Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Э. Деркачев, А. Н. Манапов, Анализ критических размерностей составных операторов в нелинейной σ -модели, *ТМФ*, 1998, том 116, номер 3, 379–400

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf911>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 16:41:36

© 1998 г.

С. Э. Деркачев*, А. Н. Манашов†

АНАЛИЗ КРИТИЧЕСКИХ РАЗМЕРНОСТЕЙ СОСТАВНЫХ ОПЕРАТОРОВ В НЕЛИНЕЙНОЙ σ -МОДЕЛИ

Сформулирована общая схема расчета в рамках $1/N$ -разложения критических экспонент произвольной системы смешивающихся при перенормировке составных операторов. Исследованы ограничения, накладываемые конформной инвариантностью на вид матрицы смешивания. Вычислены аномальные размерности произвольной степени вспомогательного поля во втором порядке по $1/N$.

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе мы пытаемся ответить на вопрос, описывает ли $(2 + \varepsilon)$ -разложение нелинейной σ -модели фазовый переход в модели Гейзенберга. Как хорошо известно [1, 2], положение точки фазового перехода обычно определяется несколькими операторами низшей размерности в гамильтониане системы, соответственно называемыми инфракрасно (ИК)-существенными операторами. (Напомним, оператор называется ИК-существенным (несущественным) или маргинальным, если его полная скейлинговая размерность x больше (меньше) или равна размерности пространства d .) Учет флуктуаций вблизи точки фазового перехода приводит к тому, что скейлинговые размерности физических наблюдаемых отличаются от их канонических размерностей. Обычно предполагается, что разность между скейлинговой и канонической размерностями (аномальная размерность) невелика. В этом случае судить об ИК-существенности (несущественности) оператора можно по его канонической размерности. Тем не менее возможность того, что канонически ИК-несущественный оператор после учета флуктуаций станет ИК-существенным, не может быть заранее исключена. При исследовании Q -матричной модели в $(2 + \varepsilon)$ -разложении [3, 4] был обнаружен класс операторов, по-видимому, обладающих таким свойством. Будучи канонически ИК-несущественными, эти операторы в первом порядке по ε приобретают большую аномальную раз-

*Кафедра высшей математики, Санкт-Петербургский технологический институт, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: derk@nordita.dk

†Отдел теоретической физики, Санкт-Петербургский государственный университет. Санкт-Петербург, Россия. E-mail: manashov@snoopy.phys.spbu.ru

мерность порядка εs^2 (s — число производных в операторе), что формально приводит к заключению об ИК-существенности этих операторов при больших s . Операторы с аналогичными свойствами были найдены в N -векторной [5], унитарной матричной [6] и ортогональной матричной [7] моделях. При условии, что поправки высших порядков по ε не меняют качественной картины, представления о характере фазовых переходов в этих моделях должны быть радикально пересмотрены [3, 4, 8, 9].

В настоящей работе мы проведем детальное исследование свойств данного класса операторов в нелинейной σ -модели. Как известно, эта модель описывает критическое поведение ферромагнетика Гейзенберга и допускает различные методы анализа — $(4 - \varepsilon)$ -, $(2 + \varepsilon)$ - и $1/N$ -разложения. При анализе спектра аномальных размерностей составных операторов в нелинейной σ -модели в $(2 + \varepsilon)$ -разложении в статье [5] были найдены операторы (содержащие $2s$ полей и $2s$ производных) с аномальной размерностью

$$y = 2(1 - s) + \varepsilon \left(1 + \frac{s(s-1)}{N-2} \right) + O(\varepsilon^2). \quad (1.1)$$

Явный вид этих операторов довольно сложен:

$$\sum_{k=0}^l \gamma_k (\partial_+ \vec{\pi} \cdot \partial_- \vec{\pi})^{2(l-k)} (\partial_+ \vec{\pi} \cdot \partial_+ \vec{\pi})^k (\partial_- \vec{\pi} \cdot \partial_- \vec{\pi})^k, \quad (1.2)$$

где γ_k — некоторые коэффициенты ($\gamma_0 \neq 0$) и

$$\partial_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_x \mp i\partial_y).$$

Попытка вычислить член порядка ε^2 в формуле (1.1) была предпринята в работах [8, 9]. К сожалению, результат, приведенный в [8, 9], неправилен, поскольку в ходе вычислений авторами был допущен принципиальный просчет, связанный с неверным определением полной системы смешивающихся операторов. Мы не будем останавливаться на этом более подробно, отметим только, что вычисления за пределами однопетлевого приближения в схеме $(2 + \varepsilon)$ -разложения довольно сложны, в частности, из-за непростой проблемы операторного смешивания, которая не решена в полном объеме даже в первом порядке по ε .

