Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Харук, С. М. Сибиряков, Динамическое образование лоренц-инвариантности и киральных фермионов, *ТМФ*, 2016, том 189, номер 3, 405–428

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9104>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 15:02:24

© 2016 г.

И. В. Харук^{*†}, С. М. Сибиряков^{*‡§}

ДИНАМИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ ЛОРЕНЦ-ИНВАРИАНТНОСТИ И КИРАЛЬНЫХ ФЕРМИОНОВ

Исследуется поток ренормгруппы в теориях с сильно взаимодействующими полями в фермионном секторе, соответствующий переходу между теорией без лоренц-инвариантности при высоких энергиях и теорией с приблизительной лоренц-инвариантностью в инфракрасном пределе. Используется голографическое описание сильного взаимодействия. Особое внимание уделено возникновению киральных фермионов в низкоэнергетическом пределе.

Ключевые слова: голография, AdS/CFT-дуальность, ренормгрупповой поток, киральные фермионы, пространство Лифшица.

DOI: 10.4213/tmf9104

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы наблюдается возвращение к идее о том, что лоренц-инвариантность (ЛИ) может быть не фундаментальным свойством природы, а возникать только как приблизительная симметрия физики низких энергий [1], [2]. Изучение этой возможности было мотивировано предположением Хоравы [3] о том, что отказ от ЛИ улучшает поведение гравитации в ультрафиолетовом (УФ) пределе. В рамках этого предположения отклонение от ЛИ при больших энергиях позволяет постулировать анизотропное (лифшицево) масштабирование [4], которое делает теорию гравитации перенормируемой. Существует жизнеспособный вариант гравитации Хоравы–Лифшица [5], [6], который также удовлетворяет всем существующим экспериментальным ограничениям [7]. С феноменологической точки зрения

Работа И. В. Харука была поддержана РФФИ (грант № 14-02-31429), работа С. М. Сибирякова была поддержана Swiss National Science Foundation.

^{*}Институт ядерных исследований РАН, Москва, Россия. E-mail: sibir@ms2.inr.ac.ru

[†]Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия. E-mail: ivan.kharuk@phystech.edu

[‡]CERN Theory Division, Geneva, Switzerland

[§]LPPC, Institut de Physique École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne, Switzerland

нарушение ЛИ было использовано для построения интересных модификаций теории гравитации на больших расстояниях [8]–[10]. Подобные модели позволяют анализировать возможные отклонения от общей теории относительности и могут быть важны в космологии [11], [12].

Появление симметрии Лоренца в качестве эффективной симметрии в низкоэнергетическом пределе является довольно обычным явлением в физике конденсированных сред [13]–[18]. Также нетрудно построить модели физики элементарных частиц с этим свойством. Действительно, в работах [1], [2] рассматривались теория Янга–Миллса и квантовая электродинамика с добавлением нарушающих лоренц-инвариантность слагаемых размерности $D = 4^1$ и было показано, что коэффициенты при этих слагаемых обращаются в нуль вдоль потока ренормгруппы (РГ) в инфракрасном (ИК) пределе. Этот результат сохраняется и для лоренц-неинвариантного расширения полной Стандартной модели [19]. Более того, существует достаточно общий аргумент [20], [21], доказывающий, что ЛИ-неподвижные точки РГ-потоков являются ИК-стабильными относительно СРТ-инвариантных деформаций и, следовательно, имеют непустую область притяжения в пространстве СРТ-инвариантных нерелятивистских теорий. Во всех теориях из этой области притяжения возникает эффективная ЛИ в ИК-пределе²). В двумерном пространстве-времени было показано [22], что при достаточно общих предположениях взаимодействующие фиксированные точки с изотропной масштабной инвариантностью являются с необходимостью ЛИ.

Однако такой подход встречает существенные сложности при проверке в точных экспериментах в физике частиц, изучающих возможные отклонения от ЛИ [23]–[25]. В теории со слабой связью для коэффициентов, стоящих перед маргинальными нарушающими ЛИ операторами, имеет место логарифмическое поведение. Если эти коэффициенты порядка единицы³) на некотором (УФ) масштабе Λ_* , скажем порядка планковской массы, они становятся лишь частично подавленными на экспериментально достижимых энергиях. Эти операторы, в частности, изменяют дисперсионные соотношения элементарных частиц, вызывая сдвиги максимальных скоростей, зависящие от их типа [28]. Экспериментальные ограничения на этот эффект очень сильны [24], и логарифмического подавления соответствующих операторов для их выполнения недостаточно. Операторы высших размерностей, нарушающие ЛИ, подавляются фактором $1/\Lambda_*$ в некоторой положительной степени и благодаря этому менее проблематичны. Тем не менее значимые ограничения на их вклады в дисперсионные соотношения частиц могут быть получены из астрофизики [29]–[33].

Есть два пути решения данной проблемы. Первый из них – это, оставаясь в пертурбативном режиме, предположить, что теория имеет дополнительную симметрию,

¹)Нарушающие лоренц-инвариантность слагаемые размерности $D = 2$ не могут быть построены из полей теории, а слагаемые, имеющие размерность $D = 3$ могут быть исключены наложением дискретной СРТ-симметрии.

²)Это, конечно, не означает, что любая нерелятивистская теория становится ЛИ в ИК-пределе; например, существуют РГ-потоки, заканчивающиеся в неподвижных точках с лифшицевым масштабированием.

³)В принципе, можно рассмотреть ситуацию, когда на древесном уровне ЛИ является точной симметрией в секторе материи и нарушается только для гравитации [26]. В этом случае нарушение ЛИ передается материи только через петли с гравитонами, которые подавляются. Однако отход от однородного лифшицевого масштабирования в УФ, необходимый при таком подходе, может нарушать свойства теории при высоких энергиях [27].

Рис. 1. Различные масштабы в предположении возникновения ЛИ из сильного взаимодействия. Выше Λ_* теория существенно нерелятивистская. РГ-поток ниже Λ_* , находясь в режиме сильной связи, приводит теорию к ЛИ-фиксированной точке. Релевантная деформация обрывается на масштабе Λ_{IR} , где теория входит в фазу конфайнмента и поля стандартной модели возникают как связанные состояния.

влекущую ЛИ как случайную симметрию при низких энергиях. Роль такой дополнительной симметрии может играть нерелятивистская суперсимметрия [34], [35]. Конечно, в реалистичной модели суперсимметрия должна нарушаться, что ведет к появлению потенциально опасных нарушающих ЛИ операторов. Однако, если масштаб нарушения суперсимметрии иерархически ниже, чем Λ_* , коэффициенты при этих операторах сильно подавлены и могут быть совместимы с экспериментальными ограничениями. Однако неизвестно, совместима ли требуемая версия суперсимметрии с лифшицевым масштабированием при высоких энергиях [36].

Другой подход был предложен в работе [21] (а также в [37]), он проиллюстрирован на рис. 1. Этот подход основан на наблюдении, что в сильно взаимодействующих теориях РГ-поток (понимаемый в вильсоновском смысле) быстр и, как правило, влечет степенную зависимость параметров взаимодействия от РГ-масштаба. Следовательно, если стандартная модель вложена в теорию, проходящую РГ-эволюцию с сильной связью между масштабом нарушения ЛИ Λ_* и некоторым меньшим масштабом Λ_{IR} (все еще превосходящим экспериментально достижимые энергии), то коэффициенты при нарушающих ЛИ операторах подавляются фактором $(\Lambda_{\text{IR}}/\Lambda_*)^\alpha$ с $\alpha > 0$. Показатель степени контролируется размерностью наименьшего иррелевантного нарушающего ЛИ оператора [21]. Если α и отношение $\Lambda_*/\Lambda_{\text{IR}}$ достаточно велики, экспериментальные ограничения в подобных моделях выполняются. Заметим, что в таких сценариях достаточно, чтобы сильная связь возникала только в секторе материи и, следовательно, описывалась, по крайней мере в принципе, стандартными методами квантовой теории поля. Гравитация может оставаться слабо взаимодействующей при всех энергиях.

Стоит подчеркнуть, что данный сценарий предполагает, что весь сектор Стандартной модели проходит через режим сильной связи. Иными словами, все поля Стандартной модели должны возникать как связанные состояния сильной динамики с масштабом композитности, задаваемым Λ_{IR} . Построение реалистичной модели с такими свойствами является непростой задачей. В подобных случаях полезным инструментом является калибровочно-гравитационное (голографическое) соответствие, позволяющее описывать сильную четырехмерную динамику в терминах теории со слабыми связями в пространстве на единицу большей размерности. Этот подход был использован в работе [21] для реализации описанного механизма возникновения ЛИ в скалярной игрушечной модели. Цель настоящей работы состоит в расширении анализа на теории с фермионами. Мы рассматриваем случай, когда нерелятивистская УФ-теория инвариантна относительно пространственных вращений и, соответственно, фермионы определяются как поля, преобразующиеся согласно спинорному представлению⁴⁾ $SO(3)$ (или $SO(d-1)$ в общем случае $(d-1)$ -пространственной размерности).

В результате включения фермионов в модель возникающей ЛИ появляются следующие дополнительные вопросы. Центральную роль в структуре Стандартной модели играют киральные фермионы. Однако само определение киральности существенно опирается на существование представлений Вейля группы Лоренца. Но тогда как могут возникнуть киральные фермионы в теории, фундаментально не обладающей ЛИ? Мы увидим, что ответ на этот вопрос основан на простом кинематическом свойстве: $SO(3)$ -спинор в УФ-теории имеет две независимые компоненты, что в точности отвечает числу компонент четырехмерного вейлевского спинора⁵⁾. Степени свободы УФ-фермиона контролируются РГ-эволюцией в режиме сильной связи и при низких энергиях составляют киральный фермион. Необходимым и достаточным требованием для этого является существование бесцелевой моды в низкоэнергетическом пределе теории. Мы представим голографические модели РГ-поток, для которых это требование выполняется. Эта конструкция позволит точно вычислить вклады, нарушающие ЛИ, в низкоэнергетическую теорию и проверить их степенное подавление.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 мы кратко описываем голографический формализм для фермионов в стандартном релятивистском подходе. В разделе 3 мы рассматриваем упрощенную модель, описывающую нерелятивистский фермион, связанный с сильно взаимодействующим релятивистским сектором. Последний полагается векторообразным, т. е. не содержащим безмассовых киральных состояний. Мы показываем, что эта конструкция приводит к возникновению как бесцелевой киральной моды при низких энергиях, так и ЛИ. В разделе 4 мы переходим к ситуации, моделирующей РГ-поток от теории с лифшицевым масштабированием в УФ-поток к ЛИ ИК-неподвижной точке. Мы предполагаем, что РГ-поток останавливается, когда теория входит в фазу конфайнмента. Мы показываем, что подходящее введение конфайнмента ведет к возникновению связанного кирального состояния. В разделе 5 мы обсуждаем возникновение ЛИ в теориях с фермионами при нечетной размерности пространства-времени. Раздел 6 содержит дискуссию и заключение.

