Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Сянь-Цюо Гэн, Синь Цзэн, Использование тригональных кривых в решеточной иерархии Блажака–Марсиньяка, *ТМФ*, 2017, том 190, номер 1, 21–47

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9105>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 02:58:27

© 2017 г.

Сянь-Цюо Гэн*, Синь Цзэн*

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТРИГОНАЛЬНЫХ КРИВЫХ В РЕШЕТОЧНОЙ ИЕРАРХИИ БЛАЖАКА–МАРСИНЬЯКА

Развит метод построения алгебро-геометрических решений решеточной иерархии Блажака–Марсиньяка на основе теории тригональных кривых. Решеточная иерархия Блажака–Марсиньяка, связанная с дискретной (3×3) -матричной спектральной задачей, выводится с помощью рекуррентного уравнения Леонарда. С помощью характеристического полинома матрицы Лакса для решеточной иерархии Блажака–Марсиньяка вводится тригональная кривая с двумя бесконечными точками, с помощью которой устанавливаются соответствующие уравнения типа уравнений Дубровина. Изучаются асимптотические свойства алгебраических функций, несущих информацию о дивизоре и функциях Бейкера–Ахиезера, вблизи двух бесконечных точек на тригональной кривой. Получены алгебро-геометрические решения полной решеточной иерархии Блажака–Марсиньяка, выраженные через тета-функцию Римана.

Ключевые слова: решетка Блажака–Марсиньяка, алгебро-геометрические решения, тригональная кривая.

DOI: 10.4213/tmf9105

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что построение явных алгебро-геометрических решений как непрерывных, так и дискретных интегрируемых систем является важным направлением исследований. В обширной литературе [1]–[16] предложено несколько систематических методов, таких как алгебро-геометрический метод, метод обратной задачи рассеяния для периодической задачи и другие методы, основанные на теории гиперэллиптических кривых, с помощью которых в течение последних десятилетий были получены алгебро-геометрические решения для многих солитонных уравнений, связанных с (2×2) -матричной спектральной задачей. Однако для случая (3×3) -матричной спектральной задачи исследования становятся более сложными

Работа поддержана National Natural Science Foundation of China (грант № 11331008).

School of Mathematics and Statistics, Zhengzhou University, Zhengzhou, People's Republic of China. E-mail: xzeng@zzu.edu.cn

из-за привлечения теории тригональных кривых [17]–[23] вместо теории гиперэллиптических кривых в случае задачи второго порядка. Лишь в немногочисленных работах [3], [10], [24]–[28] с помощью теории редукций тета-функций Римана изучаются алгебро-геометрические решения уравнения Буссинеска, связанного с дифференциальным оператором третьего порядка. В работах [29], [30] предложен универсальный подход, приводящий к алгебро-геометрическим решениям полной иерархии Буссинеска. В работах [31]–[33] развит общий метод введения тригональной кривой с помощью характеристического полинома матрицы Лакса, соответствующей (3×3) -матричной спектральной задаче, который был успешно расширен до универсального метода получения алгебро-геометрических решений иерархий модифицированного уравнения Буссинеска, уравнения Каупа–Купершмидта и спаренного модифицированного уравнения Кортвега–де Фриза.

В настоящей работе развивается метод обобщения универсального подхода, изложенного в работах [29]–[33], на дискретный случай, и с его помощью получены алгебро-геометрические решения решеточной иерархии Блажака–Марсиньяка (БМ), связанной с дискретной (3×3) -матричной спектральной задачей. Типичным представителем иерархии является решеточное уравнение БМ

$$u_t = w^+ - w^-, \quad v_t = u^- w^- - uw, \quad w_t = w(v - v^+), \quad (1.1)$$

впервые полученное в работе Блажака и Марсиньяка [34] в качестве примера применения формализма r -матриц к алгебре операторов сдвига. В работах [35]–[39] найдены разнообразные математические структуры, связанные с решеточным уравнением БМ (1.1). Например, получены бигамильтонова структура, преобразование Беклунда, формула нелинейной суперпозиции, мастер-симметрии, бесконечный набор законов сохранения и многое другое.

Содержание статьи следующее. В разделе 2, воспользовавшись рекуррентными уравнениями Ленарда и уравнением нулевой кривизны, мы выводим решеточную иерархию БМ, связанную с дискретной (3×3) -матричной спектральной задачей. В разделе 3 вводится тригональная кривая $\mathcal{K}_{m-1}$ с помощью характеристического полинома матрицы Лакса для стационарной решеточной иерархии, с ее помощью найдены стационарная функция Бейкера–Ахиезера и соответствующая мероморфная функция. Показано, что тригональная кривая имеет две бесконечные точки, одна из которых – точка двойного ветвления, а вторая не является точкой ветвления. В разделе 4 получено явное представление потенциалов u , v и w через тета-функции для полной стационарной решеточной иерархии БМ. Развитый в разделах 3 и 4 анализ обобщается в разделе 5 на случай зависимости от времени. Все аналоги функции Бейкера–Ахиезера, мероморфной функции, а также их представления через тета-функцию, полученные в разделе 4, распространяются на случай зависимости от времени.

2. РЕШЕТОЧНАЯ ИЕРАРХИЯ БМ

Мы будем использовать следующую гипотезу.

Предположим, что функции u , v и w удовлетворяют условиям

$$u(\cdot, t), v(\cdot, t), w(\cdot, t) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad u(n, \cdot), v(n, \cdot), w(n, \cdot) \in C^1(\mathbb{R}), \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ – множество всех комплекснозначных последовательностей, помеченных индексом из $\mathbb{Z}$.

Для удобства обозначим через $E^\pm$ операторы сдвига, действующие на комплекснозначные последовательности $f = \{f(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ согласно уравнениям

$$(E^\pm f)(n) = f(n \pm 1), \quad (E^k f)(n) = f(n + k), \quad n, k \in \mathbb{Z},$$

и введем разностные операторы по формуле $\Delta = E - 1$. Кроме того, будем использовать обозначение

$$f^\pm = E^\pm f, \quad f \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}.$$

Предположим, что $(E - 1)^{-1}f(n)|_{n=n_0} = \alpha$, $(E + 1)^{-1}f(n)|_{n=n_0} = \beta$, где α и β – постоянные. Введем операторы

$$(E - 1)^{-1}f(n) = \begin{cases} \alpha + \sum_{n'=n_0}^{n-1} f(n'), & n \geq n_0 + 1, \\ \alpha, & n = n_0, \\ \alpha - \sum_{n'=n}^{n_0-1} f(n'), & n \leq n_0 - 1, \end{cases}$$

$$(E + 1)^{-1}f(n) = \begin{cases} (-1)^{n-n_0}\beta - \sum_{n'=n_0}^{n-1} (-1)^{n-n'} f(n'), & n \geq n_0 + 1, \\ \beta, & n = n_0, \\ (-1)^{n-n_0}\beta + \sum_{n'=n}^{n_0-1} (-1)^{n-n'} f(n'), & n \leq n_0 - 1; \end{cases}$$

отсюда можно определить обратный оператор $(E - E^{-1})^{-1}$ с помощью соотношения $(E - E^{-1})^{-1} = E(E - 1)^{-1}(E + 1)^{-1}$.

В этом разделе мы выведем решеточную иерархию БМ, связанную с (3×3) -матричной дискретной спектральной задачей

$$E\psi = U\psi, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ v + \lambda & u & 1 \\ w & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

где u, v, w – три потенциала, а λ – постоянный спектральный параметр. Для этого введем два набора рекуррентных уравнений Ленарда

$$\begin{aligned} K_n \hat{g}_j &= J_n \hat{g}_{j+1}, \quad \hat{g}_j = (\hat{a}_j, \hat{b}_j, \hat{c}_j)^T, \quad j \geq 0, \\ K_n \check{g}_j &= J_n \check{g}_{j+1}, \quad \check{g}_j = (\check{a}_j, \check{b}_j, \check{c}_j)^T, \quad j \geq 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

с условиями $\hat{g}_j|_{(u,v,w)=0} = \check{g}_j|_{(u,v,w)=0} = 0$, $j \geq 1$, и начальными точками

$$\hat{g}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \check{g}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -(E + 1)^{-1}u \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

где начальные условия означают приравнивание нулю констант суммирования, а два разностных оператора K_n и J_n заданы следующим образом:

$$K_n = \begin{pmatrix} u\Delta uE + EvE - v & EwE - E^{-1}w & u\Delta E \\ v\Delta uE + wE^2 - E^{-1}w & E^{-1}uw - uwE & v(E^2 - 1) \\ w\Delta EuE & -w\Delta v & w(E^3 - 1) \end{pmatrix},$$

$$J_n = \begin{pmatrix} 1 - E^2 & 0 & 0 \\ -\Delta uE & 0 & 1 - E^2 \\ 0 & w\Delta & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\hat{g}_j$ и $\check{g}_j$ определены однозначно. Например, первые два представителя имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\hat{g}_1 &= \begin{pmatrix} -w^- \\ -v \\ u^- w^- \end{pmatrix}, \\ \check{g}_1 &= \begin{pmatrix} (1 - E^2)^{-1}[v^+ - v + u^2 - 2u(E + 1)^{-1}u] & & \\ & -(E + 1)^{-1}u & \\ (E + 1)^{-1}[u(E - E^{-1})^{-1}(v^+ - v + u^2 - 2u(E + 1)^{-1}u) - w^-] & & \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (2.4)$$

Чтобы породить иерархию эволюционных уравнений, связанных с дискретной спектральной задачей (2.1), решим стационарное уравнение нулевой кривизны

$$(EV)U - UV = 0, \quad V = (V_{ij})_{3 \times 3}, \quad (2.5)$$

которое эквивалентно следующей системе:

$$\begin{aligned}(v + \lambda)V_{12}^+ + wV_{13}^+ - V_{21} &= 0, \\ V_{11}^+ + uV_{12}^+ - V_{22} &= 0, \\ V_{12}^+ - V_{23} &= 0, \\ (v + \lambda)(V_{22}^+ - V_{11}) + wV_{23}^+ - uV_{21} - V_{31} &= 0, \\ V_{21}^+ + u(V_{22}^+ - V_{22}) - (v + \lambda)V_{12} - V_{32} &= 0, \\ V_{22}^+ - V_{33} - (v + \lambda)V_{13} - uV_{23} &= 0, \\ (v + \lambda)V_{32}^+ + w(V_{33}^+ - V_{11}) &= 0, \\ V_{31}^+ + uV_{32}^+ - wV_{12} &= 0, \\ V_{32}^+ - wV_{13} &= 0,\end{aligned}\quad (2.6)$$

где каждый элемент $V_{ij} = V_{ij}(a, b, c)$ является разложением Лорана по λ :

$$\begin{aligned}V_{11} &= c, & V_{12} &= a, & V_{13} &= b, \\ V_{21} &= wb^+ + (v + \lambda)a^+, & V_{22} &= c^+ + ua^+, & V_{23} &= a^+, \\ V_{31} &= w^- a^- - u^- w^- b^-, & V_{32} &= w^- b^-, & V_{33} &= c^{++} + \Delta ua^+ - (v + \lambda)b,\end{aligned}\quad (2.7)$$

$$a = \sum_{j \geq 0} a_j \lambda^{-j}, \quad b = \sum_{j \geq 0} b_j \lambda^{-j}, \quad c = \sum_{j \geq 0} c_j \lambda^{-j}. \quad (2.8)$$

Непосредственные вычисления показывают, что уравнения (2.6) и (2.7) влекут за собой уравнение Ленарда

$$K_n G = \lambda J_n G, \quad G = (a, b, c)^T. \quad (2.9)$$

Подставляя разложения (2.8) в уравнение (2.9) и собирая члены с одинаковыми степенями λ , получим следующее рекуррентное соотношение:

$$K_n G_j = J_n G_{j+1}, \quad J_n G_0 = 0, \quad j \geq 0, \quad (2.10)$$

где $G_j = (a_j, b_j, c_j)^T$. Поскольку уравнение $J_n G_0 = 0$ имеет решение

$$G_0 = \alpha_0 \hat{g}_0 + \beta_0 \check{g}_0, \quad (2.11)$$

то G_j можно представить в виде

$$G_j = \alpha_0 \hat{g}_j + \beta_0 \check{g}_j + \dots + \alpha_j \hat{g}_0 + \beta_j \check{g}_0, \quad j \geq 0, \quad (2.12)$$

где α_j и β_j – произвольные постоянные.

