Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян, О разрешимости нелинейного модельного уравнения Больцмана в задаче плоской ударной волны, *ТМФ*, 2016, том 189, номер 2, 239–255

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9108>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 10:31:25

© 2016 г.

А. Х. Хачатрян*, Х. А. Хачатрян†

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНОГО МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА В ЗАДАЧЕ ПЛОСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Рассмотрена одна нелинейная система интегральных уравнений, описывающих структуру плоской ударной волны. Исходя из физических соображений предложен итерационный метод построения приближенного решения указанной системы. Задача сведена к изучению отдельных скалярных нелинейных и линейных интегральных уравнений относительно температуры, плотности и скорости газа. Сформулирована теорема существования положительного ограниченного решения для нелинейного уравнения типа Урысона. Доказаны теоремы существования и единственности ограниченных положительных решений для линейных интегральных уравнений в пространстве $L_1[-r, r]$ для всех конечных $r < +\infty$. Для более общего нелинейного интегрального уравнения доказана теорема существования положительного решения, а также найдены оценка снизу и интегральная оценка сверху для построенного решения.

Ключевые слова: нелинейность, ударная волна, интегральное уравнение, ограниченное решение, итерации, поточечная сходимость.

DOI: 10.4213/tmf9108

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача о структуре ударной волны является одной из классических нелинейных задач кинетической теории газов, которая до сих пор не была решена. Однако существуют многочисленные работы, посвященные решению задачи о структуре ударной волны с помощью уравнения Навье–Стокса (см. книги [1]–[3] и ссылки в них), которое не применимо в случае, когда ударная волна имеет длину порядка величины свободного пробега молекул газа. В этих ситуациях возникает необходимость

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета по науке Министерства образования и науки Республики Армения (проект № SCS 15T-1A033).

*Армянский государственный аграрный университет, Ереван, Армения.
E-mail: aghavard59@mail.ru

†Институт математики НАН Республики Армения, Ереван, Армения.
E-mail: khach82@rambler.ru

рассматривать задачу ударной волны с точки зрения кинетической теории с применением уравнения Больцмана (см. работы [2]–[6]). В статье [5] доказана теорема существования решения модельного уравнения Больцмана для слабых ударных волн. В работе [6] в рамках модельного уравнения Больцмана указанная задача сводится к сложной системе нелинейных интегральных уравнений, которая решалась методом последовательных приближений, причем за исходное приближение принималось решение уравнения Навье–Стокса. Полученная нелинейная система достаточно сложна: с одной стороны, соответствующий нелинейный интегральный оператор некомпактен и не обладает свойством монотонности, а с другой стороны, система удовлетворяет условию критичности, т. е. имеет тривиальное решение, и возникает необходимость построения нетривиального (физического) решения. Вышеупомянутые факты усложняют построение положительной неподвижной точки соответствующего нелинейного оператора. Тем не менее мы предлагаем итерационный метод построения приближенного решения указанной нелинейной системы, чему и посвящена настоящая работа.

В данной статье исходя из физических соображений полученная нелинейная система сведена к изучению: а) отдельных нелинейных скалярных интегральных уравнений типа Урысона относительно температуры и б) линейных скалярных интегральных уравнений относительно плотности и макроскопической скорости. Для нелинейного скалярного интегрального уравнения удалось построить специальный конусный отрезок, оставляющий инвариантным соответствующий нелинейный оператор Урысона. Это позволило доказать теорему существования положительного ограниченного решения для указанного уравнения (теорема 1). Сформулированы и доказаны теоремы существования и единственности ограниченных положительных решений для линейных интегральных уравнений в пространстве $L_1[-r, r]$ при любом конечном $r < +\infty$ (теоремы 2, 3). Для более общего нелинейного интегрального уравнения доказана теорема существования положительного решения, а также найдены оценка снизу и интегральная оценка сверху для полученного решения (теорема 4).

2. ВЫВОД ОСНОВНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть газ течет по направлению оси Ox перпендикулярно потоку плоской ударной волны. В каждой точке x' внутри зоны ударной волны в момент времени t функция распределения f зависит от $x' - at$ и от молекулярной скорости $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, где a – скорость ударной волны, имеющая порядок скорости ультразвука. Задача плоской ударной волны описывается нестационарным уравнением Больцмана

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \xi_1 \frac{\partial}{\partial x'} \right) f(\vec{\xi}, x' - at) = J(f),$$

где $J(f)$ – интеграл столкновения.

Переходя к новому аргументу τ посредством замены $\tau = x' - at$, получаем, что

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \xi_1 \frac{\partial}{\partial x'} \right) f(\vec{\xi}, x' - at) &= \frac{\partial f(x' - at, \vec{\xi})}{\partial(x' - at)} \frac{\partial(x' - at)}{\partial t} + \\ &+ \xi_1 \frac{\partial f(x' - at, \vec{\xi})}{\partial(x' - at)} \frac{\partial(x' - at)}{\partial x'} = s_1 \frac{\partial f(\tau, \vec{s})}{\partial \tau}, \end{aligned}$$

где $\vec{s} = (s_1 = \xi_1 - a, s_2 = \xi_2, s_3 = \xi_3)$.

Из-за сложной структуры интеграла столкновения его часто заменяют так называемой моделью Бхатнагара–Гросса–Крука (БГК) (см. книги [2], [3]):

$$J(f) = \nu(\tau)(f_0(\tau, \vec{s}) - f(\tau, \vec{s})),$$

где $\nu(\tau) = \sigma_0 v \rho(\tau)$ – частота столкновений, $\rho(\tau)$ – плотность газа (число частиц в единице объема газа), σ_0 – сечение столкновений, v – модуль относительной скорости взаимодействующих молекул, $f_0(\tau, \vec{s})$ называется локальным распределением Максвелла (см. книгу [3]):

$$f_0(\tau, \vec{s}) = \left(\frac{m}{2\pi k T(\tau)} \right)^{3/2} \rho(\tau) e^{-m(\vec{s} - \vec{u}(\tau))^2 / 2kT(\tau)}.$$

Здесь m – масса молекул, k – постоянная Больцмана, $T(\tau)$ и $\vec{u}(\tau) = (u(\tau), 0, 0)$ – температура и скорость газа соответственно.