⁴⁾Мы предполагаем, что эти поля удовлетворяют антикоммутационным соотношениям.

⁵⁾Соответствие работает для любого четномерного пространства-времени.

2. ГОЛОГРАФИЯ ДЛЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ФЕРМИОНОВ

В этом разделе мы рассмотрим голографическое соответствие для фермионов в ЛИ-случае, следуя работам [38]–[41]. Оно устанавливает связь между конформной теорией поля (КТП) с сильными связями и большим числом степеней свободы в размерности d и гравитацией в пространстве-времени анти-де Ситтера (AdS) размерности $d + 1$. Последнее имеет метрику

$$ds^2 = \left(\frac{l}{u}\right)^2 (-dt^2 + dx^i dx^i + du^2), \quad i = 1, \dots, d-1, \quad (1)$$

где l – радиус пространства AdS. Фермионный оператор $\mathcal{O}_\psi$ в КТП соответствует фермиону ψ в пространстве AdS. Действие для свободного фермиона с массой M имеет вид

$$S = - \int d^{d+1}x \sqrt{|g|} i(\bar{\psi} \not{D} \psi - M \bar{\psi} \psi) + S_\partial, \quad (2)$$

где $\bar{\psi} = \psi^\dagger \Gamma^t$, оператор Дирака задается выражением⁶⁾

$$\not{D} = e_A^M \Gamma^A D_M, \quad D_M = \left(\partial_M + \frac{1}{2} \omega_{ABM} \Sigma^{AB} \right), \quad \Sigma^{AB} = \frac{1}{4} [\Gamma^A, \Gamma^B], \quad (3)$$

Γ^A – $(d+1)$ -мерные матрицы Дирака. Граничный член S_∂ необходим для корректности вариационного принципа и будет введен ниже. Общий знак перед действием фиксирован условием унитарности [41]. Диагональная тетрада и соответствующая ей спинорная связность имеют вид

$$e_A^M = \frac{u}{l} \delta_A^M, \quad \omega_{u\beta\mu} = \frac{\eta_{\beta\mu}}{u}, \quad (4)$$

все остальные компоненты ω обращаются в нуль, что позволяет упростить выражение для оператора Дирака:

$$\not{D} = \frac{u}{l} (\Gamma^u \partial_u + \Gamma^\mu \partial_\mu) - \frac{d}{2l} \Gamma^u. \quad (5)$$

Чтобы решить уравнения Дирака

$$(\not{D} - M)\psi = 0, \quad (6)$$

необходимо разложить спинор по собственным векторам по отношению к Γ^u ,

$$\psi = \psi_+ + \psi_-, \quad \Gamma^u \psi_\pm = \pm \psi_\pm. \quad (7)$$

Применяя преобразование Фурье по d плоским размерностям, $\psi \propto e^{ip_\mu x^\mu}$, мы получаем общее решение:

$$\begin{aligned} \psi_-(\vec{p}, u) &= (pu)^{(d+1)/2} (\chi_1(\vec{p}) J_{Ml+1/2}(pu) + \chi_2(\vec{p}) Y_{Ml+1/2}(pu)), \\ \psi_+(\vec{p}, u) &= (pu)^{(d+1)/2} \frac{i p_\mu \Gamma^\mu}{p} (\chi_1(\vec{p}) J_{Ml-1/2}(pu) + \chi_2(\vec{p}) Y_{Ml-1/2}(pu)), \end{aligned} \quad (8)$$

где $p \equiv \sqrt{-p_\mu p^\mu}$.

⁶⁾Мы используем прописные латинские буквы из начала алфавита $A, B, \dots$ для индексов в локальной системе координат Лоренца в размерности $d+1$; прописные буквы из середины алфавита $M, N, \dots$ мы будем использовать для индексов в пространстве-времени размерности $d+1$; греческие буквы $\mu, \nu, \dots$ – индексы в пространстве размерности d , натянутом на t и x^i , $i = 1, \dots, d-1$ (если пространство-время плоское, то мы не будем различать индексы в касательном пространстве и индексы в локальной системе координат Лоренца).

Для $Ml > 1/2$ мода, связанная с χ_2 , ненормируема. Она интерпретируется как источник для дуального оператора $\mathcal{O}_\psi$ в КТП. Точнее, источник χ определяется соотношением

$$\chi = \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{u}{l} \right)^{Ml-d/2} \psi_-. \quad (9)$$

Статистическая функция

$$Z[\chi] \equiv \int d\psi d\bar{\psi} e^{iS_{\text{AdS}}} \quad (10)$$

с интегралом по конфигурациям, удовлетворяющим граничным условиям⁷⁾ (9), обеспечивает генерирующий функционал для корреляторов $\mathcal{O}_\psi$. КТП без источников соответствует $\chi_2 = 0$. Размерность $\mathcal{O}_\psi$ находится из поведения компонент ψ_+ при малых u :

$$\psi_+ \propto \frac{ip_\mu \Gamma^\mu}{p} \chi_1(p) (pu)^{Ml+d/2} \implies \dim \mathcal{O}_\psi = Ml + \frac{d}{2}. \quad (11)$$

При $Ml < -1/2$ ситуация обратная. В этом случае ненормируемая мода связана с компонентой χ_1 , дающей основной вклад в компоненту ψ_+ . Таким образом, последняя интерпретируется как источник, в то время как ψ_- определяет размерность дуального оператора,

$$\dim \mathcal{O}'_\psi = -Ml + \frac{d}{2}. \quad (12)$$

В интервале $-1/2 < Ml < 1/2$ обе моды χ_1 и χ_2 нормируемы и теория допускает два альтернативных квантования [41]. В настоящей работе мы ограничимся случаем $Ml > -1/2$ и выберем квантование с источником, ассоциируемым с ψ_- по формуле (9); размерность оператора задается формулой (11). Заметим, что при $Ml = -1/2$ выражение (11) насыщает нижнюю унитарную границу в размерности полуспинового оператора в d -мерном пространстве-времени [42]–[44].

Вариация полного действия (2) должна обращаться в нуль на решении. Интегрируя действие в объемлющем пространстве по частям и приравнивая к нулю вклад при $u = \infty$, мы получаем

$$\delta S = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} i \int_{u=\epsilon} d^d x \left(\frac{\epsilon}{l} \right)^{-(d-1)/2} (\bar{\psi}_- \delta \psi_+ - \bar{\psi}_+ \delta \psi_-) + \delta S_\partial. \quad (13)$$

Компонента ψ_- должна удовлетворять граничным условиям Дирихле (9), т. е. ее вариация равна нулю, в то время как обращение в нуль величины $\delta \psi_+$ невозможно. Чтобы избавиться от этого вклада, выберем [40]

$$S_\partial = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} i \int_{u=\epsilon} d^d x \left(\frac{\epsilon}{l} \right)^{-(d-1)/2} \bar{\psi}_- \psi_+. \quad (14)$$

Если пространство AdS ограничено браной при конечном ϵ , которое соответствует конечному УФ-обрезанию в дуальной КТП, член (14) должен быть вычислен на этой УФ-бране.

⁷⁾В общем случае интегрирование в (10) должно быть выполнено по всем полям, представленным в теории в пространстве AdS, включая метрику, с учетом граничных условий. Для простоты мы пренебрегаем ими в нашем обсуждении.

Мы предполагаем, что КТП входит в фазу конфайнмента при низких энергиях, так что она обладает дискретным спектром возбуждений [45]. Это реализуется помещением браны⁸⁾ при $u = L$ (называемой далее *ИК-браной*) и удалением области $u > L$. С физической точки зрения L^{-1} можно интерпретировать как масштаб конфайнмента. Мы будем рассматривать два варианта граничных условий на ИК-бране, которые мы будем называть $\mathcal{B}_+$ и $\mathcal{B}_-$. В случае $\mathcal{B}_+$ мы требуем обращения в нуль ψ_+ на бране,

$$\mathcal{B}_+ : \psi_+|_{u=L} = 0, \quad (15)$$

при произвольной компоненте ψ_- . В случае $\mathcal{B}_-$ налагаемые условия противоположны:

$$\mathcal{B}_- : \psi_-|_{u=L} = 0, \quad \psi_+|_{u=L} \text{ произвольно.} \quad (16)$$

Спектр масс получается путем подстановки (8) в (15) или (16) (напомним, что $\chi_2 = 0$ вследствие граничного условия при $u \rightarrow 0$),

$$m_j^{(\pm)} = L^{-1} \mu_j^{(Ml \mp 1/2)}, \quad (17)$$

где $\mu_j^{(\nu)}$ – j -й положительный корень функции Бесселя. Безмассовые моды должны быть изучены отдельно. Прямой анализ показывает, что безмассовые моды отсутствуют в случае $\mathcal{B}_+$, в то время как в случае $\mathcal{B}_-$ есть безмассовая мода вида

$$\psi_+ = \chi_0 \left(\frac{u}{l} \right)^{Ml+d/2}, \quad \psi_- = 0, \quad (18)$$

где спинор χ_0 удовлетворяет уравнению $p_\mu \Gamma^\mu \chi_0 = 0$.