Пусть ψ удовлетворяет дискретной спектральной задаче (2.1) и вспомогательной задаче

$$\psi_{t_r} = \tilde{V}^{(r)} \psi, \quad \tilde{V}^{(r)} = (\tilde{V}_{ij}^{(r)})_{3 \times 3}, \quad (2.13)$$

где каждый элемент имеет вид $\tilde{V}_{ij}^{(r)} = V_{ij}(\tilde{a}^{(r)}, \tilde{b}^{(r)}, \tilde{c}^{(r)})$,

$$\tilde{a}^{(r)} = \sum_{j=0}^r \tilde{a}_j \lambda^{r-j}, \quad \tilde{b}^{(r)} = \sum_{j=0}^r \tilde{b}_j \lambda^{r-j}, \quad \tilde{c}^{(r)} = \sum_{j=0}^r \tilde{c}_j \lambda^{r-j}. \quad (2.14)$$

Здесь $\tilde{a}_j, \tilde{b}_j, \tilde{c}_j$ вводятся с помощью выражения $\tilde{G}_j = (\tilde{a}_j, \tilde{b}_j, \tilde{c}_j)^T$, а функции

$$\tilde{G}_j = \tilde{\alpha}_0 \hat{g}_j + \tilde{\beta}_0 \check{g}_j + \dots + \tilde{\alpha}_j \hat{g}_0 + \tilde{\beta}_j \check{g}_0, \quad j \geq 0, \quad (2.15)$$

являются также решениями уравнения (2.10), при этом постоянные $\{\tilde{\alpha}_j, \tilde{\beta}_j\}$ и $\{\alpha_j, \beta_j\}$ в (2.12) не зависят друг от друга. Тогда условие совместности уравнений (2.1) и (2.13) приводит к уравнению нулевой кривизны, $U_{t_r} = (E \tilde{V}^{(r)})U - U \tilde{V}^{(r)}$, которое эквивалентно решеточной иерархии БМ

$$(u_{t_r}, v_{t_r}, w_{t_r})^T = \tilde{X}_r, \quad r \geq 0, \quad (2.16)$$

с векторными полями

$$\tilde{X}_j = X(u, v, w; \underline{\tilde{\alpha}}^{(j)}, \underline{\tilde{\beta}}^{(j)}) = K_n \tilde{G}_j = J_n \tilde{G}_{j+1}, \quad j \geq 0, \quad (2.17)$$

где $\underline{\tilde{\alpha}}^{(j)} = (\tilde{\alpha}_0, \dots, \tilde{\alpha}_j)$, $\underline{\tilde{\beta}}^{(j)} = (\tilde{\beta}_0, \dots, \tilde{\beta}_j)$. Первый нетривиальный представитель иерархии (2.16) имеет вид

$$\begin{aligned} u_{t_0} &= \tilde{\alpha}_0(w^+ - w^-) + \tilde{\beta}_0[v^+ - v + u^2 - 2u(E+1)^{-1}u], \\ v_{t_0} &= \tilde{\alpha}_0(u^- w^- - uw) + \tilde{\beta}_0(w - w^-), \\ w_{t_0} &= \tilde{\alpha}_0 w(v - v^+) + \tilde{\beta}_0 w[2(E+1)^{-1}u - u]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

При $\tilde{\alpha}_0 = 1, \tilde{\beta}_0 = 0, t_0 = t$ уравнение (2.18) является обычным решеточным уравнением БМ (1.1). При $\tilde{\alpha}_0 = 0, \tilde{\beta}_0 = 1, t_0 = t$ уравнение (2.18) сводится к виду

$$\begin{aligned} u_t &= v^+ - v + u^2 - 2u(E+1)^{-1}u, \\ v_t &= w - w^-, \\ w_t &= w[2(E+1)^{-1}u - u]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

3. СТАЦИОНАРНАЯ МЕРОМОРФНАЯ ФУНКЦИЯ

Введем сначала тригональную кривую $\mathcal{K}_{m-1}$, а затем определим стационарную функцию Бейкера–Ахиезера и соответствующую мероморфную функцию. Рассмотрим стационарную решеточную иерархию БМ, $X_q = X(u, v, w; \underline{\alpha}^{(q)}, \underline{\beta}^{(q)}) = 0$, $\underline{\alpha}^{(q)} = (\alpha_0, \dots, \alpha_q)$, $\underline{\beta}^{(q)} = (\beta_0, \dots, \beta_q)$, которая эквивалентна стационарному уравнению нулевой кривизны,

$$(EV^{(q)})U - UV^{(q)} = 0, \quad V^{(q)} = (\lambda^q V)_+ = (V_{ij}^{(q)})_{3 \times 3}, \quad (3.1)$$

с элементами $V_{ij}^{(q)} = V_{ij}(a^{(q)}, b^{(q)}, c^{(q)})$,

$$a^{(q)} = \sum_{j=0}^q a_j \lambda^{q-j}, \quad b^{(q)} = \sum_{j=0}^q b_j \lambda^{q-j}, \quad c^{(q)} = \sum_{j=0}^q c_j \lambda^{q-j}, \quad (3.2)$$

где a_j, b_j, c_j заданы в (2.12). Непосредственные вычисления показывают, что функция $yI - V^{(q)}$ удовлетворяет также стационарному уравнению нулевой кривизны. Тогда характеристический полином $\mathcal{F}_m(\lambda, y) = \det(yI - V^{(q)})$ матрицы Лакса $V^{(q)}$ является постоянным, не зависящим от переменной n и имеет разложение

$$\det(yI - V^{(q)}) = y^3 - y^2 R_m(\lambda) + y S_m(\lambda) - T_m(\lambda), \quad (3.3)$$

где $R_m(\lambda)$, $S_m(\lambda)$ и $T_m(\lambda)$ являются полиномами с постоянными коэффициентами перед λ :

$$\begin{aligned} R_m(\lambda) &= \text{tr } V^{(q)} = -\alpha_0 \lambda^{q+1} - \alpha_1 \lambda^q - \alpha_2 \lambda^{q-1} + \dots, \\ S_m(\lambda) &= \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \begin{vmatrix} V_{ii}^{(q)} & V_{ij}^{(q)} \\ V_{ji}^{(q)} & V_{jj}^{(q)} \end{vmatrix} = -\beta_0^2 \lambda^{2q+1} - 2\beta_0 \beta_1 \lambda^{2q} + \dots, \\ T_m(\lambda) &= \det V^{(q)} = \alpha_0 \beta_0^2 \lambda^{3q+2} + \beta_0 (2\alpha_0 \beta_1 + \beta_0 \alpha_1) \lambda^{3q+1} + \dots. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Тогда уравнение $\mathcal{F}_m(\lambda, y) = 0$ естественным образом приводит к тригональной кривой степени m

$$\mathcal{K}_{m-1} : \quad \mathcal{F}_m(\lambda, y) = y^3 - y^2 R_m(\lambda) + y S_m(\lambda) - T_m(\lambda) = 0, \quad (3.5)$$

где $m = 3q + 2$ при $\alpha_0 \beta_0 \neq 0$. Ниже мы будем считать $\alpha_0 \beta_0 \neq 0$. Из (3.4) и (3.5) следует, что тригональная кривая $\mathcal{K}_{m-1}$ компактифицируется присоединением двух различных бесконечных точек P_{∞_1} и P_{∞_2} , одна из которых является точкой двойного ветвления, а другая не является точкой ветвления. Без потери общности будем считать, что точкой двойного ветвления является P_{∞_2} . Для удобства компактификацию кривой $\mathcal{K}_{m-1}$ по-прежнему будем обозначать тем же символом. Дискриминант уравнения (3.5) имеет вид

$$\Delta(\lambda) = 4S_m^3 - R_m^2 S_m^2 + 4R_m^3 T_m - 18R_m S_m T_m + 27T_m^2 = -4\alpha_0^4 \beta_0^2 \lambda^{6q+5} + \dots. \quad (3.6)$$

Формула Римана–Гурвица показывает, что арифметический род кривой $\mathcal{K}_{m-1}$ равен $3q + 1$ [40]. Таким образом, $\mathcal{K}_{m-1}$ становится трехлистной поверхностью Римана арифметического рода $m - 1$, если она несингулярна и неприводима. Несингулярность здесь означает, что в каждой точке $P_0 = (\lambda_0, y_0) \in \mathcal{K}_{m-1}$ выполняется условие $(\partial \mathcal{F}_m(\lambda, y) / \partial \lambda, \partial \mathcal{F}_m(\lambda, y) / \partial y)|_{(\lambda, y) = (\lambda_0, y_0)} \neq (0, 0)$.

Введем теперь стационарную функцию Бейкера–Ахизера как решение системы уравнений

$$\begin{aligned} E\psi(P, n, n_0) &= U(u(n), v(n), w(n); \lambda(P))\psi(P, n, n_0), \\ V^{(q)}(u(n), v(n), w(n); \lambda(P))\psi(P, n, n_0) &= y(P)\psi(P, n, n_0), \\ \psi_1(P, n_0, n_0) &= 1, \quad P = (\lambda, y) \in \mathcal{K}_{m-1} \setminus \{P_{\infty 1}, P_{\infty 2}\}, \quad n, n_0 \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

С функцией $\psi(P, n, n_0)$ тесно связана мероморфная функция $\phi(P, n)$ на $\mathcal{K}_{m-1}$ вида

$$\phi(P, n) = \frac{\psi_1^+(P, n, n_0)}{\psi_1(P, n, n_0)}, \quad P \in \mathcal{K}_{m-1}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3.8)$$

при этом

$$\psi_1(P, n, n_0) = \begin{cases} \prod_{n'=n_0}^{n-1} \phi(P, n'), & n \geq n_0 + 1, \\ 1, & n = n_0, \\ \prod_{n'=n}^{n_0-1} \phi(P, n')^{-1}, & n \leq n_0 - 1. \end{cases} \quad (3.9)$$

Из уравнений (3.7) после кропотливых вычислений получим

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{yV_{23}^{(q)} + C_m}{yV_{13}^{(q)} + A_m} = \frac{F_{m-1}}{y^2V_{23}^{(q)} - y(C_m + V_{23}^{(q)}R_m) + D_m} = \\ &= \frac{y^2V_{13}^{(q)} - y(A_m + V_{13}^{(q)}R_m) + B_m}{E_{m-1}}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где

$$\begin{aligned} A_m &= V_{12}^{(q)}V_{23}^{(q)} - V_{13}^{(q)}V_{22}^{(q)}, \\ B_m &= V_{13}^{(q)}[V_{11}^{(q)}V_{33}^{(q)} - V_{13}^{(q)}V_{31}^{(q)}] + V_{12}^{(q)}[V_{11}^{(q)}V_{23}^{(q)} - V_{13}^{(q)}V_{21}^{(q)}], \\ C_m &= V_{13}^{(q)}V_{21}^{(q)} - V_{11}^{(q)}V_{23}^{(q)}, \\ D_m &= V_{23}^{(q)}[V_{22}^{(q)}V_{33}^{(q)} - V_{23}^{(q)}V_{32}^{(q)}] + V_{21}^{(q)}[V_{13}^{(q)}V_{22}^{(q)} - V_{12}^{(q)}V_{23}^{(q)}] \end{aligned} \quad (3.11)$$

и

$$\begin{aligned} E_{m-1} &= (V_{13}^{(q)})^2V_{32}^{(q)} + V_{12}^{(q)}V_{13}^{(q)}(V_{22}^{(q)} - V_{33}^{(q)}) - (V_{12}^{(q)})^2V_{23}^{(q)}, \\ F_{m-1} &= (V_{23}^{(q)})^2V_{31}^{(q)} + V_{21}^{(q)}V_{23}^{(q)}(V_{11}^{(q)} - V_{33}^{(q)}) - (V_{21}^{(q)})^2V_{13}^{(q)}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Для дальнейшего использования введем полиномы

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_m &= V_{13}^{(q)}V_{32}^{(q)} - V_{12}^{(q)}V_{33}^{(q)}, \\ \mathcal{B}_m &= V_{12}^{(q)}[V_{11}^{(q)}V_{22}^{(q)} - V_{12}^{(q)}V_{21}^{(q)}] + V_{13}^{(q)}[V_{11}^{(q)}V_{32}^{(q)} - V_{12}^{(q)}V_{31}^{(q)}]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Легко заметить различные взаимосвязи между полиномами $A_m, B_m, C_m, D_m, \mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m, E_{m-1}, F_{m-1}, R_m, S_m, T_m$, некоторые из которых перечислены ниже:

$$\begin{aligned} V_{13}^{(q)}F_{m-1} &= V_{23}^{(q)}D_m - (V_{23}^{(q)})^2S_m - C_m^2 - C_mV_{23}^{(q)}R_m, \\ A_mF_{m-1} &= (V_{23}^{(q)})^2T_m + C_mD_m, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} V_{23}^{(q)}E_{m-1} &= V_{13}^{(q)}B_m - (V_{13}^{(q)})^2S_m - A_m^2 - A_mV_{13}^{(q)}R_m, \\ C_mE_{m-1} &= (V_{13}^{(q)})^2T_m + A_mB_m, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$E_{m-1} = V_{13}^{(q)} \mathcal{A}_m - V_{12}^{(q)} \mathcal{A}_m, \quad F_{m-1} = -wE_{m-1}^+, \quad (3.16)$$

$$\mathcal{A}_m = C_m^-, \quad \mathcal{B}_m = D_m^-. \quad (3.17)$$

Из уравнений (3.1), (3.2), (3.12) и (3.16) мы знаем, что E_{m-1} и F_{m-1} — два полинома по λ степени $m-1$. Поэтому их можно представить в следующем виде:

$$E_{m-1} = \alpha_0^2 \beta_0 \prod_{j=1}^{m-1} (\lambda - \mu_j(n)), \quad (3.18)$$

$$F_{m-1} = -\alpha_0^2 \beta_0 w(n) \prod_{j=1}^{m-1} (\lambda - \mu_j^+(n)).$$

Зададим $\{\hat{\mu}_j(n)\}_{j=1, \dots, m-1} \subset \mathcal{K}_{m-1}$ и $\{\hat{\mu}_j^+(n)\}_{j=1, \dots, m-1} \subset \mathcal{K}_{m-1}$ выражениями

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_j(n) &= (\mu_j(n), y(\hat{\mu}_j(n))) = \left(\mu_j(n), -\frac{A_m(\mu_j(n), n)}{V_{13}^{(q)}(\mu_j(n), n)} \right), \quad n \in \mathbb{Z}, \\ \hat{\mu}_j^+(n) &= (\mu_j^+(n), y(\hat{\mu}_j^+(n))) = \left(\mu_j^+(n), -\frac{C_m(\mu_j^+(n), n)}{V_{23}^{(q)}(\mu_j^+(n), n)} \right), \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Для удобства возьмем три точки P , P^* , P^{**} на трех различных листах одной и той же поверхности Римана $\mathcal{K}_{m-1}$. Пусть $y_i(\lambda)$, $i = 0, 1, 2$, означают три корня уравнения $\mathcal{F}_m(\lambda, y) = 0$ при фиксированном λ , т.е.

$$(y - y_0(\lambda))(y - y_1(\lambda))(y - y_2(\lambda)) = y^3 - y^2 R_m + y S_m - T_m = 0. \quad (3.20)$$

Тогда точки $(\lambda, y_0(\lambda))$, $(\lambda, y_1(\lambda))$ и $(\lambda, y_2(\lambda))$ находятся соответственно на трех различных листах поверхности Римана $\mathcal{K}_{m-1}$. Пусть $P = (\lambda, y_i(\lambda))$, $i = 0, 1, 2$, является произвольной из трех точек, тогда две другие точки будут P^* и P^{**} .

Из уравнения (3.20) нетрудно получить систему

$$\begin{aligned} y_0 + y_1 + y_2 &= R_m, \\ y_0 y_1 + y_0 y_2 + y_1 y_2 &= S_m, \\ y_0 y_1 y_2 &= T_m, \\ y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 &= R_m^2 - 2S_m, \\ y_0^3 + y_1^3 + y_2^3 &= R_m^3 - 3R_m S_m + 3T_m, \\ y_0^2 y_1^2 + y_0^2 y_2^2 + y_1^2 y_2^2 &= S_m^2 - 2R_m T_m. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Тогда функция $\phi(P, n)$ удовлетворяет системе

$$\begin{aligned} \phi(P, n) \phi(P^*, n) \phi(P^{**}, n) &= -\frac{F_{m-1}(\lambda, n)}{E_{m-1}(\lambda, n)}, \\ \phi(P, n) + \phi(P^*, n) + \phi(P^{**}, n) &= \\ &= \frac{3B_m(\lambda, n) - 2V_{13}^{(q)}(\lambda, n)S_m(\lambda) - A_m(\lambda, n)R_m(\lambda)}{E_{m-1}(\lambda, n)}, \\ \frac{1}{\phi(P, n)} + \frac{1}{\phi(P^*, n)} + \frac{1}{\phi(P^{**}, n)} &= \\ &= \frac{3D_m(\lambda, n) - 2V_{23}^{(q)}(\lambda, n)S_m(\lambda) - C_m(\lambda, n)R_m(\lambda)}{F_{m-1}(\lambda, n)}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

4. АЛГЕБРО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СТАЦИОНАРНОЙ РЕШЕТОЧНОЙ ИЕРАРХИИ БМ

В настоящем разделе мы получим явные выражения через тета-функцию Римана для мероморфной функции ϕ , для функции Бейкера–Ахиезера ψ_1 и потенциалов u, v, w полной стационарной решеточной иерархии БМ.