В рамках модели БГК для рассматриваемой одномерной задачи уравнение Больцмана принимает вид

$$s_1 \frac{\partial f(\tau, \vec{s})}{\partial \tau} = -\nu(\tau)[f_0(\tau, \vec{s}) - f(\tau, \vec{s})].$$

Перейдем от аргумента τ к новому аргументу $x = x(\tau)$ посредством соотношения

$$x(\tau) = \int \nu(\tau) d\tau = Q(\tau).$$

Тогда уравнение Больцмана запишется в виде

$$s_1 \frac{\partial f(x, \vec{s})}{\partial x} + f(x, \vec{s}) = \left(\frac{m}{2\pi k T(x)} \right)^{3/2} \rho(x) e^{-m(\vec{s} - \vec{u}(x))^2 / 2kT(x)}. \quad (2.1)$$

После получения полного решения задачи возвращение к исходному аргументу можно осуществить по формуле $\tau(x) = Q^{-1}(x)$, где Q^{-1} является функцией, обратной к Q .

Итак, в случае плоской ударной волны нестационарное уравнение Больцмана сводится к стационарному уравнению (2.1), что является одной из важных особенностей плоской ударной волны.

Плотность, макроскопическая скорость и температура газа выражаются через функцию распределения посредством следующих формул (см. книгу [3]):

$$\rho(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, \vec{s}) d^3 s, \quad (2.2)$$

$$\rho(x) \vec{u}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{s} f(x, \vec{s}) d^3 s, \quad (2.3)$$

$$\rho(x) T(x) = \frac{m}{3k} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\vec{s} - \vec{u}(x))^2 f(x, \vec{s}) d^3 s. \quad (2.4)$$

Для удобства изложения и чтобы не перегружать текст формулами, далее в выражениях (2.1) и (2.4) положим $m/2k = 1$.

До и после ударной волны газ на бесконечности находится в равновесии, характеризующемся максвелловскими распределениями

$$\begin{aligned} f^+(-\infty, \vec{s}, s_1 > 0) &= \frac{\rho_1}{(\pi T_1)^{3/2}} e^{-(s_2^2 + s_3^2 + (s_1 - u_1)^2)/T_1}, \\ f^-(+\infty, \vec{s}, s_1 < 0) &= \frac{\rho_2}{(\pi T_2)^{3/2}} e^{-(s_2^2 + s_3^2 + (s_1 + u_2)^2)/T_2}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где ρ_1 , u_1 , T_1 и ρ_2 , u_2 , T_2 – средняя плотность, скорость и температура газа до и после ударной волны соответственно. Они связаны между собой согласно условию Гюгонио–Ренкина, и в дальнейшем мы считаем их заданными (см. книгу [3]).

Из уравнения (2.1) имеем, что

$$f^+(x, \vec{s}, s_1 > 0) = \int_{-\infty}^x e^{-(x-t)/s_1} \frac{\rho(t)}{(\pi T(t))^{3/2}} e^{-(\vec{s} - \vec{u}(t))^2/T(t)} \frac{dt}{s_1}, \quad (2.6)$$

$$f^-(x, \vec{s}, s_1 < 0) = \int_x^{+\infty} e^{-(t-x)/s_1} \frac{\rho(t)}{(\pi T(t))^{3/2}} e^{-(\vec{s} + \vec{u}(t))^2/T(t)} \frac{dt}{s_1}. \quad (2.7)$$

Подставляя формулы (2.6), (2.7) в (2.2)–(2.4) и производя интегрирование по скоростям, приходим к следующей системе нелинейных интегральных уравнений:

$$\rho(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x, t, T(t), u(t)) \rho(t) dt, \quad (2.8)$$

$$\rho(x) u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(x, t, T(t), u(t)) \rho(t) dt, \quad (2.9)$$

$$\rho(x) T(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x, t, T(t), u(t)) \rho(t) dt, \quad (2.10)$$

где

$$R(x, t, T(t), u(t)) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi T(t)}} \int_0^\infty e^{-(x-t)/s} e^{-(s-u(t))^2/T(t)} \frac{ds}{s}, & \text{если } x > t, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi T(t)}} \int_0^\infty e^{-(t-x)/s} e^{-(s+u(t))^2/T(t)} \frac{ds}{s}, & \text{если } x < t, \end{cases} \quad (2.11)$$

$$V(x, t, T(t), u(t)) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi T(t)}} \int_0^\infty e^{-(x-t)/s} e^{-(s-u(t))^2/T(t)} ds, & \text{если } x > t, \\ -\frac{1}{\sqrt{\pi T(t)}} \int_0^\infty e^{-(t-x)/s} e^{-(s+u(t))^2/T(t)} ds, & \text{если } x < t, \end{cases} \quad (2.12)$$

$$W(x, t, T(t), u(t)) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{T(t)}}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-(x-t)/s} e^{-(s-u(t))^2/T(t)} \left[\frac{(s-u(t))^2}{T(t)} + 1 \right] \frac{ds}{s}, & \text{если } x > t, \\ \frac{2\sqrt{T(t)}}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-(t-x)/s} e^{-(s+u(t))^2/T(t)} \left[\frac{(s+u(t))^2}{T(t)} + 1 \right] \frac{ds}{s}, & \text{если } x < t. \end{cases} \quad (2.13)$$

Прямой проверкой можно убедиться, что тройка

$$(\rho, u, T) = (\rho_0 = \text{const}, u_0 = \text{const}, T_0 = \text{const})$$

удовлетворяет нелинейной системе интегральных уравнений (2.8)–(2.10). В качестве (ρ_0, u_0, T_0) можно, например, выбрать среднее арифметическое величин ρ_1, u_1, T_1 и ρ_2, u_2, T_2 . Тройку (ρ_0, u_0, T_0) назовем нулевым приближением решения системы (2.8)–(2.10) (тривиальным решением). Последнее означает, что нелинейный интегральный оператор системы (2.8)–(2.10) удовлетворяет так называемому условию критичности (см. статью [7]), т.е. система имеет тривиальное решение, и возникает необходимость построения физического решения, отличного от тривиального. Кроме того, нелинейный оператор системы (2.8)–(2.10) некомпактен и не обладает свойством монотонности, что существенно усложняет построение положительной неподвижной точки. Тем не менее ниже предложена следующая схема построения приближенного решения нелинейной системы (2.8)–(2.10).