В дальнейшем мы ограничимся случаем нечетного d ; мы вернемся к случаю четного d в разделе 5. Удобно выбирать $(d+1)$ -мерные гамма-матрицы в виде

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu, \quad \mu = 0, \dots, d-1, \quad \Gamma^u = \gamma^{d+1}, \quad (19)$$

где γ^μ – d -мерные матрицы Дирака, γ^{d+1} – киральная матрица, d -мерный аналог γ^5 . Из (9) видно, что источник χ и соответствующий оператор $\mathcal{O}_\psi$ принадлежат представлению Вейля d -мерной группы Лоренца. Тем не менее спектр связанных состояний содержит киральную безмассовую моду только в случае $\mathcal{B}_-$. В случае $\mathcal{B}_+$ все собственные моды являются массивными и имеют левые и правые компоненты, вместе образующие полное представление Дирака. В этом смысле дуальная низкоэнергетическая теория, возникающая в случае $\mathcal{B}_+$, представляет собой теорию векторного типа.

⁸⁾ Чтобы удовлетворять уравнениям Эйнштейна, брана должна иметь отрицательное натяжение. Это не приводит к патологиям, если гравитационное поле удовлетворяет подходящим граничным условиям [46].

3. КИРАЛЬНЫЕ МОДЫ ОТ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ ФЕРМИОНОВ

Теперь мы сделаем (деформированную) КТП из предыдущего раздела и нерелятивистский фермион взаимодействующими и изучим результирующий РГ-поток. Для этого мы введем УФ-обрезание Λ_* и сделаем источник χ на данном масштабе элементарным динамическим полем с нарушающим ЛИ действием S_χ . Полное действие на масштабе Λ_* имеет вид

$$S = S_{\text{CFT}} + S_\chi + \Lambda_*^{-Ml} \int d^d x \bar{\chi} \mathcal{O}_\psi. \quad (20)$$

Мы будем предполагать, что действие S_χ инвариантно относительно пространственных поворотов⁹⁾. Для определенности выберем для начала простое действие

$$S_\chi = -b \int d^d x i(\bar{\chi} \gamma^0 \partial_0 \chi + v \bar{\chi} \gamma^i \partial_i \chi), \quad (21)$$

где скорость v поля χ отлична от единицы. Параметр b с размерностью длины был введен для получения безразмерного действия. Заметим, что мы не вводим оператор, нарушающий ЛИ, без производных ($\bar{\chi} \gamma^0 \chi$), который нечетен относительно сопряжения заряда (и СРТ). Мы будем предполагать данные симметрии, хотя они, как будет видно ниже, не играют существенной роли в данном сценарии.

Для пространства AdS приведенная выше ситуация может быть реализована с помощью обрезания пространства УФ-браной при $u = \Lambda_*^{-1}$ и дополнения действия (2) граничным членом

$$S_{\text{UV}} = -b \int_{u=\Lambda_*^{-1}} d^d x i(\bar{\psi}_- \gamma^0 \partial_0 \psi_- + v \bar{\psi}_- \gamma^i \partial_i \psi_-). \quad (22)$$

Таким образом, мы получаем теорию в области AdS, ограниченной УФ- и ИК-бранами [46], [45]. Без ограничения общности можно отождествить Λ_*^{-1} с радиусом пространства AdS l , что нами будет сделано всюду ниже.

Каноническая размерность элементарного фермиона χ равна $(d-1)/2$. Вспоминая размерность (11) оператора $\mathcal{O}_\psi$, мы видим, что взаимодействие между χ и $\mathcal{O}_\psi$ в (20) имеет размерность $d + Ml - 1/2$. Если $Ml > 1/2$, то это взаимодействие иррелевантно и сектор, нарушающий ЛИ, отщепляется от КТП в ИК-пределе. Следовательно, ЛИ не возникает в данном случае, что соответствует аналогичной ситуации в скалярной модели при иррелевантной связи [21]. В дальнейшем мы ограничимся областью

$$-\frac{1}{2} < Ml < \frac{1}{2}, \quad (23)$$

когда взаимодействие релевантно и порождает РГ-поток в режиме сильной связи. Кроме того, мы сосредоточимся на выборе $\mathcal{B}_+$ в качестве ИК-граничных условий. Это обосновано тем, что, как уже отмечалось в разделе 2, в этом случае КТП не имеет никаких массивных мод. Тогда полная система имеет единственную бесщелевую моду, приходящую из элементарного фермиона χ , который, как мы увидим

⁹⁾ Следует отметить, что анализ в этом разделе может быть прямо обобщен на случай отсутствия пространственной изотропности.

ниже, не исчезает в ИК-пределе. С другой стороны, в случае граничных условий $\mathcal{B}_-$ общее число бесщелевых мод равно 2 (одна в КТП и одна в секторе χ). Можно легко показать, что такая конфигурация имеет щель в спектре [45]. Поскольку наша цель состоит в том, чтобы изучить киральные фермионы, этот случай не представляет для нас интереса.

Из (2), (22) можно получить граничные условия на УФ-бране,

$$\left[b(\gamma^0 \partial_0 + v \gamma^i \partial_i) \psi_- + \psi_+ \right] \Big|_{u=l} = 0. \quad (24)$$

Спектр собственных мод определяется наложением условия (24) вместе с ИК-граничными условиями (15) на общее решение (8). Это приводит к волновым функциям

$$\psi_- = \chi_1 f_-(u), \quad \psi_+ = \frac{ip_\mu \gamma^\mu}{p} \chi_1 f_+(u), \quad (25)$$

где

$$f_\pm(u) = (pu)^{(d+1)/2} \left[J_{Ml \mp 1/2}(pu) - \frac{J_{Ml-1/2}(pL)}{Y_{Ml-1/2}(pL)} Y_{Ml \mp 1/2}(pu) \right], \quad (26)$$

а спинор χ_1 является решением уравнения

$$\left[p_0 \gamma^0 \left(1 + pb \frac{f_-(l)}{f_+(l)} \right) + p_i \gamma^i \left(1 + vpb \frac{f_-(l)}{f_+(l)} \right) \right] \chi_1 = 0. \quad (27)$$

Нас интересует бесщелевая мода, квадрат d -мерного импульса которой гораздо меньше масштаба конфайнмента,

$$pl \ll pL \ll 1. \quad (28)$$

Разлагая отношение $f_-(l)/f_+(l)$ при этих предположениях, получаем, что уравнение (27) упрощается:

$$\left[-\omega \gamma^0 \left(1 + (1-2Ml) \frac{b}{l} \left(\frac{l}{L} \right)^{1-2Ml} \right) + k_i \gamma^i \left(1 + v(1-2Ml) \frac{b}{l} \left(\frac{l}{L} \right)^{1-2Ml} \right) \right] \chi_1 = 0, \quad (29)$$

где мы ввели обозначения $\omega \equiv -p_0$, $k_i \equiv p_i$. Естественно взять параметры b и l одного порядка, так как они оба характеризуют УФ-свойства системы. В этом случае уравнение (29) имеет тот же вид, что и стандартное релятивистское уравнение для вейлевского спинора, с точностью до поправок, подавленных степенями малых отношений (l/L) ИК- и УФ-разрезов. Обратим внимание, что максимальное подавление, достижимое в данной модели, равно $(l/L)^2$, оно достигается при $Ml \approx -1/2$. Возведение в квадрат комбинации γ -матриц в (29) дает дисперсионное соотношение

$$\omega = \pm |\mathbf{k}| \left[1 + (v-1)(1-2Ml) \frac{b}{l} \left(\frac{l}{L} \right)^{1-2Ml} \right]. \quad (30)$$

Из этого выражения видно, что скорость моды близка к единице при большом расстоянии между УФ- и ИК-масштабами. Уравнение для амплитуды моды положительной частоты имеет вид

$$\Sigma_{\mathbf{k}} \chi_1 = 0, \quad \Sigma_{\mathbf{k}} \equiv -|\mathbf{k}| \gamma^0 + k_i \gamma^i. \quad (31)$$

Вспоминая, что компонента χ_1 также удовлетворяет условию киральности, $\Gamma^u \chi = \gamma^{d+1} \chi_1 = -\chi_1$ (см. (7), (19)), мы заключаем, что она имеет $2^{d/2-2}$ независимых

компонент, имеющих ту же структуру, что и спинор Вейля в размерности d . В частности, в случае $d = 4$ она имеет единственную компоненту, соответствующую спину, сонаправленному с пространственным импульсом.

Приведенное выше доказательство было проведено в предположениях (28). Используя соотношение (30), можно показать, что последнее неравенство в (28) выполнено, пока импульс моды не достигает определенного верхнего предела,

$$|\mathbf{k}| \ll \frac{1}{L\sqrt{|v-1|}} \left(\frac{L}{l}\right)^{1/2-Ml}. \quad (32)$$

Эта граница параметрически больше, чем $1/L$, но меньше, чем $1/l$. Чтобы понять, что происходит при большем импульсе, мы разложим $f_{\pm}(l)$ для $pl \ll 1$, рассматривая произведение pL как величину порядка единицы. В результате получаем уравнение

$$pb \frac{f_+(l)}{f_-(l)} = \frac{b}{l} \mathcal{J}(pL)(pl)^{1-2Ml},$$

где $\mathcal{J}(z)$ – комбинация функций Бесселя с коэффициентами порядка единицы. Уравнение на собственные значения, следующее из (27), может быть приведено к виду¹⁰⁾

$$\frac{(pL)^{1+2Ml}}{\mathcal{J}(pL)} = 2(v-1) \frac{b}{l} \left(\frac{l}{L}\right)^{1-2Ml} \mathbf{k}^2 L^2. \quad (33)$$

Заметим, что левая часть уравнения зависит только от ЛИ-комбинации $p = \sqrt{\omega^2 - \mathbf{k}^2}$. Обращая (33), мы получаем дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = \mathbf{k}^2 + \frac{1}{L^2} F \left[2(v-1) \frac{b}{l} \left(\frac{l}{L}\right)^{1-2Ml} \mathbf{k}^2 L^2 \right], \quad (34)$$

где $F(z)$ – некоторая безразмерная функция. Дисперсионное соотношение при малых импульсах получается путем разложения функции $F(z)$ в ряд Тейлора. Для бесщелевой моды член нулевого порядка обращается в нуль и линейный член дает (30). Полезно рассмотреть следующий член в разложении, который дает вклад в дисперсионное соотношение порядка:

$$(v-1)^2 \left(\frac{b}{l}\right) \left(\frac{l}{L}\right)^{-4Ml} l^2 \mathbf{k}^4. \quad (35)$$

Для $Ml < 0$ эффективный масштаб, параметризующий этот вклад, параметрически больше, чем УФ-масштаб l^{-1} . Таким образом, мы заключаем, что сильно связанный РГ-поток может подавить также и нарушающие ЛИ поправки высшего порядка в дисперсионные соотношения. Для больших $|\mathbf{k}|$ разложение Тейлора неприменимо и анализ этого случая зависит от знака величины $v-1$. Если скорость элементарного фермиона сверхсветовая ($v > 1$), из уравнения (33) следует, что при $|\mathbf{k}| \rightarrow \infty$ комбинация pL приближается к первому положительному корню функции $\mathcal{J}$,

$$pL \approx z_1, \quad \mathcal{J}(z_1) = 0.$$

¹⁰⁾При выведении (33) мы отбрасывали члены в левой части, подавляемые степенями pl . Это оправдано только для бесщелевой моды, которую мы и изучаем. Для высших возбуждений отброшенные члены важны.

