Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Валиневич, С. Э. Деркачёв, П. П. Кулиш,
Е. М. Уваров, Построение собственных функций системы
квантовых миноров матрицы монодромии $SL(n, \mathbb{C})$ -
инвариантной спиновой цепочки, *ТМФ*, 2016, том 189,
номер 2, 149–175

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9106>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 06:26:44

© 2016 г.

П. А. Валиневич*, С. Э. Деркачев†,

П. П. Кулиш†, Е. М. Уваров†

ПОСТРОЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ СИСТЕМЫ КВАНТОВЫХ МИНОРОВ МАТРИЦЫ МОНОДРОМИИ $SL(n, \mathbb{C})$ -ИНВАРИАНТНОЙ СПИНОВОЙ ЦЕПОЧКИ

Рассмотрена задача поиска собственных векторов коммутирующего семейства квантовых миноров матрицы монодромии $SL(n, \mathbb{C})$ -инвариантной неоднородной спиновой цепочки. Генераторы алгебры и элементы L -оператора в каждом узле цепочки реализованы как линейные дифференциальные операторы на пространстве функций $n(n-1)/2$ переменных; представление алгебры $sl_n(\mathbb{C})$ в каждом узле в общем случае является бесконечномерным и принадлежит к основной унитарной серии. Задача решена при помощи рекуррентной процедуры по рангу алгебры n . Получены явные выражения для собственных значений и собственных векторов коммутирующего семейства. Подробно рассмотрены частные случаи $n = 2$ и $n = 3$, а также предельный случай цепочки, состоящей из одного узла.

Ключевые слова: уравнение Янга–Бакстера, R -матрица, сплетающие операторы, янгиан, разделение переменных.

DOI: 10.4213/tmf9106

1. ВВЕДЕНИЕ

Квантовый метод обратной задачи рассеяния является мощным инструментом для построения и исследования квантовых интегрируемых систем [1]–[4]. В рамках этого метода центральную роль играет R -матрица – оператор $R(u)$, зависящий от спектрального параметра u и удовлетворяющий уравнению Янга–Бакстера. По

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00598).

*Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: pavel-valinevich@yandex.ru

†Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: derkach@pdmi.ras.ru

R -матрице строится матрица монодромии $T(u)$, след которой (трансфер-матрица) $t(u) = \text{tr } T(u)$ является производящей функцией интегралов движения системы. Для нахождения системы собственных функций $t(u)$ существует ряд методов: алгебраический анзац Бете [3], метод разделения переменных [4]–[6], метод Q -оператора Бакстера [7], [8].

Модели, решаемые в рамках квантового метода обратной задачи рассеяния, возникают во многих областях теоретической физики. Одной из таких моделей является некомпактный $SL(2, \mathbb{C})$ -магнетик, гамильтониан которого появляется при исследовании высокоэнергетического предела амплитуд рассеяния в квантовой хромодинамике [9], [10]. Данная модель была решена в статьях [11]–[13] с помощью метода разделения переменных и метода Q -оператора Бакстера. Метод разделения переменных Складина [4], [6] основан на диагонализации элемента $B(u)$ матрицы монодромии. Ортогональная система собственных функций оператора $B(u)$ была построена в работе [13]. В статье [14] было показано, что поведение амплитуд рассеяния в $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории в мультиреджевской кинематике приводит к гамильтониану, который коммутирует с элементом $D(u)$ матрицы монодромии. В обоих случаях возникает задача диагонализации не всего следа матрицы монодромии, а отдельных ее элементов. Для $SL(2, \mathbb{C})$ -магнетика $T(u)$ является матрицей ранга 2, а собственные функции для всех ее элементов были построены в работе [15]. В случае конечномерных представлений алгебры $sl_2(\mathbb{C})$ задача диагонализации оператора $D(u)$ была решена в статьях [16], [17].

В данной работе мы рассматриваем обобщение этой задачи на случай спиновой цепочки, связанной с группой $SL(n, \mathbb{C})$. Матрица монодромии при этом является матрицей ранга n и ее элементы удовлетворяют коммутационным соотношениям Янгiana $Y(sl_n(\mathbb{C}))$ [18], [19]. Максимальный набор взаимно коммутирующих операторов в $Y(sl_n(\mathbb{C}))$ содержит $2(n - 1)$ операторов $A_m(u)$, $\bar{A}_m(\bar{u})$, $m = 1, \dots, n - 1$, зависящих от спектрального параметра, которые можно представить как квантовые миноры матрицы монодромии. Построение системы собственных функций для этого семейства и рассматривается в настоящей работе.

Задача решается рекуррентным образом: одновременная диагонализация $A_m(u)$, $\bar{A}_m(\bar{u})$, $m = 1, \dots, n - 1$, для алгебры $Y(sl_n(\mathbb{C}))$ сводится к задаче диагонализации меньшего семейства $A_m(u)$, $\bar{A}_m(\bar{u})$, $m = 1, \dots, n - 2$, для алгебры $Y(sl_{n-1}(\mathbb{C}))$ на некотором подпространстве исходного пространства представления. Это подпространство строится таким образом, чтобы операторы $A_{n-1}(u)$ и $\bar{A}_{n-1}(\bar{u})$ были на нем диагональны. Процедура продолжается до $n = 1$, когда решение тривиально. Ключевую роль при построении такого подпространства играют сплетающие операторы, из которых строится R -оператор [20]. В настоящей работе рассматриваются бесконечномерные представления $SL(n, \mathbb{C})$ основной серии. Пространство представления в этом случае реализовано как пространство L_2 -интегрируемых функций $n(n - 1)/2$ переменных, а элементы диагонализуемого семейства $\{A_m(u), \bar{A}_m(\bar{u})\}$ представляют собой дифференциальные операторы.

Задача построения базиса коммутирующего семейства $\{A_m(u)\}$ в вещественном случае $Y(gl_n(\mathbb{R}))$ для некоторого класса конечномерных представлений была решена в работах Назарова и Тарасова [21], [22]. Полученная таким образом система векторов конечномерных $Y(gl_n(\mathbb{R}))$ -модулей определяет базис Гельфанда–Цейтлина.

Данная статья организована следующим образом. В разделе 2 приведены все необходимые формулы, касающиеся представлений основной серии группы $SL(n, \mathbb{C})$, и описана рекуррентная процедура, позволяющая строить генераторы алгебры Ли $sl_n(\mathbb{C})$ при помощи генераторов алгебры Ли $sl_{n-1}(\mathbb{C})$ на единицу меньшего ранга.

В разделе 3 приведены основные определения и обозначения, касающиеся рассматриваемой интегрируемой модели – $SL(n, \mathbb{C})$ -инвариантной спиновой цепочки.

Раздел 4 посвящен рекуррентной процедуре построения системы общих собственных функций семейства коммутирующих операторов $\{A_m(u), \bar{A}_m(\bar{u})\}$. В п. 4.1 и 4.2 введены необходимые для этого объекты: операторы, с помощью которых совершается преобразование подобия, приводящее к циклической перестановке индексов в L -операторах, и операторы, с помощью которых совершается преобразование подобия, приводящее к перестановкам параметров в матрице монодромии. Далее эти операторы используются при построении рекуррентной процедуры, которая позволяет свести задачу одновременной диагонализации $\{A_m(u), \bar{A}_m(\bar{u})\}$ к задаче диагонализации такого же семейства для алгебры меньшего ранга.

В разделе 5 в качестве иллюстрации общей схемы подробно разобраны три примера. Сначала мы рассматриваем самый простой, но уже нетривиальный случай неоднородной спиновой цепочки с группой симметрии $SL(2, \mathbb{C})$, а потом – следующий по сложности случай группы симметрии $SL(3, \mathbb{C})$. Отдельно рассмотрен пример спиновой цепочки с группой симметрии $SL(n, \mathbb{C})$, состоящей из одного узла.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ $GL(N, \mathbb{C})$

В этом разделе мы опишем, следуя работам [23], [24], конструкцию индуцированных представлений группы комплексных невырожденных матриц n -го порядка. Обозначим через Z группу нижнетреугольных комплексных матриц $z = \|z_{ik}\|$ n -го порядка, для которых $z_{kk} = 1$ и $z_{ik} = 0$ при $i < k$, и через H – группу верхнетреугольных комплексных матриц n -го порядка

$$z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ z_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \in Z, \quad h = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ 0 & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h_{nn} \end{pmatrix} \in H. \quad (2.1)$$

В качестве индуцирующей подгруппы возьмем подгруппу верхнетреугольных матриц H , а в качестве индуцирующего представления – одномерное представление $\alpha(h)$ подгруппы H :

$$\alpha(h) = [h_{11}]^{-1-\sigma_1} [h_{22}]^{-2-\sigma_2} \dots [h_{nn}]^{-n-\sigma_n} = \prod_{k=1}^n [h_{kk}]^{-k-\sigma_k}, \quad (2.2)$$

где $h_{11}, h_{22}, \dots, h_{nn}$ – диагональные элементы матрицы h . Для упрощения формул мы будем использовать компактное обозначение

$$[h]^\sigma = h^\sigma \bar{h}^{\bar{\sigma}}, \quad (2.3)$$

где $\bar{h}$ комплексно сопряжено к h , а комплексные числа σ и $\bar{\sigma}$ отличаются на целое число: $\bar{\sigma}_k - \sigma_k \in \mathbb{Z}$.

Для почти любой матрицы из $GL(n, \mathbb{C})$ имеет место разложение Гаусса: матрицу $x \in GL(n, \mathbb{C})$ можно представить, и притом единственным образом, в виде $x = zh$.

Пусть z – произвольная матрица из Z , а g – произвольная матрица из $GL(n, \mathbb{C})$. Используя разложение Гаусса, произведение $g^{-1}z$ можно представить в виде

$$g^{-1}z = \bar{z}h. \quad (2.4)$$

Пространство, в котором действуют операторы представления $T(g)$, состоит из функций $\Phi(z)$, где $z \in Z$, т. е. $\Phi(z)$ является функцией $n(n-1)/2$ переменных:

$$\Phi(z) = \Phi(z_{21}, z_{31}, \dots, z_{n,n-1}).$$

Для данной функции не предполагается, что она голоморфна; $\Phi(z)$ также зависит от сопряженных переменных $\bar{z}_{21}, \bar{z}_{31}, \dots, \bar{z}_{n,n-1}$. Для простоты мы будем во всех формулах указывать только голоморфную половину переменных. Действие оператора представления $T(g)$ на функцию задается следующим образом:

$$T(g)\Phi(z) = \alpha(h^{-1})\Phi(\bar{z}) = [h_{11}]^{\sigma_1+1}[h_{22}]^{\sigma_2+2} \dots [h_{nn}]^{\sigma_n+n}\Phi(\bar{z}), \quad (2.5)$$

где h_{kk} – диагональные элементы матрицы h в разложении (2.4). В случае группы $GL(2, \mathbb{C})$ матрицы $\bar{z}$ и h легко вычисляются:

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c+az & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d-bz}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ 0 & \frac{1}{d-bz} \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

так что действие оператора $T(g)$ на функцию $\Phi(z, \bar{z})$ дается формулой

$$T(g)\Phi(z) = [ad-bc]^{1-\sigma_1}[d-bz]^{\sigma_1-\sigma_2-1}\Phi\left(\frac{-c+az}{d-bz}\right). \quad (2.7)$$

В общем случае элементы матриц $\bar{z}$ и h выражаются через миноры матрицы $g^{-1}z$ [22], [24]:

$$\bar{z}_{ik} = \frac{\Delta_{ik}}{\Delta_k}, \quad h_{kk} = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}, \quad (2.8)$$

где Δ_{ik} – минор, составленный из элементов матрицы $g^{-1}z$, находящихся на пересечении строк с номерами $1, 2, \dots, k-1, i$ ($i \geq k$) и столбцов с номерами $1, 2, \dots, k-1, k$, а $\Delta_k \equiv \Delta_{kk}$ – минор из элементов матрицы $g^{-1}z$, находящихся на пересечении первых k строк и первых k столбцов. Удобно использовать эквивалентное представление для функции $\alpha(h^{-1})$ через миноры Δ_k ($\sigma_{k,k+1} \equiv \sigma_k - \sigma_{k+1}$):

$$\alpha(h^{-1}) = [\Delta_n]^{\sigma_n+n}[\Delta_1]^{\sigma_{12}-1}[\Delta_2]^{\sigma_{23}-1} \dots [\Delta_{n-1}]^{\sigma_{n-1,n}-1} = [\Delta_n]^{\sigma_n+n} \prod_{k=1}^{n-1} [\Delta_k]^{\sigma_{k,k+1}-1}. \quad (2.9)$$

Построенное представление определяется двумя наборами чисел $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, $\bar{\sigma} = (\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_n)$ и дополнительным условием на разности $\bar{\sigma}_k - \sigma_k \in \mathbb{Z}$. Чтобы не загромождать формулы, зависимость от $\bar{\sigma}$ в обозначении представления T^σ опущена.