Сперва рассмотрим уравнение (2.10), выбрав в качестве $\rho(x)$ и $u(x)$ нулевые приближения, т.е. $\rho = \rho_0, u = u_0$. При этом уравнение (2.10) преобразуется в скалярное нелинейное интегральное уравнение типа Урысона относительно температуры:

$$T(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x, t, T(t), u_0) dt. \quad (2.14)$$

Затем, используя решение этого уравнения, переходим к решению уравнения (2.8), которое при заданном виде функции $T(x)$ представляет собой отдельное линейное интегральное уравнение относительно плотности:

$$\rho(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x, t, T(t), u_0) \rho(t) dt. \quad (2.15)$$

Применяя решения уравнений (2.14), (2.15), решаем нелинейное уравнение (2.9) относительно скорости $u(x)$ при заданных $T(x)$ и $\rho(x)$.

Построенное таким образом решение (ρ, u, T) назовем первым приближением решения системы (2.8)–(2.10) (см. разделы 3–5). Используя построенные в первом приближении решения $\rho(x)$ и $u(x)$, возвращаемся к решению нелинейного уравнения (2.10) при заданных $\rho(x)$ и $u(x)$. Поступая аналогично, строим решение системы (2.8)–(2.10) во втором приближении (см. раздел 6). Процесс продолжается до тех пор, пока не будет обеспечена наперед заданная близость между последующим и предыдущим приближениями.

Обозначим через $2r$ толщину зоны ударной волны, которая имеет порядок длины свободного пробега молекул газа. Поскольку газ до и после ударной волны находится в равновесии, внутри интервала $[-r, r]$ макроскопические переменные подвергаются резкому изменению, а вне этой зоны они остаются постоянными. Это наводит нас на следующую мысль: можно заменить “бесконечную” задачу задачей на конечном интервале и ввести функции

$$T(x) = \begin{cases} T_1, & \text{если } x \in (-\infty, r], \\ F(x), & \text{если } x \in [-r, r], \\ T_2, & \text{если } x \in [r, +\infty), \end{cases} \quad (2.16)$$

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_1, & \text{если } x \in (-\infty, r], \\ H(x), & \text{если } x \in [-r, r], \\ \rho_2, & \text{если } x \in [r, +\infty), \end{cases} \quad (2.17)$$

$$u(x) = \begin{cases} u_1, & \text{если } x \in (-\infty, r], \\ v(x), & \text{если } x \in [-r, r], \\ u_2, & \text{если } x \in [r, +\infty). \end{cases} \quad (2.18)$$

Далее мы приступим к построению решения системы (2.8)–(2.10) в первом приближении.

3. О РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЯ (2.10) В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Уравнение (2.14) с учетом (2.16) принимает вид

$$F(x) = g_1(r+x) + g_2(r-x) + \int_{-r}^r W(x, t, F(t), u_0) dt. \quad (3.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} g_1(r+x) &= \int_{-\infty}^{-r} W(x-t, T_1, u_0) dt = \\ &= \frac{2\sqrt{T_1}}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-(s-u_0)^2/T_1} \left[\frac{(s-u_0)^2}{T_1} + 1 \right] e^{-(r+x)/s} ds, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} g_2(r-x) &= \int_r^\infty W(t-x, T_2, u_0) dt = \\ &= \frac{2\sqrt{T_2}}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-(s+u_0)^2/T_2} \left[\frac{(s+u_0)^2}{T_2} + 1 \right] e^{-(r-x)/s} ds, \end{aligned} \quad (3.3)$$

а $W(x, t, F(t), u_0)$ задается согласно выражению (2.13).

Заметим, что функция $W(x, t, z, u_0)$ по третьему аргументу z является монотонно возрастающей на $(0, +\infty)$. Действительно, рассматривая функцию

$$\varphi(z) = e^{-p^2/z} \left(\frac{p^2}{z} + 1 \right) \sqrt{z}, \quad (3.4)$$

легко проверить, что $\varphi'(z) > 0$ на $(0, +\infty)$. Следовательно, из представления (2.13) следует, что $W(x, t, z, u_0)$ возрастает по z на $(0, +\infty)$.

Введем следующие итерации для уравнения (3.1):

$$\begin{aligned} F_{n+1}(x) &= g_1(r+x) + g_2(r-x) + \int_{-r}^r W(x, t, F_n(t), u_0) dt, \\ F_0 &= c_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.5)$$

Пусть $n = 0$, тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} F_1(x) &= g_1(r+x) + g_2(r-x) + \int_{-r}^x W(x-t, c_0, u_0) dt + \int_x^r W(t-x, c_0, -u_0) dt = \\ &= g_1(r+x) + g_2(r-x) + c_0 - J_1(r+x) - J_2(r-x), \end{aligned} \quad (3.6)$$

где

$$\begin{aligned} J_1(r+x) &= \frac{2\sqrt{c_0}}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-(s-u_0)^2/c_0} e^{-(r+x)/s} \left[\frac{(s-u_0)^2}{c_0} + 1 \right] ds, \\ J_2(r-x) &= \frac{2\sqrt{c_0}}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-(s+u_0)^2/c_0} e^{-(r-x)/s} \left[\frac{(s+u_0)^2}{c_0} + 1 \right] ds. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Заметим, что для того, чтобы $F_1(x) \leq c_0$, достаточно одновременного выполнения неравенств

$$J_1(r+x) \geq g_1(r+x), \quad J_2(r-x) \geq g_2(r-x) \quad (3.8)$$

или, в раскрытой форме,

$$\begin{aligned} \sqrt{c_0} e^{-(s-u_0)^2/c_0} \left[\frac{(s-u_0)^2}{c_0} + 1 \right] &\geq \sqrt{T_1} e^{-(s-u_0)^2/T_1} \left[\frac{(s-u_0)^2}{T_1} + 1 \right], \\ \sqrt{c_0} e^{-(s+u_0)^2/c_0} \left[\frac{(s+u_0)^2}{c_0} + 1 \right] &\geq \sqrt{T_2} e^{-(s+u_0)^2/T_2} \left[\frac{(s+u_0)^2}{T_2} + 1 \right]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Из монотонности функции $\varphi(z) = \sqrt{z} e^{-p^2/z} (p^2/z + 1)$ следует, что если $c_0 > T_1$ и $c_0 > T_2$, то неравенства (3.9) будут выполнены. В качестве c_0 выберем величину