Вблизи этих значений дисперсионное соотношение снова становится релятивистским, но с ненулевой массой [21]. Пока неясно, является ли восстановление дисперсионных ЛИ-соотношений при больших импульсах особенностью голографических моделей или более общим свойством возникающей ЛИ в сильно связанных системах со сверхсветовым распространением. С другой стороны, в предсветовом случае ($v < 1$) отклонение дисперсионного соотношения от релятивистской формы растет вместе с $|\mathbf{k}|$. И в предсветовом, и в сверхсветовом случаях легко проверить, что спинорная волновая функция удовлетворяет уравнению (31) для всех $\mathbf{k}$ и, следовательно, описывает случай с фиксированной спиральностью.

Вернемся к случаю малых импульсов, удовлетворяющих условию (32), и запишем эффективное действие бесцелевых мод. Это достигается путем замены волновых функций на (25) в действии (2), (14) и (22). Легко убедиться, что балковый вклад обращается в нуль и, таким образом, действие задается граничным членом на УФ-бране¹¹⁾:

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}} &= \int d^d p \left[\frac{f_-^*(l)f_+(l)}{p} \bar{\chi}_1 p_\mu \gamma^\mu \chi_1 + b |f_-(l)|^2 \bar{\chi}_1 (-\omega \gamma^0 + v k_i \gamma^i) \chi_1 \right] = \\ &= -i \int d^d x \left[\bar{\hat{\chi}}_1 \gamma^\mu \partial_\mu \hat{\chi}_1 + (1 - 2Ml) \frac{b}{l} \left(\frac{l}{L} \right)^{1-2Ml} \bar{\hat{\chi}}_1 (\gamma^0 \partial_0 + v \gamma^i \partial_i) \hat{\chi}_1 \right], \end{aligned} \quad (36)$$

где в последнем равенстве мы перешли к канонически нормализованному полю

$$\hat{\chi}_1 = \chi_1 \sqrt{\frac{f_-^*(l)f_+(l)}{p}} \quad (37)$$

и обратно к координатному представлению. Заметим, что действие состоит из ЛИ-части, описывающей фермион Вейля, и части с подавленными нарушающими ЛИ членами¹²⁾. Вариация этого действия воспроизводит уравнение движения (24).

С точки зрения дуальной теории поля эти результаты можно интерпретировать следующим образом. Взаимодействие с элементарными фермионами генерирует РГ-поток к КТП, соответствующей альтернативному квантованию теории AdS, упомянутой в разделе 2. Последняя содержит фермионный оператор $\mathcal{O}'_\psi$ размерности (12). Отклонение от ЛИ задается при низких энергиях иррелевантной деформацией действия КТП,

$$\delta S_{\text{CFT}} \propto \int d^d x l^{1-2Ml} \bar{\mathcal{O}}'_{\psi} \gamma^0 \partial_0 \mathcal{O}'_{\psi}. \quad (38)$$

При наличии конфайнмента данная деформация генерирует нарушающие ЛИ поправки в эффективное действие связанных состояний, которое зависит от отношения l/L таким же точно образом, как и в (36).

Изложенный анализ может быть легко обобщен на случай произвольного голого действия для элементарного фермиона. Заменим, например, действие (21) на

$$S'_\chi = b \int d^d x \bar{\chi} (-i \gamma^0 \partial_0 + \gamma^0 \Omega(-\Delta)) \chi, \quad (39)$$

¹¹⁾ На этом этапе мы не налагаем УФ-граничные условия (24).

¹²⁾ Для одного поля эту часть можно убрать при помощи перемасштабирования координат пространства или времени. Тем не менее это уже не будет возможным, если система содержит несколько видов частиц.

где $\Omega(-\Delta)$ – функция пространственного лапласиана, $\Delta \equiv \partial_i \partial_i$. Это действие нарушает сопряжение заряда и СРТ-инвариантность. В отсутствие связи с КТП оно описывает нерелятивистский фермион с дисперсионным соотношением

$$\omega = \Omega(\mathbf{k}^2), \quad (40)$$

спиновые степени свободы которого не связаны с трансляционным движением. При $d = 4$ это фермион с двумя состояниями, соответствующими спиновым проекциям $\pm 1/2$ на произвольную ось. Однако ситуация качественно меняется при включении взаимодействия с теорией в пространстве AdS. После аналогичных вычислений выражение (39) преобразуется в граничный член на УФ-бране,

$$S'_{UV} = b \int_{u=l} d^d x \bar{\psi}_- (-i\gamma^0 \partial_0 + \gamma^0 \Omega(-\Delta)) \psi_-, \quad (41)$$

который приводит к эффективному действию для легкой моды

$$S'_{\text{eff}} = -i \int d^d x \left[\bar{\chi}_1 \gamma^\mu \partial_\mu \hat{\chi}_1 + (1 - 2Ml) \frac{b}{l} \left(\frac{l}{L} \right)^{1-2Ml} \bar{\chi}_1 \gamma^0 (\partial_0 + i\Omega(-\Delta)) \hat{\chi}_1 \right]. \quad (42)$$

Нерелятивистский член в действии опять оказывается подавленным относительно ЛИ-кинетического слагаемого, приходящего из балка. Соответствующее дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega = \pm |\mathbf{k}| \left[1 - (1 - 2Ml) \frac{b}{l} \left(\frac{l}{L} \right)^{1-2Ml} \right] + \Omega(\mathbf{k}^2) (1 - 2Ml) \frac{b}{l} \left(\frac{l}{L} \right)^{1-2Ml}, \quad (43)$$

и спинор положительной частоты χ_1 удовлетворяет соотношению (31), откуда следует, что его поляризация сонаправлена с импульсом. Заметим, что в такой ситуации имеют место как ЛИ, так и СРТ-инвариантность¹³⁾.

4. КИРАЛЬНОСТЬ, ВОЗНИКАЮЩАЯ ИЗ ПОТОКОВ ЛИФШИЦА

4.1. Геометрия доменной стенки. Лифшицево пространство, введенное в работах [47], [48], является полезным инструментом для изучения нерелятивистских теорий. Оно обладает изометрией

$$t \mapsto \lambda^z t, \quad x_i \mapsto \lambda x_i, \quad i = 1, \dots, d-1, \quad (44)$$

$$u \mapsto \lambda u, \quad (45)$$

где λ – параметр масштабирования. Пространство-время AdS является особым случаем лифшицевой геометрии с $z = 1$. Обобщая идею голографии на все значения z , можно ожидать, что физика в пространстве-времени Лифшица будет отражать свойства сильно связанных d -мерных нерелятивистских теорий, инвариантных относительно анизотропного масштабирования времени и пространства (44). Вложения решений Лифшица в супергравитацию и теорию струн обсуждались в работах [49]–[52].

¹³⁾Если $\Omega(0) \neq 0$, то имеется небольшое нарушение СРТ-инвариантности для мод с очень маленьким импульсом, который может быть интерпретирован как наличие химического потенциала порядка $\Omega(0)(l/L)^{1-2Ml}$.

Чтобы описать РГ-поток между фазами теории, соответствующими лифшицевой УФ-неподвижной точке и ИК-теории с возникающей ЛИ, необходима геометрическая конфигурация, интерполирующая между лифшицевым пространством при малых значениях голографической координаты, $u \rightarrow 0$, и пространством AdS при $u \rightarrow \infty$. Геометрии с этими свойствами могут быть получены как решения уравнений Эйнштейна с материей, представленной массивным векторным полем V_M . Соответствующее действие имеет вид

$$S_V = \frac{1}{16\pi\kappa} \int d^{d+1}x \left(R - 2\Lambda_c - \frac{1}{4} F_{MN} F^{MN} - \frac{M_V^2}{2} V_N V^N \right), \quad (46)$$

где $\Lambda_c < 0$ – космологическая постоянная, $F_{MN} = \partial_M V_N - \partial_N V_M$ – напряженность поля. Детальное изучение этой системы было проведено в работе [53] (см. также [21]). Было показано, что она имеет семейство статичных решений, индексующихся параметром l_* , инвариантных относительно $SO(d-1)$ -поворотов пространственных координат. Метрика и векторное поле имеют вид

$$ds^2 = \left(\frac{l}{u} \right)^2 (-f^2(u) dt^2 + dx_i dx_i + g^2(u) du^2), \quad (47)$$

$$V_t = \frac{2}{M_V u} f(u) j(u), \quad V_i = V_u = 0,$$

где

$$l^2 = -\frac{d(d-1)}{2\Lambda_c}. \quad (48)$$

Функции f , g , j зависят от u через комбинацию u/l_* и могут быть получены численно. Их асимптотика имеет вид

$$f = f_0 \left(\frac{u}{l_*} \right)^{1-z}, \quad g = g_0, \quad j = j_0, \quad u \rightarrow 0, \quad (49a)$$

$$f = 1 + f_\infty \left(\frac{u}{l_*} \right)^{-2\alpha_V}, \quad g = 1 + g_\infty \left(\frac{u}{l_*} \right)^{-2\alpha_V}, \quad j = j_\infty \left(\frac{u}{l_*} \right)^{-\alpha_V}, \quad u \rightarrow \infty, \quad (49b)$$

где $f_{0,\infty}$, $g_{0,\infty}$, $j_{0,\infty}$ – константы порядка единицы и

$$\alpha_V = -\frac{d}{2} + \sqrt{\left(\frac{d}{2} - 1 \right)^2 + (M_V l)^2}. \quad (50)$$

Для заданного l_* решение имеет вид доменной стенки, интерполирующей между лифшицевым пространством и пространством AdS, с центром в $u = l_*$. На рис. 2 приведены графики функций $j(u)$ и $g(u)$ в случае $d = 4$ и для нескольких значений лифшицевого показателя. Численный анализ показывает, что все три функции f , g , j монотонно убывают по u , а значит, коэффициенты f_∞ , g_∞ , j_∞ в (49b) положительны.