В силу вышесказанного представляется разумным использовать другой подход, а именно $1/N$ -разложение, для анализа данной проблемы. Являясь непертурбативным по своей природе, этот подход обеспечивает эффективное пересуммирование ряда теории возмущений, осуществляя тем самым связь между $(2 + \varepsilon)$ - и $(4 - \varepsilon)$ -разложениями. Исследование спектра однопетлевых аномальных размерностей в $(4 - \varepsilon)$ -разложении N -векторной модели, находящейся в одном классе универсальности с нелинейной σ -моделью, показало [10] отсутствие проблем, возникающих в $(2 + \varepsilon)$ -разложении. Таким образом, анализ поведения аномальных размерностей как функций размерности пространства способен прояснить вопрос об ИК-существенности операторов (1.2) в $(2 + \varepsilon)$ -разложении. Операторы, интерполирующие между операторами (1.2) в $(2 + \varepsilon)$ - и операторами $(\vec{\Phi}^2)^s$ в $(4 - \varepsilon)$ -разложении $1/N$ -векторной модели, представляют собой степень

вспомогательного поля ψ^s нелинейной σ -модели [11]. Критические размерности этих операторов в первом порядке по $1/N$ были вычислены в работах [12, 13]

$$\begin{aligned} y &= d - 2s - \eta s(d-1) \frac{(s-1)d(d-3) - 2(d-2)}{4-d} + O(N^{-2}) = \\ &= d - 2s - \frac{1}{N} (s(s-1)K(d) + O(s)) + O(N^{-2}), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где

$$\eta = \frac{4}{N} \frac{\Gamma(2\mu-2)}{\Gamma^2(\mu-1)\Gamma(2-\mu)} \frac{2-\mu}{\Gamma(\mu+1)} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \quad (1.4)$$

и

$$K(d) = 4(d-3) \frac{\Gamma(d-2)}{\Gamma^2(d/2-1)\Gamma(2-d/2)\Gamma(d/2)} (d-1). \quad (1.5)$$

Из анализа функции $K(d)$ видно, что в точке $d = 3$ происходит смена режима: нестабильное поведение при $d < 3$ сменяется стабильным при $d > 3$. Таким образом, при $d < 3$ мы встречаем те же трудности, что и в $(2 + \varepsilon)$ -разложении. Это позволяет предположить, что проблема имеет довольно общий характер, а не обусловлена спецификой $(2 + \varepsilon)$ -разложения. Поскольку представляется несомненным, что фазовый переход в модели Гейзенберга при $d > 2$ описывается двумя параметрами – температурой и магнитным полем, данная проблема должна как-то решаться, по крайней мере в $1/N$ -разложении. Представление о том, как это происходит, можно получить, вычислив аномальные размерности операторов ψ^s во втором порядке по $1/N$.

Основная часть настоящей статьи представляет собой описание метода, разработанного для этой цели. Напомним, что, поскольку пропагатор вспомогательного поля в нелинейной σ -модели имеет сложную зависимость от массы основного поля, какие-либо расчеты за пределами первого порядка по $1/N$ возможны только при рассмотрении модели непосредственно в критической точке, где все пропагаторы становятся безмассовыми [14]. Наиболее распространенными для расчета аномальных размерностей являются методы уравнений самосогласования [14–16] и конформного бутстрапа [17]. Однако область применимости данных методов ограничена операторами специального вида, состоящими не более чем из двух полей, что явно не выполнено в нашем случае. Здесь следует отметить, что методы ренормгруппового (РГ) анализа оказываются неприменимыми для случая σ -модели, рассматриваемой непосредственно в критической точке из-за отсутствия мультипликативной ренормируемости [18]. В то же время, т.к. корреляторы полей обладают свойством масштабной инвариантности в точке фазового перехода, критические размерности можно вычислять непосредственно по ИК-асимптотикам корреляторов. Такой подход, развитый в работах [12, 18, 19], позволяет эффективно рассчитывать аномальные размерности любой системы составных операторов в первом порядке по $1/N$. Те же соображения могут быть использованы и для вычисления аномальных размерностей в высших порядках по $1/N$ [20]. Однако при этом наиболее привлекательные черты метода работы [12] теряются. Мы применим другой подход,

Рис. 1

основанный на рассмотрении расширенной модели, которая, будучи мультипликативно ренормируемой, сводится к исходной специальным выбором параметров. Расширенная модель вследствие мультипликативной ренормируемости может быть исследована с помощью стандартных РГ-методов. Далее мы покажем, что до второго порядка по $1/N$ критические размерности полей (операторов) совпадают с соответствующими РГ-функциями, вычисленными в расширенной модели. Это даст нам рабочую формулу для вычисления аномальных размерностей в порядке $1/N^2$. Более детальное изложение этого подхода дано в разделе 2.