В случае группы $SL(n, \mathbb{C})$ определитель матрицы h равен единице: $\Delta_n = \det h = 1$, и для характеристики представления нужно знать не n чисел σ_k , а только их разности $\sigma_{k,k+1} = \sigma_k - \sigma_{k+1}$ ($\bar{\sigma}_{k,k+1} = \bar{\sigma}_k - \bar{\sigma}_{k+1}$):

$$T(g)\Phi(z) = [\Delta_1]^{\sigma_{12}-1} [\Delta_2]^{\sigma_{23}-1} \dots [\Delta_{n-1}]^{\sigma_{n-1,n}-1} \Phi(\tilde{z}). \quad (2.10)$$

Удобно использовать симметричную параметризацию $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ представления T^σ группы $SL(n, \mathbb{C})$, наложив дополнительное условие вида

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n = \frac{n(n-1)}{2}. \quad (2.11)$$

2.1. Генераторы алгебры Ли $gl_n(\mathbb{C})$ и генераторы правых сдвигов. Алгебра Ли $gl_n(\mathbb{C})$ группы $GL(n, \mathbb{C})$ состоит из матриц n -го порядка и содержит n^2 независимых генераторов, в качестве которых удобно взять матрицы e_{ik} ,

$$(e_{ik})_{jm} = \delta_{ij}\delta_{km}. \quad (2.12)$$

Матрицы e_{ik} удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям

$$[e_{ik}, e_{jl}] = \delta_{kj}e_{il} - \delta_{il}e_{jk}. \quad (2.13)$$

В представлении T^σ генераторы E_{ik} алгебры Ли $gl_n(\mathbb{C})$ являются дифференциальными операторами первого порядка по переменным z_{ik} , $1 \leq k < i \leq n$, которые определяются следующим образом. Возьмем элемент $g \in GL(n, \mathbb{C})$ специального вида: $g = \mathbb{1} + \varepsilon e_{ik}$, где ε – произвольный комплексный параметр. Действие генератора E_{ik} на функцию в представлении T^σ определяется первым членом разложения в ряд по ε

$$T(g)\Phi(z) = \Phi(z) + (\varepsilon E_{ik} + \bar{\varepsilon} \bar{E}_{ik})\Phi(z) + O(\varepsilon^2), \quad (2.14)$$

где действие оператора $T(g)$ задается формулой (2.5). Из определения генераторов E_{ik} следует, что они удовлетворяют тем же стандартным коммутационным соотношениям, что и матрицы e_{ik} :

$$[E_{ik}, E_{jl}] = \delta_{kj}E_{il} - \delta_{il}E_{jk}. \quad (2.15)$$

Для генераторов E_{ik} при $i > k$ соответствующая матрица g является нижнетреугольной, так что в разложении (2.4) матрица h оказывается единичной. Операторы E_{ik} при $i > k$ являются генераторами левых сдвигов, определяемых формулой (2.5) с учетом того, что $h = \mathbb{1}$, следующим образом:

$$T(g)\Phi(z) = \Phi(g^{-1}z), \quad g \in \mathbb{Z}.$$

Аналогичным образом можно определить операторы правых сдвигов:

$$D(g)\Phi(z) = \Phi(zg), \quad g \in \mathbb{Z}.$$

Генераторы правых сдвигов D_{ik} определяются по аналогии с формулой (2.14):

$$\Phi(z(\mathbb{1} + \varepsilon e_{ik})) = \Phi(z) + (\varepsilon D_{ik} + \bar{\varepsilon} \bar{D}_{ik})\Phi(z) + O(\varepsilon^2), \quad i > k. \quad (2.16)$$

Операторы правых и левых сдвигов перестановочны и, как следствие, соответствующие генераторы коммутируют: $[E_{ik}, D_{jl}] = 0$ ($i > k, j > l$). Кроме того, генераторы D_{ik} , как и генераторы E_{ik} , удовлетворяют тем же самым коммутационным соотношениям, что и матрицы e_{ik} :

$$[D_{ik}, D_{jl}] = \delta_{kj} D_{il} - \delta_{il} D_{jk}. \quad (2.17)$$

Исходя из определения, нетрудно вывести явные выражения для генераторов левых и правых сдвигов (напоминаем, что в следующих формулах $i > k$ и $z_{ii} = 1$):

$$E_{ik} = - \sum_{j=1}^k z_{kj} \partial_{ij}, \quad D_{ik} = \sum_{j=i}^n z_{ji} \partial_{jk}, \quad (2.18)$$

где $\partial_{ij} = \partial/\partial z_{ij}$. Заметим, что оператор D_{ik} зависит от переменных в i -м и k -м столбцах матрицы z . Для генераторов E_{ik} при $i \leq k$ выражения, аналогичные (2.18), являются довольно громоздкими, однако существует простая формула, позволяющая выразить все генераторы E_{ik} через генераторы правых сдвигов [20]:

$$E_{ik} = - \sum_{l \geq j} z_{kj} (D_{lj} + \delta_{jl} \sigma_j) (z^{-1})_{li}, \quad (2.19)$$

где операторы D_{lj} отличны от нуля только при условии $l > j$. Формулу (2.19) удобно переписать в матричном виде

$$E^\sigma = -z(D + \sigma)z^{-1}, \quad (2.20)$$

используя матрицы $E^\sigma = \sum_{ij} E_{ij} e_{ji}$, $D = \sum_{i>j} D_{ij} e_{ji}$ и $\sigma = \sum_i \sigma_i e_{ii}$. Матрицы z и z^{-1} – нижнетреугольные, матрица D – строго верхнетреугольная. Зависимость от чисел σ_k , задающих представление T^σ , присутствует только в диагональной матрице σ :

$$D + \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & D_{21} & \dots & D_{n1} \\ 0 & \sigma_2 & \dots & D_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Выражение (2.20) применимо как в случае алгебры Ли $gl_n(\mathbb{C})$, так и в случае алгебры Ли $sl_n(\mathbb{C})$. Случай алгебры Ли $sl_n(\mathbb{C})$ отличается только тем, что на параметры представления накладывается ограничение $\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n = n(n-1)/2$.

Формулу (2.20) можно использовать для построения рекуррентной процедуры по рангу алгебры $sl_n(\mathbb{C})$. В матрице z первая строка и первый столбец играют выделенную роль: блок z' размера $(n-1) \times (n-1)$, содержащий переменные z_{ij} , $2 \leq j < i \leq n$, является матрицей переменных, которая используется для построения представлений $sl_{n-1}(\mathbb{C})$. Используя факторизацию

$$z = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ z_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ z_{n1} & & & \end{array} \middle| \begin{array}{c} \mathbb{1}_{n-1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & z' \\ 0 & & & \end{array} \right), \quad z' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ z_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n2} & z_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

перепишем формулу (2.20) в виде

$$E^\sigma = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ z_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ z_{n1} & & \mathbb{1}_{n-1} & \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|ccc} -\sigma_1 & -\partial_{z_{21}} & \dots & -\partial_{z_{n1}} \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathcal{E}^{\sigma'} & \\ 0 & & & \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -z_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ -z_{n1} & & \mathbb{1}_{n-1} & \end{array} \right), \quad (2.23)$$

где

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n), \quad \sigma' = (\sigma_2, \dots, \sigma_n).$$

Матричное равенство (2.23) дает набор соотношений, которые связывают генераторы E_{sp} , $1 \leq s, p \leq n$, алгебры $sl_n(\mathbb{C})$, действующие на $f(z)$, с генераторами $\mathcal{E}_{kl}$, $1 \leq k, l \leq n-1$, алгебры с меньшим на единицу рангом, действующими на функции $f(z')$ (параметры представления в этом случае суть $\sigma_2, \dots, \sigma_n$):

$$E_{11} = -\sigma_1 + n - 1 + \sum_{k=2}^n z_{k1} \partial_{k1}, \quad (2.24)$$

$$E_{i1} = -\partial_{i1}, \quad (2.25)$$

$$E_{ij} = \mathcal{E}_{i-1, j-1} - z_{j1} \partial_{i1}, \quad (2.26)$$

$$E_{1j} = z_{j1} \left(-\sigma_1 + n - 1 + \sum_{k=2}^n z_{k1} \partial_{k1} \right) - \sum_{k=2}^n z_{k1} \mathcal{E}_{k-1, j-1}. \quad (2.27)$$

В формулах (2.25)–(2.27) индексы i, j принимают значения $2, \dots, n$.

2.2. Основная серия унитарных представлений группы $SL(n, \mathbb{C})$. Для того чтобы задать унитарные представления группы $SL(n, \mathbb{C})$, мы должны определить скалярное произведение в пространстве функций $\Phi(z)$ и значения параметров σ_k и $\bar{\sigma}_k$, при которых операторы представления унитарны. Основная серия унитарных представлений группы $SL(n, \mathbb{C})$ определяется следующим образом [23]. Пространством представления является пространство функций $L^2(Z)$ со скалярным произведением

$$\langle \Phi_1 | \Phi_2 \rangle = \int dz \overline{\Phi_1(z)} \Phi_2(z), \quad dz \equiv \prod_{1 \leq i < k \leq n} d^2 z_{ki}. \quad (2.28)$$

Каждому элементу $g \in SL(n, \mathbb{C})$ отвечает оператор $T(g)$, задаваемый формулой (2.5). Можно показать [23], что требование унитарности $\langle T(g)\Phi_1 | T(g)\Phi_2 \rangle = \langle \Phi_1 | \Phi_2 \rangle$ операторов представления эквивалентно условию $|\alpha(h^{-1})|^2 = |h_{11}|^2 |h_{22}|^4 \dots |h_{nn}|^{2n}$, где в правой части равенства – якобиан преобразования от переменных z к переменным $\tilde{z}$: $d\tilde{z} = dz |h_{11}|^2 \dots |h_{nn}|^{2n}$. Это условие приводит к системе уравнений

$$\sigma_{k, k+1} + \bar{\sigma}_{k, k+1}^* = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

так что в итоге получаем следующее представление для параметров, определяющих унитарное представление:

$$\sigma_{k, k+1} = -\frac{n_k}{2} + i\lambda_k, \quad \bar{\sigma}_{k, k+1} = \frac{n_k}{2} + i\lambda_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad (2.29)$$

где $n_k \in \mathbb{Z}$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$.

Унитарное представление основной серии T^σ неприводимо; два представления T^σ и $T^{\sigma'}$ унитарно эквивалентны тогда и только тогда [22], когда существует перестановка s , переводящая числа σ_k в σ'_k : $s\sigma = \sigma'$. Соответствующий сплетающий оператор S , удовлетворяющий равенству

$$ST^\sigma S^{-1} = T^{s\sigma},$$

задается перестановкой s . Все сплетающие операторы можно построить из $n - 1$ базисных операторов S_i , сплетающих представления T^σ и T^{σ_i} : $S_i T^\sigma = T^{\sigma_i} S_i$, где $\sigma_i = s_i \sigma$ получается из σ перестановкой двух ближайших соседей:

$$s_i(\dots, \sigma_i, \sigma_{i+1}, \dots) = (\dots, \sigma_{i+1}, \sigma_i, \dots), \quad \bar{s}_i(\dots, \bar{\sigma}_i, \bar{\sigma}_{i+1}, \dots) = (\dots, \bar{\sigma}_{i+1}, \bar{\sigma}_i, \dots).$$

Известны различные представления для сплетающих операторов [23], [25], [26]. Мы будем использовать следующие удобные явные формулы для операторов S_i [20]:

$$S_i = [D_i]^{\sigma_i - \sigma_{i+1}} \equiv D_i^{\sigma_i - \sigma_{i+1}} \bar{D}_i^{\bar{\sigma}_i - \bar{\sigma}_{i+1}},$$

$$D_i = \partial_{i+1,i} + \sum_{j=i+2}^n z_{j,i+1} \partial_{ji}, \quad \bar{D}_i = \bar{\partial}_{i+1,i} + \sum_{j=i+2}^n \bar{z}_{j,i+1} \bar{\partial}_{ji}, \quad (2.30)$$

где $\partial_{ij} = \partial/\partial z_{ij}$, $\bar{\partial}_{ij} = \partial/\partial \bar{z}_{ij}$, $i = 1, \dots, n - 1$.

3. $SL(N, \mathbb{C})$ -ИНВАРИАНТНАЯ СПИНОВАЯ ЦЕПОЧКА

Основным объектом, необходимым для задания интегрируемой системы, является L -оператор [2], [3]. Для спиновой цепочки, связанной с группой $SL(n, \mathbb{C})$, он представляется матрицей размера $n \times n$ вида

$$L(u) = u + \sum_{i,j=1}^n e_{ij} E_{ji} = u + E, \quad (3.1)$$

где u – спектральный параметр, e_{ij} определены в выражении (2.12), E_{ij} – генераторы алгебры $sl_n(\mathbb{C})$. Если последние представлены как дифференциальные операторы (см. п. 2.1), то $L(u)$ – оператор, действующий в тензорном произведении вспомогательного пространства $\mathbb{C}^n$ и квантового пространства $\mathbb{V} \equiv L_2(\mathbb{C}^{n(n-1)/2})$, на котором определено действие генераторов E_{ij} . Аналогичным образом из генераторов антиголоморфной части строится оператор $\bar{L}(\bar{u})$:

$$\bar{L}(\bar{u}) = \bar{u} + \sum_{ij} e_{ij} \bar{E}_{ji}, \quad (3.2)$$

зависящий от спектрального параметра $\bar{u}$.