Решения типа доменной стенки существуют для масс векторных полей в диапазоне

$$d-1 \leq (M_V l)^2 \leq \frac{d(d-1)^2}{3d-4}. \quad (51)$$

Рис. 2. Функции $j(u)$ и $g(u)$, описывающие интерполяцию решения для доменной стенки между лифшицевым пространством при $u \rightarrow 0$ и пространством AdS при $u \rightarrow \infty$ для $d = 4$ и нескольких значений лифшицева показателя: $z = 3$ (кривая 1), 2.5 (кривая 2), 2 (кривая 3), 1.5 (кривая 4). Положение l_* доменной стенки было положено равным единице.

Лифшицев показатель z является функцией размерности пространства-времени d и величины $M_V l$. Нам не потребуется явный вид этой зависимости, которую можно найти в работе [21], и мы ограничимся замечанием, что для всех значений массы векторного поля, попадающих в интервал (51), показатель z лежит в промежутке $1 \leq z \leq d-1$. Также ввиду ограничения сверху (51) на $M_V l$ величина α_V ограничена сверху и, как показывают численные расчеты, оказывается достаточно небольшой для интересных значений d (например, для $d = 3$ и $d = 4$ верхняя граница α_V составляет 0.13 и 0.35 соответственно).

В дуальной картине положение доменной стенки задает масштаб энергии $\Lambda_* = l_*^{-1}$, при котором РГ-поток переходит из некоторой окрестности лифшицевой теории к ЛИ ИК-неподвижной точке. Переход к последней определяется векторным оператором $\mathcal{O}_V^\mu$, дуальным балковому векторному полю. Размерность этого оператора в ИК-теории можно найти, используя стандартные правила AdS/CFT-соответствия:

$$\dim \mathcal{O}_V^\mu = d + \alpha_V. \quad (52)$$

Таким образом, векторный оператор иррелевантен и ИК-неподвижная точка является аттрактором при $\alpha_V > 0$. Из (50) видно, что это условие совпадает с нижней границей массы векторного поля в (51).

4.2. Фермионы в потоке Лифшица. Теперь мы добавим фермионы в изложенную выше конструкцию. Рассмотрим действие

$$S = - \int d^{d+1}x \sqrt{|g|} i \bar{\psi} (\not{D} - \xi \not{D}^{(V)} - M) \psi, \quad (53)$$

где оператор Дирака и ковариантные производные заданы в (3) и мы ввели взаимодействие фермиона с векторным полем через оператор¹⁴⁾

$$\not{D}^{(V)} \equiv \frac{(M_V l)^2}{4} V_N V_M e_A^M \Gamma^A D^N. \quad (54)$$

¹⁴⁾Мы не рассматриваем взаимодействие без производных $\bar{\psi} V_N e_A^N \Gamma^A \psi$, которое невозможно ввиду симметрии $V_N \mapsto -V_N$.

Данное взаимодействие меняет эффективную метрику, ощущаемую фермионом при ненулевом значении векторного поля:

$$g_{MN} \mapsto g_{MN} - \xi \frac{(M_V l)^2}{4} V_N V_M. \quad (55)$$

Константа связи ξ может быть различна для различных видов фермионов и служит для исследования свойств РГ-потока, зависящих от вида фермиона. Заметим, что мы опустили граничный член S_∂ . В отличие от раздела 3, в данном случае мы изучаем поведение дуальной теории поля без источников и, соответственно, налагаем нулевые граничные условия на ψ при $u \rightarrow 0$. В этом случае граничный член исчезает вместе с его вариацией.

Выбирая диагональную тетраду и вычислив ненулевые компоненты спиновой связности,

$$\omega_{u00} = \frac{f'}{g} - \frac{f}{ug}, \quad \omega_{uij} = \frac{\delta_{ij}}{ug}, \quad (56)$$

можно получить выражения для операторов $\not{D}$ и $\not{D}^{(V)}$ на фоне (47),

$$\begin{aligned} \not{D} &= \frac{u}{lg} \left[\partial_u + \frac{1}{2} \left(\frac{f'}{f} - \frac{d}{u} \right) \right] \Gamma^u + \frac{u}{lf} \Gamma^0 \partial_0 + \frac{u}{l} \Gamma^i \partial_i, \\ \not{D}^{(V)} &= -j^2 \left[\frac{u}{lf} \Gamma^0 \partial_0 + \frac{u}{2lg} \left(\frac{f'}{f} - \frac{1}{u} \right) \Gamma^u \right]. \end{aligned} \quad (57)$$

Разложение спинора по собственным состояниям Γ^u в совокупности с преобразованием Фурье вдоль координат $(t, \mathbf{x})$ дает систему уравнений

$$\pm (\partial_u + F_\pm(u)) \psi_\pm + ig(-\omega \gamma^0 + k_i \gamma^i) \psi_\mp = -i\omega G(u) \gamma^0 \psi_\mp, \quad (58)$$

где

$$F_\pm(u) = \frac{1}{2} \left[\frac{(1 + \xi j^2) f'}{f} - \frac{d + \xi j^2}{u} \right] \mp \frac{Mlg}{u}, \quad G(u) = g \left(1 - \frac{1 + \xi j^2}{f} \right). \quad (59)$$

Мы написали уравнения таким образом, что левая часть (58) содержит только ЛИ-операторы, в то время как все нарушающие ЛИ вклады сгруппированы в правой части.

Чтобы получить дискретный спектр возбуждений, мы обрежем пространство-время ИК-браной¹⁵⁾, помещенной в $u = L \gg l_*$. Как отмечалось в разделе 2, в релятивистском случае существует безмассовая фермионная мода при выборе граничных условий $\mathcal{B}_-$ (16). Мы покажем, что этот выбор также приводит к бесщелевой моде в геометрии потока Лифшица. Рассмотрим сначала предел нулевой частоты и импульса. Положив $\omega = k_i = 0$ в (58), мы находим решение

$$\psi_+^{(0)} = \chi_0 \exp \left[\int_u^L F_+(u') du' \right], \quad \psi_-^{(0)} = 0, \quad (60)$$

¹⁵⁾Тензор энергии-импульса браны, необходимый для статического решения уравнения Эйнштейна, состоит из отрицательной напряженности и вклада, удовлетворяющего условию нулевой энергии [21].

где χ_0 – постоянный киральный спинор, который удовлетворяет¹⁶⁾ соотношению $\gamma^{d+1}\chi_0 = \chi_0$. Это решение ведет себя, как $\psi_+^{(0)} \propto (u/L)^{Ml+d/2}$, в области AdS, $u \gg l_*$. С учетом меры AdS $\int du u^{-d}$, входящей в выражение для нормирования моды, мы видим, что нормирующий интеграл для (60) насыщается при $u \sim L$, если $Ml > -1/2$. Другими словами, мода (60) подавляется в лифшицевой части пространства-времени. Это наблюдение позволяет воспользоваться следующей стратегией для решения уравнений (58) при ненулевом импульсе. В качестве нулевой аппроксимации берется решение (60) вместе с ЛПИ-дисперсионным соотношением¹⁷⁾ $\omega = |\mathbf{k}|$. Это дает ограничения на спиновую амплитуду

$$\Sigma_{\mathbf{k}}\chi_0 = 0, \quad (61)$$

где $\Sigma_{\mathbf{k}}$ определено в (31). Таким образом, χ_0 соответствует фиксированной спиральности. Далее нарушающий ЛПИ вклад рассматривается как небольшая поправка.

В рамках теории возмущений мы разлагаем ψ как

$$\psi_+ = \psi_+^{(0)} + \psi_+^{(1)}, \quad \psi_- = \psi_-^{(1)}, \quad \omega = |\mathbf{k}| + \omega^{(1)}. \quad (62)$$

Подставляя эти выражения в (58) и оставляя только члены, линейные по возмущениям, мы получаем

$$(\partial_u + F_+)\psi_+^{(1)} + ig\Sigma_{\mathbf{k}}\psi_-^{(1)} = 0, \quad (63a)$$

$$-(\partial_u + F_-)\psi_-^{(1)} + ig\Sigma_{\mathbf{k}}\psi_+^{(1)} - ig\omega^{(1)}\gamma^0\psi_+^{(0)} = -i|\mathbf{k}|G\gamma^0\psi_+^{(0)}. \quad (63b)$$

Чтобы исключить второй член, можно умножить первое уравнение на $\Sigma_{\mathbf{k}}$ и использовать тождество $\Sigma_{\mathbf{k}}^2 = 0$. Получающееся уравнение имеет решение

$$\Sigma_{\mathbf{k}}\psi_+^{(1)} = \tilde{\chi} \exp\left[\int_u^L F_+(u') du'\right], \quad (64)$$

где постоянный спинор $\tilde{\chi}$ удовлетворяет соотношениям

$$\gamma^{d+1}\tilde{\chi} = -\tilde{\chi}, \quad \Sigma_{\mathbf{k}}\tilde{\chi} = 0. \quad (65)$$

Подстановка (64) в (63b) дает решение для $\psi_-^{(1)}$:

$$\psi_-^{(1)}(u) = \tilde{\psi}_-^{(1)}(u) \exp\left[\int_u^L F_-(u') du'\right], \quad (66)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_-^{(1)}(u) = & \int_0^u du' [i(|\mathbf{k}|G(u') - \omega^{(1)}g(u'))\gamma^0\chi_0 + ig(u')\tilde{\chi}] \times \\ & \times \exp\left[-2Ml \int_{u'}^L \frac{g(u'') du''}{u''}\right]. \end{aligned} \quad (67)$$

¹⁶⁾При нашем выборе балковых гамма-матриц $\Gamma^u = \gamma^{d+1}$ (см. (19)).