Другая проблема, которую необходимо решить, – это проблема операторного смешивания. Каноническая размерность оператора ψ^s равна $2s$, и в принципе нам необходимо рассматривать перенормировку всей системы операторов, имеющих ту же самую каноническую размерность. Оказывается, что матрица смешивания имеет почти треугольный вид: к оператору канонической размерности $2s$ и содержащему n полей оператору ψ могут примешиваться (в порядке $1/N$) только операторы с числом полей $k \geq n$ и (в порядке $1/N^2$) операторы с числом полей $k \geq n - 1$. Как будет показано в разделе 3, это свойство квазитреугольности матрицы смешивания вытекает из конформной инвариантности модели. Более того, будет показано, что существенная часть элементов матрицы смешивания может быть получена более простым способом, чем прямолинейное вычисление диаграмм Фейнмана. Раздел 4 посвящен вычислению аномальных размерностей операторов ψ^s во втором порядке по $1/N$. Анализ полученных результатов и обсуждение их значения для решения проблемы стабильности содержатся в разделе 5.

2. БЕЗМАССОВАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ σ -МОДЕЛЬ

Безмассовая нелинейная σ -модель в $(D \equiv 2\mu)$ -мерном пространстве задается действием

$$S = -\frac{1}{2}(\partial\phi^A)^2 - \frac{1}{2}M^{-2\Delta}\psi K_{\Delta}\psi + \frac{1}{2}\psi(\phi^A)^2 + \frac{1}{2}\psi K\psi, \quad (2.1)$$

где ϕ^A – $O(N)$ -векторное поле, ψ – вспомогательное поле, Δ – параметр регуляризации, M – ренормировочная масса. Два последних члена в (2.1) относятся к взаимодействию, тогда как два первых – к свободной части действия. Ядро K определяется из условия сокращения диаграмм с двукратным циклом ϕ -линий (рис. 1) и в явном виде задается формулой

$$K(p) = -\frac{N}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2(p-k)^2} = -\frac{N}{2(4\pi)^\mu} \frac{H^2(1)}{H(2\mu-2)} p^{D-4} \equiv b^{-1} p^{D-4}, \quad (2.2)$$

где $H(x) \equiv \Gamma(\mu-x)/\Gamma(x)$.

Регуляризованное ядро K_Δ определяется соотношением $K_\Delta = C^{-1}(\Delta)K(p)p^{2\Delta}$. Выбор функции $C(\Delta)$ достаточно произволен. Мы будем предполагать только, что она регулярна в окрестности точки $\Delta = 0$ и $C(0) = 1$. Пропагаторы полей ϕ и ψ имеют вид ($G_\psi = K_\Delta^{-1}$)

$$G_\phi^{AB}(p) = \delta^{AB}G_\phi(p) = \delta^{AB}p^{-2}, \quad G_\psi(p) = bM^{2\Delta}C(\Delta)p^{-2(\mu-2+\Delta)} \quad (2.3)$$

в импульсном пространстве и

$$G_\phi(x) = Ax^{-2\alpha}, \quad G_\psi(x) = BM^{2\Delta}C(\Delta)x^{-2(\beta-\Delta)} \quad (2.4)$$

в координатном пространстве. Здесь $\alpha = \mu - 1$, $\beta = 2$ и явные выражения для амплитуд A, B легко получить из уравнений (2.3).

Перенормировка теории с действием (2.1) не вызывает никаких проблем. Расходимости появляются в диаграммах как полюсы по параметру Δ и удаляются с помощью стандартной $\mathcal{R}$ -операции. Подсчет степеней расходимостей показывает, что теория перенормируема при $1/N$ -разложении в размерности $2 < D < 4$ и ренормированное действие имеет вид

$$S_R = -\frac{Z_1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}M^{-2\Delta}\psi K_\Delta\psi + \frac{Z_2}{2}\psi\phi^2 + \frac{1}{2}\psi K\psi. \quad (2.5)$$

В отличие от большинства квантово-полевых моделей, данная модель не является мультипликативно ренормируемой. Действительно, ренормированное действие (2.5) не может быть приведено к виду (2.1) переопределением полей и констант связи. Таким образом, явный вид функций Грина, вычисленных в данной модели, будет существенно зависеть от используемой вычислительной процедуры. Это не касается критических размерностей соответствующих функций. Для доказательства достаточно сослаться на эквивалентность в $1/N$ -разложении $O(N)$ -модели ϕ^4 и нелинейной σ -модели. Более формальное доказательство, не основывающееся на такой эквивалентности, дано в работе [18].

В работе [12] была развита схема для вычисления аномальных размерностей функций Грина полей и составных операторов в схеме минимальных вычитаний (МВ). Было показано, что в первом порядке по $1/N$ аномальные размерности простым образом выражаются через вычеты полюсов по Δ соответствующих неренормированных функций Грина. Рассмотрим для примера 1-неприводимую функцию Грина $\Gamma(p)$, зависящую только от одного импульса p (например, обратный пропагатор поля ϕ). Более удобно иметь дело с безразмерной величиной $\bar{\Gamma}(p) = p^{-d}\Gamma(p)$, где d – каноническая размерность функции $\Gamma(p)$. Вследствие масштабной инвариантности теории форма ренормированной функции Грина полностью определяется (с точностью до некоторого множителя $\bar{\Gamma}$) ее аномальной размерностью γ :

$$\bar{\Gamma}(p) = \bar{\Gamma}\left(\frac{p}{M}\right)^\gamma. \quad (2.6)$$

$$\frac{1}{u} \text{---} + \frac{1-v}{u^2} \text{---} \bigcirc \text{---} + \frac{(1-v)^2}{u^3} \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} + \dots$$