$$c_0 = \max(T_1, T_2). \quad (3.10)$$

При этом из равенства (3.6) имеем, что

$$F_1(x) \leq c_0 = F_0. \quad (3.11)$$

С учетом монотонности функции $W(x, t, z, u_0)$ по z индукцией легко проверить, что верно следующее неравенство:

$$F_{n+1}(x) \leq F_n(x). \quad (3.12)$$

Теперь покажем, что последовательность функций $\{F_n(x)\}_{n=0}^\infty$ ограничена снизу. Для этого сначала убедимся, что

$$F_0(x) = c_0 = \max(T_1, T_2) \geq g_1(r+x) + g_2(r-x). \quad (3.13)$$

Имеем соотношения

$$\begin{aligned} g_1(r+x) + g_2(r-x) &\leq \frac{2\sqrt{T_1}}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-(s-u_0)^2/T_1} \left[\frac{(s-u_0)^2}{T_1} + 1 \right] ds + \\ &\quad + \frac{2\sqrt{T_2}}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-(s+u_0)^2/T_2} \left[\frac{(s+u_0)^2}{T_2} + 1 \right] ds = \\ &= \frac{T_1}{2} + \frac{T_2}{2} + \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \int_0^{u_0} \left[\sqrt{T_1} e^{-p^2/T_1} \left(\frac{p^2}{T_1} + 1 \right) - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{T_2} e^{-p^2/T_2} \left(\frac{p^2}{T_2} + 1 \right) \right] dp \leq T_2, \end{aligned} \quad (3.14)$$

ибо $\varphi(z)$ монотонно возрастает по z и

$$T_1 < T_2. \quad (3.15)$$

Неравенство (3.15) обусловлено тем, что до удара волны давление газа ниже, чем после удара.

Предполагая, что $F_n(x) \geq g_1(r+x) + g_2(r-x)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$, учитывая неотрицательность и монотонность функции W , получаем, что

$$F_{n+1}(x) \geq g_1(r+x) + g_2(r-x). \quad (3.16)$$

В силу существования предела последовательности функций $\{F_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ и согласно предельной теореме Леви заключаем, что предельная функция удовлетворяет уравнению (3.1) и двойному неравенству

$$g_1(r+x) + g_2(r-x) \leq F(x) \leq c_0 (= T_2). \quad (3.17)$$

Легко заметить, что

$$g_1(r+x) + g_2(r-x) \geq \delta_1(r) + \delta_2(r) \equiv \delta_0(r), \quad (3.18)$$

где

$$\begin{aligned} \delta_1(r) &= \frac{2\sqrt{T_1}}{3\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(s-u_0)^2/T_1} \left[\frac{(s-u_0)^2}{T_1} + 1 \right] e^{-r/s} ds, \\ \delta_2(r) &= \frac{2\sqrt{T_2}}{3\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(s+u_0)^2/T_2} \left[\frac{(s+u_0)^2}{T_2} + 1 \right] e^{-r/s} ds. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Итак, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть в уравнении (3.1) функции g_1 , g_2 и W задаются согласно выражениям (3.2), (3.3) и (2.13). Тогда нелинейное интегральное уравнение (3.1) имеет положительное ограниченное решение $F(x)$, которое удовлетворяет двустороннему неравенству

$$\delta_0(r) \leq F(x) \leq c_0 (= T_2). \quad (3.20)$$

4. О РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЯ (2.8) В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Линейное интегральное уравнение (2.15) при заданной функции $F(x)$ с учетом равенства (2.17) имеет вид

$$H(x) = h_1(r+x) + h_2(r-x) + \int_{-r}^r R(x, t, F(t), u_0) H(t) dt, \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned} h_1(r+x) &= \int_{-\infty}^{-r} R(x-t, T_1, u_0) \rho_1 dt = \frac{\rho_1}{\sqrt{\pi T_1}} \int_0^{\infty} e^{-(s-u_0)^2/T_1} e^{-(r+x)/s} ds, \\ h_2(r-x) &= \int_r^{\infty} R(t-x, T_2, u_0) \rho_2 dt = \frac{\rho_2}{\sqrt{\pi T_2}} \int_0^{\infty} e^{-(s+u_0)^2/T_2} e^{-(r-x)/s} ds. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Функция $F(x)$, обладающая свойством (3.20), является ограниченным решением уравнения (3.1). Решение уравнения (4.1) является пределом итераций

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) &= h_1(r+x) + h_2(r-x) + \int_{-r}^r R(x, t, F(t), u_0) H_n(t) dt, \\ H_0(x) &= 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.3)$$

Рассмотрим уравнение (4.1) при заданном $F(t)$ и докажем единственность решения в пространстве $L_1[-r, r]$. С этой целью оценим следующий интеграл:

$$\int_{-r}^r R(x, t, F(t), u_0) dx = \int_{-r}^t R(x, t, F(t), u_0) dx + \int_t^r R(x, t, F(t), u_0) dx = I_1(t) + I_2(t). \quad (4.4)$$

Учитывая равенство (2.11), из соотношения (4.4) получаем, что

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi F(t)}} \int_0^\infty e^{-(s-u_0)^2/F(t)} \left[1 - e^{-(r+t)/s} \right] ds, & t \in [-r, r], \\ I_2(t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi F(t)}} \int_0^\infty e^{-(s+u_0)^2/F(t)} \left[1 - e^{-(r-t)/s} \right] ds, & t \in [-r, r]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

После простых вычислений имеем следующее равенство:

$$I_1(t) + I_2(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi F(t)}} \int_0^\infty \left\{ e^{-(s-u_0)^2/F(t)} e^{-(r+t)/s} + e^{-(s+u_0)^2/F(t)} e^{-(r-t)/s} \right\} ds. \quad (4.6)$$

Учитывая простые неравенства

$$\begin{aligned} e^{-(s-u_0)^2/F(t)} e^{-(r+t)/s} + e^{-(s+u_0)^2/F(t)} e^{-(r-t)/s} &\geq 2e^{-r/s} e^{-(s^2+u_0^2)/F(t)}, \\ s &\in [0, +\infty), \quad t \in [-r, r], \end{aligned} \quad (4.7)$$

