Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Зенчук, С. И. Доронин, Удаленный контроль
квантовыми корреляциями двухкубитного приемника
посредством трехкубитного передатчика, *ТМФ*, 2016,
том 188, номер 2, 343–358

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9103>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 17:34:12

© 2016 г.

С. И. Доронин*, А. И. Зенчук*

УДАЛЕННЫЙ КОНТРОЛЬ КВАНТОВЫМИ КОРРЕЛЯЦИЯМИ ДВУХКУБИТНОГО ПРИЕМНИКА ПОСРЕДСТВОМ ТРЕХКУБИТНОГО ПЕРЕДАТЧИКА

Изучается удаленный контроль над квантовыми корреляциями (дискордом) в двухкубитной подсистеме (приемнике) посредством изменения параметров начального состояния другой трехкубитной подсистемы (передатчика), соединенной с приемником неоднородной цепочкой спинов $s = 1/2$. Предложены два параметра, характеризующие создаваемые корреляции. Первым является дискорд между приемником и остальной частью цепочки спинов, который описывает взаимные корреляции между указанными подсистемами. Вторым параметром – дискорд между двумя узлами приемника, характеризующий внутренние корреляции приемника. Изучается зависимость этих двух дискордов от параметра неоднородности спиновой цепочки.

Ключевые слова: дискорд, создание удаленных квантовых состояний, квантовые корреляции, перенос квантового состояния, спиновая цепочка.

DOI: 10.4938/tmf9103

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема контролируемого создания удаленных квантовых состояний рассмотрена в ряде статей [1]–[5]. Из нее исходит проблема удаленного создания состояний с требуемыми квантовыми корреляциями. В частности, запутанность между удаленными кубитами изучается в работах [6], [7], различные методы создания квантовых корреляций рассмотрены в статьях [8]–[13].

Работа частично поддержана РАН (программа “Элементная база квантовых компьютеров”, грант № 0089-2015-0220) и РФФИ (грант № 15-07-07928). Работа А. И. Зенчука также поддержана Deutscher Akademischer Austauschdienst (DAAD) (программа “Научные стажировки для ученых и преподавателей вузов”, грант № 50015559).

*Институт проблем химической физики РАН, Черноголовка, Московская обл., Россия.
E-mail: zenchuk@itp.ac.ru

Следует вспомнить, что проблема удаленного контроля состояний имеет довольно длинную историю, начиная с квантового эха [14], которое можно считать первой попыткой осуществить передачу квантового состояния на длинные дистанции. Сама задача передачи квантовых состояний сформулирована в работе [15]. Но еще раньше была обоснована концепция квантовой телепортации [16]. Проведем краткое сравнение таких близких направлений развития квантовых коммуникаций, как квантовая телепортация [16]–[18], перенос квантового состояния [15], [19]–[22] и создание удаленных квантовых состояний [1], [2], [23]–[25].

Телепортация неизвестного состояния отличается от двух других направлений наличием дополнительного классического канала связи. Однако этот канал в некотором смысле неявно внедрен в гамильтониан взаимодействия, управляющий динамикой коммуникационной линии в процессе переноса и создания квантового состояния. Простым примером является процесс идеального переноса состояния (ИПС) [19], когда неизвестное состояние передатчика перемещается в приемник. Таким образом, отпадает необходимость в классическом канале как дополнительной составляющей “коммуникационной линии”. Далее был предложен процесс передачи состояния с большой вероятностью [26]–[35], реализация которого намного проще по сравнению с реализацией ИПС. Кроме того, вместо переноса состояния передатчика можно попытаться создать другое состояние, представляющее интерес и непосредственно связанное с состоянием передатчика (но отличающееся от него) [1], [2], [23]–[25]. Создание таких состояний с помощью цепочки спинов является предметом изучения работы [36], в которой эта идея сформулирована для смешанного состояния передатчика в короткой цепочке. Создание состояния, контролируемого чистым состоянием передатчика с односпиновым возбуждением, изучено в работе [37], аналогичная проблема с физически обоснованным начальным состоянием рассмотрена в статье [38]. Следует также отметить, что предлагаемый в настоящей статье алгоритм создания квантовых состояний развивает идею переноса квантовой информации [39]–[41], которая является альтернативой переносу квантового состояния.

В настоящей работе рассматривается процесс удаленного создания состояний в терминах квантовых корреляций, выраженных квантовым дискордом [42]–[44], который был введен вслед за квантовой запутанностью [45]–[49]. В качестве параметров, характеризующих квантовые корреляции, мы используем дискорд между приемником и остальными спинами цепочки (внешние корреляции) и дискорд между узлами приемника (внутренние корреляции). Обсуждается взаимосвязь этих двух дискордов и изучается отображение области контролируемых параметров (т. е. параметров начального состояния передатчика) в двумерное пространство указанных дискордов.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 описана рассматриваемая модель коммуникационной линии, включая гамильтониан и начальное условие. Квантовые корреляции, характеризующие состояние приемника, рассмотрены в разделе 3. Оптимизация процесса создания состояний по времени осуществляется в разделе 4. Результаты численного моделирования создаваемых корреляций в длинных цепочках с различными значениями параметра неоднородности обсуждаются в разделе 5. В разделе 6 представлены основные выводы.

Рис. 1. Коммуникационная линия с трехкубитным передатчиком и двухкубитным приемником.

2. МОДЕЛЬ КОММУНИКАЦИОННОЙ ЛИНИИ

Рассматриваемая в настоящей статье коммуникационная линия изображена на рис. 1. Она состоит из трехкубитного передатчика (первые три спина цепочки), двухкубитного приемника (два последних спина цепочки) и соединяющей их линии передач.