¹⁷⁾Мы сконцентрируемся на моде с положительной частотой; для $\omega = -|\mathbf{k}|$ анализ такой же.

При выводе этого выражения мы применили формулу $F_+ - F_- = -2Mlg/u$. Заметим, что внешний интеграл в (67) берется от $u = 0$ для точного обращения в нуль поля на УФ-бране.

Теперь зададим граничное условие $\mathcal{B}_-$ на ИК-бране:

$$\tilde{\psi}_-(L) = 0. \quad (68)$$

Умножив (67) последовательно на $\Sigma_{\mathbf{k}}$ и $\tilde{\Sigma}_{\mathbf{k}} \equiv |\mathbf{k}|\gamma^0 + k_i\gamma^i$ и используя соотношения

$$\Sigma_{\mathbf{k}}\gamma^0\chi_0 = 2|\mathbf{k}|\chi_0, \quad \tilde{\Sigma}_{\mathbf{k}}\gamma^0\chi_0 = 0, \quad \tilde{\Sigma}_{\mathbf{k}}\tilde{\chi} = 2|\mathbf{k}|\gamma^0\tilde{\chi}, \quad (69)$$

мы находим, что спинор $\tilde{\chi}$ должен равняться нулю,

$$\tilde{\chi} = 0, \quad (70)$$

в то время как поправка дисперсионного соотношения имеет вид

$$\omega^{(1)} = |\mathbf{k}| \frac{\int_0^L du G(u) \exp[-2Ml \int_u^L g(u') du'/u']}{\int_0^L du g(u) \exp[-2Ml \int_u^L g(u') du'/u']}. \quad (71)$$

И, наконец, поправку $\psi_+^{(1)}$ находим из (63a):

$$\psi_+^{(1)} = \tilde{\psi}_+^{(1)}(u) \exp\left[\int_u^L F_+(u') du'\right], \quad (72)$$

где

$$\tilde{\psi}_+^{(1)}(u) = -i \int_u^L du' g(u') \Sigma_{\mathbf{k}} \tilde{\psi}_-^{(1)}(u') \exp\left[2Ml \int_{u'}^L \frac{g(u'') du''}{u''}\right]. \quad (73)$$

Заметим, что поправки сохраняют следующее свойство: фермионная волновая функция на ИК-бране $\psi_+(L)$ удовлетворяет равенству $\Sigma_{\mathbf{k}}\psi_+(L) = 0$; это означает, что она описывает частицу с фиксированной спиральностью.

Наша следующая задача состоит в том, чтобы вывести зависимость $\omega^{(1)}$ от масштаба ИК-обрезания L^{-1} . Заметим, что для $Ml > -1/2$ интеграл в знаменателе (71) насыщается в области AdS, где функция $g(u)$ может быть заменена на единицу. Это дает

$$\int_0^L du g(u) \exp\left[-2Ml \int_u^L \frac{g(u') du'}{u'}\right] = \frac{L}{1 + 2Ml}. \quad (74)$$

Чтобы оценить числитель в формуле (71), вспомним, что функции f, g, j зависят от u только через комбинацию $z \equiv u/l_*$ (см. п. 4.1). Переход к данной переменной

внутри интеграла дает

$$\begin{aligned}
 & \int_0^L du G(u) \exp \left[-2Ml \int_u^L \frac{g(u') du'}{u'} \right] = \\
 & = l_* \int_0^{L/l_*} dz G(z) \exp \left[-2Ml \int_z^{L/l_*} \frac{g(z') dz'}{z'} \right] = \\
 & = l_* \left\{ \int_0^{z_0} dz G(z) \exp \left[-2Ml \int_z^{z_0} \frac{g(z') dz'}{z'} - 2Ml \int_{z_0}^{L/l_*} \frac{g(z') dz'}{z'} \right] + \right. \\
 & \quad \left. + \int_{z_0}^{L/l_*} dz G(z) \exp \left[-2Ml \int_z^{L/l_*} \frac{g(z') dz'}{z'} \right] \right\} = \\
 & = l_* \left\{ a_1 \left(\frac{l_*}{L} \right)^{2\alpha_V - 1} + a_2 \left(\frac{l_*}{L} \right)^{2Ml} \right\}, \tag{75}
 \end{aligned}$$

где коэффициенты

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{f_\infty - \xi j_\infty^2}{2Ml - 2\alpha_V + 1}, \\
 a_2 &= z_0^{2Ml} \int_0^{z_0} dz G(z) \exp \left[-2Ml \int_z^{z_0} \frac{g(z') dz'}{z'} \right] - \frac{(f_\infty - \xi j_\infty^2) z_0^{2Ml - 2\alpha_V + 1}}{2Ml - 2\alpha_V + 1} \tag{76}
 \end{aligned}$$

не зависят от l_* и L . С другой стороны, они зависят от константы связи ξ между фермионом и векторным полем и, таким образом, могут различаться для разных видов фермионов. В третьей строке (75) мы делим интеграл на две части с промежуточной точкой z_0 , лежащей в интервале $1 \ll z_0 \ll L/l_*$, а затем используем асимптотическую форму для метрики (49b) при $z > z_0$. Выражение в последней строке (75) не зависит от выбора z_0 . Комбинируя (75) и (74), мы получаем

$$\omega^{(1)} = |\mathbf{k}| \left[a_1 (1 + 2Ml) \left(\frac{l_*}{L} \right)^{2\alpha_V} + a_2 (1 + 2Ml) \left(\frac{l_*}{L} \right)^{1+2Ml} \right]. \tag{77}$$

Это дает подавленную степенным образом поправку к скорости фермиона в режиме $\alpha_V > 0$, $Ml > -1/2$. Таким образом, как и для модели из раздела 3, мы нашли, что бесщелевая фермионная мода имеет почти ЛИ-дисперсионное соотношение с количеством и структурой степеней свободы, соответствующими вейлевским фермионам в размерности d (одна компонента спиральности при $d = 4$). Как следует из рассмотрения, эта мода описывается с помощью приблизительно ЛИ эффективного действия с фермионным полем, преобразующимся по киральному представлению группы Лоренца.

Форма поправок (77) для релятивистского дисперсионного соотношения имеет естественную интерпретацию в дуальной теории поля. В ИК-неподвижной точке теория описывается КТП, содержащей спинорный оператор $\mathcal{O}_\psi$ и векторный оператор $\mathcal{O}_V^\mu$ с размерностями (11) и (52). РГ-поток соответствует деформации действия КТП иррелевантными нарушающими ЛИ возмущениями,

$$\delta S_{\text{CFT}} = \int d^d x (c_1 l_*^{\alpha_V} \mathcal{O}_V^0 + c_2 l_*^{1+2Ml} \bar{\mathcal{O}}_\psi \gamma^0 \partial_0 \mathcal{O}_\psi), \tag{78}$$

где $c_{1,2}$ – некоторые безразмерные константы. Эти два члена генерируют два вклада в (77) после того, как теория входит в фазу конфайнмента. Заметим, что для изменения фермионного дисперсионного соотношения необходима двойная вставка деформации $\mathcal{O}_V^0$, поскольку в невозмущенной КТП трехточечная функция $\mathcal{O}_\psi \bar{\mathcal{O}}_\psi \mathcal{O}_V$ обращается в нуль в силу симметрии балкового действия $V_M \mapsto -V_M$.

Исследуем теперь область применимости вычислений, приведших к формуле (77). Необходимое требование состоит в том, чтобы поправка (72) фермионной волновой функции была много меньше, чем волновая функция в нулевом порядке (60). Из оценок

$$\frac{\psi_+^{(1)}}{\psi_+^{(0)}} \sim kL \frac{\tilde{\psi}_-^{(0)}}{\chi_0} \sim kL^2 \omega^{(1)} \quad (79)$$

можно получить условие

$$|\mathbf{k}| \ll L^{-1} \min \left\{ \left(\frac{L}{l_*} \right)^{\alpha_V}, \left(\frac{L}{l_*} \right)^{1/2+Ml} \right\}. \quad (80)$$

С другой стороны, это условие может быть выведено из требования, чтобы поправка к энергии бесщелевой моды $\omega^{(1)}$ была меньше, чем расщепление между энергиями безмассовой моды и следующего собственного состояния невозмущенного релятивистского оператора Дирака. Это собственное состояние имеет релятивистское дисперсионное соотношение с массой порядка $1/L$, поэтому расщепление имеет порядок $(|\mathbf{k}|L^2)^{-1}$. Верхний предел (80) импульса параметрически больше, чем масштаб обрезания $1/L$ между бесщелевой модой и следующим связным состоянием. Может также показаться, что пертурбативное разложение будет справедливо при импульсах, больших, чем масштаб нарушений ЛИ $1/l_*$, если $\alpha_A > 1$ и $Ml > 1/2$. Тем не менее мы ожидаем, что структура членов высшего порядка в разложении ограничит область применимости до $|\mathbf{k}| \ll 1/l_*$, аналогично случаю скалярной теории [21]. Вне зависимости от этого данный вопрос не имеет особого значения для рассматриваемой ситуации, поскольку, как показано в п. 4.1, для интересных значений размерности пространства-времени α_V всегда меньше единицы.

5. РГ-ПОТОКИ С ФЕРМИОНАМИ В НЕЧЕТНЫХ РАЗМЕРНОСТЯХ

В этом разделе мы рассматриваем голографический РГ-поток в случае, когда размерность пространства-времени d дуальной теории поля нечетна. Это влияет на вид балковских гамма-матриц. Вместо (19) мы выберем

$$\Gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^\mu \\ \gamma^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu = 0, \dots, d-1, \quad \Gamma^u = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (81)$$

где γ^μ – d -мерные матрицы Дирака. В рассматриваемом случае выкладки разделов 3, 4 остаются справедливыми с точностью до минимальных изменений. Отсюда следует, что двухбранная модель с действием (22) или (41) на УФ-бране и граничными условиями $\mathcal{B}_+$ на ИК-бране порождает бесщелевой фермион с почти ЛИ дисперсионным соотношением. То же верно и для лифшицевой доменной стенки с граничными условиями $\mathcal{B}_-$ на ИК-бране. Конечно, при нечетных размерностях нет понятия киральности и фермионы преобразуются по представлению Дирака $SO(d-1, 1)$.