и $0 < \delta_0(r) \leq F(t) \leq c_0$, $t \in [-r, r]$, из равенства (4.6) получаем, что

$$\begin{aligned} I_1(t) + I_2(t) &\leq 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi F(t)}} \int_0^\infty e^{-r/s} e^{-(s^2+u_0^2)/F(t)} ds \leq \\ &\leq 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi c_0}} \int_0^\infty e^{-r/s} e^{-(s^2+u_0^2)/\delta_0(r)} ds \equiv 1 - \psi(r). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Из найденной оценки следует, что

$$\sup_{-r \leq t \leq r} \int_{-r}^r R(x, t, F(t), u_0) dx \leq 1 - \psi(r). \quad (4.9)$$

Из (4.9) вытекает, что оператор

$$(\hat{R}f)(x) = \int_{-r}^r R(x, t, F(t), u_0) f(t) dt \quad (4.10)$$

при заданном $F(t)$ является сжимающим в пространстве $L_1[-r, r]$ с коэффициентом сжатия $1 - \psi(r)$. Поскольку функция $h(x) = h_1(r+x) + h_2(r-x)$, $x \in [-r, r]$, принадлежит пространству $L_1[-r, r]$, уравнение (4.1) в $L_1[-r, r]$ имеет единственное решение, причем

$$\int_{-r}^r H(x) dx \leq \frac{1}{\psi(r)} \int_{-r}^r h(x) dx. \quad (4.11)$$

Убедимся, что функция $H(x)$ является также ограниченной функцией на отрезке $[-r, r]$, и получим для нее оценку сверху. Имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} h(x) = h_1(r+x) + h_2(r-x) &\leq \frac{\rho_1}{\sqrt{\pi T_1}} \int_0^\infty e^{-(s-u_0)^2/T_1} ds + \\ &+ \frac{\rho_2}{\sqrt{\pi T_2}} \int_0^\infty e^{-(s+u_0)^2/T_2} ds = \frac{\rho_1}{2} + \frac{\rho_2}{2} + \frac{\rho_1}{\sqrt{\pi T_1}} \int_{-u_0}^0 e^{-p^2/T_1} dp - \\ &- \frac{\rho_2}{\sqrt{\pi T_2}} \int_0^{u_0} e^{-p^2/T_2} dp \leq \frac{\rho_1}{2} + \frac{\rho_2}{2} + \frac{\rho_1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-s^2} ds = \rho_1 + \frac{\rho_2}{2}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Очевидно, что

$$R(x, t, F(t), u_0) \leq R_0(x - t), \quad (4.13)$$

где

$$R_0(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi \delta_0(r)}} \int_0^\infty e^{-\tau/s} e^{-(s-u_0)^2/c_0} \frac{ds}{s}, & \tau > 0, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi \delta_0(r)}} \int_0^\infty e^{\tau/s} e^{-(s+u_0)^2/c_0} \frac{ds}{s}, & \tau < 0. \end{cases}$$

Заметим, что $R_0 \in L_1[-r, r]$. Так как $H \in L_1[-r, r]$, их свертка

$$\chi(x) = \int_{-r}^r R_0(x-t) H(t) dt$$

является непрерывной функцией на $[-r, r]$. Следовательно, на отрезке $[-r, r]$ функция $\chi(x)$ принимает свое максимальное значение. Обозначим его

$$\beta = \max_{-r \leq x \leq r} \chi(x). \quad (4.14)$$

С учетом формул (4.13), (4.14) из уравнения (4.1) получаем, что

$$H(x) = h(x) + \int_{-r}^r R(x, t, F(t), u_0) dt \leq \rho_1 + \frac{\rho_2}{2} + \int_{-r}^r R_0(x-t) H(t) dt \leq \rho_1 + \frac{\rho_2}{2} + \beta.$$

Поскольку $H(x) \geq 0$, из (4.1) следует, что $H(x) \geq h(x)$, $x \in [-r, r]$. Таким образом, справедливы неравенства

$$h(x) \leq H(x) \leq \rho_1 + \frac{\rho_2}{2} + \beta. \quad (4.15)$$

Следовательно, $H(x)$ является ограниченной функцией на отрезке $[-r, r]$.

Данные результаты можно сформулировать в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть в уравнении (4.1) $F(x)$ является решением уравнения (3.1) и обладает свойством (3.20). Тогда уравнение (4.1) имеет единственное положительное ограниченное решение в пространстве $L_1[-r, r]$. Более того, имеют место оценка $h(x) \leq H(x)$ снизу и интегральная оценка (4.11) сверху.

5. О РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЯ (2.9) В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Из уравнения (2.9) с учетом равенства (2.18) имеем, что

$$\begin{aligned} \rho(x)u(x) = & \int_{-\infty}^{-r} V(x, t, T_1, u_1) \rho_1 dt + \int_r^{\infty} V(x, t, T_2, -u_2) \rho_2 dt + \\ & + \int_{-r}^r V(x, t, T(t), u(t)) \rho(t) dt. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Предполагая, что макроскопическая скорость $u(x)$ намного меньше молекулярной скорости $|\vec{s}|$, разложим функцию $e^{-(\vec{s}-\vec{u}(x))^2/T(x)}$ в ряд Тейлора в окрестности нуля:

$$e^{-(s-u)^2/T} \simeq e^{-s^2/T(x)} \left(1 + \frac{2su(x)}{T(x)} \right). \quad (5.2)$$

С учетом разложения (5.2), равенств (2.12), (2.16)–(2.18) из формулы (5.1) получаем, что

$$H(x)v(x) = \gamma_1(r, x) - \gamma_2(r, x) + \int_{-r}^r K(x, t, F(t))H(t)v(t) dt, \quad (5.3)$$