2.1. Гамильтониан взаимодействий. Рассмотрим эволюцию спиновой цепочки под управлением XY -гамильтониана в приближении взаимодействий ближайших соседей

$$H = \sum_{i=1}^{N-1} D_i (I_{ix} I_{(i+1)x} + I_{iy} I_{(i+1)y}), \quad (1)$$

где D_i – константы связи между ближайшими соседями, $I_{j\alpha}$ – проекция j -го спина на ось α , $j = 1, \dots, N$, $\alpha = x, y, z$. В нашей модели используются безразмерное время t и следующие константы связи:

$$D_i = \frac{\sqrt{N-1} \cos(\phi\pi) + \sin(\phi\pi) \sqrt{i(N-i)}}{\sqrt{N-1}(\cos(\phi\pi) + \sin(\phi\pi))}, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{1}{2}. \quad (2)$$

Параметр ϕ в уравнении (2) характеризует отклонение рассматриваемой цепочки от цепочки, рассчитанной для идеального переноса квантового состояния, которая была введена в работе [19] (далее – цепочка ИПС) и называется параметром неоднородности. Таким образом, для однородной цепочки –

$$D_i|_{\phi=0} = 1, \quad (3)$$

для цепочки ИПС –

$$D_i|_{\phi=\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{i(N-i)}{N-1}}. \quad (4)$$

Очевидно, что гамильтониан (1) коммутирует с z -проекцией полного спинного момента, т. е. $[H, I_z] = 0$. Это позволяет существенно упростить численные расчеты, уменьшая размерность пространства Гильберта, в котором описывается спиновая динамика. Таким образом, при работе с односпиновым возбуждением используется только N -мерное подпространство полного 2^N -мерного пространства Гильберта спиновой системы, состоящей из N узлов, натянутое на векторы

$$|n\rangle \equiv |\underbrace{0 \dots 0}_{n-1} 1 \underbrace{0 \dots 0}_{N-n}\rangle, \quad n = 1, \dots, N.$$

2.2. Начальное состояние спиновой цепочки. Рассмотрим чистое начальное состояние трехкубитного передатчика с одним возбуждением:

$$|\Psi_0\rangle = \sum_{i=1}^3 a_i |i\rangle, \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^3 |a_i|^2 = 1, \quad (6)$$

где a_i , $i = 1, 2, 3$, – произвольные параметры, нормированные условием (6). В отличие от начальных состояний, рассмотренных в работе [37], данные начальные состояния не включают в себя основное состояние $|0\rangle$. Согласно уравнению Шредингера эволюция чистого начального состояния $|\Psi_0\rangle$ имеет вид

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\Psi_0\rangle. \quad (7)$$

Далее мы будем использовать следующую параметризацию начального состояния передатчика (5), удовлетворяющую нормировочному условию (6):

$$a_1 = \cos\left[\frac{\alpha_1\pi}{2}\right] \cos\left[\frac{\alpha_2\pi}{2}\right], \quad a_2 = \sin\left[\frac{\alpha_1\pi}{2}\right] \cos\left[\frac{\alpha_2\pi}{2}\right] e^{2i\pi\varphi_1}, \quad a_3 = \sin\left[\frac{\alpha_2\pi}{2}\right] e^{2i\pi\varphi_2}, \quad (8)$$

где

$$0 \leq \alpha_i \leq 1, \quad 0 \leq \varphi_i \leq 1, \quad i = 1, 2. \quad (9)$$

Параметры α_i , φ_i , $i = 1, 2$, называются контролирующими параметрами.

2.3. Локальное состояние приемника. Состояние двухкубитного приемника в некоторый момент времени t можно получить посредством редукции состояния всей цепочки по спинам $1, \dots, N-2$. Матрица плотности этого состояния, записанная в базисе

$$|0\rangle, \quad |N-1\rangle, \quad |N\rangle, \quad |N(N-1)\rangle, \quad (10)$$

имеет следующий вид:

$$\rho^R \equiv \text{Tr}_{1,2,\dots,N-2} \rho = \begin{pmatrix} 1 - |f_{N-1}|^2 - |f_N|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |f_{N-1}|^2 & f_{N-1} f_N^* & 0 \\ 0 & f_{N-1}^* f_N & |f_N|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

(вектор $|N(N-1)\rangle$ в базисе (10) соответствует состоянию с возбужденными N -м и $(N-1)$ -м спинами). Здесь звездочка означает комплексное сопряжение, а f_{N-1} , f_N , f_0 – амплитуды переходов:

$$f_i = \langle i | e^{-iHt} | \Psi_0 \rangle = R_i e^{2\pi i \Phi_i}, \quad i = 0, \dots, N, \quad (12)$$

где Φ_i – действительные, а R_i – положительные параметры. Напомним естественное ограничение

$$|f_N|^2 + |f_{N-1}|^2 \leq 1 \quad \implies \quad R^2 \equiv R_N^2 + R_{N-1}^2 \leq 1, \quad (13)$$

в котором равенство соответствует идеальному переносу двухкубитного состояния (в этом случае $f_i \equiv 0$, $i < N - 1$).