Отсутствие щели в спектре обусловлено требованием пространственной четности, запрещающей ЛИ-массивные члены для фермионов в нечетных размерностях [54]. Действительно, при отражении одной из осей фермион при нечетных размерностях пространства преобразуется как

$$\chi(x^0, x^1, x^2, \dots) \mapsto \gamma^1 \chi(x^0, -x^1, x^2, \dots).$$

Прямым вычислением проверяется, что массивный член $m\bar{\chi}\chi$ изменяет знак при таком преобразовании. С другой стороны, исходное действие в балке (2) или (53) не изменяется при подобных преобразованиях, поскольку соответствующее $(d+1)$ -мерное преобразование можно определить как

$$\psi(x^0, x^1, x^2, \dots) \mapsto \Gamma^{d+2} \Gamma^1 \psi(x^0, -x^1, x^2, \dots),$$

где $\Gamma^{d+2} = i\Gamma^0 \Gamma^1 \dots \Gamma^{d-1} \Gamma^u$.

Новое явление, возникающее в случае нечетных d , – это возможное несоответствие между числами степеней свободы нерелятивистских и релятивистских фермионов. А именно, спинорное представление группы $SO(d-1)$ пространственных вращений может быть разложено на правую и левую части, размерностей $2^{(d-3)/2}$ каждая, что является минимальным числом компонент нерелятивистского спинора. Однако это не соответствует представлению Дирака $SO(d-1, 1)$, имеющему $2^{(d-1)/2}$ компонент. Таким образом, при общих предположениях возникновения ЛИ с минимальными нерелятивистскими фермионами не ожидается. Рассмотрим этот вопрос более подробно. В дальнейшем мы полагаем $d = 3$ и рассматриваем голографический подход с двумя бранами, аналогичный рассмотренному в разделе 3. Сначала мы опишем модель в трехмерном пространстве. Спинорный оператор $\mathcal{O}_\psi$ дуальной КТП может быть разложен на верхнюю и нижнюю компоненты,

$$\mathcal{O}_\psi = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_U \\ \mathcal{O}_D \end{pmatrix}. \quad (82)$$

Взяв гамма-матрицы в виде

$$\gamma^0 = i\sigma_3, \quad \gamma^1 = \sigma_1, \quad \gamma^2 = \sigma_2, \quad (83)$$

где σ_i – матрицы Паули, мы замечаем, что компоненты $\mathcal{O}_U$ и $\mathcal{O}_D$ не смешиваются при чисто пространственных вращениях. Следовательно, предположение о взаимодействии только одного из них, например $\mathcal{O}_U$, с внешним динамическим полем совместимо с требованием пространственной изотропности. Это позволяет выписать действие

$$S = S_{\text{CFT}} + l^{Ml} \int d^3x \chi_U^\dagger \mathcal{O}_U + b \int d^3x \chi_U^\dagger (i\partial_0 - \Omega(-\Delta)) \chi_U, \quad (84)$$

где χ_U – минимальный однокомпонентный $SO(2)$ -спинор, $\Omega(-\Delta)$ – произвольная функция пространственного лапласиана. Заметим, что это действие нарушает дискретные симметрии C, P, T и CPT, так как все они меняют компоненты $\mathcal{O}_U$ и $\mathcal{O}_D$ местами.

Голографическое описание этой модели получается путем преобразования только верхней компоненты балковского спинора ψ_- на УФ-бране к динамическому полю с действием

$$S_{UV} = b \int_{u=l} d^3x \psi_{-,U}^\dagger (i\partial_0 - \Omega(-\Delta)) \psi_{-,U} \quad (85)$$

и наложения граничных условий Дирихле на нижнюю компоненту

$$\psi_{-,D}|_{u=l} = 0. \quad (86)$$

Из (85) и (2) мы получаем второе граничное условие на УФ-бране:

$$[b(i\partial_0 - \Omega(-\Delta))\psi_{-,U} + \psi_{+,U}]|_{u=l} = 0. \quad (87)$$

Требую также выполнения граничных условий $\mathcal{B}_+$ на ИК-бране и подставляя балковское решение (25), (26) в (86), (87), получаем

$$[mb(\omega - \Omega(k^2))f_-(l) + \omega f_+(l)]\chi_{1,U} = 0. \quad (88)$$

Разложение функции $f_\pm(l)$ по малому параметру дает дисперсионное соотношение для бесцелевой моды:

$$\omega = \Omega(k^2)(1 - 2Ml)\frac{b}{l}\left(\frac{l}{L}\right)^{1-2Ml}. \quad (89)$$

Очевидно, это соотношение нерелятивистское. В ИК-пределе $l/L \rightarrow 0$ дисперсионное соотношение становится вырожденным, $\omega = 0$, из чего следует, что возмущения в этом режиме не требуют энергии. Другими словами, система содержит бесконечное число отличных от вакуума состояний с нулевой энергией. Такая ситуация кажется довольно патологической. Тем не менее ее можно избежать, предположив с самого начала наличие одной из симметрий C, P, T или CPT.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье мы рассмотрели возникновение ЛИ в фермионных теориях поля с сильной связью. Нами рассмотрены две модели. В первой модели сильно взаимодействующая релятивистская КТП взаимодействует на некотором большом масштабе энергии с элементарным фермионом с нерелятивистским действием. Это вызывает РГ-поток, порождающий ЛИ при низких энергиях. Второй подход описывает теорию поля, РГ-поток которого распространяется от неподвижной точки при высоких энергиях с лифшицевым масштабированием к ЛИ-фиксированной точке при низких энергиях. В обоих случаях мы предполагали, что при низких энергиях теория входит в фазу конфайнмента, что влечет дискретность спектра возбуждений. Для работы в режиме сильной связи нами была использована голографическая дуальность.

Мы рассмотрели теории поля в четномерном пространстве-времени и исследовали возникновение киральности вместе с ЛИ. Мы показали, что если в теории существуют низколежащие фермионные возбуждения, то они описываются почти ЛИ-эффективным действием с фермионными волновыми функциями, преобразующимися согласно вейлевскому представлению группы Лоренца. Нарушающие ЛИ поправки к эффективному действию оказываются подавленными степенным образом

отношением ИК-масштаба конфайнмента Λ_{IR} и УФ-масштаба нарушения ЛИ Λ_* . Показатель степени находится из размерности наименьшего иррелевантного нарушающего ЛИ оператора в ИК-теории, полностью аналогично скалярному случаю, изученному в работе [21]. Кинематическое свойство, оказывающееся существенным в данном случае, состоит в совпадении числа независимых компонент нерелятивистского фермионного оператора в УФ-теории и числа независимых компонент релятивистского вейлевского спинора.

В разделе 5 мы перешли к случаю нечетномерного пространства-времени. Нами обнаружено, что модели, сохраняющие описанное выше кинематическое соответствие, также ведут к низкоэнергетическим теориям с почти релятивистскими фермионами, защищенными от приобретения массы симметрией пространственной четности. Мы также рассмотрели модель без вышеупомянутого соответствия и показали, что в этом случае низшая фермионная мода не является ЛИ. Нами замечено, что такая ситуация невозможна, если теория обладает одной из дискретных симметрий C , P , T или CPT . Это является еще одной иллюстрацией важности роли, которую играют эти симметрии в феномене возникновения ЛИ.

С феноменологической точки зрения наша работа является шагом вперед в продвижении идеи о том, что возникающая ЛИ может быть воплощена в реалистичной модели физики частиц. Конечно, значительной проблемой на этом пути является включение калибровочных полей в подобное рассмотрение. Как показано в работе [21], голографическое описание РГ-поток в режиме сильной связи с калибровочными полями, по-видимому, будет требовать введения более сложного сектора в объемлющем пространстве, включающего взаимодействие между калибровочным полем и дилатоном. Также следует изучить вопрос, может ли калибровочная симметрия тоже быть свойством теории, возникающим в низкоэнергетическом пределе вместе с ЛИ.

Другим интересным вопросом является минимальное значение нарушающих ЛИ поправок, предсказываемых при таком подходе. Мы показали, что эти поправки подавляются степенным фактором $(\Lambda_{\text{IR}}/\Lambda_*)^\alpha$, где отношение $\Lambda_{\text{IR}}/\Lambda_*$ описывает “длительность” РГ-потока, ведущего к возникновению ЛИ. Эта “длительность” не может быть сколь угодно большой. В моделях, основанных на квантовой гравитации, естественное значение Λ_* лежит на уровне или ниже планковского масштаба. В частности, в контексте предположения Хоравы величина Λ_* должна быть меньше 10^{15} ГэВ [55], [6]. С другой стороны, масштаб Λ_{IR} ограничен снизу экспериментальными данными из физики элементарных частиц. Как указано в разделе 1, Λ_{IR} задает масштаб композитности для полей Стандартной модели. Прямой поиск возбужденных фермионных состояний¹⁸⁾ задает нижнюю границу Λ_{IR} на уровне нескольких ТэВ [56], [57]. Взяв оценку $\Lambda_{\text{IR}} \gtrsim 10$ ТэВ, мы получаем, что длительность РГ-потока ограничивается снизу: $\Lambda_{\text{IR}}/\Lambda_* \gtrsim 10^{-11}$. Во всех голографических примерах, рассмотренных в [21], и в данной работе показатель подавления α оказывается меньше 2. Таким образом, минимальная величина нарушающих ЛИ операторов, предсказанных данными моделями, имеет порядок 10^{-22} , что находится на уровне известных ограничений [24]. В этом контексте важен вопрос, является ли

¹⁸⁾ Более строгие ограничения можно получить из физики ароматов (в смысле КХД), однако они зависят от конкретной модели.

условие $\alpha < 2$ универсальным или существуют РГ-потoki с возникновением ЛИ, которые его нарушают.