Рис. 2

Дифференцируя уравнение (2.6) по M , получаем уравнение для аномальной размерности

$$M \partial_M \bar{\Gamma}(p) = -\gamma \bar{\Gamma}(p). \quad (2.7)$$

Поскольку вся зависимость от M в диаграммах проистекает только от пропагаторов поля ψ (2.3) (каждая диаграмма сопровождается множителем $M^{2\Delta n}$, где n — число ψ -линий в диаграмме), уравнение (2.7) может быть записано в виде

$$\gamma \bar{\Gamma}(p) = -2\Delta \sum_{\{\Gamma_i\}} n_i \Gamma_i, \quad (2.8)$$

где n_i — число ψ -линий в диаграмме $\bar{\Gamma}_i$. Суммирование производится по всем диаграммам Γ_i для ренормированной функции Грина $\bar{\Gamma}(p)$. Предел $\Delta \rightarrow 0$ подразумевается во всех подобных формулах.

В первом порядке по $1/N$ формула (2.8) приобретает особенно простой вид. Действительно, в диаграммах данного порядка возможны только простые полюсы по Δ ($\Gamma_i = (\Gamma_i)_1/\Delta + (\Gamma_i)_0 + \dots$). Принимая во внимание, что $\bar{\Gamma} = 1 + O(1/N)$, мы получаем

$$\gamma = -2 \sum_{\{\Gamma_i\}} n_i (\Gamma_i)_1 + O\left(\frac{1}{N^2}\right). \quad (2.9)$$

Формула (2.9) с необходимыми изменениями остается верна и для произвольной системы смешивающихся при ренормировке операторов [12].

При использовании формулы (2.8) для вычислений в следующих порядках сразу обнаруживаются несколько трудностей. Во-первых, функцию $\bar{\Gamma}(p)$ необходимо вычислять с точностью $1/N$. Во-вторых, правая и левая части уравнения (2.8) приобретают нетривиальную импульсную зависимость. В частности, вычеты в полюсах первого порядка по Δ также будут зависеть от импульсов, что само по себе затрудняет вычисление диаграмм и, кроме того, делает необходимым каждый раз проверять сокращение этой зависимости между обеими частями уравнения (2.8). Чтобы избежать всех этих неприятностей, мы используем другой подход для вычисления аномальных размерностей.

Рассмотрим модель (uv -модель), задаваемую действием

$$S = -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{u}{2}M^{-2\Delta}\psi K_\Delta\psi + \frac{1}{2}\psi\phi^2 + \frac{v}{2}\psi K\psi, \quad (2.10)$$

которое отличается от (2.1) наличием двух параметров u и v перед вторым и четвертым слагаемыми. Впервые эта модель была рассмотрена в работе [18]. Очевидно, что при

специальном выборе параметров $u = v = 1$ мы возвращаемся к исходной модели (2.1). Пропагатор ψ -поля в расширенной uv -модели (рис. 2) есть

$$G_\psi(p; u, v) \equiv \frac{1}{u} G_\psi(p) \left(1 + \frac{v-1}{u} t^\Delta + \frac{(v-1)^2}{u^2} t^{2\Delta} + \dots \right), \quad (2.11)$$

где $t \equiv C(\Delta)(M^2/p^2)$. Теория, очевидно, перенормируема, и перенормированное действие имеет вид

$$S_R = -\frac{Z_1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{u}{2}M^{-2\Delta}\psi K_\Delta\psi + \frac{Z_2}{2}\psi\phi^2 + \frac{v}{2}\psi K\psi. \quad (2.12)$$

Заметим, что константы ренормировки $Z_i = Z_i(u, v, \dots)$ зависят от u, v .

После переопределения полей и констант связи

$$\Phi_0 = Z_\Phi \Phi, \quad u_0 = uM^{-2\Delta}Z_u, \quad v_0 = vZ_v, \quad (2.13)$$

где $\Phi \equiv \{\phi, \psi\}$, $Z_\phi = Z_1^{1/2}$, $Z_\psi = Z_2 Z_1^{-1}$ и $Z_u = Z_v = Z_\psi^{-2}$, действие (2.12) принимает вид затравочного действия (2.10). Таким образом uv -модель мультипликативно ренормируема, что гарантирует применимость стандартных РГ-методов.