Как оператор во вспомогательном пространстве, $L(u)$ задается своей матрицей, вид которой определяется выбором базиса в $\mathbb{C}^n$. В стандартном базисе пространства $\mathbb{C}^n$ получаем, что $L(u) = \sum_{i,j=1}^n e_{ij} L_j^i(u)$, т. е. матричные элементы $L_j^i(u)$ матрицы оператора $L(u)$ имеют вид $L_j^i(u) = u\delta_{ij} + E_{ji}$. Аналогично $\bar{L}_j^i(\bar{u}) = \bar{u}\delta_{ij} + \bar{E}_{ji}$.

Оператор $L(u)$ ($\bar{L}(\bar{u})$) зависит как от спектрального параметра u ($\bar{u}$), так и от параметров σ_k ($\bar{\sigma}_k$), характеризующих представление. Согласно формулам (2.20) для

генераторов и определению (3.1) параметры u и σ_k встречаются только в комбинациях $u_k = u - \sigma_k$, поэтому в дальнейшем мы будем считать, что $L = L(u_1, \dots, u_n)$ или, сокращенно, $L = L(\mathbf{u})$, где $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$. Аналогично полагаем, что $\bar{L} = \bar{L}(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n) = \bar{L}(\bar{\mathbf{u}})$. С помощью (2.20) можно записать $L(u)$ в факторизованной форме:

$$L(u) = z \left(D + \sum_{k=1}^n u_k e_{kk} \right) z^{-1}. \quad (3.3)$$

Формулы (2.24)–(2.27) дают возможность строить $L_j^i(\mathbf{u})$ рекуррентным образом, используя $\ell_j^i(\mathbf{u}')$, т. е. матричные элементы L -оператора $sl_{n-1}(\mathbb{C})$ -инвариантной спиновой цепочки, действующие на пространстве функций $f(z')$ и зависящие от параметров $\mathbf{u}'$, где

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n), \quad \mathbf{u}' = (u_2, \dots, u_n). \quad (3.4)$$

Явные формулы имеют вид

$$L_1^1(\mathbf{u}) = u_1 + n - 1 + \sum_{k=2}^n z_{k1} \partial_{k1}, \quad (3.5)$$

$$L_j^1(\mathbf{u}) = -\partial_{j1}, \quad (3.6)$$

$$L_j^i(\mathbf{u}) = \ell_{j-1}^{i-1}(\mathbf{u}') - z_{i1} \partial_{j1}, \quad (3.7)$$

$$L_1^i(\mathbf{u}) = z_{i1} \left(u_1 + n - 1 + \sum_{k=2}^n z_{k1} \partial_{k1} \right) - \sum_{k=2}^n z_{k1} \ell_{k-1}^{i-1}(\mathbf{u}'), \quad (3.8)$$

где $i, j = 2, \dots, n$. Соответствующее матричное соотношение аналогично (2.23):

$$L(\mathbf{u}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ z_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ z_{n1} & & \mathbb{1}_{n-1} & \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|ccc} u_1 & -\partial_{z_{21}} & \dots & -\partial_{z_{n1}} \\ 0 & & & \\ \vdots & & \ell(\mathbf{u}') & \\ 0 & & & \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -z_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ -z_{n1} & & \mathbb{1}_{n-1} & \end{array} \right). \quad (3.9)$$

L -операторы $L(u)$ и $\bar{L}(\bar{u})$ удовлетворяют уравнению Янга–Бакстера

$$R(u-v)(L(u) \otimes \text{id})(\text{id} \otimes L(v)) = (\text{id} \otimes L(v))(L(u) \otimes \text{id})R(u-v), \quad (3.10)$$

$$R(u-v)(\bar{L}(\bar{u}) \otimes \text{id})(\text{id} \otimes \bar{L}(\bar{v})) = (\text{id} \otimes \bar{L}(\bar{v}))(\bar{L}(\bar{u}) \otimes \text{id})R(u-v), \quad (3.11)$$

в котором $L(u) \otimes \text{id}$ действует нетривиальным образом только в первом пространстве произведения $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$, $\text{id} \otimes \bar{L}(\bar{v})$ – во втором, а $R(u) = u + \sum_{ij} e_{ij} \otimes e_{ji}$ действует и в первом, и во втором пространствах $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$. Матричное уравнение (3.10) эквивалентно системе коммутационных соотношений (2.15).

Мы будем рассматривать неоднородную $sl_n(\mathbb{C})$ -инвариантную спиновую цепочку [20], [27]. Для нее определим матрицы монодромии $T(u)$ и $\bar{T}(\bar{u})$ – операторы, действующие в тензорном произведении $\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{V}_2 \otimes \dots \otimes \mathbb{V}_N \otimes \mathbb{C}^n$:

$$T(u) = L_1(u + \delta_1) L_2(u + \delta_2) \dots L_N(u + \delta_N), \quad \bar{T}(\bar{u}) = \bar{L}_1(\bar{u} + \bar{\delta}_1) \bar{L}_2(\bar{u} + \bar{\delta}_2) \dots \bar{L}_N(\bar{u} + \bar{\delta}_N), \quad (3.12)$$

где $\delta_1, \dots, \delta_N$ – параметры неоднородности, а $L_i(u)$ ($\bar{L}_i(\bar{u})$) действует нетривиально только в квантовом пространстве $\mathbb{V}_i$. Таким образом, при построении матриц монодромии L -операторы перемножаются как матрицы размера $n \times n$, а их матричные элементы действуют в разных пространствах.

Во вспомогательном пространстве $T(u)$ является матрицей $n \times n$ с матричными элементами, определенными из равенства $T(u) = \sum_{i,j} e_{ij} T_j^i$ (аналогичное равенство верно и для $\bar{T}(\bar{u})$). Для $T(u)$ и $\bar{T}(\bar{u})$ в силу (3.10) выполнены уравнения

$$\begin{aligned} R(u-v)(T(u) \otimes \text{id})(\text{id} \otimes T(v)) &= (\text{id} \otimes T(v))(T(u) \otimes \text{id})R(u-v), \\ R(u-v)(\bar{T}(\bar{u}) \otimes \text{id})(\text{id} \otimes \bar{T}(\bar{v})) &= (\text{id} \otimes \bar{T}(\bar{v}))(\bar{T}(\bar{u}) \otimes \text{id})R(u-v). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Они эквивалентны системе коммутационных соотношений

$$(u-v)[T_j^i(u), T_l^k(v)] = T_j^k(v)T_l^i(u) - T_j^k(u)T_l^i(v), \quad (3.14)$$

которые задают янгиан – ассоциативную алгебру $Y(sl_n(\mathbb{C}))^1$ [18], [19].

Каждый L -оператор $L_k(\mathbf{u}^{(k)})$ зависит от n параметров $\mathbf{u}^{(k)} = (u_1^{(k)}, \dots, u_n^{(k)})$, где $u_i^{(k)} = u + \delta_k - \sigma_i^{(k)}$, $\boldsymbol{\sigma}^{(k)} = (\sigma_1^{(k)}, \dots, \sigma_n^{(k)})$ – параметры представления в k -м узле, δ_k – локальный параметр сдвига в k -м узле. Матрица монодромии зависит от всех параметров, входящих в каждый L -оператор, так что зависимость $T(u)$ от всех параметров можно представить с помощью матрицы размера $N \times n$

$$T = T(U), \quad U = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & \dots & u_n^{(1)} \\ u_1^{(2)} & u_2^{(2)} & \dots & u_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(N)} & u_2^{(N)} & \dots & u_n^{(N)} \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Квантовые миноры $T_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_m}(u)$ матрицы $T(u)$ определяются как

$$T_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_m}(u) = \sum_{\sigma} (-1)^{\text{sgn}(\sigma)} T_{\sigma(j_1)}^{i_1}(u) T_{\sigma(j_2)}^{i_2}(u-1) \dots T_{\sigma(j_m)}^{i_m}(u-m+1), \quad (3.16)$$

где σ – перестановка индексов $i_1, \dots, i_m$, $\text{sgn}(\sigma)$ – ее знак и суммирование ведется по всем возможным перестановкам. Из определения (3.16) видно, что минор $T_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_m}(u)$ антисимметричен относительно перестановки любой пары индексов в наборах $(i_1 \dots i_m)$ и $(j_1 \dots j_m)$, поэтому условимся располагать индексы по возрастанию: $i_1 < i_2 < \dots < i_m$, $j_1 < j_2 < \dots < j_m$.

С помощью соотношений (3.14) определение (3.16) можно привести к эквивалентной форме

$$T_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_m}(u) = \sum_{\sigma} (-1)^{\text{sgn}(\sigma)} T_{j_1}^{\sigma(i_1)}(u-m+1) T_{j_2}^{\sigma(i_2)}(u-m+2) \dots T_{j_m}^{\sigma(i_m)}(u). \quad (3.17)$$

Аналогичным образом определяются квантовые миноры матриц $L(u)$:

$$L_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_m}(u) = \sum_{\sigma} (-1)^{\text{sgn}(\sigma)} L_{\sigma(j_1)}^{i_1}(u) L_{\sigma(j_2)}^{i_2}(u-1) \dots L_{\sigma(j_m)}^{i_m}(u-m+1). \quad (3.18)$$

¹⁾В дальнейшем мы будем опускать формулы, относящиеся к антиголоморфному сектору, так как они полностью повторяют формулы голоморфной части.

В дальнейшем нам понадобятся формулы, связывающие квантовые миноры $T(u)_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_m}$ матрицы монодромии, состоящей из N узлов, с минорами матриц монодромии меньшей длины (подробное доказательство имеется в книге [18]):

$$T_N(u)_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_m} = \sum_{k_1 < k_2 < \dots < k_m} T_{N-1}(u)_{k_1 \dots k_m}^{i_1 \dots i_m} L_N(u)_{j_1 \dots j_m}^{k_1 \dots k_m}, \quad (3.19)$$

где

$$T_N(u) = L_1(u) \dots L_N(u), \quad T_{N-1}(u) = L_1(u) \dots L_{N-1}(u). \quad (3.20)$$

В выражении (3.19) процедуру отделения узла можно продолжать и дальше, что приведет к равенству

$$T_N(u)_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_m} = \sum_{m=1}^{N-1} \left(\sum_{k_1^{(m)} < \dots < k_m^{(m)}} L_1(u)_{k_1^{(1)} \dots k_m^{(1)}}^{i_1 \dots i_m} L_2(u)_{k_1^{(2)} \dots k_m^{(2)}}^{k_1^{(1)} \dots k_m^{(1)}} \dots L_N(u)_{j_1 \dots j_m}^{k_1^{(N-1)} \dots k_m^{(N-1)}} \right). \quad (3.21)$$

Известно [18], [19], что максимальный набор коммутирующих операторов для янгиана $Y(sl_n(\mathbb{C}))$ представляет собой семейство

$$A_m(U) = T_N(U)_{1 \dots m}^{1 \dots m}, \quad \bar{A}_m(\bar{u}) = \bar{T}_N(U)_{1 \dots m}^{1 \dots m}, \quad m = 1, \dots, n-1. \quad (3.22)$$

При $m = n$ соответствующий минор называется квантовым детерминантом матрицы T : $T_N(U)_{1 \dots n}^{1 \dots n} = \text{qdet } T(u)$, и для $Y(sl_n(\mathbb{C}))$ он равен константе на всем пространстве представления. Значение этой константы можно найти, воспользовавшись выражением (2.19), которое дает равенство $\text{qdet } L_k(u) = u_1^{(k)} \dots u_n^{(k)}$. Тогда согласно формуле (3.21) получаем, что

$$A_n(U) = \prod_{k=1}^N \prod_{i=1}^n u_i^{(k)}. \quad (3.23)$$

В настоящей работе мы строим набор общих собственных функций для семейства $A_m(u)$, $\bar{A}_m(\bar{u})$, $m = 1, \dots, n-1$. Оператор $A_m(u)$ ($\bar{A}_m(\bar{u})$) является полиномом степени mN по спектральному параметру u ($\bar{u}$), поэтому соответствующее собственное значение тоже является полиномом степени mN . Мы нумеруем собственные функции Φ посредством набора чисел $\mathbf{x} = \{\bar{x}_{ij}^{(s)}, x_{ij}^{(s)}, 1 \leq i \leq j \leq n-1, s = 1, \dots, N\}$, которые являются корнями этих полиномов:

$$A_i(u)\Phi_{\mathbf{x}} = \prod_{s=1}^N \prod_{j=1}^i (u - x_{ij}^{(s)})\Phi_{\mathbf{x}}, \quad \bar{A}_i(u)\Phi_{\mathbf{x}} = \prod_{s=1}^N \prod_{j=1}^i (\bar{u} - \bar{x}_{ij}^{(s)})\Phi_{\mathbf{x}}. \quad (3.24)$$

4. ПОИСК СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ СЕМЕЙСТВА ОПЕРАТОРОВ $A_m(U)$, $\bar{A}_m(\bar{U})$

4.1. Оператор циклической перестановки S . Введенная нами ранее матрица $E^\sigma = \sum_{ij} E_{ij} e_{ji}$ с точностью до аддитивной константы совпадает с квадратичным оператором Казимира. Легко проверить следующие коммутационные соотношения:

$$(E_{ik} + e_{ik})E^\sigma = E^\sigma(E_{ik} + e_{ik}) \quad (4.1)$$

или, в глобальной форме,

$$(T^\sigma(g) \otimes g)E^\sigma = E^\sigma(T^\sigma(g) \otimes g) \longleftrightarrow T^\sigma(g)E^\sigma T^\sigma(g)^{-1} = g^{-1}E^\sigma g. \quad (4.2)$$

Переходя от E^σ к $L(u)$, имеем равенство

$$(T^\sigma(g))^{-1}L(u)T^\sigma(g) = gL(u)g^{-1}, \quad (4.3)$$

т. е. преобразование подобия L -оператора как матрицы, $L(u) \rightarrow gL(u)g^{-1}$, можно выполнить с помощью оператора $T^\sigma(g)$, действующего в квантовом пространстве.