где $H(x)$ и $F(x)$ – построенные нами решения уравнений (3.1) и (4.1) соответственно,

$$\begin{aligned} \gamma_1(r, x) = & \frac{\rho_1}{\sqrt{\pi T_1}} \int_0^{\infty} e^{-(s-u_1)^2/T_1} e^{-(r+x)/s} s ds + \\ & + \int_{-r}^x \int_0^{\infty} \frac{H(t)}{\sqrt{\pi F(t)}} e^{-s^2/F(t)} e^{-(x-t)/s} dt ds, \\ \gamma_2(r, x) = & \frac{\rho_2}{\sqrt{\pi T_2}} \int_0^{\infty} e^{-(s+u_2)^2/T_2} e^{-(r-x)/s} s ds + \\ & + \int_x^r \int_0^{\infty} \frac{H(t)}{\sqrt{\pi F(t)}} e^{-s^2/F(t)} e^{-(t-x)/s} dt ds, \\ K(x, t, F(t)) = & \int_0^{\infty} \frac{e^{-|x-t|/s} e^{-s^2/F(t)}}{\sqrt{\pi}(F(t))^{3/2}} 2s ds. \end{aligned} \quad (5.4)$$

В силу линейности решение уравнения (5.3) можно представить в виде

$$H(x)v(x) = \mathcal{F}_1(x) - \mathcal{F}_2(x), \quad (5.5)$$

где $\mathcal{F}_1(x)$ и $\mathcal{F}_2(x)$ удовлетворяют уравнениям

$$\mathcal{F}_1(x) = \gamma_1(r, x) + \int_{-r}^r K(x, t, F(t))\mathcal{F}_1(t) dt, \quad (5.6)$$

$$\mathcal{F}_2(x) = \gamma_2(r, x) + \int_{-r}^r K(x, t, F(t))\mathcal{F}_2(t) dt. \quad (5.7)$$

Рассмотрим уравнение (5.6). Положим

$$\mathcal{J}(r, t) = \int_{-r}^r K(x, t, F(t)) dx, \quad x, t \in [-r, r]. \quad (5.8)$$

Представим $J(r, t)$ (5.8) в виде

$$\mathcal{J}(r, t) = 1 - 2 \int_0^\infty \frac{s^2 e^{-s^2/F(t)}}{\sqrt{\pi}(F(t))^{3/2}} [e^{-(r+t)/s} + e^{-(r-t)/s}] ds. \quad (5.9)$$

Имея в виду известное неравенство

$$e^{-(r+t)/s} + e^{-(r-t)/s} \geq 2e^{-r/s}, \quad (5.10)$$

получаем, что

$$\mathcal{J}(r, t) \leq 1 - 4 \int_0^\infty \frac{s^2 e^{-s^2/F} e^{-r/s}}{\sqrt{\pi}(F(t))^{3/2}} ds. \quad (5.11)$$

Так как $0 < \delta_0(r) \leq F(t) \leq c_0$ при $t \in [-r, r]$, то

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{s^2 e^{-s^2/F} e^{-r/s}}{(F(t))^{3/2}} ds \geq \frac{4}{\sqrt{\pi} c_0^{3/2}} \int_0^\infty s^2 e^{-s^2/\delta_0} e^{-r/s} ds > 0. \quad (5.12)$$

Заметим, что функция

$$\tilde{\psi}(r) = \frac{4}{\sqrt{\pi} c_0^{3/2}} \int_0^\infty s^2 e^{-s^2/\delta_0} e^{-r/s} ds \quad (5.13)$$

обладает следующими свойствами: $\tilde{\psi}(0) = (\delta_0/c_0)^{3/2} > 0$, $\tilde{\psi}(\infty) = 0$, $\tilde{\psi}(r)$ монотонно убывает по r на $(0, +\infty)$ и непрерывна. Следовательно, справедливы неравенства

$$\sup_{-r \leq t \leq r} \mathcal{J}(r, t) \leq 1 - \tilde{\psi}(r) < 1. \quad (5.14)$$

Отсюда заключаем, что при заданном $F(t)$ линейный интегральный оператор вида

$$(\hat{K}f)(x) = \int_{-r}^r K(x, t, F(t)) f(t) dt, \quad x \in [-r, r], \quad (5.15)$$

действует в $L_1[-r, r]$ и является сжимающим в этом пространстве с коэффициентом сжатия $1 - \tilde{\psi}(r) < 1$.

Так как $\gamma_1 \in L_1[-r, r]$, уравнение (5.6) в $L_1[-r, r]$ имеет единственное решение. Это решение является пределом следующих итераций:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1^{(n+1)}(x) &= \gamma_1(r, x) + \int_{-r}^r K(x, t, F(t)) \mathcal{F}_1^{(n)}(t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ \mathcal{F}_1^{(0)} &= 0. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Решение $\mathcal{F}_1(x)$ уравнения (5.6), построенное при помощи итераций (5.16), является ограниченным на отрезке $[-r, r]$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \gamma_1(r, x) &\leq \frac{\rho_1}{\sqrt{\pi T_1}} \int_0^\infty e^{-(s-u_1)^2/T_1} s ds + \frac{M}{\sqrt{\pi \delta_0}} \int_0^\infty e^{-s^2/c_0} s ds - \\ &- \frac{M}{\sqrt{\pi \delta_0}} \int_0^\infty e^{-s^2/c_0} e^{-(r+x)/s} s ds \leq \rho_1 u_1 + \frac{\rho_1 \sqrt{T_1}}{2\sqrt{\pi}} e^{-u_1^2/T_1} + \frac{M c_0}{2\sqrt{\pi \delta_0}}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

где $M = \sup_{-r \leq x \leq r} H(x)$,

$$K(x, t, F(t)) \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-s^2/c_0} \frac{2s ds}{\delta_0^{3/2}} = \frac{2c_0}{\sqrt{\pi} \delta_0^{3/2}}. \quad (5.18)$$

Учитывая неравенства (5.17), (5.18), из выражения (5.6) находим, что

$$\mathcal{F}_1(x) \leq \rho_1 u_1 + \frac{\rho_1 \sqrt{T_1}}{2\sqrt{\pi}} e^{-u_1^2/T_1} + \frac{Mc_0}{2\sqrt{\pi} \delta_0} + \frac{2c_0}{\sqrt{\pi} \delta_0^{3/2}} \int_{-r}^r \mathcal{F}_1(t) dt \equiv c_1 < +\infty. \quad (5.19)$$