Очевидно, что амплитуды переходов, которые появляются в матрице плотности (11), – суть линейные функции параметров a_i :

$$f_N(t) = \langle N | e^{-iHt} | \Psi_0 \rangle = \sum_{j=1}^3 a_j \langle N | e^{-iHt} | j \rangle = \sum_{j=1}^3 a_j p_{Nj}(t) \quad (14)$$

$$f_{N-1}(t) = \langle N - 1 | e^{-iHt} | \Psi_0 \rangle = \sum_{j=1}^3 a_j \langle N - 1 | e^{-iHt} | j \rangle = \sum_{j=1}^3 a_j p_{(N-1)j}(t), \quad (15)$$

в которых

$$p_{kj}(t) = \langle k | e^{-iHt} | j \rangle = r_{kj}(t) e^{2\pi i \chi_{kj}(t)}, \quad k, j > 0, \quad (16)$$

r_{kj} – абсолютная величина, а $2\pi\chi_{kj}$ (где $0 \leq \chi_{kj} \leq 1$) – фаза амплитуды перехода p_{kj} (т. е. амплитуды перехода возбуждения из j -го спина в k -й). Подчеркнем, что эти амплитуды представляют собой внутренние характеристики данной коммуникационной линии и не зависят от контролирующих параметров начального состояния передатчика.

3. КВАНТОВЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИЕ СОСТОЯНИЕ ПРИЕМНИКА

Введем два параметра, которые характеризуют квантовые корреляции приемника. Первым из этих параметров является дискорд Q_{ext} между приемником и остальными спинами цепочки. Этот параметр показывает, коррелируют ли между собой две указанные подсистемы. Вторым параметром является дискорд Q_R между кубитами приемника, он характеризует корреляции внутри приемника.

3.1. Дискорд между приемником и остальными спинами коммуникационной линии. Поскольку начальное состояние рассматриваемой системы является чистым, оно остается чистым в процессе эволюции. Таким образом, приемник в совокупности с остальными спинами коммуникационной линии образует квантовую систему в чистом состоянии. Следовательно, дискорд между этими двумя подсистемами совпадает с запутанностью между ними [8]. Запутанность можно легко рассчитать через энтропию:

$$Q_{\text{ext}} = -\text{Tr} \rho^R \log_2 \rho^R = -\sum_{i=1}^4 \lambda_i \log_2 \lambda_i.$$

В нашем случае ρ^R (11) является X -матрицей со следующими двумя ненулевыми собственными числами:

$$\lambda_1 = 1 - R^2, \quad \lambda_2 = R^2.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$Q_{\text{ext}} = -\sum_{i=1}^2 \lambda_i \log_2 \lambda_i = -R^2 \log_2 R^2 - (1 - R^2) \log_2 (1 - R^2). \quad (17)$$

Рис. 2. Дискорды Q_{ext} (сплошная линия) и Q_R (штриховые линии) как функции вероятности R^2 . Различные штриховые линии соответствуют различным значениям параметра $R_{N-1}^2 = 0.1n$, $n = 0, 1, \dots, 10$. Штриховая линия $R_{N-1}^2 = 0$ совпадает с осью абсцисс, линия $R_{N-1}^2 = 1$ стягивается в точку $R^2 = 1$, жирная штриховая линия соответствует $R_{N-1}^2 = 1/2$. На этой линии дискорд Q_R принимает любое значение из интервала $0 \leq Q_R \leq 1$. Дискорд Q_{ext} не зависит от R_{N-1}^2 .

3.2. Внутренний дискорд приемника. Формула для дискорда между двумя узлами приемника имеет более сложный вид:

$$Q_R = \min(Q_N, Q_{N-1}), \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} Q_N = & 1 - R_{N-1}^2 \log_2 R_{N-1}^2 - (1 - R_{N-1}^2) \log_2 (1 - R_{N-1}^2) + R^2 \log_2 R^2 + \\ & + (1 - R^2) \log_2 (1 - R^2) - \\ & - \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1 - 4R_N^2(1 - R^2)}) \log_2 (1 - \sqrt{1 - 4R_N^2(1 - R^2)}) - \\ & - \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 - 4R_N^2(1 - R^2)}) \log_2 (1 + \sqrt{1 - 4R_N^2(1 - R^2)}), \end{aligned}$$

$$Q_{N-1} = Q_N|_{N-1 \leftrightarrow N}. \quad (19)$$

Она была получена для частного случая X -матрицы (11) в работе [50] (подробности даны в приложении). Дискорд Q_R зависит от абсолютных значений R_N , R_{N+1} амплитуд перехода (12).

3.3. Зависимость дискордов Q_{ext} и Q_R от значений R и R_{N-1} . На рис. 2 изображены зависимости дискорда Q_{ext} от вероятности R^2 (сплошная куполообразная линия) и дискорда Q_R от вероятностей R^2 и R_{N-1}^2 (семейство штриховых линий, каждая из которых соответствует конкретному значению параметра R_{N-1}^2).

На рис. 2 видно, что большие значения дискорда Q_R порождаются большими значениями параметра R . При этом максимальное значение дискорда Q_R ($Q_R^{\max} = 1$) соответствует значениям $R^2 = 1$ и $R_{N-1}^2 = 1/2$ (жирная штриховая линия). Наоборот, дискорд Q_{ext} имеет максимум при $R^2 = 1/2$. Это значит, что Q_R убывает как при $R_{N-1} \rightarrow 0$, так и при $R_{N-1} \rightarrow 1$. Заметим, что на рассматриваемом рисунке есть область, где дискорд Q_R велик, а дискорд Q_{ext} довольно мал (правый верхний угол рисунка). В этой области квантовые корреляции между приемником и остальными спинами коммуникационной линии минимальны, поэтому приемник можно использовать как (почти) независимый объект. Однако эту область трудно реализовать. Ее можно создать только в цепочках, рассчитанных для переноса квантового состояния с высокой вероятностью.