Из непосредственных вычислений следует, что функция $\phi(P, n)$ удовлетворяет уравнению типа Риккати

$$\begin{aligned} \phi^+(P, n)\phi(P, n)\phi^-(P, n) - u(n)\phi(P, n)\phi^-(P, n) - \\ - v(n)\phi^-(P, n) - w^-(n) = \lambda\phi^-(P, n). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Вводя локальную координату $\zeta = 1/\lambda$ вблизи P_{∞_1} , делая подстановку в виде степенного ряда в уравнение типа Риккати (4.1) и сравнивая одинаковые степени координаты ζ , получим

$$\phi = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j \zeta^j, \quad P \rightarrow P_{\infty_1}, \quad (4.2)$$

где

$$\begin{aligned} \phi_1 = -w, \quad \phi_2 = wv^+, \quad \phi_3 = -w(u^+w^+ + (v^+)^2), \\ \phi_j = \sum_{\substack{i+l+s=j-1 \\ i, l, s \geq 1}} \phi_i^{++}\phi_l^+\phi_s - u^+ \sum_{\substack{l+s=j-1 \\ l, s \geq 1}} \phi_l^+\phi_s - v^+\phi_{j-1}, \quad j \geq 4. \end{aligned}$$

Аналогично, вводя локальную координату $\xi = 1/\lambda^{1/2}$ вблизи P_{∞_2} , делая подстановку в виде степенного ряда в (4.1) и сравнивая одинаковые степени ξ , получим

$$\phi = \sum_{j=-1}^{\infty} \kappa_j \xi^j, \quad P \rightarrow P_{\infty_2}, \quad (4.3)$$

где

$$\begin{aligned} \kappa_{-1} = 1, \quad \kappa_0 = (E+1)^{-1}u, \quad \kappa_1 = (E+1)^{-1}[v + (\kappa_0)^2], \\ \kappa_2 = (E+1)^{-1}[w^- - \kappa_0\triangle\kappa_1], \\ \kappa_j = \sum_{\substack{i+l+s=j-2 \\ i, l, s \geq -1}} \kappa_i^{++}\kappa_l^+\kappa_s - u^+ \sum_{\substack{l+s=j-2 \\ l, s \geq -1}} \kappa_l^+\kappa_s - v^+\kappa_{j-2}, \quad j \geq 3. \end{aligned}$$

Положительные дивизоры степени $m-1$ на $\mathcal{K}_{m-1}$ обозначим

$$\mathcal{D}_{P_1, \dots, P_{m-1}} : \begin{cases} \mathcal{K}_{m-1} \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ P \mapsto \mathcal{D}_{P_1, \dots, P_{m-1}}(P) = \\ = \begin{cases} k, & \text{если } P \text{ появляется } k \text{ раз в } \{P_1, \dots, P_{m-1}\}, \\ 0, & \text{если } P \in \mathcal{K}_{m-1} \setminus \{P_1, \dots, P_{m-1}\}. \end{cases} \end{cases}$$

В частности, дивизор (f) мероморфной функции $f(P)$ на $\mathcal{K}_{m-1}$ зададим в виде

$$(f) : \mathcal{K}_{m-1} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad P \mapsto \nu_f(P),$$

где $\nu_f(P)$ – порядок f в P , т. е. если $f(P)$ имеет асимптотическое разложение $f(P) = \sum_{j=m_0}^{\infty} d_j \zeta_P^j$ по локальной координате ζ_P для некоторого $m_0 \in \mathbb{Z}$, то $\nu_f(P) = m_0$ [30]. Следовательно, выражения (4.2), (4.3) и (3.10) приводят нас к выводу, что дивизор $(\phi(P, n))$ функции $\phi(P, n)$ имеет вид

$$(\phi(P, n)) = \mathcal{D}_{P_{\infty_1}, \hat{\mu}_1^+(n), \dots, \hat{\mu}_{m-1}^+(n)}(P) - \mathcal{D}_{P_{\infty_2}, \hat{\mu}_1(n), \dots, \hat{\mu}_{m-1}(n)}(P). \quad (4.4)$$

Таким образом, функция $\phi(P, n)$ имеет m простых нулей в точках $P_{\infty_1}, \hat{\mu}_1^+(n), \dots, \hat{\mu}_{m-1}^+(n)$ и m простых полюсов в точках $P_{\infty_2}, \hat{\mu}_1(n), \dots, \hat{\mu}_{m-1}(n)$. Более того, с помощью соотношений (4.2), (4.3) и (3.9) получим

$$\psi_1(P, n, n_0) \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \Gamma(n, n_0) \zeta^{n-n_0} (1 + O(\zeta)), \quad P \rightarrow P_{\infty_1}, \quad \zeta = \frac{1}{\lambda}, \quad (4.5)$$

где

$$\Gamma(n, n_0) = \begin{cases} \prod_{n'=n_0}^{n-1} (-w(n')), & n \geq n_0 + 1, \\ 1, & n = n_0, \\ \prod_{n'=n}^{n_0-1} (-w(n'))^{-1}, & n \leq n_0 - 1, \end{cases}$$

и

$$\psi_1(P, n, n_0) \underset{\xi \rightarrow 0}{=} \xi^{n_0-n} (1 + O(\xi)), \quad P \rightarrow P_{\infty_2}, \quad \xi = \frac{1}{\lambda^{1/2}}. \quad (4.6)$$

В результате приходим к выводу, что дивизор $(\psi_1(P, n, n_0))$ функции $\psi_1(P, n, n_0)$ имеет вид

$$(\psi_1(P, n, n_0)) = \mathcal{D}_{\hat{\mu}_1(n), \dots, \hat{\mu}_{m-1}(n)} - \mathcal{D}_{\hat{\mu}_1(n_0), \dots, \hat{\mu}_{m-1}(n_0)} + (n - n_0)(\mathcal{D}_{P_{\infty_1}} - \mathcal{D}_{P_{\infty_2}}). \quad (4.7)$$

Снабдим поверхность Римана $\mathcal{K}_{m-1}$ каноническим базисом $\{\mathbf{a}_j, \mathbf{b}_j\}_{j=1}^{m-1}$, элементы которого независимы и имеют следующие индексы пересечения:

$$\mathbf{a}_j \circ \mathbf{b}_k = \delta_{j,k}, \quad \mathbf{a}_j \circ \mathbf{a}_k = 0, \quad \mathbf{b}_j \circ \mathbf{b}_k = 0, \quad j, k = 1, \dots, m-1.$$

Выберем наш базис в виде следующего набора:

$$\tilde{\omega}_l(P) = \frac{1}{3y^2 - 2yR_m + S_m} \begin{cases} \lambda^{l-1} d\lambda, & 1 \leq l \leq 2q+1, \\ \left(y - \frac{R_m}{3}\right) \lambda^{l-2q-2} d\lambda, & 2q+2 \leq l \leq m-1, \end{cases} \quad (4.8)$$

который представляет собой $m-1$ линейно независимых гомоморфных дифференциалов на $\mathcal{K}_{m-1}$. Используя циклы $\mathbf{a}_j$ и $\mathbf{b}_j$, можно построить матрицы периодов A и B по формулам

$$A_{ij} = \int_{\mathbf{a}_j} \tilde{\omega}_i, \quad B_{ij} = \int_{\mathbf{b}_j} \tilde{\omega}_i. \quad (4.9)$$

Нетрудно показать обратимость матриц A и B [40], [41]. Введем теперь матрицы C и τ по формулам $C = A^{-1}$, $\tau = A^{-1}B$. Можно показать, что матрица τ симметрична ($\tau_{ij} = \tau_{ji}$) и имеет положительно-определенную мнимую часть ($\text{Im } \tau > 0$). Если нормировать $\tilde{\omega}_l$ и ввести новый базис ω_j , получим

$$\omega_j = \sum_{l=1}^{m-1} C_{jl} \tilde{\omega}_l, \quad j = 1, \dots, m-1, \quad (4.10)$$

а также

$$\int_{\mathbf{a}_k} \omega_j = \delta_{jk}, \quad \int_{\mathbf{b}_k} \omega_j = \tau_{jk}, \quad 1 \leq k, \quad j \leq m-1. \quad (4.11)$$

Пусть $\omega_{Q_1, Q_2}^{(3)}$ – нормированный абелев дифференциал третьего рода, голоморфный на $\mathcal{K}_{m-1} \setminus \{Q_1, Q_2\}$ с простыми полюсами в Q_s и вычетами $(-1)^{s+1}$, $s = 1, 2$, тогда

$$\int_{\mathbf{a}_j} \omega_{Q_1, Q_2}^{(3)} = 0, \quad \int_{\mathbf{b}_j} \omega_{Q_1, Q_2}^{(3)} = 2\pi i \int_{Q_2}^{Q_1} \omega_j, \quad j = 1, \dots, m-1. \quad (4.12)$$

В частности, для $\omega_{P_{\infty_1}, P_{\infty_2}}^{(3)}$ получим

$$\begin{aligned} \omega_{P_{\infty_1}, P_{\infty_2}}^{(3)} \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} (\zeta^{-1} + \omega_0^{\infty_1} + O(\zeta)) d\zeta, \quad P \rightarrow P_{\infty_1}, \quad \zeta = \frac{1}{\lambda}, \\ \omega_{P_{\infty_1}, P_{\infty_2}}^{(3)} \underset{\xi \rightarrow 0}{=} (-\xi^{-1} + \omega_0^{\infty_2} + O(\xi)) d\xi, \quad P \rightarrow P_{\infty_2}, \quad \xi = \frac{1}{\lambda^{1/2}}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} \int_{Q_0}^P \omega_{P_{\infty_1}, P_{\infty_2}}^{(3)} \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \ln \zeta + e_1(Q_0) + \omega_0^{\infty_1} \zeta + O(\zeta^2), \quad P \rightarrow P_{\infty_1}, \\ \int_{Q_0}^P \omega_{P_{\infty_1}, P_{\infty_2}}^{(3)} \underset{\xi \rightarrow 0}{=} -\ln \xi + e_2(Q_0) + \omega_0^{\infty_2} \xi + O(\xi^2), \quad P \rightarrow P_{\infty_2}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где $\omega_0^{\infty_1}$, $\omega_0^{\infty_2}$, $e_1(Q_0)$, $e_2(Q_0)$ – постоянные, а Q_0 – соответствующим образом выбранная базовая точка на $\mathcal{K}_{m-1} \setminus \{P_{\infty_1}, P_{\infty_2}\}$.

Пусть $\mathcal{T}_{m-1}$ – решетка периодов $\{\underline{z} \in \mathbb{C}^{m-1} \mid \underline{z} = \underline{N} + \underline{M}\tau, \underline{N}, \underline{M} \in \mathbb{Z}^{m-1}\}$. Комплексный тор $\mathcal{J}_{m-1} = \mathbb{C}^{m-1}/\mathcal{T}_{m-1}$ называется многообразием Якоби кривой $\mathcal{K}_{m-1}$. Абелево отображение $\underline{A}: \mathcal{K}_{m-1} \rightarrow \mathcal{J}_{m-1}$ задается выражением

$$\underline{A}(P) = (\mathcal{A}_1(P), \dots, \mathcal{A}_{m-1}(P)) = \left(\int_{Q_0}^P \omega_1, \dots, \int_{Q_0}^P \omega_{m-1} \right) \pmod{\mathcal{T}_{m-1}} \quad (4.15)$$

с естественным линейным расширением на фактор-группу $\text{Div}(\mathcal{K}_{m-1})$,

$$\underline{A}\left(\sum l_k P_k\right) = \sum l_k \underline{A}(P_k).$$

Рассмотрим неспециальный дивизор $\mathcal{D}_{\hat{\mu}(n)} = \sum_{k=1}^{m-1} \hat{\mu}_k(n)$, определим

$$\underline{\rho}(n) = \underline{A}\left(\sum_{k=1}^{m-1} \hat{\mu}_k(n)\right) = \sum_{k=1}^{m-1} \underline{A}(\hat{\mu}_k(n)) = \sum_{k=1}^{m-1} \int_{Q_0}^{\hat{\mu}_k(n)} \underline{\omega}, \quad (4.16)$$

где $\underline{\rho}(n) = (\rho_1(n), \dots, \rho_{m-1}(n))$, $\underline{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_{m-1})$.

