambda^2}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dk(P)}{dP} \right) \implies 0 = \dot{P}k(P),$$

где P – константа. Во-вторых, рассмотрим уравнения для переменной x :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial H_\lambda}{\partial x} &= m \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H_\lambda}{\partial p} \right) \implies \\ -k(p)b(x) \frac{dV(x)}{dx} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (pk(p)b(x)) = \frac{1}{2} \left(pk(p) \frac{db(x)}{dt} + b(x) \frac{d(pk(p))}{dt} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{2p^2 k(p)b(x)}{m^2 \lambda^2} \frac{dV(x)}{dx} + b(x) \dot{p} \left(-\frac{p^2}{m^2 \lambda^2} k(p) + k(p) \right) \right] \implies \\ \implies -\frac{dV(x)}{dx} &= \frac{1}{2} \left[-\frac{2p^2}{m^2 \lambda^2} \frac{dV}{dx} + \dot{p} \left(-\frac{p^2}{m^2 \lambda^2} + 1 \right) \right] \implies \\ \implies -2 \frac{dV(x)}{dx} \left(-\frac{p^2}{m^2 \lambda^2} + 1 \right) &= \dot{p} \left(-\frac{p^2}{m^2 \lambda^2} + 1 \right) \implies \dot{p} = -2 \frac{dV(x)}{dx}, \end{aligned}$$

последнее из которых вновь является уравнением движения.

Наконец, представляет интерес поведение мультипликативного гамильтониана в пределе при очень больших λ :

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} H_\lambda &= -\frac{m\lambda^2}{2} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{P^2 + p^2}{2m^2 \lambda^2} - \frac{2V}{m\lambda^2} + \dots \right), \\ \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (H_\lambda + m\lambda^2) &= \frac{P^2 + p^2}{4m} + V = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + V = H_N, \end{aligned}$$

что есть не что иное, как стандартный гамильтониан в аддитивной форме.

В случае большого числа частиц, особенно систем типа Калоджеро–Мозера [5], [6], существует иерархия лагранжианов, каждый из которых записывается в аддитивной форме. Поэтому представляется интересным исследовать вопрос о том, можно ли найти соответствующую иерархию мультипликативных лагранжианов.

Список литературы

- [1] A. Mizel, *Nonuniqueness of the Lagrangian Function*, unpublished work, 1995, <http://www.cds.caltech.edu/~marsden/wiki/uploads/projects/geomech/Mizel1995.pdf>.
- [2] A. Degasperis, S. Ruijsenaars, *Ann. Phys.*, **293**:1 (2001), 92–109.
- [3] O. Babelon, D. Bernard, M. Talon, *Introduction to Classical Integrable Systems*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
- [4] F. Calogero, *J. Math. Phys.*, **12**:3 (1971), 419–436.
- [5] S. Yoo-Kong, S. Lobb, F. Nijhoff, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44**:36 (2011), 365203, 39 pp., arXiv: 1112.4576.
- [6] У. Джайрук, С. Ю-Конг, М. Танаситтикосол, *ТМФ*, **183**:2 (2015), 254–273.

Поступила в редакцию 12.11.2015,
после доработки 27.11.2015