Отсюда следует, что $\mathcal{F}_1(x)$ – ограниченная на $[-r, r]$ функция. Интегрируя (5.6) от $-r$ до r по x , получаем, что

$$\int_{-r}^r \mathcal{F}_1(x) dx \leq \int_{-r}^r \gamma_1(r, x) dx + 1 - \tilde{\psi}(r) \int_{-r}^r \mathcal{F}_1(x) dx, \quad (5.20)$$

откуда

$$\int_{-r}^r \mathcal{F}_1(x) dx \leq \frac{\int_{-r}^r \gamma_1(r, x) dx}{\tilde{\psi}(r)}. \quad (5.21)$$

С учетом неравенства (5.21) из выражения (5.19) вытекает формула

$$\mathcal{F}_1(x) \leq c_1 = \rho_1 u_1 + \frac{\rho_1 \sqrt{T_1}}{2\sqrt{\pi}} e^{-u_1^2/T_1} + \frac{Mc_0}{2\sqrt{\pi} \delta_0} + \frac{2c_0}{\sqrt{\pi} \delta_0^{3/2}} \frac{\int_{-r}^r \gamma_1(r, x) dx}{\tilde{\psi}(r)}. \quad (5.22)$$

Аналогично, из уравнения (5.7) имеем, что

$$\mathcal{F}_2(x) \leq c_2 = \frac{\rho_2 \sqrt{T_2}}{2\sqrt{\pi}} e^{-u_2^2/T_2} + \frac{Mc_0}{2\sqrt{\pi} \delta_0} + \frac{2c_0}{\sqrt{\pi} \delta_0^{3/2}} \frac{\int_{-r}^r \gamma_2(r, x) dx}{\tilde{\psi}(r)}. \quad (5.23)$$

Итак, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. При любом конечном $r < +\infty$ уравнение (5.3) имеет единственное ограниченное решение в пространстве $L_1[-r, r]$. Имеет место неравенство

$$\begin{aligned} |H(x)v(x)| &\leq \rho_1 u_1 + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (\rho_1 \sqrt{T_1} e^{-u_1^2/T_1} + \rho_2 \sqrt{T_2} e^{-u_2^2/T_2}) + \\ &+ \frac{2c_0}{\sqrt{\pi} \delta_0^{3/2} \tilde{\psi}(r)} \left[\int_{-r}^r (\gamma_1(r, x) + \gamma_2(r, x)) dx \right]. \end{aligned} \quad (5.24)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Построенную таким образом тройку (ρ, u, T) назовем первым приближением решения исходной нелинейной системы (2.8)–(2.10).

6. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ (2.8)–(2.10) ВО ВТОРОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Рассмотрим нелинейное скалярное уравнение

$$H(x)F(x) = \bar{g}(x) + \int_{-r}^r W(x, t, F(t), v(t))H(t) dt \quad (6.1)$$

с заданными непрерывными на $[-r, r]$ функциями $H(x)$ и $v(x)$. Здесь

$$\begin{aligned} \bar{g}(x) = & \frac{2\sqrt{T_1}\rho_1}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-(s-u_1)^2/T_1} \left[\frac{(s-u_1)^2}{T_1} + 1 \right] e^{-(r+x)/s} ds + \\ & + \frac{2\sqrt{T_2}\rho_2}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-(s+u_2)^2/T_2} \left[\frac{(s+u_2)^2}{T_2} + 1 \right] e^{-(r+x)/s} ds. \end{aligned}$$

Уравнение (6.1) порождается уравнением (2.10), в котором $\rho(x)$ и $u(x)$ выбраны как решения первого приближения. Введем следующие итерации:

$$H(x)F_{n+1}(x) = \bar{g}(x) + \int_{-r}^r W(x, t, F_n(t), v(t))H(t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.2)$$

причем в качестве нулевой итерации выберем функцию

$$F_0(x) = \frac{\bar{g}(x)}{H(x)}. \quad (6.3)$$

Легко заметить, что $F_{n+1}(x) \geq F_n(x)$. Интегрируя уравнение (6.2) на отрезке $[-r, r]$ и меняя порядок интегрирования, находим, что

$$\begin{aligned} \int_{-r}^r H(x)F_{n+1}(x) dx &= \int_{-r}^r \bar{g}(x) dx + \int_{-r}^r \int_{-r}^x W(x-t, F_n(t), v(t))H(t) dt dx + \\ &+ \int_{-r}^r \int_x^r W(t-x, F_n(t), -v(t))H(t) dt dx \leq \\ &\leq c_r + \int_{-r}^r H(t)F_{n+1}(t)[1 - \lambda(t, F_{n+1}(t))] dt, \end{aligned} \quad (6.4)$$

где

$$\begin{aligned} c_r &= \int_{-r}^r \bar{g}(x) dx, \\ \lambda(t, z) &= \frac{2}{3\sqrt{\pi z}} \int_0^\infty e^{-(s-v(t))^2/z} \left[\frac{(s-v(t))^2}{z} + 1 \right] e^{-(r-t)/s} ds + \\ &+ \frac{2}{3\sqrt{\pi z}} \int_0^\infty e^{-(s+v(t))^2/z} \left[\frac{(s+v(t))^2}{z} + 1 \right] e^{-(r+t)/s} ds. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Из равенства (6.4) следует, что

$$\int_{-r}^r H(t)F_{n+1}(t)\lambda(t, F_{n+1}(t)) dt \leq c_r. \quad (6.6)$$

Функция $\lambda(t, z)$ непрерывна по совокупности своих аргументов на прямом произведении $\mathbb{R}^+ \times [\delta_0/M, +\infty)$, где $M = \sup_{-r \leq x \leq r} H(x)$ и $z\lambda(t, z)$ монотонно возрастает по z .