Тета-функцию Римана, связанную с $\mathcal{K}_{m-1}$, обозначим $\theta(\underline{z})$:

$$\begin{aligned} \theta(\underline{z}) = \sum_{\underline{N} \in \mathbb{Z}^{m-1}} \exp\{2\pi i \langle \underline{N}, \underline{z} \rangle + \pi i \langle \underline{N}, \underline{N}\tau \rangle\}, \\ \underline{z} = (z_1, \dots, z_{m-1}) \in \mathbb{C}^{m-1}, \quad \langle \underline{N}, \underline{z} \rangle = \sum_{i=1}^{m-1} N_i z_i, \quad \langle \underline{N}, \underline{N}\tau \rangle = \sum_{i,j=1}^{m-1} \tau_{ij} N_i N_j. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Далее удобно использовать обозначение

$$\begin{aligned} \theta(\underline{z}(P, \hat{\mu}(n))) &= \theta(\underline{\Lambda} - \underline{A}(P) + \rho(n)), \\ P \in \mathcal{K}_{m-1}, \quad \hat{\underline{\mu}}(n) &= \{\hat{\mu}_1(n), \dots, \hat{\mu}_{m-1}(n)\} \in \sigma^{m-1}\mathcal{K}_{m-1}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

где $\sigma^{m-1}\mathcal{K}_{m-1}$ – $(m-1)$ -ю симметрическая степень $\mathcal{K}_{m-1}$, а $\underline{\Lambda} = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_{m-1})$ – вектор констант Римана, зависящих от базовой точки Q_0 согласно следующему выражению:

$$\Lambda_j = \frac{1}{2}(1 + \tau_{jj}) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m-1} \int_{a_i}^P \omega_i \int_{Q_0}^P \omega_j, \quad j = 1, \dots, m-1.$$

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что кривая $\mathcal{K}_{m-1}$ сингулярна. Пусть $P = (\lambda, y) \in \mathcal{K}_{m-1} \setminus \{P_{\infty_1}, P_{\infty_2}\}$, $(n, n_0) \in \mathbb{Z}^2$. Предположим, что $\mathcal{D}_{\hat{\underline{\mu}}(n)}$ – неспециальный дивизор при $n \in \mathbb{Z}$. Тогда*

$$\phi(P, n) = \frac{\theta(\underline{z}(P_{\infty_2}, \hat{\underline{\mu}}(n)))}{\theta(\underline{z}(P_{\infty_2}, \hat{\underline{\mu}}^+(n)))} \frac{\theta(\underline{z}(P, \hat{\underline{\mu}}^+(n)))}{\theta(\underline{z}(P, \hat{\underline{\mu}}(n)))} \exp\left(\int_{Q_0}^P \omega_{P_{\infty_1}, P_{\infty_2}}^{(3)} - e_2(Q_0)\right) \quad (4.19)$$

и

$$\begin{aligned} \psi_1(P, n, n_0) &= \frac{\theta(\underline{z}(P_{\infty_2}, \hat{\underline{\mu}}(n_0)))}{\theta(\underline{z}(P_{\infty_2}, \hat{\underline{\mu}}(n)))} \frac{\theta(\underline{z}(P, \hat{\underline{\mu}}(n)))}{\theta(\underline{z}(P, \hat{\underline{\mu}}(n_0)))} \times \\ &\times \exp\left((n - n_0) \left(\int_{Q_0}^P \omega_{P_{\infty_1}, P_{\infty_2}}^{(3)} - e_2(Q_0)\right)\right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Абелево отображение линеаризует этот вспомогательный дивизор $\mathcal{D}_{\hat{\underline{\mu}}(n)}$ в том смысле, что

$$\rho(n) = \underline{\rho}(n_0) + (n - n_0)(\underline{A}(P_{\infty_2}) - \underline{A}(P_{\infty_1})). \quad (4.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя теорему Абеля к соотношению (4.7), получим формулу (4.21). Из (4.14) следует, что

$$\begin{aligned} \exp\left(\int_{Q_0}^P \omega_{P_{\infty_1}, P_{\infty_2}}^{(3)} - e_2(Q_0)\right) &\underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \zeta \exp(e_1(Q_0) - e_2(Q_0)) + O(\zeta^2), \quad P \rightarrow P_{\infty_1}, \\ \exp\left(\int_{Q_0}^P \omega_{P_{\infty_1}, P_{\infty_2}}^{(3)} - e_2(Q_0)\right) &\underset{\xi \rightarrow 0}{=} \xi^{-1} + O(1), \quad P \rightarrow P_{\infty_2}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Правую часть соотношения (4.19) обозначим через Φ . Из выражения для Φ , а также из (4.22) и (4.4) мы знаем, что Φ и ϕ имеют одинаковые локальные нули и полюсы, а также индентичные существенные особенности в P_{∞_s} , $s = 1, 2$. Согласно теореме Римана–Роха [29], [30], [41] приходим к выводу о том, что $\Phi/\phi = \gamma$, где γ является константой. С помощью (4.3) и (4.22) получим

$$\frac{\Phi}{\phi} \underset{\xi \rightarrow 0}{=} \frac{(1 + O(\xi))(\xi^{-1} + O(1))}{\xi^{-1} + O(1)} \underset{\xi \rightarrow 0}{=} 1 + O(\xi), \quad P \rightarrow P_{\infty_2}, \quad (4.23)$$

откуда видно, что $\gamma = 1$. Это доказывает (4.19). Представление (4.20) получим с помощью (3.9) и (4.19). ■

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что кривая $\mathcal{K}_{m-1}$ несингулярна, и пусть $n \in \mathbb{Z}$. Допустим, что дивизор $\mathcal{D}_{\hat{\mu}(n)}$ является неспециальным при $n \in \mathbb{Z}$. Тогда*

$$u(n) = 2\omega_0^{\infty 2} - \sum_{j=1}^{m-1} d_{j,0}^{(\infty 2)} \partial_{z_j} \ln \frac{\theta(\underline{z}(P_{\infty 1}, \hat{\mu}^+(n)))}{\theta(\underline{z}(P_{\infty 1}, \hat{\mu}^-(n)))}, \quad (4.24)$$

$$v(n) = -\omega_0^{\infty 1} + \sum_{j=1}^{m-1} d_{j,0}^{(\infty 1)} \partial_{z_j} \ln \frac{\theta(\underline{z}(P_{\infty 1}, \hat{\mu}(n)))}{\theta(\underline{z}(P_{\infty 1}, \hat{\mu}^-(n)))}, \quad (4.25)$$

$$w(n) = -\frac{\theta(\underline{z}(P_{\infty 1}, \hat{\mu}^-(n))) \theta(\underline{z}(P_{\infty 1}, \hat{\mu}^+(n)))}{\theta(\underline{z}(P_{\infty 1}, \hat{\mu}(n)))^2} \exp(e_1(Q_0) - e_2(Q_0)). \quad (4.26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя теорему Абеля к формуле (4.4), получим

$$\rho^+(n) + \mathcal{A}(P_{\infty 1}) = \rho(n) + \mathcal{A}(P_{\infty 2}), \quad (4.27)$$

в результате приходим к выводу, что

$$\theta(\underline{z}(P_{\infty 2}, \hat{\mu}^+(n))) = \theta(\underline{z}(P_{\infty 1}, \hat{\mu}(n))). \quad (4.28)$$

Поскольку $y = V_{11}^{(q)} + V_{12}^{(q)}\phi + V_{13}^{(q)}(w^-/\phi^-)$, получим

$$\begin{aligned} y &\underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \zeta^{-q-1}[-\alpha_0 - \alpha_1\zeta - \alpha_2\zeta^2 + O(\zeta^3)], & P \rightarrow P_{\infty 1}, \\ y &\underset{\xi \rightarrow 0}{=} \xi^{-2q-1}[\beta_0 + \beta_1\xi^2 + O(\xi^4)], & P \rightarrow P_{\infty 2}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

с локальными координатами $\zeta = 1/\lambda$ вблизи $P_{\infty 1}$ и $\xi = 1/\lambda^{1/2}$ вблизи $P_{\infty 2}$. Из формул (4.8) и (4.10) найдем

$$\omega_j = \sum_{l=1}^{m-1} C_{jl} \tilde{\omega}_l = \sum_{l=1}^{2q+1} C_{jl} \frac{\lambda^{l-1} d\lambda}{3y^2 - 2yR_m + S_m} + \sum_{l=2q+2}^{m-1} C_{jl} \frac{(y - R_m/3)\lambda^{l-2q-2} d\lambda}{3y^2 - 2yR_m + S_m}, \quad (4.30)$$

где $j = 1, \dots, m-1$. Непосредственными вычислениями получим асимптотические разложения

$$\begin{aligned} \omega_j &\underset{\zeta \rightarrow 0}{=} (d_{j,0}^{(\infty 1)} + O(\zeta)) d\zeta, & P \rightarrow P_{\infty 1}, \quad j = 1, \dots, m-1, \\ \omega_j &\underset{\xi \rightarrow 0}{=} (d_{j,0}^{(\infty 2)} + O(\xi)) d\xi, & P \rightarrow P_{\infty 2}, \quad j = 1, \dots, m-1, \end{aligned} \quad (4.31)$$

где

$$d_{j,0}^{(\infty 1)} = \frac{2}{3\alpha_0} C_{j,m-1} - \frac{1}{\alpha_0^2} C_{j,2q+1}, \quad d_{j,0}^{(\infty 2)} = -\frac{1}{3\beta_0} C_{j,m-1} - \frac{1}{\alpha_0\beta_0} C_{j,2q+1}.$$

Разлагая отношения тета-функций Римана в формуле (4.19), получим

$$\begin{aligned}
\frac{\theta(\underline{z}(P, \hat{\underline{\mu}}^+(n)))}{\theta(\underline{z}(P, \hat{\underline{\mu}}(n)))} &= \frac{\theta(\underline{\Lambda} - \underline{\mathcal{A}}(P) + \underline{\rho}^+(n))}{\theta(\underline{\Lambda} - \underline{\mathcal{A}}(P) + \underline{\rho}(n))} = \\
&= \frac{\theta(\underline{\Lambda} - \underline{\mathcal{A}}(P_{\infty_1}) + \underline{\rho}^+(n) + \int_P^{P_{\infty_1}} \underline{\omega})}{\theta(\underline{\Lambda} - \underline{\mathcal{A}}(P_{\infty_1}) + \underline{\rho}(n) + \int_P^{P_{\infty_1}} \underline{\omega})} \stackrel{=}{\underset{\zeta \rightarrow 0}{=}} \\
&\stackrel{=}{\underset{\zeta \rightarrow 0}{=}} \frac{\theta(\dots, \Lambda_j - \mathcal{A}_j(P_{\infty_1}) + \rho_j^+(n) - d_{j,0}^{(\infty_1)} \zeta + O(\zeta^2), \dots)}{\theta(\dots, \Lambda_j - \mathcal{A}_j(P_{\infty_1}) + \rho_j(n) - d_{j,0}^{(\infty_1)} \zeta + O(\zeta^2), \dots)} \stackrel{=}{\underset{\zeta \rightarrow 0}{=}} \\
&\stackrel{=}{\underset{\zeta \rightarrow 0}{=}} \frac{\theta_1^+ - \sum_{j=1}^{m-1} d_{j,0}^{(\infty_1)} \frac{\partial}{\partial z_j} \theta_1^+ \zeta + O(\zeta^2)}{\theta_1 - \sum_{j=1}^{m-1} d_{j,0}^{(\infty_1)} \frac{\partial}{\partial z_j} \theta_1 \zeta + O(\zeta^2)} \stackrel{=}{\underset{\zeta \rightarrow 0}{=}} \\
&\stackrel{=}{\underset{\zeta \rightarrow 0}{=}} \frac{\theta_1^+}{\theta_1} \left(1 - \sum_{j=1}^{m-1} d_{j,0}^{(\infty_1)} \frac{\partial}{\partial z_j} \ln \frac{\theta_1^+}{\theta_1} \zeta + O(\zeta^2) \right), \quad P \rightarrow P_{\infty_1}, \quad (4.32)
\end{aligned}$$

где $\theta_1 = \theta(\underline{z}(P_{\infty_1}, \hat{\underline{\mu}}(n)))$, $\theta_1^+ = \theta(\underline{z}(P_{\infty_1}, \hat{\underline{\mu}}^+(n)))$. Аналогичным образом получим

$$\frac{\theta(\underline{z}(P, \hat{\underline{\mu}}^+(n)))}{\theta(\underline{z}(P, \hat{\underline{\mu}}(n)))} \stackrel{=}{\underset{\xi \rightarrow 0}{=}} \frac{\theta_2^+}{\theta_2} \left(1 - \sum_{j=1}^{m-1} d_{j,0}^{(\infty_2)} \frac{\partial}{\partial z_j} \ln \frac{\theta_2^+}{\theta_2} \xi + O(\xi^2) \right), \quad P \rightarrow P_{\infty_2}, \quad (4.33)$$

где $\theta_2 = \theta(\underline{z}(P_{\infty_2}, \hat{\underline{\mu}}(n)))$, $\theta_2^+ = \theta(\underline{z}(P_{\infty_2}, \hat{\underline{\mu}}^+(n)))$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
\phi(P, n) &\stackrel{=}{\underset{\zeta \rightarrow 0}{=}} \frac{\theta_2 \theta_1^+}{\theta_2^+ \theta_1} \exp(e_1(Q_0) - e_2(Q_0)) \times \\
&\times \left[\zeta + \left(\omega_0^{\infty_1} - \sum_{j=1}^{m-1} d_{j,0}^{(\infty_1)} \frac{\partial}{\partial z_j} \ln \frac{\theta_1^+}{\theta_1} \right) \zeta^2 + O(\zeta^3) \right], \quad P \rightarrow P_{\infty_1}, \quad (4.34) \\
\phi(P, n) &\stackrel{=}{\underset{\xi \rightarrow 0}{=}} \xi^{-1} + \omega_0^{\infty_2} - \sum_{j=1}^{m-1} d_{j,0}^{(\infty_2)} \frac{\partial}{\partial z_j} \ln \frac{\theta_2^+}{\theta_2} + O(\xi), \quad P \rightarrow P_{\infty_2}.
\end{aligned}$$

С другой стороны, из (4.2) и (4.3) имеем

$$\begin{aligned}
\phi(P, n) &\stackrel{=}{\underset{\zeta \rightarrow 0}{=}} -w(\zeta - v^+ \zeta^2 + O(\zeta^3)), \quad P \rightarrow P_{\infty_1}, \\
\phi(P, n) &\stackrel{=}{\underset{\xi \rightarrow 0}{=}} \xi^{-1} + (E + 1)^{-1} u + O(\xi), \quad P \rightarrow P_{\infty_2}.
\end{aligned} \quad (4.35)$$

Сравнивая (4.34) и (4.35) и используя (4.28), получим представления (4.26) для $w(n)$, (4.25) для $v(n)$ и (4.24) для $u(n)$. ■

Введем обозначение для $\mathbf{b}$ -периода дифференциала $\omega_{P_{\infty_1}, P_{\infty_2}}^{(3)}$:

$$\underline{U}^{(3)} = (U_1^{(3)}, \dots, U_{m-1}^{(3)}), \quad U_j^{(3)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{b}_j} \omega_{P_{\infty_1}, P_{\infty_2}}^{(3)}, \quad j = 1, \dots, m-1. \quad (4.36)$$

Комбинируя (4.12), (4.21), (4.36) и (4.24)–(4.26), можно выявить интересную линейность представления $u(n)$, $v(n)$ и $w(n)$ через тета-функции по $n \in \mathbb{Z}$. Действительно, соотношения (4.24)–(4.26) представимы в виде

$$u(n) = 2\omega_0^{\infty_2} - \sum_{j=1}^{m-1} d_{j,0}^{(\infty_2)} \frac{\partial}{\partial z_j} \ln \frac{\theta(\underline{K} - \underline{U}^{(3)} - \underline{U}^{(3)}n)}{\theta(\underline{K} + \underline{U}^{(3)} - \underline{U}^{(3)}n)}, \quad (4.37)$$

$$v(n) = -\omega_0^{\infty_1} + \sum_{j=1}^{m-1} d_{j,0}^{(\infty_1)} \frac{\partial}{\partial z_j} \ln \frac{\theta(\underline{K} - \underline{U}^{(3)}n)}{\theta(\underline{K} + \underline{U}^{(3)} - \underline{U}^{(3)}n)}, \quad (4.38)$$

$$w(n) = -\frac{\theta(\underline{K} + \underline{U}^{(3)} - \underline{U}^{(3)}n)\theta(\underline{K} - \underline{U}^{(3)} - \underline{U}^{(3)}n)}{\theta(\underline{K} - \underline{U}^{(3)}n)^2} \exp(e_1(Q_0) - e_2(Q_0)), \quad (4.39)$$

где $\underline{K} = \underline{\Lambda} - \underline{\mathcal{A}}(P_{\infty_1}) + \underline{\rho}(n_0) + \underline{U}^{(3)}n_0$.