Для построения рекуррентной процедуры в группе $SL(n, \mathbb{C})$ нам понадобится специальное преобразование c :

$$c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad c^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

производящее циклическую перестановку индексов:

$$cL_j^i(u)c^{-1} = L_{j+1}^{i+1}(u), \quad (4.5)$$

где мы полагаем $n+1 \equiv 1$. Согласно равенству (4.3) в представлении σ имеем выражение

$$(T^\sigma(c))^{-1}L_j^i(u)T^\sigma(c) = L_{j+1}^{i+1}(u). \quad (4.6)$$

Действие оператора $T^\sigma(c)$ на функцию можно найти при помощи общих формул (2.5) и (2.9):

$$T^\sigma(c)\Phi(z) = [\Delta_n]^{\sigma_n+n}[\Delta_1]^{\sigma_{12}-1}[\Delta_2]^{\sigma_{23}-1} \dots [\Delta_{n-1}]^{\sigma_{n-1,n}-1}\Phi(\tilde{z}). \quad (4.7)$$

Матричные элементы $\tilde{z}$ выражаются через миноры матрицы $c^{-1}z$: $\tilde{z}_{ik} = \Delta_{ik}/\Delta_k$, где Δ_{ik} — минор, составленный из элементов матрицы $c^{-1}z$, находящихся на пересечении строк с номерами $1, 2, \dots, k-1, i$ ($i \geq k$) и столбцов с номерами $1, 2, \dots, k-1, k$, а $\Delta_k \equiv \Delta_{kk}$ есть минор из элементов матрицы $c^{-1}z$, находящихся на пересечении первых k строк и первых k столбцов. Нужные матрицы легко вычисляются:

$$c^{-1}z = \begin{pmatrix} z_{n1} & z_{n2} & z_{n3} & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n-1,1} & z_{n-1,2} & z_{n-1,3} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} z_{n1} & z_{n2} & z_{n3} & \dots & 1 \\ 0 & -\frac{z_{n2}}{z_{n1}} & -\frac{z_{n3}}{z_{n1}} & \dots & -\frac{1}{z_{n1}} \\ 0 & 0 & -\frac{z_{n3}}{z_{n2}} & \dots & -\frac{1}{z_{n2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{z_{n,n-1}} \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

а элементы матрицы $\tilde{z}$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\tilde{z}_{i1} &= \frac{z_{i-1,1}}{z_{n1}}, & 2 \leq i \leq n, \\ \tilde{z}_{ij} &= z_{i-1,j-1} - \frac{z_{i-1,j}z_{n,j-1}}{z_{nj}}, & 2 \leq j < i \leq n\end{aligned}\quad (4.9)$$

(здесь для удобства записи полагается, что $z_{ii} = 1$).

Рассмотрим простейшие примеры. В случае группы $GL(2, \mathbb{C})$

$$c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad c^{-1}z = \begin{pmatrix} z & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{z} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 1 \\ 0 & -\frac{1}{z} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

и при помощи формулы (4.7) получаем действие оператора $T^\sigma(c)$ (заметим, что $c^2 = \mathbb{1}$) на функцию $\Phi(z)$:

$$T^\sigma(c)\Phi(z) = [-1]^{\sigma_2}[z]^{\sigma_1-\sigma_2-1}\Phi(z^{-1}), \quad (4.11)$$

так что наш оператор с точностью до умножения на константу $[-1]^{\sigma_2}$ совпадает со стандартным оператором инверсии. В случае группы $GL(3, \mathbb{C})$

$$c^{-1}z = \begin{pmatrix} z_{31} & z_{32} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ z_{21} & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{z_{31}} & 1 & 0 \\ \frac{z_{21}}{z_{31}} & z_{21} - \frac{z_{31}}{z_{32}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{31} & z_{32} & 1 \\ 0 & -\frac{z_{32}}{z_{31}} & -\frac{1}{z_{31}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{z_{32}} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

и опять при помощи формулы (4.7) получаем действие оператора $T^\sigma(c)$ на функцию:

$$T^\sigma(c)\Phi(z_{21}, z_{31}, z_{32}) = [-1]^{\sigma_2+\sigma_3}[z_{31}]^{\sigma_1-\sigma_2-1}[z_{32}]^{\sigma_2-\sigma_3-1}\Phi\left(\frac{1}{z_{31}}, \frac{z_{21}}{z_{31}}, z_{21} - \frac{z_{31}}{z_{32}}\right). \quad (4.13)$$

Определим теперь оператор инверсии $C(\mathbf{u})$ (напомним, что $u_k = u - \sigma_k$):

$$C(\mathbf{u})\Phi(z) = [z_{n,1}]^{u_2-u_1-1}[z_{n,2}]^{u_3-u_2-1} \dots [z_{n,n-1}]^{u_n-1-u_{n-1}}\Phi(\tilde{z}), \quad (4.14)$$

который с точностью до умножения на константу совпадает с оператором $T^\sigma(c)$ и, следовательно, удовлетворяет равенству

$$L(\mathbf{u})_j^i C(\mathbf{u}) = C(\mathbf{u})L(\mathbf{u})_{j+1}^{i+1}. \quad (4.15)$$

Преобразование подобия L -оператора в матричном виде выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}C(\mathbf{u})^{-1}L(\mathbf{u})C(\mathbf{u}) &= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_{n-1} & \begin{smallmatrix} z_{21} \\ \vdots \\ z_{n1} \end{smallmatrix} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \ell(\mathbf{u}') & \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} \\ \hline -\partial_{z_{21}} & \dots & -\partial_{z_{n1}} & u_1 \end{array} \right) \times \\ &\times \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_{n-1} & \begin{smallmatrix} -z_{21} \\ \vdots \\ -z_{n1} \end{smallmatrix} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right),\end{aligned}$$

где $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $\mathbf{u}' = (u_2, \dots, u_n)$.

4.2. Операторы перестановок параметров. В этом разделе мы приведем необходимые результаты, полученные в работе [20] при решении задачи построения общего R -оператора для $sl_n(\mathbb{C})$ -инвариантной спиновой цепочки. R -оператор $R_{12}(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)})$ действует в тензорном произведении $\mathbb{V}_1 \times \mathbb{V}_2$ двух представлений, и определяющее уравнение для него имеет следующий вид [28]:

$$R_{12}(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)})L_1(\mathbf{u}^{(1)})L_2(\mathbf{u}^{(2)}) = L_1(\mathbf{u}^{(2)})L_2(\mathbf{u}^{(1)})R_{12}(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}). \quad (4.16)$$

L -операторы действуют в одном вспомогательном пространстве $\mathbb{C}^n$, но в разных квантовых пространствах $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$, т. е. $L_1(u) = L_1(\mathbf{u}^{(1)})$ является дифференциальным оператором по переменным $z^{(1)}$, а $L_2(u) = L_2(\mathbf{u}^{(2)})$ – по переменным $z^{(2)}$.

R -оператор $R_{12}(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)})$ можно представить [20] в виде произведения элементарных строительных блоков – операторов, производящих перестановку пары параметров в произведении двух L -операторов $L_1(\mathbf{u}^{(1)})L_2(\mathbf{u}^{(2)})$. Для произведения N L -операторов $L_1(\mathbf{u}^{(1)})L_2(\mathbf{u}^{(2)}) \dots L_N(\mathbf{u}^{(N)})$ такие перестановки бывают двух типов.

1) Рассмотрим перестановки соседних параметров $u_i^{(k)}$ и $u_{i+1}^{(k)}$, входящих в один и тот же L -оператор $L_k(\mathbf{u}^{(k)})$ (а также их антиголоморфных аналогов $\bar{u}_i$ и $\bar{u}_{i+1}$ в $\bar{L}_k(\bar{\mathbf{u}}^{(k)})$). Соответствующие операторы обозначим $S_i^{(k)}$. Они удовлетворяют соотношению

$$S_i^{(k)}L_k(u_1^{(k)}, \dots, u_i^{(k)}, u_{i+1}^{(k)}, \dots, u_n^{(k)}) = L_k(u_1^{(k)}, \dots, u_{i+1}^{(k)}, u_i^{(k)}, \dots, u_n^{(k)})S_i^{(k)} \quad (4.17)$$

и аналогичному уравнению для антиголоморфного сектора. Явное выражение для них уже приводилось (см. формулу (2.30)):

$$S_i^{(k)}(u_{i+1}^{(k)} - u_i^{(k)}) = [D_i^{(k)}]^{u_{i+1}^{(k)} - u_i^{(k)}}, \quad 1 \leq i \leq n-1. \quad (4.18)$$

L -операторы $L_k(u_1^{(k)}, \dots, u_i^{(k)}, u_{i+1}^{(k)}, \dots, u_n^{(k)})$ и $L_k(u_1^{(k)}, \dots, u_{i+1}^{(k)}, u_i^{(k)}, \dots, u_n^{(k)})$ отвечают эквивалентным представлениям $SL(n, \mathbb{C})$, а $S_i^{(k)}$ являются соответствующими сплетающими операторами.

2) Перестановку $u_1^{(k)}$ и $u_n^{(k+1)}$ в двух соседних L -операторах осуществляет оператор $S_n^{(k)}$:

$$\begin{aligned} S_n^{(k)}(u_1^{(k)} - u_n^{(k+1)})L_k(u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \dots, u_n^{(k)})L_{k+1}(u_1^{(k+1)}, \dots, u_{n-1}^{(k+1)}, u_n^{(k+1)}) = \\ = L_k(u_n^{(k+1)}, u_2^{(k)}, \dots, u_n^{(k)})L_{k+1}(u_1^{(k+1)}, \dots, u_{n-1}^{(k+1)}, u_1^{(k)})S_n^{(k)}(u_1^{(k)} - u_n^{(k+1)}). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Он является оператором умножения на функцию:

$$S_n^{(k)}(u_1^{(k)} - u_n^{(k+1)}) = [((z^{(k+1)})^{-1}z^{(k)})_{N1}]^{u_1^{(k)} - u_n^{(k+1)}}. \quad (4.20)$$

Здесь $z^{(k)}$ и $z^{(k+1)}$ – матрицы (4.8), построенные из переменных $z_{ij}^{(k)}$ и $z_{ij}^{(k+1)}$ соответственно, а $((z^{(k+1)})^{-1}z^{(k)})_{N1}$ обозначает матричный элемент $N1$, находящийся в N -й строке и первом столбце матрицы, являющейся произведением матриц $(z^{(k+1)})^{-1}$ и $z^{(k)}$, и использовано компактное обозначение (2.3).

Так как $L_1(\mathbf{u}^{(1)})L_2(\mathbf{u}^{(2)})\dots L_N(\mathbf{u}^{(N)}) = T_N(U)$ (см. выражение (3.15)), операторы $S_i^{(k)}$ удовлетворяют соотношению

$$S_i^{(k)}T_N(U) = T_N(U')S_i^{(k)}, \quad (4.21)$$

где U' отличается от U :

- перестановкой элементов $u_i^{(k)}$ и $u_{i+1}^{(k)}$ для оператора $S_i^{(k)}$, $1 \leq i \leq n-1$,
- перестановкой элементов $u_1^{(k)}$ и $u_n^{(k+1)}$ для оператора $S_n^{(k)}$.

Для удобства записи аргументы оператора $S_i^{(k)}$ здесь не указаны; в обоих случаях эти аргументы суть разности переставляемых элементов.

4.3. Основное уравнение. Выясним, каким образом матричные элементы оператора Лакса зависят от u_i . Ответ на этот вопрос дает факторизованная форма L -оператора (3.3). Перемножая матрицы в (3.3) и принимая во внимание, что z и D не зависят от u_i и являются нижне- и верхнетреугольными матрицами соответственно, получаем, что L_j^i вообще не зависит от параметров представления при $i < j$ и $L_j^i = L_j^i(u_j, \dots, u_i)$ при $i \geq j$. Как следствие, миноры $L_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_m} = L_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_m}(u_{j_1} \dots u_{i_m})$.

Из формулы (3.21) следует, что миноры матрицы монодромии $T_N(U)_{j_1 j_2 \dots j_m}^{i_1 i_2 \dots i_m}$ не зависят от $u_{i_{m+1}}^{(1)}, \dots, u_n^{(1)}$ (а также от $u_1^{(N)}, \dots, u_{j_1-1}^{(N)}$), т.е. ни в один минор из интересующего нас семейства $A_m(u)$ (3.22) параметр $u_n^{(1)}$ не входит. Этот факт можно использовать для внесения дополнительных параметров в матрицу U .