Напомним определение основных РГ-функций:

$$\gamma_\Phi = M\partial_M \ln Z_\Phi, \quad \beta_u = M\partial_M u = 2\Delta u - 2u\gamma_\psi, \quad \beta_v = M\partial_M v = -2v\gamma_\psi. \quad (2.14)$$

РГ-уравнения для одночастично-неприводимых функций Грина имеют вид

$$(M\partial_M + \beta_U \partial_U - n_\Phi \gamma_\Phi) \Gamma(p_1, \dots, p_n) = 0. \quad (2.15)$$

Мы используем сокращенные обозначения $U = \{u, v\}$, $\beta_U \partial_U = \beta_u \partial_u + \beta_v \partial_v$ и $n_\Phi \gamma_\Phi = n_\phi \gamma_\phi + n_\psi \gamma_\psi$. Соответствующие уравнения для системы составных операторов $\{F_i\}$, смешивающихся при перенормировке, задаются матричным соотношением

$$([M\partial_M + \beta_U \partial_U - n_\Phi \gamma_\Phi] \delta^{ik} + \gamma_F^{ik}) \Gamma_k(p; p_1, \dots, p_n) = 0. \quad (2.16)$$

Здесь $\Gamma_i(p; p_1, \dots, p_n)$ — n -точечная 1-неприводимая функция Грина с операторной вставкой $[F_i]_R$. Ренормированный оператор определяется равенством $[F_i]_R = Q_{ik} F_k$, где Q_{ik} подбирается из требования конечности всех функций Грина оператора $[F_i]_R$. Как обычно, суммирование по повторяющимся индексам подразумевается.

Матрица аномальных размерностей γ_F задается равенством

$$\gamma_F = -M\partial_M Z_F Z_F^{-1}, \quad \text{где} \quad Z_F^{ik} = Q^{ik} Z_\Phi^{-n_{\Phi,k}}. \quad (2.17)$$

Здесь $Z_\Phi^{-n_{\Phi,k}} \equiv Z_\phi^{-n_{\phi,k}} Z_\psi^{-n_{\psi,k}}$, мультииндекс $n_{\Phi,k} \equiv \{n_{\phi,k}, n_{\psi,k}\}$ показывает число полей ϕ и ψ в мономе F_k .

Рассмотрим теперь вопрос о связи РГ-функций, вычисленных в расширенной σ -модели с аномальными размерностями полей (операторов) в обычной σ -модели. Как уже

упоминалось ранее, uv -модель сводится к обычной σ -модели выбором зарядов $u = v = 1$. Однако легко понять, что, поскольку при таком выборе функции β_u, β_v отличны от нуля ($\beta_u = \beta_v = -2\gamma_\psi \neq 0$), точка $u = v = 1$ не является критической точкой uv -модели. Это немедленно приводит к заключению, что РГ-функции γ_Φ, γ_F при $u = v = 1$ не могут быть отождествлены с аномальными размерностями полей (операторов) в обычной σ -модели. Действительно, из (2.15) нетрудно получить уравнение, описывающее поведение функций $\Gamma(p_1, \dots, p_n)$ при масштабных преобразованиях,

$$[\lambda \partial_\lambda - (d_\Gamma - n_\Phi \gamma_\Phi)] \Gamma(\lambda p_1, \dots, \lambda p_n, M) = \beta_U \partial_U \Gamma(\lambda p_1, \dots, \lambda p_n, M), \quad (2.18)$$

где d_Γ — каноническая размерность функции $\Gamma(p_i; M)$. Очевидно, что величина $d_\Gamma - n_\Phi \gamma_\Phi$ является скейлинговой размерностью функции $\Gamma(p_i; M)$ только при условии, что правая часть уравнения (2.18) обращается в нуль.

В работе [18] было показано, что при определенном выборе схемы вычитаний (схема вычитаний при фиксированных импульсах) ренормированные функции Грина зависят только от разности $u - v$. Поскольку при $u = v = 1$ оператор $\beta_U \partial_U$ можно заменить на $-2\gamma_\psi(\partial_u + \partial_v)$, правая часть уравнения (2.18) обращается в нуль, и, следовательно, РГ-функции γ_Φ, γ_F , вычисленные в этой схеме, совпадают с истинными аномальными размерностями. Однако схема вычитаний при фиксированных импульсах малоприменима для практических вычислений. Наиболее удобной в этом отношении является схема МВ. Функции Грина, вычисленные в разных ренормировочных схемах, связаны между собой преобразованием конечной ренормировки. Выбирая в качестве исходной схему вычитаний при фиксированных импульсах (схема I), получим функции Грина в любой другой схеме в виде

$$\Gamma_i(u, v, \dots) = Z_{ik}^*(u, v) \Gamma_k^I(\bar{u} - \bar{v}, \dots), \quad (2.19)$$

где $\bar{u} = Z_u^*(u, v)u$, $\bar{v} = Z_v^*(u, v)v$ и $Z_{ik}^*(u, v)$, $Z_u^*(u, v)$, $Z_v^*(u, v)$ — константы конечной перенормировки. Принимая во внимание, что “голые” константы связи u_0, v_0 не зависят от используемой схемы ренормировки, из уравнений (2.13) получаем, что $u/v = \bar{u}/\bar{v}$ и, следовательно, $Z_u^* = Z_v^*$. Тогда из соотношения (2.19) следует, что функции Грина, вычисленные с использованием разных вычитательных процедур, в точке $u = v = 1$ могут различаться только постоянным множителем. Это гарантирует то, что критические экспоненты, найденные в модели с действием (2.1), не зависят от ренормировочной схемы и, в частности, от вида функции $C(\Delta)$.