5. АЛГЕБРО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ РЕШЕТОЧНОЙ ИЕРАРХИИ БМ

В настоящем разделе мы распространим результаты разделов 3 и 4 для стационарной решеточной иерархии БМ на случай зависимости от времени. По аналогии с (3.7) введем зависящую от времени функцию Бейкера–Ахиезера:

$$\begin{aligned} E\psi(P, n, n_0, t_r, t_{0,r}) &= U(u(n, t_r), v(n, t_r), w(n, t_r); \lambda(P))\psi(P, n, n_0, t_r, t_{0,r}), \\ \psi_{t_r}(P, n, n_0, t_r, t_{0,r}) &= \tilde{V}^{(r)}(u(n, t_r), v(n, t_r), w(n, t_r); \lambda(P))\psi(P, n, n_0, t_r, t_{0,r}), \\ V^{(q)}(u(n, t_r), v(n, t_r), w(n, t_r); \lambda(P))\psi(P, n, n_0, t_r, t_{0,r}) &= y(P)\psi(P, n, n_0, t_r, t_{0,r}), \\ \psi_1(P, n_0, n_0, t_{0,r}, t_{0,r}) &= 1, \quad P \in \mathcal{K}_{m-1} \setminus \{P_{\infty_1}, P_{\infty_2}\}, \quad (n, t_r), (n_0, t_{0,r}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Использованная здесь тригональная кривая $\mathcal{K}_{m-1}$ будет задана ниже. Условие совместности первых трех выражений системы (5) приводит к следующим уравнениям:

$$U_{t_r} - (E\tilde{V}^{(r)})U + U\tilde{V}^{(r)} = 0, \quad (5.2)$$

$$(EV^{(q)})U - UV^{(q)} = 0, \quad (5.3)$$

$$V_{t_r}^{(q)} - [\tilde{V}^{(r)}, V^{(q)}] = 0. \quad (5.4)$$

Непосредственные вычисления показывают, что $yI - V^{(q)}$ удовлетворяет уравнениям (5.3) и (5.4). При этом характеристический полином матрицы Лакса $V^{(q)}$ для решеточной иерархии БМ является постоянным, не зависящим от переменных n и t_r и имеет разложение

$$\det(yI - V^{(q)}) = y^3 - y^2 R_m(\lambda) + y S_m(\lambda) - T_m(\lambda),$$

где $R_m(\lambda)$, $S_m(\lambda)$ и $T_m(\lambda)$ заданы в (3.4). Тогда кривая $\mathcal{K}_{m-1}$ для зависящего от времени решеточного уравнения БМ определяется выражением

$$\mathcal{K}_{m-1} : \quad \mathcal{F}_m(\lambda, y) = y^3 - y^2 R_m(\lambda) + y S_m(\lambda) - T_m(\lambda) = 0.$$

С функцией $\psi(P, n, n_0, t_r, t_{0,r})$ близко связана мероморфная функция $\phi(P, n, t_r)$ на $\mathcal{K}_{m-1}$, заданная выражением

$$\phi(P, n, t_r) = \frac{\psi_1^+(P, n, n_0, t_r, t_{0,r})}{\psi_1(P, n, n_0, t_r, t_{0,r})}, \quad P \in \mathcal{K}_{m-1}, \quad (n, t_r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}, \quad (5.5)$$

из которого в силу (5) следует

$$\begin{aligned} \phi(P, n, t_r) &= \frac{y V_{23}^{(q)}(\lambda, n, t_r) + C_m(\lambda, n, t_r)}{y V_{13}^{(q)}(\lambda, n, t_r) + A_m(\lambda, n, t_r)} = \\ &= \frac{F_{m-1}(\lambda, n, t_r)}{y^2 V_{23}^{(q)}(\lambda, n, t_r) - y[C_m(\lambda, n, t_r) + V_{23}^{(q)}(\lambda, n, t_r)R_m(\lambda)] + D_m(\lambda, n, t_r)} = \\ &= \frac{y^2 V_{13}^{(q)}(\lambda, n, t_r) - y[A_m(\lambda, n, t_r) + V_{13}^{(q)}(\lambda, n, t_r)R_m(\lambda)] + B_m(\lambda, n, t_r)}{E_{m-1}(\lambda, n, t_r)}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где $P = (\lambda, y) \in \mathcal{K}_{m-1}$, $(n, t_r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$, функции $A_m(\lambda, n, t_r)$, $B_m(\lambda, n, t_r)$, $C_m(\lambda, n, t_r)$, $D_m(\lambda, n, t_r)$, $E_{m-1}(\lambda, n, t_r)$, $F_{m-1}(\lambda, n, t_r)$ заданы в (3.11) и (3.12), а $\mathcal{A}_m(\lambda, n, t_r)$, $\mathcal{B}_m(\lambda, n, t_r)$ введены в (3.13). Поэтому уравнения (3.14)–(3.17) тоже справедливы в данном контексте. Аналогично запишем

$$E_{m-1}(\lambda, n, t_r) = \alpha_0^2 \beta_0 \prod_{j=1}^{m-1} (\lambda - \mu_j(n, t_r)), \quad (5.7)$$

$$F_{m-1}(\lambda, n, t_r) = -\alpha_0^2 \beta_0 w(n, t_r) \prod_{j=1}^{m-1} (\lambda - \mu_j^+(n, t_r)) \quad (5.8)$$

и определим $\{\hat{\mu}_j(n, t_r)\}_{j=1, \dots, m-1} \subset \mathcal{K}_{m-1}$ и $\{\hat{\mu}_j^+(n, t_r)\}_{j=1, \dots, m-1} \subset \mathcal{K}_{m-1}$ по формулам

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_j(n, t_r) &= (\mu_j(n, t_r), y(\mu_j(n, t_r))) = \\ &= \left(\mu_j(n, t_r), -\frac{A_m(\mu_j(n, t_r), n, t_r)}{V_{13}^{(q)}(\mu_j(n, t_r), n, t_r)} \right), \quad (n, t_r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_j^+(n, t_r) &= (\mu_j^+(n, t_r), y(\mu_j^+(n, t_r))) = \\ &= \left(\mu_j^+(n, t_r), -\frac{C_m(\mu_j^+(n, t_r), n, t_r)}{V_{23}^{(q)}(\mu_j^+(n, t_r), n, t_r)} \right), \quad (n, t_r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Из (5.6) следует, что дивизор $(\phi(P, n, t_r))$ функции $\phi(P, n, t_r)$ имеет вид

$$(\phi(P, n, t_r)) = \mathcal{D}_{P_{\infty_1}, \hat{\mu}_1^+(n, t_r), \dots, \hat{\mu}_{m-1}^+(n, t_r)}(P) - \mathcal{D}_{P_{\infty_2}, \hat{\mu}(n, t_r), \dots, \hat{\mu}_{m-1}(n, t_r)}(P), \quad (5.11)$$

т. е. $P_{\infty_1}, \hat{\mu}_1^+(n, t_r), \dots, \hat{\mu}_{m-1}^+(n, t_r)$ — m простых нулей функции $\phi(P, n, t_r)$, а $P_{\infty_2}, \hat{\mu}_1(n, t_r), \dots, \hat{\mu}_{m-1}(n, t_r)$ — ее m простых полюсов.

Аналогично функция $\phi(P, n, t_r)$ удовлетворяет уравнению типа Риккати

$$\begin{aligned} \phi^+(P, n, t_r)\phi(P, n, t_r)\phi^-(P, n, t_r) - u(n, t_r)\phi(P, n, t_r)\phi^-(P, n, t_r) - \\ - v(n, t_r)\phi^-(P, n, t_r) - w^-(n, t_r) = \lambda\phi^-(P, n, t_r), \end{aligned} \quad (5.12)$$

а также

$$\begin{aligned} \phi(P, n, t_r)\phi(P^*, n, t_r)\phi(P^{**}, n, t_r) &= -\frac{F_{m-1}(\lambda, n, t_r)}{E_{m-1}(\lambda, n, t_r)}, \\ \phi(P, n, t_r) + \phi(P^*, n, t_r) + \phi(P^{**}, n, t_r) &= \\ &= \frac{3B_m(\lambda, n, t_r) - 2V_{13}^{(q)}(\lambda, n, t_r)S_m(\lambda) - A_m(\lambda, n, t_r)R_m(\lambda)}{E_{m-1}(\lambda, n, t_r)}, \\ \frac{1}{\phi(P, n, t_r)} + \frac{1}{\phi(P^*, n, t_r)} + \frac{1}{\phi(P^{**}, n, t_r)} &= \\ &= \frac{3D_m(\lambda, n, t_r) - 2V_{23}^{(q)}(\lambda, n, t_r)S_m(\lambda) - C_m(\lambda, n, t_r)R_m(\lambda)}{F_{m-1}(\lambda, n, t_r)}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Дифференцируя соотношение (5.5) по t_r и используя (5), получим

$$\begin{aligned} \phi_{t_r} &= \left(\frac{\psi_1^+}{\psi_1} \right)_{t_r} = \frac{\psi_{1,t_r}^+ \psi_1 - \psi_1^+ \psi_{1,t_r}}{\psi_1^2} = \frac{\psi_1^+}{\psi_1} \left(\frac{\psi_{1,t_r}^+}{\psi_1^+} - \frac{\psi_{1,t_r}}{\psi_1} \right) = \\ &= \phi \Delta \frac{\psi_{1,t_r}}{\psi_1} = \phi \Delta \left(\tilde{V}_{11}^{(r)} + \tilde{V}_{12}^{(r)} \phi + \tilde{V}_{13}^{(r)} \frac{w^-}{\phi} \right). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Следовательно,

$$\frac{\phi(P, n, t_r)_{t_r}}{\phi(P, n, t_r)} = \Delta \left(\tilde{V}_{11}^{(r)}(\lambda, n, t_r) + \tilde{V}_{12}^{(r)}(\lambda, n, t_r)\phi + \tilde{V}_{13}^{(r)}(\lambda, n, t_r)\frac{w^-(n, t_r)}{\phi^-(P, n, t_r)} \right). \quad (5.15)$$

Динамику нулей $\{\mu_j(n, t_r)\}_{j=1, \dots, m-1}$ функции $E_{m-1}(\lambda, n, t_r)$ можно описать уравнениями типа уравнений Дубровина.

ЛЕММА 1. *Предположим, что нули $\{\mu_j(n, t_r)\}_{j=1, \dots, m-1}$ функции $E_{m-1}(\lambda, n, t_r)$ остаются различными при $(n, t_r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$. Тогда нули $\{\mu_j(n, t_r)\}_{j=1, \dots, m-1}$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений*

$$\begin{aligned} \mu_{j,t_r}(n, t_r) &= [\tilde{V}_{13}^{(r)}(\mu_j(n, t_r), n, t_r)V_{12}^{(q)}(\mu_j(n, t_r), n, t_r) - \\ &- \tilde{V}_{12}^{(r)}(\mu_j(n, t_r), n, t_r)V_{13}^{(q)}(\mu_j(n, t_r), n, t_r)] \times \\ &\times \frac{[3y^2(\hat{\mu}_j(n, t_r)) - 2y(\hat{\mu}_j(n, t_r))R_m(\mu_j(n, t_r)) + S_m(\mu_j(n, t_r))]}{\alpha_0^2 \beta_0 \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m-1} (\mu_j(n, t_r) - \mu_k(n, t_r))}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

$1 \leq j \leq m-1.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (3.11)–(3.13) и (5.4), получим

$$\begin{aligned}
 E_{m-1,t_r}(\lambda, n, t_r) &= ((V_{13}^{(q)})^2 V_{32}^{(q)} + V_{12}^{(q)} V_{13}^{(q)} (V_{22}^{(q)} - V_{33}^{(q)}) - (V_{12}^{(q)})^2 V_{23}^{(q)})_{t_r} = \\
 &= (3\tilde{V}_{11}^{(r)} - \tilde{R}^{(r)})E_{m-1} - (\tilde{V}_{12}^{(r)} A_m - \tilde{V}_{13}^{(r)} \mathcal{A}_m)R_m + \\
 &\quad + 3(\tilde{V}_{12}^{(r)} B_m - \tilde{V}_{13}^{(r)} \mathcal{B}_m) - 2(\tilde{V}_{12}^{(r)} V_{13}^{(q)} - \tilde{V}_{13}^{(r)} V_{12}^{(q)})S_m = \\
 &= (3\tilde{V}_{11}^{(r)} - \tilde{R}^{(r)})E_{m-1} + 3\tilde{V}_{12}^{(r)} (V_{23}^{(q)} \mathcal{A}_m - V_{22}^{(q)} A_m) - \\
 &\quad + 3\tilde{V}_{13}^{(r)} (V_{32}^{(q)} A_m - V_{33}^{(q)} \mathcal{A}_m) + 2(\tilde{V}_{12}^{(r)} A_m - \tilde{V}_{13}^{(r)} \mathcal{A}_m)R_m + \\
 &\quad + (\tilde{V}_{12}^{(r)} V_{13}^{(q)} - \tilde{V}_{13}^{(r)} V_{12}^{(q)})S_m, \tag{5.17}
 \end{aligned}$$