Рассмотрим две матрицы монодромии $T_N(U)$ и $T_N(U')$, где U' отличается от U только заменой $u_n^{(1)}$ на некоторый произвольный параметр v . Для них верно соотношение

$$A_m(U) = A_m(U'), \quad 1 \leq m \leq n-1. \quad (4.22)$$

Аналог формулы (4.21) для миноров $T_N(U)_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_m}$ верен только в том случае, если v имеет такую же зависимость от спектрального параметра, как и u_i , т.е. $v = u - x$ при некотором произвольном x . В этой ситуации $S_i^{(k)}$ не зависит от u и формулы (4.18) и (4.19) имеют место при любом сдвиге $u \rightarrow u + \lambda$; это необходимо, чтобы использовать (4.17) для $S_i^{(k)}$ и $L_s(u + \lambda)_n^m$ (см. выражения (3.18) и (3.21)). Теперь новый параметр v из U' в (4.22) можно переносить на любое место при помощи операторов S_i .

Например, рассмотрим следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} A_m(U)S_{n-1}^{(1)}(v - u_{n-1}^{(1)}) &= A_m(U')S_{n-1}^{(1)}(v - u_{n-1}^{(1)}) = \\ &= S_{n-1}^{(1)}(v - u_{n-1}^{(1)})A_m(U'') = S_{n-1}^{(1)}(u_{n-1}^{(1)} - v)A_m(\tilde{U}). \end{aligned} \quad (4.23)$$

При этом матрица параметров претерпевает следующие превращения:

$$\begin{aligned} U = \begin{pmatrix} \dots & u_{n-1}^{(1)} & u_n^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} &\longrightarrow U' = \begin{pmatrix} \dots & u_{n-1}^{(1)} & v \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \longrightarrow \\ \longrightarrow U'' = \begin{pmatrix} \dots & v & u_{n-1}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} &\longrightarrow \tilde{U} = \begin{pmatrix} \dots & v & u_n^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

В (4.23) первое и третье равенства выполняются благодаря свойству (4.22), а второе – по определению оператора перестановки (4.18).

Таким образом, переставляя $A_m(U)$ с оператором $S_{n-1}^{(1)}(v - u_{n-1}^{(1)})$, зависящим от произвольного параметра $v = u - x$, мы получаем тот же минор матрицы монодромии, у которого в матрице параметров элемент $u_{n-1}^{(1)}$ заменен на v . Применяя к $A_m(\tilde{U})$ комбинации других операторов перестановок $S_i^{(k)}$ и используя свойство (4.22), можно заменить любой элемент матрицы U произвольным параметром v .

Рассмотрим теперь оператор W , который приводит к следующему преобразованию матрицы параметров:

$$A_m(U)W = WA_m(V_{n-1}), \quad (4.25)$$

где

$$V_{n-1} = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} & v_{n-1,1}^{(1)} & \cdots & v_{n-1,n-1}^{(1)} \\ u_1^{(2)} & v_{n-1,1}^{(2)} & \cdots & v_{n-1,n-1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(N)} & v_{n-1,1}^{(N)} & \cdots & v_{n-1,n-1}^{(N)} \end{pmatrix}, \quad (4.26)$$

т. е. для всех $i = 1, \dots, N$ происходит замена параметров $\mathbf{u}^{(i)} = (u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, \dots, u_n^{(i)})$ i -го L -оператора на строку

$$\mathbf{v}^{(i)} = (u_1^{(i)}, v_{n-1,1}^{(i)}, \dots, v_{n-1,n-1}^{(i)}) \quad (4.27)$$

с новыми параметрами $v_{n-1,k}^{(i)}$, $1 \leq i \leq N$, $1 \leq k \leq n-1$. Таким образом, $A_m(V_{n-1})$ — миноры, построенные по матрице монодромии

$$T_N(V_{n-1}) = L_1(\mathbf{v}^{(1)})L_2(\mathbf{v}^{(2)}) \dots L_N(\mathbf{v}^{(N)}). \quad (4.28)$$

Удобство введенной в (4.26) нумерации новых параметров станет очевидным далее.

Оператор W зависит от элементов обеих матриц U , V_{n-1} ; кроме того, из выражений (4.18) и (4.20) видно, что в W встречаются только разности элементов, один из которых берется из матрицы U , второй — из V_{n-1} . Уравнение

$$A_m(U)W(U, V_{n-1}) = W(U, V_{n-1})A_m(V_{n-1}) \quad (4.29)$$

является основным при построении рекуррентной процедуры поиска собственных функций $\Phi_{\mathbf{x}}$ (3.24), которая изложена в следующем разделе.

4.4. Действие оператора $T_N(V_{n-1})$ на специальном подпространстве. Правая и левая части основного уравнения (4.29) определены на пространстве $\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{V}_2 \otimes \dots \otimes \mathbb{V}_N$ и, следовательно, являются операторами, действующими на функции $f(z^{(1)}, z^{(2)}, \dots, z^{(N-1)}, z^{(N)})$, которые зависят от переменных $z^{(m)}$ в m -м узле. Рассмотрим действие $T_N(V_{n-1})$ на подпространстве $\mathbb{U} \subset \mathbb{V}_1 \times \dots \times \mathbb{V}_N$ функций вида

$$f(z^{(1)}, z^{(2)}, \dots, z^{(N-1)}, z^{(N)}) = C(V_{n-1})\Phi(z'^{(1)}, z'^{(2)}, \dots, z'^{(N-1)}, z'^{(N)}), \quad (4.30)$$

где мы использовали компактное обозначение

$$C(V_{n-1}) = C_1(\mathbf{v}^{(1)})C_2(\mathbf{v}^{(2)}) \dots C_N(\mathbf{v}^{(N)}) \quad (4.31)$$

для произведения операторов $C_k(\mathbf{v}^{(k)})$, определенных в п. 4.1. Здесь $C_k(\mathbf{v}^{(k)})$ – оператор циклической перестановки индексов в k -м узле, зависящий от параметров (4.27), а $\mathbf{z}'^{(k)}$ – правый нижний блок матрицы $\mathbf{z}^{(k)}$ размера $(n-1) \times (n-1)$ (см. формулу (2.22)).

Рассмотрим действие оператора $L_k(\mathbf{v}^{(k)})_j^n$, $1 \leq j \leq n-1$, на функции такого вида. По определению оператора C (4.15)

$$L_k(\mathbf{v}^{(k)})_j^n f(\mathbf{z}^{(1)}, \dots, \mathbf{z}^{(N)}) = C(V_{n-1}) L_k(\mathbf{v}^{(k)})_{j+1}^1 \Phi(\mathbf{z}'^{(1)}, \dots, \mathbf{z}'^{(N)}). \quad (4.32)$$

Для $2 \leq k \leq n$ матричный элемент $L_k(\mathbf{v}^{(k)})_j^1 = -\partial_{z_{1j}^{(k)}}$ согласно (3.6) и его действие на функцию, зависящую только от $\mathbf{z}'^{(k)}$, дает ноль (z_{1j} не входят в матрицу $\mathbf{z}'$ (2.22)), так что

$$L_k(\mathbf{v}^{(k)})_j^n f = 0, \quad 1 \leq j \leq n-1. \quad (4.33)$$

Из определения квантового минора (3.16) следует, что также и

$$L_k(\mathbf{v}^{(k)})_{j_1 \dots j_{m-1} j_m}^{i_1 \dots i_{m-1} i_m} f = 0 \quad (4.34)$$

для всех $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{m-1} \leq n-1$, $1 \leq j_1 < \dots < j_{m-1} < j_m \leq n-1$, $1 \leq k \leq N$ (существенным здесь является ограничение $j_m \leq n-1$, т.е. $j_m \neq n$).

Поддействуем теперь на функцию $f \in \mathbb{U}$ матричными элементами $L_k(\mathbf{v}^{(k)})_j^i$ с индексами $1 \leq i, j \leq n-1$. Снова согласно выражению (4.6)

$$L_k(\mathbf{v}^{(k)})_j^i f(\mathbf{z}^{(1)}, \dots, \mathbf{z}^{(N)}) = C(V_{n-1}) L_k(\mathbf{v}^{(k)})_{j+1}^{i+1} \Phi(\mathbf{z}'^{(1)}, \dots, \mathbf{z}'^{(N)}). \quad (4.35)$$

Воспользовавшись рекуррентной формулой (3.7), получим, что

$$L_k(\mathbf{v}^{(k)})_{j+1}^{i+1} = \ell_k(\mathbf{v}^{(k)})_j^i - z_{i1}^{(k)} \partial_{z_{j1}^{(k)}}, \quad 1 \leq i, j \leq n-1, \quad (4.36)$$

где $\ell_k(\mathbf{v}^{(k)})$ – L -оператор для алгебры $sl_{n-1}(\mathbb{C})$, зависящий от набора параметров

$$\mathbf{v}^{(k)} = (v_{n-1,1}^{(k)}, v_{n-1,2}^{(k)}, \dots, v_{n-1,n-1}^{(k)}) \quad (4.37)$$

и действующий на переменные, входящие в блок $\mathbf{z}'^{(k)}$. При действии на функцию $\Phi = \Phi(\mathbf{z}'^{(k)})$ второе слагаемое (4.36) дает ноль, и мы получаем равенство

$$L_k(\mathbf{v}^{(k)})_j^i f = C(V_{n-1}) \ell_k(\mathbf{v}^{(k)})_j^i \Phi(\mathbf{z}'^{(1)}, \dots, \mathbf{z}'^{(N)}), \quad 1 \leq i, j \leq n-1. \quad (4.38)$$

Для миноров согласно формуле (3.16) имеем, что

$$L_k(\mathbf{v}^{(k)})_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_m} f = C(V_{n-1}) \ell_k(\mathbf{v}^{(k)})_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_m} \Phi(\mathbf{z}'^{(1)}, \dots, \mathbf{z}'^{(N)}), \quad (4.39)$$

где индексы принимают значения $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n-1$, $1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n-1$. Здесь $\ell_k(\mathbf{v}^{(k)})_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_m}$ – минор, построенный по L -оператору $\ell_k(\mathbf{v}^{(k)})$.

С помощью выражений (4.39) и (4.34) можно найти действие оператора $A_m(V_{n-1})$ на $f \in \mathbb{U}$. Для этого воспользуемся формулой (3.21) и увидим, что все слагаемые с $k_m^{(i)} = n$ равны нулю и суммирование можно вести по наборам $\{k^{(i)}\}$ таким, что

$1 \leq k_1^{(i)} < \dots < k_{m-1}^{(i)} < k_m^{(i)} \leq n-1$. Для оставшихся миноров воспользуемся выражением (4.39) и получим, что

$$\begin{aligned} T_N(V_{n-1})_{1\dots m}^{1\dots m} f(z^{(1)}, \dots, z^{(N)}) &= C(V_{n-1}) \times \\ &\times \sum_{m=1}^{N-1} \left(\sum_{k_1^{(m)} < \dots < k_m^{(m)} \leq n-1} \ell_1(\mathbf{v}'^{(1)})_{k_1^{(1)} \dots k_m^{(1)}}^{1\dots m} \times \right. \\ &\times \ell_2(\mathbf{v}'^{(2)})_{k_1^{(2)} \dots k_m^{(2)}}^{k_1^{(1)} \dots k_m^{(1)}} \dots \ell_N(\mathbf{v}'^{(N)})_{1\dots m}^{k_1^{(N-1)} \dots k_m^{(N-1)}} \Big) \Phi. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Произведение миноров в правой части по той же формуле (3.21) представляет собой минор $t_N(\tilde{V}_{n-1})_{1\dots m}^{1\dots m}$ матрицы монодромии $t_N(\tilde{V}_{n-1})$ $sl_{n-1}(\mathbb{C})$ -инвариантной спиновой цепочки:

$$t_N(\tilde{V}_{n-1}) = \ell_1(\mathbf{v}'^{(1)}) \ell_2(\mathbf{v}'^{(2)}) \dots \ell_N(\mathbf{v}'^{(N)}), \quad (4.41)$$

где матрица параметров $\tilde{V}_{n-1}$ имеет вид

$$\tilde{V}_{n-1} = \begin{pmatrix} v_{n-1,1}^{(1)} & v_{n-1,2}^{(1)} & \dots & v_{n-1,n-1}^{(1)} \\ v_{n-1,1}^{(2)} & v_{n-1,2}^{(2)} & \dots & v_{n-1,n-1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n-1,1}^{(N)} & v_{n-1,2}^{(N)} & \dots & v_{n-1,n-1}^{(N)} \end{pmatrix}, \quad (4.42)$$

т. е. получается из (4.26) удалением первого столбца. Минор $t_N(\tilde{V}_{n-1})_{1\dots m}^{1\dots m}$ является представителем семейства коммутирующих операторов (3.22) для $sl_{n-1}(\mathbb{C})$ -инвариантной спиновой цепочки; обозначим его $a_m(V_{n-1})$. Окончательно, выражение (4.40) дает правило, по которому $A_m(V_{n-1})$ действует на $f \in \mathbb{U}$:

$$A_m(V_{n-1})f(z^{(1)}, \dots, z^{(N)}) = C(V_{n-1})a_m(\tilde{V}_{n-1})\Phi(z'^{(1)}, \dots, z'^{(N)}). \quad (4.43)$$

4.5. Рекуррентная процедура. Применим правую и левую части уравнения (4.29) к $f \in \mathbb{U}$ и воспользуемся правилом (4.43):

$$A_m(U)W(U, V_{n-1})f = W(U, V_{n-1})C(V_{n-1})a_m(\tilde{V}_{n-1})\Phi(z'^{(1)}, \dots, z'^{(N)}). \quad (4.44)$$

Если $m = n-1$, то

$$a_{n-1}(\tilde{V}_{n-1}) = \text{qdet } t_N(\tilde{V}_{n-1}) = \prod_{s=1}^N v_{n-1,1}^{(s)} v_{n-1,2}^{(s)} \dots v_{n-1,n-1}^{(s)}, \quad (4.45)$$

так что пространство функций $W(U, V_{n-1})\mathbb{U}$ является собственным для $A_{n-1}(U)$ при произвольной функции Φ . Собственное значение при этом дается правой частью равенства (4.45). Если теперь мы положим $v_{n-1,i}^{(k)} = u - x_{n-1,i}^{(k)}$, то получим, что

$$A_{n-1}(U)(W(U, V_{n-1})f) = \prod_{k=1}^N \prod_{i=1}^{n-1} (u - x_{n-1,i}^{(k)}) (W(U, V_{n-1})f). \quad (4.46)$$

Такая параметризация собственных значений совпадает с параметризацией, введенной в выражении (3.24), что оправдывает использование обозначений (4.26) для элементов матрицы V_{n-1} .