4. ОПТИМИЗАЦИЯ УДАЛЕННЫХ КВАНТОВЫХ КОРРЕЛЯЦИЙ ПО ВРЕМЕНИ

Удаленный контроль над квантовыми состояниями нацелен на создание требуемых параметров состояния приемника с помощью изменения контролируемых параметров. Строго говоря, существует аналитическая связь между контролирующими и создаваемыми параметрами. Более того, как уже упоминалось, элементы матрицы плотности приемника выражаются через линейные функции параметров a_i . Однако коэффициенты этих линейных функций зависят от амплитуд переходов p_{kj} (16) (внутренних характеристик коммуникационной линии, зависящих от времени t). По этой причине полезным для визуализации создаваемых состояний является графическое представление. Поэтому далее мы численно изучаем отображение области контролируемых параметров α_1 и α_2 на плоскость создаваемых параметров Q_{ext} и Q_R

$$(\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow (Q_{\text{ext}}, Q_R). \quad (20)$$

Заметим, что мы положили $\varphi_i = 0$ в формулах (8) для a_i , поскольку влияние этих фаз пренебрежимо мало в нашей модели. Этот вывод подтверждается предварительными численными расчетами.

С помощью параметра ϕ в уравнении (2) мы превращаем цепочку из цепочки ИПС (в этом случае $\phi = 1/2$ и все пространство состояний приемника можно создать и выразить через параметры Q_{ext} и Q_R) в однородную цепочку (в этом случае $\phi = 0$ и создаваемая область минимальна).

4.1. Оптимизация по времени дискордов Q_{ext} и Q_R . Принимая во внимание формулы (17) и (18), а также обсуждения п. 3.3, мы приходим к выводу, что вероятность R^2 переноса возбуждения к передатчику является наиболее важным параметром, ответственным за создаваемые квантовые корреляции, и его следует изучить более подробно.

Согласно формуле (17) дискорд Q_{ext} исчезает при $R = 0$ или $R = 1$. В идеальном случае $R = 1$ сигнал полностью собирается в узле приемника. Однако обычно $R < 1$ и зависит от начального состояния спиновой системы. В п. 4.2 выполнена оптимизация вероятности R^2 по времени для начального состояния (5), (8) со значениями $\alpha_i = 0$, $i = 1, 2$, контролируемых параметров.

Рис. 3. Зависимость максимального значения $R_{\max}^2$ амплитуды переноса состояния R^2 (а) и соответствующего момента времени t_0 (б) от значений параметра ϕ для начального состояния $\Psi_0 = |1\rangle$ и цепочек различной длины N , $N = 20, 50n$, $n = 1, 2, \dots, 6$.

4.2. Оптимизация по времени вероятности R^2 переноса состояния. Вероятность R^2 является осциллирующей функцией времени t и достигает первого (наибольшего) максимума $R_{\max}^2$ в некоторый момент времени t_0 . Зависимости параметров $R_{\max}^2$ и t_0 от параметра неоднородности ϕ изображены на рис. 3а, б соответственно для цепочек различной длины N : $N = 20, 50n$, $n = 1, \dots, 6$. На рис. 3а видно, что амплитуда приближается к единице при $\phi \rightarrow 1/2$ (случай цепочки ИПС). На этом рисунке также изображена предельная кривая $N \rightarrow \infty$ (штриховая линия), показывающая, что алгоритм создания состояния все меньше зависит от N при приближении нашей цепочки к цепочке ИПС, т. е. при $\phi \rightarrow 1/2$, поскольку все кривые сближаются друг с другом в правом верхнем углу рис. 3а.

Чтобы получить приближенный вид предельной кривой на рис. 3а, заметим, что каждую кривую на нем можно аппроксимировать функцией

$$F_N = c_N - e^{-a_N \phi \pi - b_N}$$

при некоторых значениях коэффициентов a_N , b_N и c_N (эти кривые не показаны на рис. 3а, для краткости мы также не приводим значения параметров a_N , b_N и c_N). Изучая зависимость параметров a_N , b_N и c_N от N , можно заметить, что параметр a_N имеет хорошо выраженную асимптотику при $N \rightarrow \infty$: $a_\infty \approx 2.232$. Два других параметра b_∞ и c_∞ можно аппроксимировать с помощью “граничных” условий $F_\infty|_{\phi=1/2} = 1$ и $F_\infty|_{\phi=0} = 0$: $b_\infty \approx -0.03$, $c_\infty \approx 1.031$. Итак, предельную кривую (штриховую линию на рис. 3а) можно аппроксимировать функцией

$$R_\infty = 1.031 - e^{-2.232\phi\pi + 0.03}.$$

Что касается момента времени t_0 , то он линейно растет с ростом $N^{\gamma(\phi)}$ ($t \sim N^{\gamma(\phi)}$), где γ уменьшается с ростом ϕ от $\gamma(0) = 1$ до $\gamma(1/2) = 1/2$.

5. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ $(\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow (Q_{\text{EXT}}, Q_R)$

Основной целью численного моделирования отображения (20) является выяснение зависимости площади создаваемой области от параметра неоднородности ϕ . В частности, мы выделим подобласть контролирующих параметров, для которой отображение (20) является (почти) взаимно однозначным.

5.1. Область контролирующих параметров. Разделим для удобства всю область контролирующих параметров (9) на четыре подобласти (по указанной ранее причине положим $\varphi_i = 0$).