где $\tilde{R}^{(r)} = \tilde{V}_{11}^{(r)} + \tilde{V}_{22}^{(r)} + \tilde{V}_{33}^{(r)}$. В силу (5.7), (5.9) и (3.16) получим

$$\left. \frac{A_m}{V_{13}^{(q)}} \right|_{\lambda=\mu_j(n,t_r)} = \left. \frac{\mathcal{A}_m}{V_{12}^{(q)}} \right|_{\lambda=\mu_j(n,t_r)} = -y(\hat{\mu}_j(n, t_r)). \tag{5.18}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \tilde{V}_{12}^{(r)} (V_{23}^{(q)} \mathcal{A}_m - V_{22}^{(q)} A_m) \Big|_{\lambda=\mu_j(n,t_r)} &= y^2(\hat{\mu}_j(n, t_r)) \tilde{V}_{12}^{(r)} V_{13}^{(q)} \Big|_{\lambda=\mu_j(n,t_r)}, \\
 \tilde{V}_{13}^{(r)} (V_{32}^{(q)} A_m - V_{33}^{(q)} \mathcal{A}_m) \Big|_{\lambda=\mu_j(n,t_r)} &= y^2(\hat{\mu}_j(n, t_r)) \tilde{V}_{13}^{(r)} V_{12}^{(q)} \Big|_{\lambda=\mu_j(n,t_r)}, \\
 (\tilde{V}_{12}^{(r)} A_m - \tilde{V}_{13}^{(r)} \mathcal{A}_m) \Big|_{\lambda=\mu_j(n,t_r)} &= -y(\hat{\mu}_j(n, t_r)) (\tilde{V}_{12}^{(r)} V_{13}^{(q)} - \tilde{V}_{13}^{(r)} V_{12}^{(q)}) \Big|_{\lambda=\mu_j(n,t_r)}. \tag{5.19}
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 E_{m-1,t_r}(\lambda, n, t_r) \Big|_{\lambda=\mu_j(n,t_r)} &= (\tilde{V}_{12}^{(r)} V_{13}^{(q)} - \tilde{V}_{13}^{(r)} V_{12}^{(q)}) \Big|_{\lambda=\mu_j(n,t_r)} \times \\
 &\times [3y^2(\hat{\mu}_j(n, t_r)) - 2y(\hat{\mu}_j(n, t_r))R_m(\mu_j(n, t_r)) + S_m(\mu_j(n, t_r))]. \tag{5.20}
 \end{aligned}$$

С другой стороны, из (5.7) получим

$$E_{m-1,t_r}(\lambda, n, t_r) \Big|_{\lambda=\mu_j(n,t_r)} = -\alpha_0^2 \beta_0 \mu_{j,t_r}(n, t_r) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m-1} (\mu_j(n, t_r) - \mu_k(n, t_r)), \tag{5.21}$$

что, вместе с (5.20), приводит к уравнению (5.16). ■

Из первых двух выражений системы (5) имеем

$$\begin{aligned}
 \psi_1(P, n, n_0, t_r, t_{0,r}) &= \\
 &= \exp \left(\int_{t_{0,r}}^{t_r} \left[\tilde{V}_{11}^{(r)}(\lambda, n_0, t') + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \tilde{V}_{12}^{(r)}(\lambda, n_0, t') \phi(P, n_0, t') + \tilde{V}_{13}^{(r)}(\lambda, n_0, t') \frac{w^-(n_0, t')}{\phi^-(P, n_0, t')} \right] dt' \right) \times \\
 &\times \begin{cases} \prod_{n'=n_0}^{n-1} \phi(P, n', t_r), & n \geq n_0 + 1, \\ 1, & n = n_0, \\ \prod_{n'=n}^{n_0-1} \phi(P, n', t_r)^{-1}, & n \leq n_0 - 1. \end{cases} \tag{5.22}
 \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\psi_1(P, n, n_0, t_r, t_{0,r}) = \psi_1(P, n, n_0, t_r, t_r) \psi_1(P, n_0, n_0, t_r, t_{0,r}), \quad (5.23)$$

где $P = (\lambda, y) \in \mathcal{K}_{m-1} \setminus \{P_{\infty_1}, P_{\infty_2}\}$, $(n, t_r), (n_0, t_{0,r}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$.

Анализируя подынтегральную функцию в уравнении (5.22), введем функцию $I_r(P, n, t_r)$ вида

$$I_r(P, n, t_r) = \tilde{V}_{11}^{(r)}(\lambda, n, t_r) + \tilde{V}_{12}^{(r)}(\lambda, n, t_r)\phi(P, n, t_r) + \tilde{V}_{13}^{(r)}(\lambda, n, t_r)\frac{w^-(n, t_r)}{\phi^-(P, n, t_r)} \quad (5.24)$$

и следующие обозначения для ее однородных случаев:

$$\begin{aligned} \hat{I}_r^{(s)}(P, n, t_r) &= \hat{\tilde{V}}_{11}^{(r,s)}(\lambda, n, t_r) + \hat{\tilde{V}}_{12}^{(r,s)}(\lambda, n, t_r)\phi(P, n, t_r) + \\ &+ w^-(n, t_r)\frac{\hat{\tilde{V}}_{13}^{(r,s)}(\lambda, n, t_r)}{\phi^-(P, n, t_r)}, \quad s = 1, 2 \end{aligned} \quad (5.25)$$

и

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{V}}_{1j}^{(r,1)} &= \tilde{V}_{1j}^{(r)}|_{\tilde{\alpha}_0=1, \beta_0=0, \tilde{\alpha}_1=\dots=\tilde{\alpha}_r=\tilde{\beta}_1=\dots=\tilde{\beta}_r=0}, \\ \hat{\tilde{V}}_{1j}^{(r,2)} &= \tilde{V}_{1j}^{(r)}|_{\tilde{\alpha}_0=0, \beta_0=1, \tilde{\alpha}_1=\dots=\tilde{\alpha}_r=\tilde{\beta}_1=\dots=\tilde{\beta}_r=0}, \end{aligned} \quad j = 1, 2, 3.$$

Следовательно,

$$I_r(P, n, t_r) = \sum_{l=0}^r \tilde{\alpha}_{r-l} \hat{I}_l^{(1)}(P, n, t_r) + \sum_{l=0}^r \tilde{\beta}_{r-l} \hat{I}_l^{(2)}(P, n, t_r). \quad (5.26)$$

ЛЕММА 2. Пусть $(n, t_r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$, $\zeta = 1/\lambda$ и $\xi = 1/\lambda^{1/2}$ – локальные координаты близи P_{∞_1} и P_{∞_2} соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} \hat{I}_r^{(1)}(P, n, t_r) &\underset{\zeta \rightarrow 0}{=} -\zeta^{-r-1} + \hat{b}_{r+1}(n, t_r) + O(\zeta), & P \rightarrow P_{\infty_1}, \\ \hat{I}_r^{(1)}(P, n, t_r) &\underset{\xi \rightarrow 0}{=} O(\xi), & P \rightarrow P_{\infty_2}, \end{aligned} \quad (5.27)$$

и

$$\begin{aligned} \hat{I}_r^{(2)}(P, n, t_r) &\underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \check{b}_{r+1}(n, t_r) + O(\zeta), & P \rightarrow P_{\infty_1}, \\ \hat{I}_r^{(2)}(P, n, t_r) &\underset{\xi \rightarrow 0}{=} \xi^{-2r-1} + O(\xi), & P \rightarrow P_{\infty_2}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства соотношений (5.27) используем метод индукции. Для удобства введем обозначение

$$\hat{a}^{(r)} = \tilde{a}^{(r)}|_{\tilde{\alpha}_0=1, \beta_0=0, \tilde{\alpha}_1=\dots=\tilde{\alpha}_r=\tilde{\beta}_1=\dots=\tilde{\beta}_r=0},$$

где $\tilde{a}^{(r)}$ определяется в (2.14). Из (5), (5.24) и (5.25) легко получить

$$\begin{aligned} \hat{I}_r^{(1)}(P, n, t_r) &= \hat{\tilde{V}}_{11}^{(r,1)}(\lambda, n, t_r) + \hat{\tilde{V}}_{12}^{(r,1)}(\lambda, n, t_r)\phi(P, n, t_r) + \hat{\tilde{V}}_{13}^{(r,1)}(\lambda, n, t_r)\frac{w^-(n, t_r)}{\phi^-(P, n, t_r)} = \\ &= \hat{c}^{(r)}(\lambda, n, t_r) + \hat{a}^{(r)}(\lambda, n, t_r)\phi(P, n, t_r) + \hat{b}^{(r)}(\lambda, n, t_r)\frac{w^-(n, t_r)}{\phi^-(P, n, t_r)}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

С помощью (4.2) и (4.3) получим выражения

$$\begin{aligned}\hat{I}_0^{(1)}(P, n, t_r) &= \frac{w^-(n, t_r)}{\phi^-(P, n, t_r)} \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} -\zeta^{-1} - v(n, t_r) + O(\zeta) \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \\ &\underset{\zeta \rightarrow 0}{=} -\zeta^{-1} + \hat{b}_1(n, t_r) + O(\zeta), \quad P \rightarrow P_{\infty_1}, \quad (5.30) \\ \hat{I}_0^{(1)}(P, n, t_r) &= \frac{w^-(n, t_r)}{\phi^-(P, n, t_r)} \underset{\xi \rightarrow 0}{=} O(\xi), \quad P \rightarrow P_{\infty_2}.\end{aligned}$$

Поэтому формулы (5.27) остаются справедливыми при $r = 0$. Предположим, что формулы (5.27) имеют разложения

$$\begin{aligned}\hat{I}_r^{(1)}(P, n, t_r) &= -\zeta^{-r-1} + \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j(n, t_r) \zeta^j, \quad P \rightarrow P_{\infty_1}, \\ \hat{I}_r^{(1)}(P, n, t_r) &= \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j(n, t_r) \xi^j, \quad P \rightarrow P_{\infty_2},\end{aligned} \quad (5.31)$$

для некоторых коэффициентов $\{\sigma_j(n, t_r)\}_{j \in \mathbb{N}_0}$, $\{\delta_j(n, t_r)\}_{j \in \mathbb{N}}$, которые нужно определить. Из уравнений (5.15), (5.24) и (5.25) следует

$$\phi(P, n, t_r)_{t_r} = \phi(P, n, t_r) \triangle \hat{I}_r^{(1)}(P, n, t_r). \quad (5.32)$$

Используя формулу (4.2) и сравнивая одинаковые степени ζ в уравнении (5.32), получим

$$\phi_{j, t_r} = \phi_1 \triangle \sigma_{j-1} + \phi_2 \triangle \sigma_{j-2} + \cdots + \phi_j \triangle \sigma_0, \quad j \geq 1. \quad (5.33)$$

Из уравнения (2.16) следуют явные выражения

$$\begin{aligned}\triangle \sigma_0 &= \frac{1}{\phi_1} \phi_{1, t_r} = \frac{1}{w} w_{t_r} = \triangle \hat{b}_{r+1}, \\ \triangle \sigma_1 &= \frac{1}{\phi_1} \phi_{2, t_r} - \frac{\phi_2}{\phi_1} \triangle \sigma_0 = -v_{t_r}^+ = \triangle(u^+ \hat{a}_{r+1}^{++} + \hat{c}_{r+1}^{++} + \hat{c}_{r+1}^+).\end{aligned} \quad (5.34)$$

Аналогично, используя формулу (4.3) и сравнивая одинаковые степени ξ в уравнении (5.32), получим

$$\kappa_{j, t_r} = \kappa_{-1} \triangle \delta_{j+1} + \kappa_0 \triangle \delta_j + \cdots + \kappa_{j-1} \triangle \delta_1, \quad j \geq 0. \quad (5.35)$$

Из уравнения (2.16) следуют явные выражения

$$\begin{aligned}\triangle \delta_1 &= \kappa_{0, t_r} = (E+1)^{-1} u_{t_r} = \triangle(-\hat{a}_{r+1}), \\ \triangle \delta_2 &= \kappa_{1, t_r} - \kappa_0 \triangle \delta_1 = \\ &= (E+1)^{-1} [v_{t_r} + 2((E+1)^{-1} u)(E+1)^{-1} u_{t_r}] - \\ &\quad - ((E+1)^{-1} u)(E+1)^{-1} u_{t_r} = \triangle(-\hat{c}_{r+1} - \hat{a}_{r+1}(E+1)^{-1} u).\end{aligned} \quad (5.36)$$

В результате из (5.34) и (5.36) получим

$$\begin{aligned}
 \sigma_0(n, t_r) &= \hat{b}_{r+1}(n, t_r), \\
 \sigma_1(n, t_r) &= u^+(n, t_r) \hat{a}_{r+1}^{++}(n, t_r) + \hat{c}_{r+1}^{++}(n, t_r) + \hat{c}_{r+1}^+(n, t_r), \\
 \delta_1(n, t_r) &= -\hat{a}_{r+1}(n, t_r), \\
 \delta_2(n, t_r) &= -\hat{c}_{r+1}(n, t_r) - \hat{a}_{r+1}(n, t_r)(E+1)^{-1}u(n, t_r),
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

где константы суммирования равны нулю, если считать, что произвольные константы отсутствуют как в разложении функции $\phi(P, n, t_r)$ вблизи P_{∞_s} , $s = 1, 2$, так и в однородных коэффициентах $\hat{a}_{r+1}$, $\hat{b}_{r+1}$, $\hat{c}_{r+1}$ при условии $\Delta \Delta^{-1} = \Delta^{-1} \Delta = 1$. Поэтому

$$\begin{aligned}
 \hat{I}_{r+1}^{(1)}(P, n, t_r) &= \widehat{V}_{11}^{(r+1,1)}(\lambda, n, t_r) + \widehat{V}_{12}^{(r+1,1)}(\lambda, n, t_r) \phi(P, n, t_r) + \\
 &\quad + \widehat{V}_{13}^{(r+1,1)}(\lambda, n, t_r) \frac{w^-(n, t_r)}{\phi^-(P, n, t_r)} \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \\
 &\underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \zeta^{-1} \hat{I}_r^{(1)}(P, n, t_r) + \hat{c}_{r+1}(n, t_r) + \hat{a}_{r+1}(n, t_r) \phi(P, n, t_r) + \\
 &\quad + \hat{b}_{r+1}(n, t_r) \frac{w^-(n, t_r)}{\phi^-(P, n, t_r)} \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \\
 &\underset{\zeta \rightarrow 0}{=} -\zeta^{-r-2} + \hat{b}_{r+2}(n, t_r) + O(\zeta), \quad P \rightarrow P_{\infty_1}, \\
 \hat{I}_{r+1}^{(1)}(P, n, t_r) &\underset{\xi \rightarrow 0}{=} \\
 &\underset{\xi \rightarrow 0}{=} \xi^{-2} \hat{I}_r^{(1)}(P, n, t_r) + \hat{c}_{r+1}(n, t_r) + \hat{a}_{r+1}(n, t_r) \phi(P, n, t_r) + \\
 &\quad + \hat{b}_{r+1}(n, t_r) \frac{w^-(n, t_r)}{\phi^-(P, n, t_r)} \underset{\xi \rightarrow 0}{=} O(\xi), \quad P \rightarrow P_{\infty_2}.
 \end{aligned} \tag{5.38}$$