Таким образом, на пространстве $W(U, V_{n-1})\mathbb{U}$ минор $A_{n-1}(u) = T_N(U)_{1\dots n-1}^{1\dots n-1}$ принимает постоянное значение. Задача одновременной диагонализации оставшихся операторов $A_m(U)$, $m = 1, \dots, n-2$, из коммутирующего семейства сводится согласно равенству (4.44) к задаче диагонализации семейства $a_m(\tilde{V}_{n-1})$, $m = 1, \dots, n-2$, на пространстве функций $\Phi = \Phi(z^{(1)}, \dots, z^{(N)})$. Следовательно, мы получили такую же задачу для алгебры рангом ниже, к которой мы можем применить метод, развитый в п. 4.2, 4.3.

Для ее решения построим оператор $W(\tilde{V}_{n-1}, V_{n-2})$, действующий на пространстве функций $\Phi = \Phi(z^{(1)}, \dots, z^{(N)})$, который удовлетворяет аналогу уравнения (4.29):

$$a_m(\tilde{V}_{n-1})W(\tilde{V}_{n-1}, V_{n-2}) = W(\tilde{V}_{n-1}, V_{n-2})a_m(V_{n-2}), \quad (4.47)$$

где V_{n-2} – матрица размера $N \times (n-1)$, в которую вводятся новые параметры $v_{n-2,i}^{(k)} = u - x_{n-2,i}^{(k)}$:

$$V_{n-2} = \begin{pmatrix} v_{n-1,1}^{(1)} & v_{n-2,1}^{(1)} & \cdots & v_{n-2,n-2}^{(1)} \\ v_{n-1,1}^{(2)} & v_{n-2,1}^{(2)} & \cdots & v_{n-2,n-2}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n-1,1}^{(N)} & v_{n-2,1}^{(N)} & \cdots & v_{n-2,n-2}^{(N)} \end{pmatrix}. \quad (4.48)$$

Далее рассмотрим уравнение (4.47) на пространстве функций

$$f(z^{(1)}, \dots, z^{(N)}) = C(V_{n-2})\Phi(z''^{(1)}, \dots, z''^{(N)}),$$

где $C(V_{n-2}) = C_1(v_{n-2}^{(1)})C_2(v_{n-2}^{(2)})\dots C_N(v_{n-2}^{(N)})$, параметры операторов циклической перестановки $v_{n-2}^{(k)} = (v_{n-1,1}^{(k)}, v_{n-2,1}^{(k)}, \dots, v_{n-2,n-2}^{(k)})$ – суть строки матрицы V_{n-2} , а $z''^{(k)}$ есть правый нижний блок матрицы z размера $(n-2) \times (n-2)$. Подпространство функций $W(\tilde{V}_{n-1}, V_{n-2})f$ является собственным для $a_{n-2}(V_{n-1})$ (а значит, в силу (4.44) определяет собственное подпространство и для $A_{n-2}(U)$). Собственное значение представляет из себя квантовый детерминант матрицы монодромии для $sl_{n-2}(\mathbb{C})$, т. е. равно произведению всех введенных выше параметров $v_{n-2,i}^{(k)} = u - x_{n-2,i}^{(k)}$:

$$t_N(V_{n-1})_{1\dots n-2}^{1\dots n-2}W(\tilde{V}_{n-1}, V_{n-2})f = \prod_{s=1}^N \prod_{i=1}^{n-2} (u - x_{n-2,i})W(\tilde{V}_{n-1}, V_{n-2})f. \quad (4.49)$$

Таким образом, пространство функций

$$f = W(U, V_{n-1})C(V_{n-1})W(\tilde{V}_{n-1}, V_{n-2})C(V_{n-2})\Phi(z''^{(1)}, \dots, z''^{(N)}) \quad (4.50)$$

является собственным одновременно для $A_{n-1}(U)$ и $A_{n-2}(U)$. Продолжая процедуру дальше, мы сможем одновременно диагонализировать все операторы из коммутирующего семейства.

В следующем разделе мы рассмотрим применение данной рекуррентной процедуры в некоторых простых частных случаях.

5. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

5.1. $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантная спиновая цепочка. Задача поиска собственных функций $T(u)_1^1$ для однородной $sl_2(\mathbb{C})$ -инвариантной спиновой цепочки рассматривалась в работе [15]. Приводимые ниже формулы являются обобщением результатов статьи [15] на случай неоднородной цепочки.

Для $sl_2(\mathbb{C})$ -инвариантной спиновой цепочки пространство представления состоит из L_2 -интегрируемых функций $f(z)$. L -оператор, построенный с помощью равенств (2.19) и (3.1), имеет следующий вид:

$$L(u) = L(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u - \sigma_1 & \partial_z \\ 0 & u - \sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}^{-1}. \quad (5.1)$$

Переменные в k -м узле обозначим z_k и $\bar{z}_k$ (упрощая обозначения раздела 3); соответствующие производные обозначим $\partial_k \equiv \partial_{z_k}$, $\bar{\partial}_k \equiv \partial_{\bar{z}_k}$. Параметры $\sigma_{1,2}$ удовлетворяют условию (2.11), т. е. $\sigma_2 = 1 - \sigma_1$ и $u_1 = u - \sigma_1$, $u_2 = u + \sigma_1 - 1$. Матрица монодромии (3.20) определяется равенством

$$T(U) = L_1(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}) L_2(u_1^{(2)}, u_2^{(2)}) \dots L_N(u_1^{(N)}, u_2^{(N)}) = \begin{pmatrix} A_N(u) & B_N(u) \\ C_N(u) & D_N(u) \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

и матрица параметров содержит два столбца и N строк. Операторы $S_i^{(k)}$ имеют вид

$$S_1^{(k)}(u_1^{(k)} - u_2^{(k)}) = [\partial_k]^{u_1^{(k)} - u_2^{(k)}}, \quad S_2^{(k)}(u_1^{(k)} - u_2^{(k+1)}) = [z_{k+1} - z_k]^{u_1^{(k)} - u_2^{(k+1)}}. \quad (5.3)$$

Оператор W , удовлетворяющий уравнению (4.29), можно построить, например, следующим образом. Рассмотрим оператор $R_{12}(u_1, u_2|v_2)$,

$$R_{12}(u_1, u_2|v_2) = [z_1 - z_2]^{u_2 - u_1} [\partial_1]^{u_2 - v_2} [z_1 - z_2]^{u_1 - v_2}, \quad (5.4)$$

переставляющий параметры u_2 и v_2 в произведении двух L -операторов:

$$R_{12}(u_1, u_2|v_2) L_1(u_1, u_2) L_2(v_1, v_2) = L_1(u_1, v_2) L_2(v_1, u_2) R_{12}(u_1, u_2|v_2) \quad (5.5)$$

(и производящий такое же преобразование в антиголоморфном секторе).

Возьмем исходную матрицу монодромии (5.2) и введем в L -оператор в первом узле произвольный второй параметр $v_2^{(n)}$ вместо $u_2^{(1)}$: $L_1(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}) \rightarrow L_1(u_1^{(1)}, v_2^{(n)})$. Легко построить зависящий от всего набора параметров U оператор Λ_N :

$$\Lambda_N = R_{12}(u_1^{(1)}, u_2^{(2)}|v_2^{(N)}) R_{23}(u_1^{(2)}, u_2^{(3)}|v_2^{(N)}) \dots R_{N-1,N}(u_1^{(N-1)}, u_2^{(N)}|v_2^{(N)}), \quad (5.6)$$

осуществляющий следующее преобразование:

$$\begin{aligned} L_1(u_1^{(1)}, v_2^{(n)}) L_2(u_1^{(2)}, u_2^{(2)}) \dots L_N(u_1^{(n)}, u_2^{(n)}) \Lambda_N = \\ = \Lambda_N L_1(u_1^{(1)}, u_2^{(2)}) L_2(u_1^{(2)}, u_2^{(3)}) \dots L_{N-1}(u_1^{(N-1)}, u_2^{(N)}) L_N(u_1^{(N)}, v_2^{(n)}). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Таким образом, параметр $v_2^{(N)}$ перемещается из L -оператора в первом узле в L -оператор в N -м узле, и все параметры $u_2^{(k)}$ сдвигаются из своих L -операторов в k -х узлах

в соседние L -операторы в $(k-1)$ -х узлах. Первая строка матрицы $L_1(u_1^{(1)}, v_2^{(N)})$ не зависит от параметра $v_2^{(N)}$, так что после умножения полученного матричного соотношения слева на строку $(1 \ 0)$ мы можем сделать замену $L_1(u_1^{(1)}, v_2^{(N)}) \rightarrow L_1(u_1^{(1)}, u_2^{(1)})$:

$$\begin{aligned} (1 \ 0)L_1(u_1^{(1)}, u_2^{(1)})L_2(u_1^{(2)}, u_2^{(2)}) \dots L_N(u_1^{(N)}, u_2^{(N)})\Lambda_N = \\ = \Lambda_N(1 \ 0)L_1(u_1^{(1)}, u_2^{(2)})L_2(u_1^{(2)}, u_2^{(3)}) \dots L_{N-1}(u_1^{(N-1)}, u_2^{(N)})L_N(u_1^{(N)}, v_2^{(N)}). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Перепишем предыдущую формулу в компактных обозначениях:

$$L_1(u_1^{(1)}, u_2^{(1)})L_2(u_1^{(2)}, u_2^{(2)}) \dots L_N(u_1^{(N)}, u_2^{(N)}) = \begin{pmatrix} A_N & B_N \\ C_N & D_N \end{pmatrix}, \quad (5.9)$$

введя новую матрицу монодромии для цепочки, содержащей $N-1$ узел

$$L_1(u_1^{(1)}, u_2^{(2)})L_2(u_1^{(2)}, u_2^{(3)}) \dots L_{N-1}(u_1^{(N-1)}, u_2^{(N)}) = \begin{pmatrix} A_{N-1} & B_{N-1} \\ C_{N-1} & D_{N-1} \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

Рассматриваемое соотношение принимает вид

$$(1 \ 0) \begin{pmatrix} A_N & B_N \\ C_N & D_N \end{pmatrix} \Lambda_N = \Lambda_N(1 \ 0) \begin{pmatrix} A_{N-1} & B_{N-1} \\ C_{N-1} & D_{N-1} \end{pmatrix} L_N(u_1^{(N)}, v_2^{(N)}).$$

Набор первых параметров $(u_1^{(1)}, \dots, u_1^{(N-1)})$ в новой матрице монодромии получается из набора $(u_1^{(1)}, \dots, u_1^{(N-1)}, u_1^{(N)})$ исходной матрицы монодромии просто отбрасыванием параметра $u_1^{(N)}$ в N -м узле, и каждый параметр $u_1^{(k)}$ остается на своей позиции с номером k . Набор вторых параметров $(u_2^{(2)}, \dots, u_2^{(N)})$ в новой матрице монодромии получается из набора $(u_2^{(1)}, \dots, u_2^{(N-1)}, u_2^{(N)})$ исходной матрицы монодромии по-другому: отбрасывается параметр $u_2^{(1)}$ в первом узле, и каждый параметр $u_2^{(k)}$ перемещается в позицию с номером $k-1$. На следующем шаге строим оператор Λ_{N-1} ,

$$\Lambda_{N-1} = R_{12}(u_1^{(1)}, u_2^{(3)}|v_2^{(N-1)})R_{23}(u_1^{(2)}, u_2^{(4)}|v_2^{(N-1)}) \dots R_{N-2, N-1}(u_1^{(N-2)}, u_2^{(N)}|v_2^{(N-1)}),$$