Первая подобласть имеет вид

$$0 \leq \alpha_i \leq \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \quad (21)$$

вторая подобласть определяется условиями

$$\frac{1}{2} \leq \alpha_1 \leq 1, \quad 0 \leq \alpha_2 \leq \frac{1}{2}, \quad (22)$$

третья подобласть имеет вид

$$0 \leq \alpha_1 \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \leq \alpha_2 \leq 1, \quad (23)$$

и, наконец, четвертая подобласть определяется неравенствами

$$\frac{1}{2} \leq \alpha_i \leq 1, \quad i = 1, 2. \quad (24)$$

Причина такого разделения объясняется далее в п. 5.2, 5.3. В них показано, что подобласть (21) отображается (почти) взаимно однозначно в создаваемую область.

5.2. Цепочка ИПС. В предельном случае цепочки ИПС [19] (когда $\phi = 1/2$ в уравнении (2)) мы можем покрыть максимально допустимое пространство параметров Q_R , Q_{ext} (см. рис. 4, где $N = 20$). На этом рис. горизонтальные штриховые линии соответствуют условию $\alpha_2 = \text{const}$, а сплошные линии соответствуют $\alpha_1 = \text{const}$. Подчеркнем, что нет необходимости работать со всей областью (9) контролирующих параметров, поскольку параметры из первой подобласти (21) покрывают все создаваемое пространство, как показано на рис. 4а, где отмечены некоторые конкретные значения контролирующих параметров. Видно, что отображение (20) для этой подобласти является взаимно однозначным. Параметры из второй подобласти (22) отображаются в ту же область на рис. 4а (при этом параметр α_1 возрастает от $1/2$ до 1 при движении по этому рисунку справа налево). Следует отметить третью (23) и четвертую (24) подобласти, которые отображаются в подобласть, показанную на рис. 4б. Отмеченные значения контролирующих параметров α_i соответствуют третьей подобласти (23). Подобласть (24) отображается в ту же самую подобласть, при этом α_1 возрастает от $1/2$ до 1 при движении по этому рисунку справа налево.

Таким образом, подобласть на рис. 4б покрывается параметрами из подобластей (21)–(24) четыре раза. Следовательно, состояния из этой подобласти создать проще по сравнению с другими состояниями. Эта подобласть соответствует сравнительно малым значениям дискорда Q_R .

С помощью цепочки ИПС можно реализовать все возможные значения параметров Q_{ext} и Q_R . В частности, правый верхний угол на рис. 2 отображается в правый нижний угол на рис. 4а.

Рис. 4. Зависимость дискорда Q_{ext} от дискорда Q_R для цепочки из $N = 20$ узлов с параметром неоднородности $\phi = 1/2$ (цепочка ИПС) в момент времени $t_0 = 13.69$. На вертикальных сплошных линиях и горизонтальных штриховых линиях $\alpha_1 = \text{const}$ и $\alpha_2 = \text{const}$ соответственно. Интервал между соседними линиями в каждом семействе равен 0.05. На рис. “а” контролирующие параметры α_i , $i = 1, 2$, принадлежат подобласти (21). Подобласть контролирующих параметров (22) отображается в ту же самую область, при этом α_1 возрастает справа налево, достигая значения $\alpha_1 = 1$ на оси ординат. На рис. “б” контролирующие параметры α_i , $i = 1, 2$, принадлежат подобласти (23). Подобласть (24) покрывает ту же часть создаваемой области, при этом α_1 возрастает справа налево, достигая значения $\alpha_1 = 1$ на оси ординат.

5.3. Цепочки с параметром $\phi < 1/2$. Уменьшая ϕ от $1/2$ до 0, мы медленно трансформируем цепочку ИПС в однородную. Результаты численного моделирования отображения (20) для цепочек из 20 и 200 спинов с параметрами $\phi = 3/8, 1/4, 0$ представлены на рис. 5 и рис. 6 соответственно. Как было отмечено ранее, для однородной цепочки ($\phi = 0$) площадь создаваемой области минимальна (см. рис. 5в, е и рис. 6в, е).

На рис. 5а, б и рис. 6а, б изображено отображение (20), соответствующее подобласти (21) пространства контролирующих параметров, которое является почти взаимно однозначным отображением. Видно, что в этом случае отображение можно считать деформацией отображения, соответствующего цепочке ИПС, показанного на рис. 4а. В наибольшей мере это справедливо для значения $\phi = 3/8$, см. рис. 5а и рис. 6а. Кроме того, при $\phi = 3/8$ можно частично реализовать случай большого дискорда Q_R и малого дискорда Q_{ext} (правые нижние углы на этих рисунках соответствуют правому верхнему углу на рис. 2).

Отображение (20) всей области контролирующих параметров (9) в создаваемую область представлено на рис. 5г–е и рис. 6г–е для цепочек из 20 и 200 спинов соответственно. В этом случае рассматриваемое отображение является далеко не взаимно однозначным и имеет множество пересечений линий внутри каждого семейства $\alpha_1 = \text{const}$ и $\alpha_2 = \text{const}$. Отметим также, что существует подобласть вблизи оси ординат (малые Q_R), которая покрывается четыре раза параметрами из каждой подобласти (21)–(24). Как и в случае цепочки ИПС, состояния из этой подобласти создать проще по сравнению с состояниями других подобластей, которые покрываются три, два или один раз.