Подставляя функции Γ_i в форме (2.19) в уравнение (2.16), получаем следующее уравнение на функции Грина в обычной σ -модели:

$$([M \partial_M - n_\Phi \gamma_\Phi] \delta^{ik} + (\gamma_F^{ik} + \gamma_F^{*ik})) \Gamma_k(p; p_1, \dots, p_n) = 0, \quad (2.20)$$

где $\gamma_F^* = (\beta_u \partial_u + \beta_v \partial_v) Z^*(u, v) Z^{*-1}(u, v)|_{u=v=1}$. Таким образом, аномальные размерности даются собственными значениями матрицы $\gamma_F + \gamma_F^*$. Матрица γ_F^* тождественно равна нулю только в схеме I. Однако, как будет показано ниже, в схеме МВ γ_F^* обращается в нуль в двух первых порядках по $1/N$ ($\gamma_F^* = O(1/N^3)$). Следовательно,

для вычисления критических размерностей с точностью $1/N^2$ достаточно знать только матрицу γ_F . Далее мы ограничимся рассмотрением только схемы МВ. В этой схеме РГ-функции выражаются через вычеты в простых полюсах соответствующих ренормировочных констант следующим образом:

$$\begin{aligned}\gamma_\psi &= 2\partial_u Z_\psi^{(1)}\Big|_{u=v=1}, & \gamma_\phi &= 2\partial_u Z_\phi^{(1)}\Big|_{u=v=1}, \\ \gamma_F^{ik} &= -2\partial_u Q_{ik}^{(1)}\Big|_{u=v=1} + \delta_{ik} n_{\Phi,k} \gamma_\Phi,\end{aligned}\quad (2.21)$$

где

$$\begin{aligned}Z_i(u, v) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_i^{(n)}(u, v)}{\Delta^n}, \\ Q_{ik}(u, v) &= \delta_{ik} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_{ik}^{(n)}(u, v)}{\Delta^n}.\end{aligned}$$

Матрица смешивания Q_{ik} вычисляется непосредственно из диаграмм как расходящаяся часть функционала $\Gamma_{F_i}(x; \Phi)$:

$$\mathcal{K}\mathcal{R}'\Gamma_{F_i}(x; \Phi) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta^n} Q_{ik}^{(n)} F_k(x), \quad (2.22)$$

где

$$\Gamma_{F_i}(x; \Phi) \equiv \sum_n \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots dx_n \Gamma_{F_i,n}(x; x_1, \dots, x_n) \Phi(x_1) \dots \Phi(x_n).$$

Здесь $\Gamma_{F_i}(x; x_1, \dots, x_n)$ — неренормированная n -точечная 1-неприводимая функция Грина с операторной вставкой F_i и оператор $\mathcal{K}$ отбирает сингулярную (полюсную) часть диаграмм.

Поскольку в формулах (2.21) не содержится производных по v , мы можем положить $v = 1$ с самого начала. В этом случае пропагатор ψ -поля (2.11) с точностью до множителя $1/u$ совпадает с пропагатором обычной σ -модели: $G_\psi(p, u, v = 1) = G_\psi(p)/u$. Принимая во внимание, что константы Z_i , Q_{ik} определяются полюсными частями соответствующих диаграмм, легко понять, что операция ∂_u просто дает множитель $-n_\psi$ для каждой диаграммы (n_ψ — число ψ -линий в диаграмме). Таким образом, все вычисления, необходимые для определения аномальных размерностей (2.21) в порядке $1/N^2$, могут быть проделаны в рамках обычной σ -модели.

Нам осталось доказать, что в порядке $O(1/N^2)$ матрица γ_F^* равна нулю. Для этой цели достаточно показать, что аномальный член

$$\mathcal{A} = -2\gamma_\psi(\partial_u + \partial_v)\Gamma_k(p; p_1, \dots, p_n)\Big|_{u=v=1} \quad (2.23)$$

в уравнениях (2.15), (2.16) обращается в нуль в этом порядке. Поскольку функция γ_ψ имеет порядок $O(1/N)$, мы должны показать, что оставшаяся часть аномального члена (2.23) имеет порядок $O(1/N^2)$, т.е. что для любой диаграммы первого порядка по $1/N$ выполнено равенство

$$(\partial_u + \partial_v)G(p_i, u, v)\Big|_{u=v=1} = 0. \quad (2.24)$$

Пусть G – произвольная диаграмма первого порядка в обычной σ -модели, имеющая n внутренних ψ -линий. Рассматривая параметр Δ на каждой линии как независимую переменную и выписывая явно множители $C(\Delta)$, связанные с пропагатором ψ -поля, запишем ответ для диаграммы в виде

$$C^n(\Delta)G(\Delta, \dots, \Delta).$$

Соответственно в расширенной модели ($u, v \neq 1$) выражение для этой диаграммы приобретает следующий вид:

$$\frac{1}{u^n} \sum_{m_1, \dots, m_n=1}^{\infty} (C(\Delta))^{m_1+\dots+m_n} G(m_1\Delta, \dots, m_n\Delta) \left(\frac{v-1}{u}\right)^{m_1+\dots+m_n-n}. \quad (2.25)$$