который производит преобразование

$$\begin{aligned} L_1(u_1^{(1)}, v_2^{(N-1)})L_2(u_1^{(2)}, u_2^{(3)}) \dots L_{N-1}(u_1^{(N-1)}, u_2^{(N)})\Lambda_{N-1} = \\ = \Lambda_{N-1}L_1(u_1^{(1)}, u_2^{(3)})L_2(u_1^{(2)}, u_2^{(4)}) \dots L_{N-2}(u_1^{(N-2)}, u_2^{(N)})L_{N-1}(u_1^{(N-1)}, v_2^{(N-1)}). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Для новой матрицы монодромии, содержащей $N-2$ узла,

$$L_1(u_1^{(1)}, u_2^{(3)})L_2(u_1^{(2)}, u_2^{(4)}) \dots L_{N-2}(u_1^{(N-2)}, u_2^{(N)}) = \begin{pmatrix} A_{N-2} & B_{N-2} \\ C_{N-2} & D_{N-2} \end{pmatrix}, \quad (5.12)$$

и получаем соотношение

$$(1 \ 0) \begin{pmatrix} A_{N-1} & B_{N-1} \\ C_{N-1} & D_{N-1} \end{pmatrix} \Lambda_{N-1} = \Lambda_{N-1}(1 \ 0) \begin{pmatrix} A_{N-2} & B_{N-2} \\ C_{N-2} & D_{N-2} \end{pmatrix} L_{N-1}(u_1^{(N-1)}, v_2^{(N-1)}).$$

Продолжаем итерационный процесс дальше: на $(k+1)$ -м шаге возникает оператор Λ_{N-k} ,

$$\begin{aligned}\Lambda_{N-k} &= R_{12}(u_1^{(1)}, u_2^{(k+2)} | v_2^{(N-k)}) R_{23}(u_1^{(2)}, u_2^{(k+3)} | v_2^{(N-k)}) \dots \\ &\dots R_{N-k-1, N-k}(u_1^{(N-k-1)}, u_2^{(N)} | v_2^{(N-k)}),\end{aligned}$$

удовлетворяющий равенству

$$\begin{aligned}L_1(u_1^{(1)}, v_2^{(N-k)}) L_2(u_1^{(2)}, u_2^{(k+2)}) \dots L_{N-k}(u_1^{(N-k)}, u_2^{(N)}) \Lambda_{N-k} &= \\ = \Lambda_{N-k} L_1(u_1^{(1)}, u_2^{(k+1)}) L_2(u_1^{(2)}, u_2^{(k+2)}) \dots L_{N-k-1}(u_1^{(N-k-1)}, u_2^{(N)}) &\times \\ \times L_{N-k}(u_1^{(N-k)}, v_2^{(N-k)}),\end{aligned}$$

и соответствующее рекуррентное соотношение для матриц монодромии принимает вид

$$\begin{aligned}(1 \ 0) \begin{pmatrix} A_{N-k} & B_{N-k} \\ C_{N-k} & D_{N-k} \end{pmatrix} \Lambda_{N-k} &= \\ = \Lambda_{N-k} (1 \ 0) \begin{pmatrix} A_{N-k-1} & B_{N-k-1} \\ C_{N-k-1} & D_{N-k-1} \end{pmatrix} L_{N-k}(u_1^{(N-k)}, v_2^{(N-k)}).\end{aligned}$$

Выполнив шаг за шагом $N-1$ преобразование, получим соотношение

$$(1 \ 0) \begin{pmatrix} A_N(u) & B_N(u) \\ C_N(u) & D_N(u) \end{pmatrix} \Lambda = \Lambda (1 \ 0) L_1(u_1^{(1)}, u_2^{(N)}) L_2(u_1^{(2)}, v_2^{(2)}) \dots L_N(u_1^{(N)}, v_2^{(N)}), \quad (5.13)$$

где

$$\Lambda = \Lambda_N \Lambda_{N-1} \dots \Lambda_2. \quad (5.14)$$

В правой части выражения (5.13) можно сделать замену $u_2^{(N)} \rightarrow v_2^{(1)}$. В итоге оператор Λ осуществляет преобразование подобия, в результате которого первая строка исходной матрицы монодромии преобразуется к первой строке другой матрицы монодромии так, что набор вторых параметров изменяется – все параметры становятся произвольными: $(u_2^{(1)}, u_2^{(2)}, \dots, u_2^{(N)}) \rightarrow (v_2^{(1)}, v_2^{(2)}, \dots, v_2^{(N)})$. Т. е. мы получили основное уравнение (4.29), в котором происходит преобразование матрицы параметров

$$U = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} & u_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots \\ u_1^{(N)} & u_2^{(N)} \end{pmatrix} \longrightarrow V_1 = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} & v_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots \\ u_1^{(N)} & v_2^{(N)} \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

для минора $A_1(U) = T(U)_1^1$ с помощью оператора $W(U, V_1)$, который мы построили явным образом: $W(U, V_1) = \Lambda$.

Продемонстрируем далее работу формул п. 4.4 на данном примере. Подействуем правой и левой частью соотношения (5.13) на функции вида

$$f = C(V_1) \cdot 1,$$

где

$$C(V_1) = C_1(u_1^{(1)}, v_2^{(1)}) \dots C_N(u_1^{(N)}, v_2^{(N)})$$

(множество таких функций образует пространство $\mathbb{U}$ (4.30), так как матрица z' является пустой). Действуя на эти функции нужными матричными элементами L -оператора, получаем, что

$$L_k(u_1^{(k)}, v_2^{(k)})_1^1 f = C(V_1) L_k(u_1^{(k)}, v_2^{(k)})_2^2 \cdot 1 = C(V_1)(v_2^{(k)} + z_k \partial_k) \cdot 1 = v_2^{(k)} f.$$

Таким образом, действие оператора $A_N(u)\Lambda$ в левой части (5.13) на функцию f сводится к умножению ее на $v_2^{(1)} \dots v_2^{(N)}$. Следовательно, собственные функции $\Phi_x(z_1, \dots, z_N)$ оператора $A_1(U)$, для которых верно равенство

$$A_1(U)\Phi_x = \prod_{k=1}^N (u - x^{(k)})\Phi_x, \quad (5.16)$$

имеют вид

$$\Phi_x(z_1, \dots, z_N) = W(U, V_1)C(V_1) \cdot 1, \quad (5.17)$$

где

$$v_2^{(1)} = u - x^{(1)}, \quad v_2^{(2)} = u - x^{(2)}, \quad \dots, \quad v_2^{(N)} = u - x^{(N)}.$$

5.2. $SL(3, \mathbb{C})$ -инвариантная спинная цепочка. Генераторы алгебры $sl_3(\mathbb{C})$ действуют на пространстве функций $f(z) = f(z_{21}, z_{31}, z_{32})$, а каждый L -оператор содержит три параметра: $L_k(u^{(k)}) = L_k(u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, u_3^{(k)})$. Мы строим общую систему собственных функций для двух операторов: $A_1(U) = T_N(U)_1^1$ степени N по спектральному параметру и $A_2(U) = T_N(U)_{12}^{12}$ степени $2N$ по спектральному параметру.

В этом случае понадобятся два шага рекуррентной процедуры. Цепочка преобразований матрицы параметров U в уравнении (4.29) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} U = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & u_3^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1^{(N)} & u_2^{(N)} & u_3^{(N)} \end{pmatrix} &\xrightarrow{W(U, V_2)} V_2 = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} & v_{21}^{(1)} & v_{22}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1^{(N)} & v_{21}^{(N)} & v_{22}^{(N)} \end{pmatrix} \longrightarrow \\ \longrightarrow \tilde{V}_2 = \begin{pmatrix} v_{21}^{(1)} & v_{22}^{(1)} \\ \vdots & \vdots \\ v_{21}^{(N)} & v_{22}^{(N)} \end{pmatrix} &\xrightarrow{W(\tilde{V}_2, V_1)} V_1 = \begin{pmatrix} v_{21}^{(1)} & v_{11}^{(1)} \\ \vdots & \vdots \\ v_{21}^{(N)} & v_{11}^{(N)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

На первом шаге в матрицу параметров при помощи оператора $W(U, V_2)$ вводятся новые элементы $v_{21}^{(k)}, v_{22}^{(k)}$ (см. уравнение (4.29)):

$$A_m(U)W(U, V_2) = W(U, V_2)A_m(V_2), \quad m = 1, 2. \quad (5.19)$$

Далее рассмотрим пространство функций $\mathbb{U}$ (4.30). Так как в данном случае $z' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_{32} & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{U}$ состоит из функций, имеющих вид $C(V_2)\Phi(z_{32}^{(1)}, \dots, z_{32}^{(N)})$, где

$$C(V_2) = C_1(v^{(1)}) \dots C_N(v^{(N)}).$$

Подпространство $W(U, V_2)\mathbb{U}$ является собственным для $A_2(U)$ (см. п. 4.4):

$$\begin{aligned} A_2(U)W(U, V_2)f(z^{(1)}, \dots, z^{(N)}) &= W(U, V_2)A_2(V_2)f(z^{(1)}, \dots, z^{(N)}) = \\ &= W(U, V_2)C(V_2)a_2(\tilde{V}_2)\Phi(z_{32}^{(1)}, \dots, z_{32}^{(N)}) = \\ &= W(U, V_2)C(V_2)\left(\prod_{k=1}^N v_{21}^{(k)}v_{22}^{(k)}\right)\Phi(z_{32}^{(1)}, \dots, z_{32}^{(N)}) = \\ &= \left(\prod_{k=1}^N v_{21}^{(k)}v_{22}^{(k)}\right)W(U, V_2)f(z^{(1)}, \dots, z^{(N)}). \end{aligned}$$

Второе равенство в цепочке имеет место благодаря выражению (4.44). Здесь $a_2(\tilde{V}_2)$ – минор матрицы монодромии $t(\tilde{V}_2)$ $sl_2(\mathbb{C})$ -инвариантной спиновой цепочки, генераторы алгебры для которой действуют по переменным $z_{32}^{(1)}, \dots, z_{32}^{(N)}$. Он является квантовым детерминантом для $t(\tilde{V}_2)$ и равен константе: $a_2(\tilde{V}_2) = \prod_{k=1}^N v_{21}^{(k)}v_{22}^{(k)}$. Задача поиска собственных функций $A_1(U)$ на пространстве $\mathbb{U}$ сводится согласно формуле (4.43) к аналогичной задаче для оператора $a_1(\tilde{V}_2)$:

$$\begin{aligned} A_1(U)W(U, V_2)f(z^{(1)}, \dots, z^{(N)}) &= W(U, V_2)A_1(V_2)f(z^{(1)}, \dots, z^{(N)}) = \\ &= W(U, V_2)C(V_2)a_1(\tilde{V}_2)\Phi(z_{32}^{(1)}, \dots, z_{32}^{(N)}). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Диагонализацию $a_1(V_2)$ на пространстве функций Φ , зависящих только от $z_{32}^{(k)}$, можно выполнить с помощью формул, полученных в п. 5.1. Собственные функции $a_1(V_2)$ имеют вид (см. выражение (5.17))

$$\Phi(z_{32}^{(1)}, \dots, z_{32}^{(N)}) = W(\tilde{V}_2, V_1)C(V_1) \cdot 1,$$

где $C(V_1) = C_1(v_1^{(1)}) \dots C_N(v_1^{(N)})$ и $v_1^{(k)}$ – строки матрицы V_1 : $v_1^{(k)} = (v_{21}^{(k)}, v_{11}^{(k)})$, а оператор $W(\tilde{V}_2, V_1)$ строится посредством процедуры, описанной в разделе 4.

Для $W(U, V_2)$ явные формулы можно получить, используя аналогичные идеи. Применим сначала к $A_m(U)$ справа оператор $S_2^{(1)}(v_{21}^{(N)} - u_2^{(1)})$, после чего первая строка матрицы U (5.18) превратится в $(u_1^{(1)}, v_{21}^{(N)}, v_{22}^{(N)})$ (здесь мы воспользовались тем, что элемент $(1n)$ матрицы U можно менять произвольно, не изменяя $A_m(U)$ (см. п. 4.3)).

Далее рассмотрим оператор, который перемещает последние два элемента первой строки на место соответствующих двух элементов $(u_2^{(N)}, u_3^{(N)})$ N -й строки, сдвигая при этом все остальные элементы в двух последних столбцах:

$$\begin{pmatrix} u_1^{(1)} & v_{21}^{(N)} & v_{22}^{(N)} \\ u_1^{(2)} & u_2^{(2)} & u_3^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1^{(N)} & u_2^{(N)} & u_3^{(N)} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} u_1^{(1)} & u_2^{(2)} & u_3^{(2)} \\ u_1^{(2)} & u_2^{(3)} & u_3^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1^{(N)} & v_{21}^{(N)} & v_{22}^{(N)} \end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

Обозначим его Λ_N , так как он выполняет преобразование матрицы параметров, аналогичное (5.7), которое в $SL(2, \mathbb{C})$ -случае выполнял оператор Λ_N (5.6).