Доказательство соотношения (5.27) закончено. Соотношение (5.28) доказывается аналогично. ■

Используя лемму 2, из уравнения (5.26) получим

$$\begin{aligned}
 I_r(P, n, t_r) &\underset{\zeta \rightarrow 0}{=} -\sum_{l=0}^r \tilde{\alpha}_{r-l} \zeta^{-l-1} - \tilde{\alpha}_{r+1} + \tilde{b}_{r+1}(n, t_r) + O(\zeta), \quad P \rightarrow P_{\infty_1}, \\
 I_r(P, n, t_r) &\underset{\xi \rightarrow 0}{=} \sum_{l=0}^r \tilde{\beta}_{r-l} \xi^{-2l-1} + O(\xi), \quad P \rightarrow P_{\infty_2}.
 \end{aligned} \tag{5.39}$$

Пусть $\omega_{P_{\infty_s}, j}^{(2)}$, $j \geq 2$, – нормированные дифференциалы второго рода, голоморфные на $\mathcal{K}_{m-1} \setminus \{P_{\infty_s}\}$ с полюсом порядка j в P_{∞_s} , $s = 1, 2$,

$$\begin{aligned}
 \omega_{P_{\infty_1}, j}^{(2)} &\underset{\zeta \rightarrow 0}{=} (\zeta^{-j} + O(1)) d\zeta, \quad P \rightarrow P_{\infty_1}, \quad \zeta = \frac{1}{\lambda}, \\
 \omega_{P_{\infty_2}, j}^{(2)} &\underset{\xi \rightarrow 0}{=} (\xi^{-j} + O(1)) d\xi, \quad P \rightarrow P_{\infty_2}, \quad \xi = \frac{1}{\lambda^{1/2}},
 \end{aligned} \tag{5.40}$$

и нулевыми $\mathbf{a}$ -периодами: $\int_{\mathbf{a}_k} \omega_{P_{\infty s, j}}^{(2)} = 0$, $s = 1, 2$, $k = 1, \dots, m-1$. Кроме того, определим

$$\tilde{\Omega}_r^{(2)} = - \sum_{l=0}^r \tilde{\alpha}_{r-l}(l+1) \omega_{P_{\infty 1}, l+2}^{(2)} + \sum_{l=0}^r \tilde{\beta}_{r-l}(2l+1) \omega_{P_{\infty 2}, 2l+2}^{(2)}. \quad (5.41)$$

Интегрируя (5.41), получим

$$\begin{aligned} \int_{Q_0}^P \tilde{\Omega}_r^{(2)} \underset{\zeta \rightarrow 0}{=} \sum_{l=0}^r \tilde{\alpha}_{r-l} \zeta^{-l-1} + \tilde{e}_1^{(2)}(Q_0) + O(\zeta), \quad P \rightarrow P_{\infty 1}, \\ \int_{Q_0}^P \tilde{\Omega}_r^{(2)} \underset{\xi \rightarrow 0}{=} - \sum_{l=0}^r \tilde{\beta}_{r-l} \xi^{-2l-1} + \tilde{e}_2^{(2)}(Q_0) + O(\xi), \quad P \rightarrow P_{\infty 2}, \end{aligned} \quad (5.42)$$

где $\tilde{e}_1^{(2)}(Q_0)$, $\tilde{e}_2^{(2)}(Q_0)$ – постоянные.

Используя эти предварительные результаты, запишем представления функций $\phi(P, n, t_r)$ и $\psi_1(P, n, n_0, t_r, t_{0,r})$ через тета-функции в следующем виде.

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что кривая $\mathcal{K}_{m-1}$ несингулярна, и пусть $P = (\lambda, y) \in \mathcal{K}_{m-1} \setminus \{P_{\infty 1}, P_{\infty 2}\}$, $(n, n_0, t_r, t_{0,r}) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2$. Предположим, что дивизор $\mathcal{D}_{\underline{\mu}(n, t_r)}$ является неспециальным при $(n, t_r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$. Тогда*

$$\begin{aligned} \phi(P, n, t_r) = \frac{\theta(\underline{z}(P_{\infty 2}, \underline{\mu}(n, t_r)))}{\theta(\underline{z}(P_{\infty 2}, \underline{\mu}^+(n, t_r)))} \frac{\theta(\underline{z}(P, \underline{\mu}^+(n, t_r)))}{\theta(\underline{z}(P, \underline{\mu}(n, t_r)))} \times \\ \times \exp\left(\int_{Q_0}^P \omega_{P_{\infty 1}, P_{\infty 2}}^{(3)} - e_2(Q_0)\right) \end{aligned} \quad (5.43)$$

и

$$\begin{aligned} \psi_1(P, n, n_0, t_r, t_{0,r}) = \frac{\theta(\underline{z}(P_{\infty 2}, \underline{\mu}(n_0, t_{0,r})))}{\theta(\underline{z}(P_{\infty 2}, \underline{\mu}(n, t_r)))} \frac{\theta(\underline{z}(P, \underline{\mu}(n, t_r)))}{\theta(\underline{z}(P, \underline{\mu}(n_0, t_{0,r})))} \times \\ \times \exp\left((n - n_0) \left(\int_{Q_0}^P \omega_{P_{\infty 1}, P_{\infty 2}}^{(3)} - e_2(Q_0)\right) + (t_r - t_{0,r}) \left(\tilde{e}_2^{(2)}(Q_0) - \int_{Q_0}^P \tilde{\Omega}_r^{(2)}\right)\right). \end{aligned} \quad (5.44)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По аналогии с теоремой 1 приходим к выводу, что $\phi(P, n, t_r)$ имеет вид (5.43) и что $\psi_1(P, n, n_0, t_r, t_{0,r})$ при $t_{0,r} = t_r$ имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_1(P, n, n_0, t_r, t_r) = \frac{\theta(\underline{z}(P_{\infty 2}, \underline{\mu}(n_0, t_r)))}{\theta(\underline{z}(P_{\infty 2}, \underline{\mu}(n, t_r)))} \frac{\theta(\underline{z}(P, \underline{\mu}(n, t_r)))}{\theta(\underline{z}(P, \underline{\mu}(n_0, t_r)))} \times \\ \times \exp\left((n - n_0) \left(\int_{Q_0}^P \omega_{P_{\infty 1}, P_{\infty 2}}^{(3)} - e_2(Q_0)\right)\right). \end{aligned} \quad (5.45)$$

Остается исследовать с помощью формулы (5.22) уравнение

$$\psi_1(P, n_0, n_0, t_r, t_{0,r}) = \exp\left(\int_{t_{0,r}}^{t_r} I_r(P, n_0, t') dt'\right). \quad (5.46)$$

Если обозначить правую часть (5.44) при $n = n_0$ через $\Psi_1(P, n_0, n_0, t_r, t_{0,r})$, т. е.

$$\begin{aligned} \Psi_1(P, n_0, n_0, t_r, t_{0,r}) &= \frac{\theta(\underline{z}(P_{\infty_2}, \hat{\underline{\mu}}(n_0, t_{0,r})))}{\theta(\underline{z}(P_{\infty_2}, \hat{\underline{\mu}}(n_0, t_r)))} \frac{\theta(\underline{z}(P, \hat{\underline{\mu}}(n_0, t_r)))}{\theta(\underline{z}(P, \hat{\underline{\mu}}(n_0, t_{0,r})))} \times \\ &\times \exp\left((t_r - t_{0,r})\left(\tilde{e}_2^{(2)}(Q_0) - \int_{Q_0}^P \tilde{\Omega}_r^{(2)}\right)\right), \end{aligned} \quad (5.47)$$

то нам нужно доказать равенство

$$\psi_1(P, n_0, n_0, t_r, t_{0,r}) = \Psi_1(P, n_0, n_0, t_r, t_{0,r}). \quad (5.48)$$

Используя (3.17), (5.6), (5.24) и лемму 1, получим

$$\begin{aligned} I_r(P, n, t_r) &= \tilde{V}_{11}^{(r)}(\lambda, n, t_r) + \tilde{V}_{12}^{(r)}(\lambda, n, t_r)\phi(P, n, t_r) + \tilde{V}_{13}^{(r)}(\lambda, n, t_r) \frac{w^-(n, t_r)}{\phi^-(P, n, t_r)} = \\ &= \tilde{V}_{11}^{(r)} + \tilde{V}_{12}^{(r)} \frac{y^2 V_{13}^{(q)} - y(A_m + V_{13}^{(q)} R_m) + B_m}{E_{m-1}} - \\ &\quad - \tilde{V}_{13}^{(r)} \frac{y^2 V_{12}^{(q)} - y(A_m + V_{12}^{(q)} R_m) + B_m}{E_{m-1}} = \\ &= \frac{1}{E_{m-1}} \left[\frac{1}{3} E_{m-1, t_r} + \frac{1}{3} \tilde{R}^{(r)} E_{m-1} + \right. \\ &\quad \left. + (\tilde{V}_{12}^{(r)} V_{13}^{(q)} - \tilde{V}_{13}^{(r)} V_{12}^{(q)}) \left(y^2 - y R_m + \frac{2}{3} S_m \right) - \right. \\ &\quad \left. - (\tilde{V}_{12}^{(r)} A_m - \tilde{V}_{13}^{(r)} A_m) \left(y - \frac{1}{3} R_m \right) \right]_{\lambda \rightarrow \mu_j(n, t_r)} = \\ &= \frac{\mu_{j, t_r}(n, t_r)}{\lambda - \mu_j(n, t_r)} + O(1) \Big|_{\lambda \rightarrow \mu_j(n, t_r)} = \partial_{t_r} \ln(\lambda - \mu_j(n, t_r)) + O(1). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \psi_1(P, n_0, n_0, t_r, t_{0,r}) &= \exp\left(\int_{t_{0,r}}^{t_r} \partial_{t'} \ln(\lambda - \mu_j(n_0, t')) dt'\right) = \\ &= \frac{\lambda - \mu_j(n_0, t_r)}{\lambda - \mu_j(n_0, t_{0,r})} O(1) = \\ &= \begin{cases} (\lambda - \mu_j(n_0, t_r)) O(1), & P \text{ вблизи } \hat{\mu}_j(n_0, t_r) \neq \hat{\mu}_j(n_0, t_{0,r}), \\ O(1), & P \text{ вблизи } \hat{\mu}_j(n_0, t_r) = \hat{\mu}_j(n_0, t_{0,r}), \\ (\lambda - \mu_j(n_0, t_{0,r}))^{-1} O(1), & P \text{ вблизи } \hat{\mu}_j(n_0, t_{0,r}) \neq \hat{\mu}_j(n_0, t_r), \end{cases} \end{aligned} \quad (5.49)$$

где $O(1) \neq 0$. Следовательно, все нули и полюсы функций $\psi_1(P, n_0, n_0, t_r, t_{0,r})$ и $\Psi_1(P, n_0, n_0, t_r, t_{0,r})$ на $\mathcal{K}_{m-1} \setminus \{P_{\infty_1}, P_{\infty_2}\}$ являются простыми и совпадающими. Более того, с помощью (5.39) и (5.42) легко увидеть, что функции $\psi_1(P, n_0, n_0, t_r, t_{0,r})$ и $\Psi_1(P, n_0, n_0, t_r, t_{0,r})$ имеют одинаковые существенные особенности в точках P_{∞_1} и P_{∞_2} . Таким образом, можно применить свойство однозначности для функций Бейкера–Ахиезера и сделать вывод о справедливости равенства (5.48), поскольку дивизор $\mathcal{D}_{\hat{\underline{\mu}}(n, t_r)}$ является неспециальным для всех $(n, t_r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$. Отсюда получим (5.44). ■

Введем обозначение для **b**-периода дифференциала $\tilde{\Omega}_r^{(2)}$:

$$\underline{\tilde{U}}_r^{(2)} = (\tilde{U}_{r,1}^{(2)}, \dots, \tilde{U}_{r,m-1}^{(2)}), \quad \tilde{U}_{r,k}^{(2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{b_k} \tilde{\Omega}_r^{(2)}, \quad k = 1, \dots, m-1. \quad (5.50)$$

ТЕОРЕМА 4 (Упорядочение потока). *Справедливо соотношение*

$$\underline{\rho}(n, t_r) = \underline{\rho}(n_0, t_{0,r}) - \underline{U}^{(3)}(n - n_0) + \underline{\tilde{U}}_r^{(2)}(t_r - t_{0,r}) \pmod{\mathcal{T}_{m-1}}. \quad (5.51)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем мероморфный дифференциал

$$\Omega(n, n_0, t_r, t_{0,r}) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln(\psi_1(P, n, n_0, t_r, t_{0,r})) d\lambda. \quad (5.52)$$

Из представления (5.44) следует

$$\Omega(n, n_0, t_r, t_{0,r}) = (n - n_0)\omega_{P_{\infty_1}, P_{\infty_2}}^{(3)} - (t_r - t_{0,r})\tilde{\Omega}_r^{(2)} + \sum_{j=1}^{m-1} \omega_{\hat{\mu}_j(n, t_r), \hat{\mu}_j(n_0, t_{0,r})}^{(3)} + \bar{\omega},$$

где $\bar{\omega}$ обозначает голоморфный дифференциал на $\mathcal{K}_{m-1}$, т. е. $\bar{\omega} = \sum_{j=1}^{m-1} \bar{e}_j \omega_j$ для некоторых $\bar{e}_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, m-1$. Поскольку функция $\psi_1(P, n, n_0, t_r, t_{0,r})$ однозначна на $\mathcal{K}_{m-1}$, все **a**- и **b**-периоды дифференциала Ω – целые, кратные $2\pi i$, поэтому

$$2\pi i M_k = \int_{a_k} \Omega(n, n_0, t_r, t_{0,r}) = \int_{a_k} \bar{\omega} = \bar{e}_k, \quad k = 1, \dots, m-1, \quad (5.53)$$