Как обычно, ренормированная диаграмма получается из неренормированной применением $\mathcal{R}$ -операции. В работе [18] было показано, что $\mathcal{R}$ -операция, основанная на вычитательной схеме I, дает для каждого члена суммы (2.25) один и тот же ответ с точностью до множителя $((v-1)/u)^n$. В этом случае суммирование может быть легко выполнено и приводит к появлению фактора $(1+u-v)^{-n}$. Легко проверить, что в схеме МВ это свойство теряется, действие $\mathcal{R}$ на разные члены суммы (2.25) ведет к существенно разным ответам. Однако вся сумма (2.25) в целом после перенормировки в рамках схемы МВ также зависит только от разности $u-v$.

Для сходящейся диаграммы проверка этого утверждения элементарна. Рассмотрим случай поверхностно расходящейся диаграммы. Поскольку в первом порядке по $1/N$ такая диаграмма имеет подрасходимости, можно представить функцию $G(\dots)$ в виде

$$G(m_1\Delta, \dots, m_n\Delta) = \frac{F(m_1\Delta, \dots, m_n\Delta)}{(m_1 + \dots + m_n)\Delta}, \quad (2.26)$$

где функция F регулярна в окрестности нуля по всем своим аргументам. Поскольку перенормировка в схеме МВ сводится к отбрасыванию полюсных вкладов, мы получаем для ренормированной диаграммы выражение

$$\frac{1}{u^n} \sum_{m_1, \dots, m_n=1}^{\infty} \left(C'(0)F(0) + \frac{m_1 F'_1(0) + \dots + m_n F'_n(0)}{m_1 + \dots + m_n} \right) \left(\frac{v-1}{u}\right)^{m_1+\dots+m_n-n}. \quad (2.27)$$

Вследствие симметрии по $m_1, \dots, m_n$ множители вида $m_1/(m_1 + \dots + m_n)$ могут быть заменены на $1/n$, что позволяет вычислить сумму (2.27) в явном виде:

$$\frac{nC'(0)F(0) + F'_1(0) + \dots + F'_n(0)}{n(1+u-v)^n}. \quad (2.28)$$

Данная схема почти без изменений применима и в случае поверхностно-сходящейся диаграммы с расходящимся подграфом.

Поскольку аномальный член $\mathcal{A}$ в уравнениях (2.15), (2.16) пропорционален $(\partial_u + \partial_v)\Gamma(p_i, u, v)|_{u=v=1}$, мы заключаем, что $\mathcal{A}$ и, следовательно, γ^* равны нулю в

порядке $O(1/N^2)$. Заметим также, что мы доказали несколько больше ($A(u, v) = 0$ при $u = v$), чем было действительно нужно: $A(u, v) = 0$ при $u = v = 1$.

Таким образом, до порядка $O(1/N^2)$ включительно аномальные размерности могут вычисляться по простым формулам (2.21). Поскольку при доказательстве мы не использовали каких-либо специфических черт σ -модели, оно может быть без изменений перенесено и на другие модели, допускающие $1/N$ -разложение, — $CP(N)$ -модель, модели Тирринга и Гросса–Невё, N -флейворные квантовые электро- и хромодинамики.

3. О МАТРИЦЕ СМЕШИВАНИЯ В КОНФОРМНО-ИНВАРИАНТНЫХ ТЕОРИЯХ

Для вычисления аномальных размерностей операторов ψ^s необходимо рассмотреть перенормировку всей системы скалярных операторов с канонической размерностью $2s$. Однако, как будет показано ниже, конформная инвариантность теории позволяет восстановить вид скейлингового оператора без вычисления матрицы смешивания в порядке $O(1/N^2)$.

Как хорошо известно [21–23], критическая σ -модель представляет собой простейший пример конформной теории поля в D -измерениях. Одним из следствий конформной инвариантности является равенство нулю корреляторов любых двух конформных операторов, имеющих разную скейлинговую размерность,

$$\langle A(x)B(y) \rangle = \frac{C(A, B)\delta_{\Delta_A, \Delta_B}}{|x - y|^{2(\Delta_A + \Delta_B)}}. \quad (3.1)$$

Данное равенство может быть использовано для определения скалярного произведения на пространстве операторов [24]. Сделав обычное предположение о полноте базиса, образованного конформно-инвариантными операторами и их полными производными [21, 24], можно с помощью свойства (3.1) получить нетривиальные ограничения на матрицу смешивания. Прежде всего заметим, что оператор, имеющий определенную скейлинговую размерность и не являющийся полной производной другого оператора, является конформно-инвариантным оператором. Обратное утверждение очевидно.