Обозначим

$$\Gamma_n(x) = H(x)F_n(x)\lambda(x, F_n(x)). \quad (6.7)$$

Убедимся, что $\Gamma_n(x)$ монотонно возрастает по n . Действительно, рассматривая разность

$$\Gamma_{n+1}(x) - \Gamma_n(x) = H(x)[F_{n+1}(x)\lambda(x, F_{n+1}(x)) - F_n(x)\lambda(x, F_n(x))] \quad (6.8)$$

и учитывая, что F_n монотонно возрастает по n , а $z\lambda(t, z)$ монотонно возрастает по z , получаем, что

$$\Gamma_{n+1}(x) \geq \Gamma_n(x). \quad (6.9)$$

С использованием обозначения (6.7) из выражения (6.6) имеем неравенство

$$\int_{-r}^r \Gamma_n(x) dx \leq c_r. \quad (6.10)$$

Согласно теореме Леви и из непрерывности функции $z\lambda(t, z)$ заключаем, что предельная функция $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\int_{-r}^r \Gamma(x) dx \leq c_r.$$

Поскольку функция $\lambda(t, z)$ непрерывна на множестве $\mathbb{R}^+ \times [\delta_0/M, +\infty)$ и $z\lambda(t, z)$ монотонно возрастает по z , из формулы (6.7) и монотонного возрастания F_n по n следует, что существует поточечный предел функциональной последовательности $\{F_n(x)\}_{n=0}^\infty$, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$, причем $\int_{-r}^r H(t)F(t)\lambda(t, F(t)) dt \leq c_r$.

Итак, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $H(x)$ и $v(x)$ – решения уравнений (4.1) и (5.3). Тогда уравнение (6.1) имеет положительное решение. Более того, имеют место неравенства

$$F(x) \geq \frac{\delta_0}{M}, \quad \int_{-r}^r F(t)\lambda(t, F(t)) dt \leq \frac{c_r}{m},$$

где $M = \sup_{-r \leq x \leq r} H(x)$, $m = \inf_{-r \leq x \leq r} H(x)$.

Используя построенное решение уравнения (6.1), мы вновь возвращаемся к рассмотрению линейного интегрального уравнения (4.1) в виде

$$H(x) = \bar{h}(x) + \int_{-r}^r R(x, t, F(t), v(t))H(t) dt, \quad (6.11)$$

где

$$\bar{h}(x) = \frac{\rho_1}{\sqrt{\pi T_1}} \int_0^\infty e^{-(s-u_1)^2/T_1} e^{-(r+x)/s} ds + \frac{\rho_2}{\sqrt{\pi T_2}} \int_0^\infty e^{-(s+u_2)^2/T_2} e^{-(r+x)/s} ds.$$

Здесь $F(x)$ и $v(x)$ – решения уравнений (6.1) и (5.3) соответственно. Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям раздела 4, можно легко показать, что уравнение (6.11) при заданных $F(x)$ и $v(x)$ имеет единственное ограниченное положительное решение в пространстве $L_1[-r, r]$. Построение решения уравнения (2.9) во втором приближении сводится вновь к уравнению (5.3) с той лишь разницей, что входящие в него функции $F(t)$ и $H(t)$ являются решениями уравнений (6.1) и (6.11).

Построенную таким образом тройку (ρ, u, T) назовем решением первоначальной системы (2.8)–(2.10) во втором приближении. По описанной схеме можно построить третье и последующие приближения. Процесс прекращается, когда модуль разности между предыдущим и последующим приближениями становится меньше, чем наперед заданное число.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Заметим, что уравнения (4.1) и (5.3) при заданном виде функции $F(x)$ имеют ограниченные единственные решения при всех конечных $r < +\infty$. Этот факт оправдывает рассмотрение нами усеченных уравнений (3.1), (4.1), (5.3) и (6.1), (6.11) вместо первоначальной системы (2.8)–(2.10). Численные расчеты показывают, что разность уже во втором и в первом приближениях составляет 10^{-3} . С помощью программы *Mathcad* мы также решили “усеченную” систему уравнений (2.8)–(2.10), не имея строгого доказательства сходимости рассмотренных итераций. Оказалось, что численные результаты совпали с численными расчетами второго приближения, проведенными по схеме, описанной в настоящей работе, с точностью до 10^{-2} . Указанные факты дают нам основание на эвристическом уровне утверждать, что поэтапно построенные таким образом решения уравнений (3.1), (4.1), (5.3) и (6.1), (6.11) стремятся к решению первоначальной системы (2.8)–(2.10). Однако, к сожалению, в настоящее время мы не располагаем строгим математическим доказательством данного факта.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если ограничиться линейным приближением исходной системы нелинейных интегральных уравнений (2.8)–(2.10), то можно легко доказать, что она обладает только постоянным (тривиальным) решением. В этом случае макроскопические величины имеют разрыв первого порядка в нуле, а толщина r ударной волны равна нулю. Нетривиальное (физическое) решение появляется благодаря нелинейности системы уравнений. Последнее в свою очередь означает, что задача ударной волны является сугубо нелинейной и ее линейное приближение приводит лишь к тривиальному случаю. Этот факт – одна из важных особенностей задачи ударной волны.

Как уже было отмечено во введении, в работе [6] система нелинейных интегральных уравнений (2.8)–(2.10) решалась численно методом последовательных приближений, в котором за исходные значения u , ρ и T принималось решение уравнения Навье–Стокса, причем строгое доказательство сходимости итераций отсутствовало. Вопрос о сходимости этих итераций и в настоящее время остается открытым. В результате решения системы (2.8)–(2.10) с помощью предложенного нами математически обоснованного метода, как и следовало ожидать, было показано, что плотность,

температура и скорость подвергаются резкому, но непрерывному изменению в зоне ударной волны толщины $2r$. Профили макроскопических величин качественно не отличаются от профилей, полученных в работе [6], что и оправдывает оба подхода к решению нелинейной системы кинетических интегральных уравнений (2.8)–(2.10).

Список литературы

- [1] Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер, *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений*, Наука, М., 1966.
- [2] C. Cercignani, *The Boltzmann Equation and Its Application*, Springer, New York, 1988.
- [3] М. Н. Коган, *Динамика разреженного газа*, Наука, М., 1967.
- [4] R. E. Caflish, *Commun. Pure Appl. Math.*, **32**:4 (1979), 521–554.
- [5] E. R. Caflisch, B. Nicolenco, *Commun. Math. Phys.*, **86**:2 (1982), 161–194.
- [6] H. W. Liepmann, R. Narasimha, M. T. Chahine, *Phys. Fluids*, **5**:11 (1962), 1313–1324.
- [7] K. A. Khachatryan, *J. Contemp. Math. Anal.*, **46**:2 (2011), 89–100.

Поступила в редакцию 14.12.2015,
после доработки 29.01.2016