для некоторых $M_k \in \mathbb{Z}$. Аналогично, для некоторых $N_k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} 2\pi i N_k &= \int_{b_k} \Omega(n, n_0, t_r, t_{0,r}) = (n - n_0) \int_{b_k} \omega_{P_{\infty_1}, P_{\infty_2}}^{(3)} - (t_r - t_{0,r}) \int_{b_k} \tilde{\Omega}_r^{(2)} + \\ &+ \sum_{j=1}^{m-1} \int_{b_k} \omega_{\hat{\mu}_j(n, t_r), \hat{\mu}_j(n_0, t_{0,r})}^{(3)} + \int_{b_k} \bar{\omega} = \\ &= 2\pi i (n - n_0) U_k^{(3)} - 2\pi i (t_r - t_{0,r}) \tilde{U}_{r,k}^{(2)} + \\ &+ 2\pi i \sum_{j=1}^{m-1} \int_{\hat{\mu}_j(n_0, t_{0,r})}^{\hat{\mu}_j(n, t_r)} \omega_k + 2\pi i \sum_{j=1}^{m-1} M_j \int_{b_k} \omega_j = \\ &= 2\pi i (n - n_0) U_k^{(3)} - 2\pi i (t_r - t_{0,r}) \tilde{U}_{r,k}^{(2)} + \\ &+ 2\pi i \left[\sum_{j=1}^{m-1} \int_{Q_0}^{\hat{\mu}_j(n, t_r)} \omega_k - \sum_{j=1}^{m-1} \int_{Q_0}^{\hat{\mu}_j(n_0, t_{0,r})} \omega_k \right] + \\ &+ 2\pi i \sum_{j=1}^{m-1} M_j \tau_{j,k}, \quad k = 1, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Поэтому имеем

$$\underline{N} = (n - n_0)\underline{U}^{(3)} - (t_r - t_{0,r})\tilde{\underline{U}}_r^{(2)} + \sum_{j=1}^{m-1} \int_{Q_0}^{\hat{\mu}_j(n, t_r)} \underline{\omega} - \sum_{j=1}^{m-1} \int_{Q_0}^{\hat{\mu}_j(n_0, t_{0,r})} \underline{\omega} + \underline{M}\tau, \quad (5.55)$$

где $\underline{N} = (N_1, \dots, N_{m-1})$, $\underline{M} = (M_1, \dots, M_{m-1}) \in \mathbb{Z}^{m-1}$. Следовательно, соотношение (5.55) аналогично (5.51). ■

ТЕОРЕМА 5. *Предположим, что кривая $\mathcal{K}_{m-1}$ несингулярна, и пусть $(n, t_r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$. Предположим также, что дивизор $\mathcal{D}_{\hat{\underline{\mu}}(n, t_r)}$ является неспециальным для $(n, t_r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$. Тогда*

$$\begin{aligned} u(n, t_r) &= 2\omega_0^{\infty 2} - \sum_{j=1}^{m-1} d_{j,0}^{(\infty 2)} \frac{\partial}{\partial z_j} \ln \frac{\theta(\underline{z}(P_{\infty 1}, \hat{\underline{\mu}}^+(n, t_r)))}{\theta(\underline{z}(P_{\infty 1}, \hat{\underline{\mu}}^-(n, t_r)))}, \\ v(n, t_r) &= -\omega_0^{\infty 1} + \sum_{j=1}^{m-1} d_{j,0}^{(\infty 1)} \frac{\partial}{\partial z_j} \ln \frac{\theta(\underline{z}(P_{\infty 1}, \hat{\underline{\mu}}(n, t_r)))}{\theta(\underline{z}(P_{\infty 1}, \hat{\underline{\mu}}^-(n, t_r)))}, \\ w(n, t_r) &= -\frac{\theta(\underline{z}(P_{\infty 1}, \hat{\underline{\mu}}^-(n, t_r)))\theta(\underline{z}(P_{\infty 1}, \hat{\underline{\mu}}^+(n, t_r)))}{\theta(\underline{z}(P_{\infty 1}, \hat{\underline{\mu}}(n, t_r)))^2} \exp(e_1(Q_0) - e_2(Q_0)). \end{aligned} \quad (5.56)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству стационарного случая (см. теорему 2).

Сопоставление формул (5.51) и (5.56) выявляет интересное свойство линейности представления потенциалов $u(n, t_r)$, $v(n, t_r)$ и $w(n, t_r)$ через тета-функции относительно $(n, t_r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$. Действительно, можно переписать уравнения (5.56) в виде

$$\begin{aligned} u(n, t_r) &= 2\omega_0^{\infty 2} - \sum_{j=1}^{m-1} d_{j,0}^{(\infty 2)} \frac{\partial}{\partial z_j} \ln \frac{\theta(\tilde{\underline{K}} - \underline{U}^{(3)} - \underline{U}^{(3)}n + \tilde{\underline{U}}_r^{(2)}t_r)}{\theta(\tilde{\underline{K}} + \underline{U}^{(3)} - \underline{U}^{(3)}n + \tilde{\underline{U}}_r^{(2)}t_r)}, \\ v(n, t_r) &= -\omega_0^{\infty 1} + \sum_{j=1}^{m-1} d_{j,0}^{(\infty 1)} \frac{\partial}{\partial z_j} \ln \frac{\theta(\tilde{\underline{K}} - \underline{U}^{(3)}n + \tilde{\underline{U}}_r^{(2)}t_r)}{\theta(\tilde{\underline{K}} + \underline{U}^{(3)} - \underline{U}^{(3)}n + \tilde{\underline{U}}_r^{(2)}t_r)}, \\ w(n, t_r) &= -\frac{\theta(\tilde{\underline{K}} + \underline{U}^{(3)} - \underline{U}^{(3)}n + \tilde{\underline{U}}_r^{(2)}t_r)\theta(\tilde{\underline{K}} - \underline{U}^{(3)} - \underline{U}^{(3)}n + \tilde{\underline{U}}_r^{(2)}t_r)}{\theta(\tilde{\underline{K}} - \underline{U}^{(3)}n + \tilde{\underline{U}}_r^{(2)}t_r)^2} \times \\ &\quad \times \exp(e_1(Q_0) - e_2(Q_0)), \end{aligned} \quad (5.57)$$

где $\tilde{\underline{K}} = \underline{A} - \underline{A}(P_{\infty 1}) + \underline{\rho}(n_0, t_{0,r}) + \underline{U}^{(3)}n_0 - \tilde{\underline{U}}_r^{(2)}t_{0,r}$.

Список литературы

- [1] И. М. Кричевер, “Алгебро-геометрическое построение уравнений Захарова–Шабата и их периодических решений”, *Докл. АН СССР*, **227:2** (1976), 291–294.
- [2] И. М. Кричевер, “Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии”, *Функц. анализ и его прил.*, **11:1** (1977), 15–31.
- [3] Б. А. Дубровин, “Тэта-функции и нелинейные уравнения”, *УМН*, **36:2**(218) (1981), 11–80.

- [4] Б. А. Дубровин, “Матричные конечнозонные операторы”, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. матем.*, **23**, ВИНТИ, М., 1983, 33–78.
- [5] E. D. Belokolos, A. I. Bobenko, V. Z. Enol’skii, A. R. Its, V. B. Matveev, *Algebro-Geometric Approach to Nonlinear Integrable Equations*, Springer, Berlin, 1994.
- [6] E. Date, S. Tanaka, “Periodic multi-soliton solutions of Korteweg–de Vries equation and Toda lattice”, *Progr. Theoret. Phys. Suppl.*, **59** (1976), 107–125.
- [7] Y. C. Ma, M. J. Ablowitz, “The periodic cubic Schrödinger equation”, *Stud. Appl. Math.*, **65**:2 (1981), 113–158.
- [8] E. Previato, “Hyperelliptic quasi-periodic and soliton solutions of the nonlinear Schrödinger equation”, *Duke Math. J.*, **52** (1985), 329–377.
- [9] А. О. Смирнов, “Вещественные конечнозонные регулярные решения уравнения Каупа–Буссинеска”, *ТМФ*, **66**:1 (1986), 30–46.
- [10] H. P. McKean, “Integrable systems and algebraic curves”, *Global Analysis*, Proceedings of the Biennial Seminar of the Canadian Mathematical Congress (Calgary, Alberta, June 12–27, 1978), *Lecture Notes in Mathematics*, **755**, eds. M. Grmela, J. E. Marsden, Springer, Berlin, 1979, 83–200.
- [11] S. J. Alber, “On finite-zone solutions of relativistic Toda lattices”, *Lett. Math. Phys.*, **17**:2 (1989), 149–155.
- [12] F. Gesztesy, R. Ratneseelan, “An alternative approach to algebro-geometric solutions of the AKNS hierarchy”, *Rev. Math. Phys.*, **10**:3 (1998), 345–391.
- [13] F. Gesztesy, H. Holden, “Algebro-geometric solutions of the Camassa–Holm hierarchy”, *Rev. Mat. Iberoamericana*, **19**:1 (2003), 73–142.
- [14] J. S. Geronimo, F. Gesztesy, H. Holden, “Algebro-geometric solutions of the Baxter–Szegő difference equation”, *Commun. Math. Phys.*, **258**:1 (2005), 149–177.
- [15] X. G. Geng, C. W. Cao, “Decomposition of the $(2 + 1)$ -dimensional Gardner equation and its quasi-periodic solutions”, *Nonlinearity*, **14**:6 (2001), 1433–1452.
- [16] X. G. Geng, H. H. Dai, J. Y. Zhu, “Decomposition of the discrete Ablowitz–Ladik hierarchy”, *Stud. Appl. Math.*, **118**:3 (2007), 281–312.
- [17] V. B. Matveev, A. O. Smirnov, “On the Riemann theta function of a trigonal curve and solutions of the Boussinesq and KP equations”, *Lett. Math. Phys.*, **14**:1 (1987), 25–31.
- [18] В. Б. Матвеев, А. О. Смирнов, “О простейших тригональных решениях уравнений Буссинеска и Кадомцева–Петвиашвили”, *Докл. АН СССР*, **293**:1 (1987), 78–82.
- [19] S. Baldwin, J. C. Eilbeck, J. Gibbons, Y. Ônishi, “Abelian functions for cyclic trigonal curves of genus 4”, *J. Geom. Phys.*, **58**:4 (2008), 450–467.
- [20] J. C. Eilbeck, V. Z. Enolski, S. Matsutani, Y. Ônishi, E. Previato, “Abelian functions for trigonal curves of genus three”, *Int. Math. Res. Notices*, **2007**:1 (2007), 140, 38 pp.
- [21] Ю. В. Брежнев, “Конечнозонные потенциалы с тригональными кривыми”, *ТМФ*, **133**:3 (2002), 398–404.
- [22] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, В. З. Энольский, “Униформизация многообразий Якоби тригональных кривых и нелинейные дифференциальные уравнения”, *Функц. анализ и его прил.*, **34**:3 (2000), 1–16.
- [23] R. Inoue, “The extended Lotka–Volterra lattice and affine Jacobi varieties of spectral curves”, *J. Math. Phys.*, **44**:1 (2003), 338–351.
- [24] E. Previato, “The Calogero–Moser–Krichever system and elliptic Boussinesq solitons”, *Hamiltonian Systems, Transformation Groups and Spectral Transform Methods*, Proceedings of the CRM Workshop (Montréal, Canada, October 20–26, 1989), eds. J. Harnad, J. E. Marsden, CRM, Montréal, 1990, 57–67.
- [25] E. Previato, “Monodromy of Boussinesq elliptic operators”, *Acta Appl. Math.*, **36**:1–2 (1994), 49–55.
- [26] E. Previato, J.-L. Verdier, “Boussinesq elliptic solitons: the cyclic case”, *Proceedings of the Indo-French Conference on Geometry* (Bombay, India, 1989), eds. S. Ramanan, A. Beauville, Hindustan Book Agency, Delhi, 1993, 173–185.

- [27] А. О. Смирнов, “Матричный аналог теоремы Аппеля и редукции многомерных тэта-функций Римана”, *Матем. сб.*, **133(175)**:3(7) (1987), 382–391.
- [28] Н. Airault, Н. Р. McKean, J. Moser, “Rational and elliptic solutions of the Korteweg–de Vries equation and a related many-body problem”, *Commun. Pure Appl. Math.*, **30** (1977), 95–148.
- [29] R. Dickson, F. Gesztesy, K. Unterkofler, “A new approach to the Boussinesq hierarchy”, *Math. Nachr.*, **198** (1999), 51–108.
- [30] R. Dickson, F. Gesztesy, K. Unterkofler, “Algebro-geometric solutions of the Boussinesq hierarchy”, *Rev. Math. Phys.*, **11**:7 (1999), 823–879.
- [31] X. G. Geng, L. H. Wu, G. L. He, “Algebro-geometric constructions of the modified Boussinesq flows and quasi-periodic solutions”, *Phys. D*, **240**:16 (2011), 1262–1288.
- [32] X. G. Geng, L. H. Wu, G. L. He, “Quasi-periodic solutions of the Kaup–Kupershmidt hierarchy”, *J. Nonlinear Sci.*, **23**:4 (2013), 527–555.
- [33] X. G. Geng, Y. Y. Zhai, H. H. Dai, “Algebro-geometric solutions of the coupled modified Korteweg–de Vries hierarchy”, *Adv. Math.*, **263** (2014), 123–153.
- [34] M. Blazsak, K. Marciniak, “*R*-matrix approach to lattice integrable systems”, *J. Math. Phys.*, **35**:9 (1994), 4661–4682.
- [35] X.-B. Hu, Z.-N. Zhu, “Some new results on the Blazsak–Marciniak lattice: Bäcklund transformation and nonlinear superposition formula”, *J. Math. Phys.*, **39**:9 (1998), 4766–4772.
- [36] W.-X. Ma, B. Fuchssteiner, “Algebraic structure of discrete zero curvature equations and master symmetries of discrete evolution equations”, *J. Math. Phys.*, **40** (1999), 2400–2418.
- [37] С. Б. Ху, Д. Л. Вонг, Х. Там, “Интегрируемые обобщения решетки Блажака–Марсиньяка и еще одной решетки и соответствующие им пары Лакса”, *ТМФ*, **127**:3 (2001), 388–393.
- [38] Z.-N. Zhu, X. Wu, W. Xue, Q. Ding, “Infinitely many conservation laws of two Blazsak–Marciniak three-field lattice hierarchies”, *Phys. Lett. A*, **297**:5–6 (2002), 387–395.
- [39] R. Sahadevan, S. Khousalya, “Master symmetries for Volterra equation, Belov–Chaltikian and Blazsak–Marciniak lattice equations”, *J. Math. Anal. Appl.*, **280**:2 (2003), 241–251.
- [40] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley, New York, 1994.
- [41] Д. Мамфорд, *Лекции о тэта-функциях*, Мир, М., 1998.

Поступила в редакцию 14.11.2015,
после доработки 3.03.2016