Рис. 5. Зависимость дискорда Q_{ext} от дискорда Q_R для цепочки из $N = 20$ узлов, $\phi < 1/2$. Два взаимно пересекающихся семейства линий соответствуют значениям $\alpha_1 = \text{const}$ и $\alpha_2 = \text{const}$ по аналогии с рис. 4. Интервал между соседними линиями в каждом семействе равен 0.05. На рис. “а”–“в” параметры α_i , $i = 1, 2$, принадлежат подобласти (21); на рис. “г”–“е” параметры α_i , $i = 1, 2$, принадлежат всей области (9). На рис. “а”, “г” $\phi = 3/8$, $t_0 = 15.27$, $R_{\text{max}}^2 = 0.98$; на рис. “б”, “д” $\phi = 1/4$, $t_0 = 16.75$, $R_{\text{max}}^2 = 0.94$; на рис. “в”, “е” $\phi = 0$ (однородная цепочка), $t_0 = 22.79$, $R_{\text{max}}^2 = 0.63$.

Рис. 6. Зависимость дискорда Q_{ext} от Q_R , как на рис. 5, для цепочки из $N = 200$ узлов, $\phi < 1/2$. На рис. “а”–“в” параметры α_i , $i = 1, 2$, принадлежат подобласти (21); на рис. “г”–“е” параметры α_i , $i = 1, 2$, принадлежат всей области (9). На рис. “а”, “г” $\phi = 3/8$, $t_0 = 55.91$, $R_{\text{max}}^2 = 0.97$; на рис. “б”, “д” $\phi = 1/4$, $t_0 = 69.48$, $R_{\text{max}}^2 = 0.88$; на рис. “в”, “е” $\phi = 0$ (однородная цепочка), $t_0 = 205.54$, $R_{\text{max}}^2 = 0.19$.

6. ВЫВОДЫ

В настоящей работе изучается удаленное создание квантовых коррелированных состояний. Рассмотрена модель с XU -гамильтонианом в приближении взаимодействий ближайших соседей и константами связи, зависящими от параметра ϕ , характеризующего неоднородность цепочки. При этом однородной цепочке соответствует случай $\phi = 0$, а цепочке ИПС соответствует $\phi = 1/2$.

Рассмотрены два параметра, характеризующие квантовые корреляции. Первым является дискорд Q_{ext} между приемником и остальными узлами коммуникационной линии. Он показывает, является ли приемник независимым от остальных спинов цепочки. Второй параметр – дискорд Q_R между двумя узлами приемника, который характеризует корреляции внутри приемника.

Показано, что создаваемая область увеличивается с ростом параметра ϕ , так что полное пространство состояний в терминах параметров Q_{ext}, Q_R можно покрыть в случае $\phi = 1/2$ (цепочка ИПС). При уменьшении ϕ создаваемая область уменьшается, покрывая минимальную площадь при $\phi = 0$ (однородная цепочка). Если $\phi = 3/8$ (т. е. цепочка почти является цепочкой ИПС), то создаваемая область уменьшается незначительно, что видно на рис. 5а, г и рис. 6а, г. Более того, сравнивая рис. 5а с рис. 6а, можно прийти к выводу, что в этом случае площадь создаваемой области слабо зависит от N , что согласуется с предсказанием п. 4.2. Однако видно, что при уменьшении ϕ область создаваемых состояний существенно уменьшается с ростом N , что в особенности заметно при сравнении рис. 5в, е с рис. 6в, е. Наиболее интересный случай соответствует правому верхнему углу на рис. 2, где Q_R достигает больших значений, а Q_{ext} существенно меньше. В этом случае квантовые корреляции между приемником и остальными спинами коммуникационной линии минимальны, поэтому приемник можно считать независимой подсистемой. Состояния из этого угла можно создать с помощью цепочки, рассчитанной для передачи квантового состояния с большой вероятностью (см. правые нижние углы на рис. 4а (цепочка ИПС), а также на рис. 5а, г и рис. 6а, г, где $\phi = 3/8$).

Подчеркнем также, что в пространстве контролирующих параметров существует подобласть (21), которая почти однозначно отображается в большую часть создаваемой области, как показано на рис. 5а–в и рис. 6а–в. Вне этой подобласти отображение теряет свою однозначность (как можно видеть из рис. 5г–е и рис. 6г–е). Кроме того, на этих рисунках видно, что подобласть вблизи оси ординат (где дискорд Q_R сравнительно мал) покрывается четыре раза контролирующими параметрами и, следовательно, ее проще реализовать по сравнению с другими подобластями.

Интересно отметить, что в рассматриваемой модели неоднородность устанавливает нижний предел вероятности R^2 переноса состояния, который оценивается эмпирически полученной штриховой кривой на рис. 3.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Дискорд между двумя узлами приемника

Рассматривая дискорд между $(N - 1)$ -м и N -м узлами, обозначим Q_{N-1} и Q_N дискорды, рассчитанные с использованием проективных измерений над $(N - 1)$ -м и N -м узлом соответственно [50]. Сначала получим формулу для Q_N :

$$Q_N = \mathcal{I}(\rho) - \mathcal{C}^N(\rho), \quad (\text{П.1})$$

где $\mathcal{I}(\rho)$ – полная взаимная информация [43], которую можно представить в следующем виде:

$$\mathcal{I}(\rho) = S(\rho^{(N-1)}) + S(\rho^{(N)}) + \sum_{j=0}^1 \lambda_j \log_2 \lambda_j, \quad (\text{П.2})$$