В заключение отметим, что сценарии с возникающей ЛИ дают интересную связь между физикой высоких энергий и точными экспериментами в теории относительности. Улучшение экспериментальных ограничений на масштаб композитности полей Стандартной модели и/или уточнение ограничений на нарушающие ЛИ параметры позволит подтвердить эту идею или опровергнуть ее.

Благодарности. Мы благодарны Р. Контино, М. Анберу и О. Пуйоласу за плодотворные обсуждения. Мы также благодарны А. Дымарскому за переписку и Д. Бласу за полезные комментарии к предварительной версии статьи.

Список литературы

- [1] H. B. Nielsen, M. Ninomiya, *Nucl. Phys. B*, **141**:1–2 (1978), 153–177.
- [2] S. Chadha, H. B. Nielsen, *Nucl. Phys. B*, **217**:1 (1983), 125–144.
- [3] P. Hořava, *Phys. Rev. D*, **79**:8 (2009), 084008, 15 pp., arXiv:0901.3775.
- [4] Е. М. Лифшиц, *ЖЭТФ*, **11** (1941), 255–269.
- [5] D. Blas, O. Pujolàs, S. Sibiryakov, *Phys. Rev. Lett.*, **104**:18 (2010), 181302, 4 pp., arXiv:0909.3525.
- [6] D. Blas, O. Pujolàs, S. Sibiryakov, *JHEP*, **04** (2011), 018, 53 pp., arXiv:1007.3503.
- [7] D. Blas, E. Lim, *Internat. J. Modern Phys. D*, **23**:13 (2014), 1443009, 30 pp., arXiv:1412.4828.
- [8] T. Jacobson, D. Mattingly, *Phys. Rev. D*, **64**:2 (2001), 024028, 9 pp., arXiv:gr-qc/0007031.
- [9] N. Arkani-Hamed, H.-C. Cheng, M. A. Luty, S. Mukohyama, *JHEP*, **05** (2004), 074, 36 pp., arXiv:hep-th/0312099.
- [10] S. L. Dubovsky, *JHEP*, **10** (2004), 076, 31 pp., arXiv:hep-th/0409124.
- [11] В. А. Рубаков, П. Г. Тиняков, *УФН*, **178**:8 (2008), 785–822, arXiv:0802.4379.
- [12] T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla, C. Skordis, *Phys. Rep.*, **513**:1–3 (2012), 1–189, arXiv:1106.2476.
- [13] O. Vafek, Z. Tešanović, M. Franz, *Phys. Rev. Lett.*, **89**:15 (2002), 157003, 4 pp., arXiv:cond-mat/0203047; M. Franz, Z. Tešanović, O. Vafek, *Phys. Rev. B*, **66**:5 (2002), 054535, 31 pp., arXiv:cond-mat/0203333.
- [14] D. J. Lee, I. F. Herbut, *Phys. Rev. B*, **66**:9 (2002), 094512, 7 pp., arXiv:cond-mat/0201088.
- [15] S.-S. Lee, *Phys. Rev. B*, **76**:7 (2007), 075103, 6 pp., arXiv:cond-mat/0611658; P. Ponte, S.-S. Lee, *New J. Phys.*, **16** (2014), 013044, 7 pp., arXiv:1206.2340.
- [16] I. F. Herbut, V. Juricic, B. Roy, *Phys. Rev. B*, **79**:8 (2009), 085116, 14 pp., arXiv:0811.0610.
- [17] A. Giuliani, V. Mastropietro, M. Porta, *Ann. Phys.*, **327**:2 (2012), 461–511, arXiv:1107.4741.
- [18] T. Grover, D. N. Sheng, A. Vishwanath, *Science*, **344**:6181 (2014), 280–283, arXiv:1301.7449.
- [19] G. F. Giudice, M. Raidal, A. Strumia, *Phys. Lett. B*, **690**:3 (2010), 272–279, arXiv:1003.2364.
- [20] R. Sundrum, *Phys. Rev. D*, **86**:8 (2012), 085025, 34 pp., arXiv:1106.4501.
- [21] G. Bednik, O. Pujolàs, S. Sibiryakov, *JHEP*, **11** (2013), 064, arXiv:1305.0011.
- [22] S. Sibiryakov, *Phys. Rev. Lett.*, **112**:24 (2014), 241602, 5 pp., arXiv:1403.4742.
- [23] D. Mattingly, *Living Rev. Rel.*, **8** (2005), 5, 84 pp., arXiv:gr-qc/0502097.
- [24] V. A. Kostelecky, N. Russell, *Rev. Modern Phys.*, **83**:1 (2011), 11–31, arXiv:0801.0287.
- [25] S. Liberati, *Class. Quantum Grav.*, **30**:13 (2013), 133001, 50 pp., arXiv:1304.5795.

- [26] M. Pospelov, Y. Shang, *Phys. Rev. D*, **85**:10 (2012), 105001, 15 pp., arXiv: 1010.5249.
- [27] M. Colombo, A. E. Gümrükçuoğlu, T. P. Sotiriou, *Phys. Rev. D*, **91**:4 (2015), 044021, 9 pp., arXiv: 1410.6360.
- [28] S. R. Coleman, S. L. Glashow, *Phys. Rev. D*, **59**:11 (1999), 116008, 14 pp., arXiv: hep-ph/9812418.
- [29] T. Jacobson, S. Liberati, D. Mattingly, *Phys. Rev. D*, **67**:12 (2003), 124011, 26 pp., arXiv: hep-ph/0209264; *Ann. Phys.*, **321**:1 (2006), 150–196, arXiv: astro-ph/0505267.
- [30] M. Galaverni, G. Sigl, *Phys. Rev. Lett.*, **100**:2 (2008), 021102, 4 pp., arXiv: 0708.1737; *Phys. Rev. D*, **78**:6 (2008), 063003, 11 pp., arXiv: 0807.1210.
- [31] L. Maccione, S. Liberati, *JCAP*, **08** (2008), 027, 32 pp., arXiv: 0805.2548.
- [32] S. Liberati, L. Maccione, T. P. Sotiriou, *Phys. Rev. Lett.*, **109**:15 (2012), 151602, 5 pp., arXiv: 1207.0670.
- [33] G. Rubtsov, P. Satunin, S. Sibiryakov, *Phys. Rev. D*, **89**:12 (2014), 123011, 6 pp., arXiv: 1312.4368.
- [34] S. Groot Nibbelink, M. Pospelov, *Phys. Rev. Lett.*, **94** (2005), 081601, 4 pp., arXiv: hep-ph/0404271; P. A. Bolokhov, S. Groot Nibbelink, M. Pospelov, *Phys. Rev. D*, **72**:1 (2005), 015013, 17 pp., arXiv: hep-ph/0505029.
- [35] O. Pujolàs, S. Sibiryakov, *JHEP*, **01** (2012), 062, 19 pp., arXiv: 1109.4495.
- [36] D. Redigolo, *Phys. Rev. D*, **85**:8 (2012), 085009, 13 pp., arXiv: 1106.2035.
- [37] E. Kiritsis, *JHEP*, **01** (2013), 030, 54 pp., arXiv: 1207.2325.
- [38] M. Henningson, K. Sfetsos, *Phys. Lett. B*, **431**:1–2 (1998), 63–68, arXiv: hep-th/9803251.
- [39] W. Mück, K. S. Viswanathan, *Phys. Rev. D*, **58**:10 (1998), 106006, 7 pp., arXiv: hep-th/9805145.
- [40] M. Henneaux, “Boundary terms in the AdS/CFT correspondence for spinor fields”, *Mathematical Methods in Modern Theoretical Physics* (Tbilisi, Georgia, 5–18 September, 1998), eds. M. Eliashvili, G. P. Jorjadze, G. Lavrelashvili, P. Sorba, A. Tavkhelidze, Tbilisi Univ. Press, Tbilisi, 1999, 161–170, arXiv: hep-th/9902137.
- [41] N. Iqbal, H. Liu, *Fortsch. Phys.*, **57**:5–7 (2009), 367–384, arXiv: 0903.2596.
- [42] N. T. Evans, *J. Math. Phys.*, **8**:2 (1967), 170–184.
- [43] G. Mack, *Commun. Math. Phys.*, **55**:1 (1977), 1–28.
- [44] S. Minwalla, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **2**:4 (1998), 783–851, arXiv: hep-th/9712074.
- [45] R. Contino, A. Pomarol, *JHEP*, **11** (2004), 058, 21 pp., arXiv: hep-th/0406257.
- [46] L. Randall, R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.*, **83**:17 (1999), 3370–3373, arXiv: hep-ph/9905221.
- [47] S. Kachru, X. Liu, M. Mulligan, *Phys. Rev. D*, **78**:10 (2008), 106005, 8 pp., arXiv: 0808.1725.
- [48] M. Taylor, “Non-relativistic holography”, arXiv: 0812.0530.
- [49] K. Balasubramanian, K. Narayan, *JHEP*, **08** (2010), 014, 27 pp., arXiv: 1005.3291.
- [50] A. Donos, J. P. Gauntlett, *JHEP*, **12** (2010), 002, 21 pp., arXiv: 1008.2062.
- [51] R. Gregory, S. L. Parameswaran, G. Tasinato, I. Zavala, *JHEP*, **12** (2010), 047, 18 pp., arXiv: 1009.3445.
- [52] D. Cassani, A. F. Faedo, *JHEP*, **05** (2011), 013, 27 pp., arXiv: 1102.5344.
- [53] H. Braviner, R. Gregory, S. F. Ross, *Class. Quantum Grav.*, **28**:22 (2011), 225028, 28 pp., arXiv: 1108.3067.
- [54] T. Appelquist, M. J. Bowick, D. Karabali, L. C. R. Wijewardhana, *Phys. Rev. D*, **33**:12 (1986), 3774–3776.
- [55] D. Blas, O. Pujolàs, S. Sibiryakov, *Phys. Lett. B*, **688**:4–5 (2010), 350–355, arXiv: 0912.0550.
- [56] G. Aad, T. Abajyan, B. Abbott et al. [ATLAS Collab.], *New J. Phys.*, **15** (2013), 093011, 32 pp., arXiv: 1308.1364.
- [57] V. Khachatryan, A. M. Sirunyan, A. Tumasyan et al. [CMS Collab.], *Phys. Lett. B*, **738** (2014), 274–293, arXiv: 1406.5171.