После применения Λ_N первую строку матрицы параметров в правой части (5.21) превращаем в $(u_1^{(1)}, v_{21}^{(N-1)}, v_{22}^{(N-1)})$ с помощью $S_2^{(1)}(v_{21}^{(N-1)} - u_2^{(2)})$. После этого используем оператор Λ_{N-1} для перемещения двух последних элементов этой строки на место пары $(u_2^{(N-1)}, u_3^{(N-1)})$ в $(N-1)$ -й строке со сдвигом, и т. д. В итоге оператор $W(U, V_2)$ определяется как произведение:

$$W(U, V_2) = S_2^{(1)}(v_{21}^{(N)} - u_2^{(1)})\Lambda_N S_2^{(1)}(v_{21}^{(N-1)} - u_2^{(2)})\Lambda_{N-1} \times \cdots \times \\ \times S_2^{(1)}(v_{21}^{(2)} - u_2^{(N-1)})\Lambda_2 S_2^{(1)}(v_{21}^{(1)} - u_2^{(N)}). \quad (5.22)$$

Оператор Λ_N (а также и все Λ_k) можно построить из R -операторов, удовлетворяющих соотношению (ср. с (5.5))

$$R_{12}(u_1, u_2, u_3|v_2, v_3)L_1(u_1, u_2, u_3)L_2(v_1, v_2, v_3) = \\ = L_1(u_1, v_2, v_3)L_2(v_1, u_2, u_3)R_{12}(u_1, u_2, u_3|v_2, v_3), \quad (5.23)$$

по формуле

$$\Lambda_N(U) = R_{12}(u_1^{(1)}, u_2^{(2)}, u_3^{(2)}|v_{21}^{(N)}, v_{22}^{(N)})R_{23}(u_1^{(2)}, u_2^{(3)}, u_3^{(3)}|v_{21}^{(N)}, v_{22}^{(N)}) \times \cdots \times \\ \times R_{N-1,N}(u_1^{(N-1)}, u_2^{(N)}, u_3^{(N)}|v_{21}^{(N)}, v_{22}^{(N)}), \quad (5.24)$$

аналогичной выражению (5.6). Сами R -операторы выражаются через операторы перестановок:

$$R_{12}(u_1, u_2, u_3|v_2, v_3) = S_1^{(1)}(u_1 - v_2)S_3^{(1)}(u_3 - v_2)S_2^{(2)}(u_2 - v_2)S_1^{(1)}(u_3 - u_1) \times \\ \times S_2^{(1)}(u_3 - v_3)S_1^{(1)}(u_1 - v_3)S_3^{(1)}(u_2 - v_3)S_1^{(1)}(u_2 - u_1), \quad (5.25)$$

а для $S_i^{(k)}$ формулы (4.18) и (4.20) принимают вид

$$S_1^{(k)}(u_2 - u_1) = [\partial_{21}^{(k)} + z_{32}^{(k)}\partial_{31}^{(k)}]u_2 - u_1, \quad S_2^{(k)}(u_3 - u_2) = [\partial_{32}^{(k)}]u_3 - u_2, \\ S_3^{(k)}(u_1 - v_3) = [z_{31}^{(k)} - z_{31}^{(k+1)} - z_{32}^{(k+1)}(z_{21}^{(k)} - z_{21}^{(k+1)})]u_1 - v_3.$$

Таким образом, мы полностью описали процедуру построения $W(U, V_2)$. Окончательно, собственные функции $\Phi_{\mathbf{x}}$ операторов $A_1(U)$ и $A_2(U)$, для которых верны равенства

$$A_1(U)\Phi_{\mathbf{x}} = \prod_{k=1}^N (u - x_{11}^{(k)})\Phi_{\mathbf{x}}, \quad A_2(U)\Phi_{\mathbf{x}} = \prod_{k=1}^N (u - x_{21}^{(k)})(u - x_{22}^{(k)})\Phi_{\mathbf{x}}, \quad (5.26)$$

имеют вид

$$\Phi_{\mathbf{x}} = W(U, V_2)C(V_2)W(\tilde{V}_2, V_1)C(V_1) \cdot 1, \quad (5.27)$$

где $v_{ij}^{(k)} = u - x_{ij}^{(k)}$, так что

$$\mathbf{v}^{(k)} = (u_1^{(k)}, v_{21}^{(k)}, v_{22}^{(k)}) = (u_1^{(k)}, u - x_{21}^{(k)}, u - x_{22}^{(k)}); \quad \mathbf{v}_1^{(k)} = (v_{21}^{(k)}, v_{11}^{(k)}) = (u - x_{21}^{(k)}, u - x_{11}^{(k)}).$$

5.3. $SL(n, \mathbb{C})$ -инвариантная спиновая цепочка с одним узлом. Переходим к построению собственных функций операторов

$$\begin{aligned} A_m(u) &= L_{1\dots m}^{1\dots m}(u) = \sum_{\sigma} (-1)^{\text{sgn}(\sigma)} L_{\sigma(1)}^1(u) L_{\sigma(2)}^2(u-1) \dots L_{\sigma(m)}^m(u-m+1) = \\ &= \sum_{\sigma} (-1)^{\text{sgn}(\sigma)} L_1^{\sigma(1)}(u-m+1) L_2^{\sigma(2)}(u-m+2) \dots L_m^{\sigma(m)}(u). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Заметим, что нетривиальными являются операторы $A_m(u)$ при $m = 1, 2, \dots, n-1$, а $A_n(u) = \text{qdet } L(u) = u_1 \dots u_n$. Эти операторы действуют на пространстве функций $f(z)$. Матрица параметров U представляет собой строку $U = (u_1, \dots, u_N) \equiv \mathbf{u}$. Оператор W (4.29) осуществляет преобразование

$$A_m(\mathbf{u})W(\mathbf{u}, \mathbf{v}_{n-1}) = W(\mathbf{u}, \mathbf{v}_{n-1})A_m(\mathbf{v}_{n-1}), \quad (5.29)$$

где $\mathbf{v}_{n-1} = (u_1, v_{n-1,1}, \dots, v_{n-1,n-1})$. Его явный вид легко получить:

$$W(U, V_{n-1}) = \prod_{k=1}^{n-2} \overleftarrow{\prod}_{i=k+1}^{n-1} S_i(v_{n-1,k} - u_{i-k+1}), \quad (5.30)$$

где для произведений использованы обозначения

$$\overleftarrow{\prod}_{i=1}^n c_k = c_1 c_2 \dots c_n, \quad \overrightarrow{\prod}_{i=1}^n c_k = c_n \dots c_2 c_1.$$

Пространство функций вида $f(z) = C(\mathbf{v}_{n-1})\Phi(z')$ согласно п. 4.4, 4.5 является собственным подпространством для оператора $A_{n-1}(\mathbf{v}_{n-1})$, а значит, согласно (5.29) $W(\mathbf{u}, \mathbf{v}_{n-1})C(\mathbf{v}_{n-1})\Phi(z')$ есть собственная функция оператора $A_{n-1}(\mathbf{u})$ с собственным значением $v_{n-1,1} \dots v_{n-1,n-1}$. На пространстве функций $\Phi(z')$ остается диагонализировать операторы $A_m(\mathbf{v}_{n-1})$ при $m = 1, \dots, n-2$, что делается при помощи рекуррентной процедуры. Наконец, получаем набор собственных функций $\Phi_{\mathbf{x}}(z)$:

$$A_m(\mathbf{u})\Phi_{\mathbf{x}}(z) = \prod_{j=1}^m (u - x_{mj})\Phi_{\mathbf{x}}(z), \quad (5.31)$$

нумеруемых набором параметров x_{ij} : $v_{ij} = u - x_{ij}$, где индексы принимают значения $i = 1, \dots, n-1$, $j = 1, \dots, i$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рекуррентная процедура, описанная в п. 4.3–4.5, позволяет построить семейство собственных функций (3.24) для системы (3.22) коммутирующих операторов $A_m(u)$, $\bar{A}_m(\bar{u})$. Для того чтобы не загромождать текст статьи, мы привели явные формулы только для голоморфной матрицы монодромии $T_N(U)$. Рассуждения для антиголоморфной части аналогичны: для матрицы монодромии $\bar{T}_N(\bar{u})$ вводится матрица параметров $\bar{U}$ с элементами $\bar{u}_i^{(k)} = \bar{u} - \bar{\sigma}_i^{(k)} + \bar{\delta}_k$, в которой с помощью операторов $S_i^{(k)}$ производится замена части параметров на $\bar{v}_{n-1,i}^{(k)} = \bar{u} - \bar{x}_{n-1,i}^{(k)}$. В формулах (4.18) и (4.20) для операторов $S_i^{(k)}$ антиголоморфная часть выписана явно.

В работе рассмотрена алгебра над полем комплексных чисел по той причине, что придать смысл операторам (4.18) в этом случае гораздо проще, чем для $sl_n(\mathbb{R})$: для них существуют интегральные представления, где интегрирование ведется по всей комплексной плоскости, а также можно развить диаграммную технику вычисления таких интегралов [13]. Вопросы, касающиеся ортогональности и полноты полученной системы функций, будут рассмотрены авторами в последующих работах.

Список литературы

- [1] Л. И. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *УМН*, **34**:55(209) (1979), 13–63.
- [2] P. P. Kulish, E. K. Sklyanin, “Quantum spectral transform method. Recent developements”, *Integrable Quantum Field Theories*, Lecture Notes in Physics, **151**, eds. J. Hietarinta, C. Montonen, Springer, New York, 1982, 61–119.
- [3] L. D. Faddeev, “How algebraic Bethe ansatz works for integrable model”, *Symétries quantiques*, Les Houches, 1995, eds. A. Connes, K. Gawedzki, J. Zinn-Justin, North Holland, Amsterdam, 1998, 149–211, arXiv: hep-th/9605187.
- [4] E. K. Sklyanin, “Quantum inverse scattering method. Selected topics”, *Quantum Group and Quantum Integrable Systems*, ed. M.-L. Ge, World Sci., Singapore, 1992, 63–97, arXiv: hep-th/9211111.
- [5] E. K. Sklyanin, “Separation of variables in the quantum integrable models related to the Yangian $\mathcal{U}[sl(3)]$ ”, *Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика*. 13, Зап. научн. сем. ПОМИ, **205**, Наука, СПб., 1993, 166–178.
- [6] E. K. Sklyanin, *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, **118** (1995), 35–60.
- [7] R. J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, Academic Press, London, 1982.
- [8] R. J. Baxter, *Ann. Phys.*, **70**:1 (1972), 193–228; **281**:1–2 (2000), 187–222.
- [9] L. N. Lipatov, *Phys. Lett. B*, **309**:3–4 (1993), 394–396.
- [10] L. D. Faddeev, G. P. Korchemsky, *Phys. Lett. B*, **342**:1–4 (1995), 311–322.
- [11] H. J. de Vega, L. N. Lipatov, *Phys. Rev. D*, **64**:11 (2001), 114019, 27 pp.
- [12] H. J. de Vega, L. N. Lipatov, *Phys. Rev. D*, **66**:7 (2002), 074013, 24 pp.
- [13] S. É. Derkachov, G. P. Korchemsky, A. N. Manashov, *Nucl. Phys. B*, **617**:1–3 (2001), 375–440, arXiv: hep-th/0107193.
- [14] L. N. Lipatov, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **42**:30 (2009), 304020, 25 pp.
- [15] S. É. Derkachov, A. N. Manashov, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **47**:30 (2014), 305204, arXiv: 1401.7477.
- [16] J. M. Maillet, J. Sanchez de Santos, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **201** (2000), 137–178.
- [17] V. Terras, *Lett. Math. Phys.*, **48**:3 (1999), 263–276.
- [18] А. И. Молев, *Янгианы и классические алгебры Ли*, МЦНМО, М., 2009.
- [19] А. И. Молев, М. Л. Назаров, Г. И. Ольшанский, *УМН*, **51**:2(308) (1996), 27–104.
- [20] С. Э. Деркачёв, А. Н. Манашов, *Алгебра и анализ*, **21**:4 (2009), 1–94.
- [21] M. Nazarov, V. Tarasov, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **30**:3 (1994), 459–478.
- [22] M. Nazarov, V. Tarasov, *J. Reine Angew. Math.*, **496** (1998), 181–212, arXiv: q-alg/9502008.
- [23] И. М. Гельфанд, М. И. Наймарк, *Унитарные представления классических групп*, Тр. МИАН СССР, **36**, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1950.
- [24] М. А. Наймарк, *Теория представлений групп*, Наука, М., 1976.
- [25] Д. П. Желобенко, *УМН*, **17**:1(103) (1962), 27–120.
- [26] Д. П. Желобенко, *Компактные группы Ли и их представления*, Наука, М., 1970.
- [27] П. П. Кулиш, Н. Ю. Решетихин, “О GL_3 -инвариантных решениях уравнения Янга–Бакстера и ассоциированных квантовых системах”, *Вопросы квантовой теории поля и статистической физики*. 3, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **120**, Наука, Л., 1982, 92–121; P. P. Kulish, N. Yu. Reshetikhin, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **16**:16 (1983), L591–L596.
- [28] P. P. Kulish, N. Yu. Reshetikhin, E. K. Sklyanin, *Lett. Math. Phys.*, **5**:5 (1981), 393–403.