где λ_j , $j = 0, 1$, – ненулевые собственные числа матрицы плотности ρ^R (11):

$$\lambda_0 = \rho_{NN} + \rho_{(N-1)(N-1)}, \quad \lambda_1 = 1 - \lambda_0.$$

Здесь ρ_{ij} являются элементами матрицы ρ^R ($\rho_{NN} = |f_N|^2$, $\rho_{(N-1)(N-1)} = |f_{N-1}|^2$), а $\rho^{(N-1)} = \text{Tr}_N \rho^R$ и $\rho^{(N)} = \text{Tr}_{N-1} \rho^R$ – редуцированные матрицы плотности. Формулы для энтропий $S(\rho^{(N-1)})$ и $S(\rho^{(N)})$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} S(\rho^{(N-1)}) &= -(1 - \rho_{NN}) \log_2(1 - \rho_{NN}) - \rho_{NN} \log_2 \rho_{NN}, \\ S(\rho^{(N)}) &= -(1 - \rho_{(N-1)(N-1)}) \log_2(1 - \rho_{(N-1)(N-1)}) - \\ &\quad - \rho_{(N-1)(N-1)} \log_2 \rho_{(N-1)(N-1)}. \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Так называемую классическую составляющую $\mathcal{C}^B(\rho^R)$ взаимной информации найдем посредством минимизации по проективным измерениям на N -м спине [51]:

$$\mathcal{C}^{(N)}(\rho) = S(\rho^{(N-1)}) - \min_{\eta \in [0,1]} (p_0 S_0 + p_1 S_1), \quad (\text{П.4})$$

где

$$\begin{aligned} S(\theta_i) &\equiv S_i = -\frac{1 - \theta_i}{2} \log_2 \frac{1 - \theta_i}{2} - \frac{1 + \theta_i}{2} \log_2 \frac{1 + \theta_i}{2}, \\ p_i &= \frac{1}{2} (1 + (-1)^i \eta (1 - 2\rho_{(N-1)(N-1)})), \\ \theta_i &= \frac{1}{p_i} [(1 - \eta^2) \rho_{(N-1)(N-1)} \rho_{NN} + \\ &\quad + \frac{1}{4} (1 - 2\rho_{NN} + (-1)^i \eta (1 - 2(\rho_{(N-1)(N-1)} + \rho_{NN})))^2]^{1/2}, \end{aligned} \quad i = 0, 1. \quad (\text{П.5})$$

Здесь введен параметр η вместо параметра k , используемого в работе [51]: $k = (1 + \eta)/2$. Легко показать, что квантовый дискорд Q_{N-1} , полученный с помощью проективных измерений на $(N - 1)$ -м спине, можно найти следующим образом:

$$Q_{N-1} = Q_N |_{\rho_{(N-1)(N-1)} \leftrightarrow \rho_{NN}}. \quad (\text{П.6})$$

Теперь в качестве дискорда Q_R возьмем минимальный из дискордов Q_{N-1} и Q_N [52] (см. выражение (18)). Можно показать [50], что минимум в формуле (П.4) соответствует значению $\eta = 0$, так что мы приходим к явным формулам (18), (19) для дискорда Q_R .

Список литературы

- [1] N. A. Peters, J. T. Barreiro, M. E. Goggin, T.-C. Wei, P. G. Kwiat, *Phys. Rev. Lett.*, **94**:5 (2005), 150502, 4 pp.
- [2] N. A. Peters, J. T. Barreiro, M. E. Goggin, T.-C. Wei, P. G. Kwiat, “Remote state preparation: arbitrary remote control of photon polarizations for quantum communication”, *Quantum Communications and Quantum Imaging III*, SPIE Proceedings, **5893**, eds. R. E. Meyers, Ya. Shih, SPIE, Bellingham, WA, 2005, 10 pp.
- [3] B. Dakic, Ya. O. Lipp, X. Ma, M. Ringbauer, S. Kropatschek, S. Barz, T. Paterek, V. Vedral, A. Zeilinger, C. Brukner, P. Walther, *Nature Phys.*, **8** (2012), 666–670.
- [4] G.-Y. Xiang, J. Li, B. Yu, G.-C. Guo, *Phys. Rev. A*, **72**:1 (2005), 012315, 6 pp.
- [5] S. Pouyandeh, F. Shahbazi, A. Bayat, *Phys. Rev. A*, **90**:1 (2014), 012337, 9 pp.
- [6] L. Banchi, A. Bayat, P. Verrucchi, S. Bose, *Phys. Rev. Lett.*, **106**:14 (2011), 140501, 4 pp.
- [7] B. Chen, Z. Song, *Sci. China Phys. Mech. Astron.*, **53**:7 (2010), 1266–1270.
- [8] A. Datta, A. Shaji, C. M. Caves, *Phys. Rev. Lett.*, **100**:5 (2008), 050502, 4 pp.
- [9] B. P. Lanyon, M. Barbieri, M. P. Almeida, A. G. White, *Phys. Rev. Lett.*, **101**:4 (2008), 200501, 4 pp.
- [10] W.-J. Nie, Y.-H. Lan, Y. Li, S.-Y. Zhu, *Sci. China Phys. Mech. Astron.*, **57**:12 (2014), 2276–2284.
- [11] P. Zhang, B. You, L.-X. Cen, *Chin. Sci. Bull.*, **59**:29–30 (2014), 3841–3846.
- [12] J. X. Shi, W. Xu, G. Sun, J. Zhai, Z. Du, L. Wang, T. Hua, J. Chen, L. Kang, P. Wu, *Chin. Sci. Bull.*, **59**:21 (2014), 2547—2551.
- [13] S. Rodriques, N. Datta, P. J. Love, *Phys. Rev. A*, **90**:1 (2014), 012340, 7 pp.
- [14] E. B. Fel’dman, R. Brüschweiler, R. R. Ernst, *Chem. Phys. Lett.*, **294**:4–5 (1998), 297–304.
- [15] S. Bose, *Phys. Rev. Lett.*, **91**:20 (2003), 207901, 4 pp.
- [16] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.*, **70**:13 (1993), 1895–1899.
- [17] D. Bouwmeester, J.-W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, A. Zeilinger, *Nature*, **390** (1997), 575–579.
- [18] D. Boschi, S. Branca, F. De Martini, L. Hardy, S. Popescu, *Phys. Rev. Lett.*, **80**:6 (1998), 1121–1125.
- [19] M. Christandl, N. Datta, A. Ekert, A. J. Landahl, *Phys. Rev. Lett.*, **92**:18 (2004), 187902, 4 pp.
- [20] C. Albanese, M. Christandl, N. Datta, A. Ekert, *Phys. Rev. Lett.*, **93**:23 (2004), 230502, 4 pp.
- [21] P. Karbach, J. Stolze, *Phys. Rev. A*, **72**:3 (2005), 030301.
- [22] G. Gualdi, V. Kostak, I. Marzoli, P. Tombesi, *Phys. Rev. A*, **78**:2 (2008), 022325, 5 pp.
- [23] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, P. W. Shor, J. A. Smolin, B. M. Terhal, W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.*, **87**:7 (2001), 077902; Erratum, **88**:9 (2002), 099902, 1 pp.
- [24] C. H. Bennett, P. Hayden, D. W. Leung, P. W. Shor, A. Winter, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **51**:1 (2005), 56–74, arXiv:quant-ph/0307100.
- [25] G. L. Giorgi, *Phys. Rev. A*, **88**:2 (2013), 022315, 4 pp.
- [26] E. I. Kuznetsova, A. I. Zenchuk, *Phys. Lett. A*, **372**:40 (2008), 6134–6140.
- [27] J. Stolze, G. A. Álvarez, O. Osenda, A. Zwick, “Robustness of spin-chain state-transfer schemes”, *Quantum State Transfer and Network Engineering. Quantum Science and Technology*, eds. G. M. Nikolopoulos, I. Jex, Springer, Heidelberg, 2014, 149–182.
- [28] A. Bayat, V. Karimipour, *Phys. Rev. A*, **71**:4 (2005), 042330, 7 pp.
- [29] P. Cappellaro, V. Lorenza, C. Ramanathan, *Phys. Rev. A*, **83**:3 (2011), 032304, 10 pp.
- [30] W. Qin, C. Wang, G. L. Long, *Phys. Rev. A*, **87**:1 (2013), 012339, 7 pp.
- [31] A. Bayat, *Phys. Rev. A*, **89**:6 (2014), 062302, 6 pp.

- [32] C. Godsil, S. Kirkland, S. Severini, Ja. Smith, *Phys. Rev. Lett.*, **109**:5 (2012), 050502, 4 pp.
- [33] R. Sousa, Ya. Omar, *New J. Phys.*, **16** (2014), 123003, 12 pp.
- [34] D. Burgarth, S. Bose, *Phys. Rev. A*, **71**:5 (2005), 052315, 6 pp.
- [35] K. Shizume, K. Jacobs, D. Burgarth, S. Bose, *Phys. Rev. A*, **75**:6 (2007), 062328, 6 pp.
- [36] A. I. Zenchuk, *Phys. Rev. A*, **90**:5 (2014), 052302, 13 pp.
- [37] G. A. Bochkin, A. I. Zenchuk, *Phys. Rev. A*, **91**:6 (2015), 062326, 11 pp.
- [38] E. B. Fel'dman, E. I. Kuznetsova, A. I. Zenchuk, *Temperature-dependent remote control of polarization and coherence intensity with pure sender's initial state*, arXiv:1507.07738.
- [39] S. Yang, A. Bayat, S. Bose, *Phys. Rev. A*, **84**:2 (2011), 020302, 4 pp.
- [40] A. I. Zenchuk, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **45**:11 (2012), 115306, 11 pp.
- [41] S. Pouyandeh, F. Shahbazi, *Internat. J. Quantum Inf.*, **13**:5 (2015), 1550030, 13 pp.
- [42] L. Henderson, V. Vedral, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **34**:35 (2001), 6899–6905.
- [43] H. Ollivier, W. H. Zurek, *Phys. Rev. Lett.*, **88**:1 (2001), 017901, 4 pp.
- [44] W. H. Zurek, *Rev. Modern Phys.*, **75**:3 (2003), 715–775.
- [45] W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.*, **80**:10 (1998), 2245–2248.
- [46] S. Hill, W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.*, **78**:26 (1997), 5022–5025.
- [47] A. Peres, *Phys. Rev. Lett.*, **77**:8 (1996), 1413–1415.
- [48] L. Amico, R. Fazio, A. Osterloh, V. Vedral, *Rev. Modern Phys.*, **80**:2 (2008), 517–576.
- [49] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, K. Horodecki, *Rev. Modern Phys.*, **81**:2 (2009), 865–942.
- [50] E. B. Fel'dman, A. I. Zenchuk, *Quantum Inf. Process.*, **13**:2 (2014), 201–225.
- [51] M. Ali, A. R. P. Rau, G. Alber, *Phys. Rev. A*, **81**:4 (2010), 042105, 7 pp.; Erratum, **82**:6 (2010), 069902, 1 pp.
- [52] E. B. Fel'dman, A. I. Zenchuk, *Phys. Lett. A*, **373**:20 (2009), 1719–1728.

Поступила в редакцию 12.11.2015