Рассмотрим сначала простейший случай ренормировки оператора ψ^2 . Единственный оператор, который может к нему примешаться — это $\partial^2\psi$, следовательно, ренормированный оператор имеет вид

$$[\psi^2]_R = \psi^2 + \sum_{i,k} \frac{q_{ik}^{(2)}}{N^k \Delta_i} \psi^2 + \sum_{i,k} \frac{q_{ik}^{(1)}}{N^k \Delta_i} \partial^2 \psi. \quad (3.2)$$

Оператор с определенной скейлинговой размерностью, а значит, как обсуждалось выше, конформно-инвариантный оператор представляет собой линейную комбинацию операторов $[\psi^2]_R$ и $\partial^2\psi$:

$$O_2 = [\psi^2]_R + c\partial^2\psi, \quad (3.3)$$

Рис. 3

где c – некоторая конечная константа. Из требования “ортогональности” (3.1) операторов O_2 и $O_1 \equiv \psi$ получаем, что

$$\langle [\psi^2]_R(x)\psi(y) \rangle = -c\partial^2 \langle \psi(x)\psi(y) \rangle. \quad (3.4)$$

Поскольку коррелятор в левой части (3.4) имеет порядок $O(1/N^2)$, равенство возможно лишь при условии, что $c \sim O(1/N)$. В импульсном пространстве равенство (3.4) принимает вид

$$\langle [\psi^2]_R(p)\psi(p) \rangle_{1H} = cp^2. \quad (3.5)$$

Таким образом, коррелятор $\langle [\psi^2]_R(p)\psi(p) \rangle_{1H}$ не содержит логарифмов импульса во всех порядках $1/N$ -разложения, что возможно, лишь если в каждом порядке по $1/N$ выполнено равенство $\sum_{\alpha} c_{\alpha}^{(k)} n_{\alpha}^{(k)} = 0$, где $c_{\alpha}^{(k)}$ – вычеты в простых полюсах диаграмм k -го порядка и $n_{\alpha}^{(k)}$ – число внутренних ψ -линий. Поскольку в первом порядке по $1/N$ имеется только одна диаграмма рис. 3 для коррелятора (3.4), мы получаем, что $c^{(1)} = 0$, т.е. диаграмма на рис. 3 не расходится, что было замечено в работе [12]. Проверка условия $\sum_{\alpha} c_{\alpha} n_{\alpha} = 0$ в порядке $O(1/N^2)$ требует больших усилий.

Вычислив диаграмму на рис. 3, получаем

$$c = \frac{1}{N} \frac{2}{\mu} \frac{(2\mu-3)}{(3-\mu)} \frac{(2-\mu)}{\Gamma(2-\mu)} \frac{\Gamma(2\mu-2)}{\Gamma^3(\mu-1)} + O(1/N^2). \quad (3.6)$$

Коэффициент c однозначно связан с недиагональным элементом матрицы смешивания $\gamma_{12} = c(\gamma_{\psi^2} - \gamma_{\psi})$ (γ_{ψ^2} – аномальная размерность оператора ψ^2). Таким образом, определение элемента матрицы смешивания γ_{12} в порядке $O(1/N^2)$ не требует вычисления диаграмм в этом порядке.

Рассмотрим более сложный случай перенормировки операторов размерности 6. На классическом уровне существуют два конформных оператора размерности 6:

$$O_3^{(1)} = \psi^3 \quad \text{и} \quad O_3^{(2)} = \psi \partial^2 \psi - \frac{(3-\mu)}{2(5-\mu)} \partial^2 \psi^2. \quad (3.7)$$

После ренормировки точные конформно-инвариантные операторы могут быть представлены в виде

$$CO_3^{(1)} = [O_3^{(1)}]_R + a_1 [O_3^{(2)}]_R + a_2 \partial^2 O_2 + a_3 \partial^4 O_1, \quad (3.8)$$

$$CO_3^{(2)} = [O_3^{(2)}]_R + b_1 [O_3^{(1)}]_R + b_2 \partial^2 O_2 + b_3 \partial^4 O_1. \quad (3.9)$$

Коэффициенты a_i , b_i зависят от N и μ . Из требования ортогональности (3.1) операторов $CO_3^{(1)}$ и $CO_3^{(2)}$ операторам O_1 и O_2 получаем, что $a_2 \sim b_2 \sim b_3 \sim O(1/N)$ и $a_3 \sim O(1/N^2)$. Условие $\langle CO_3^{(1)}(x)CO_3^{(2)}(y) \rangle = 0$ приводит к уравнению, связывающему коэффициенты a_1 и b_1 ($a_1 = a_1^0/N + O(1/N^2)$ и $b_1 = b_1^0 + O(1/N)$):

$$\begin{aligned} & \langle [O_3^{(1)}]_R(x)[O_3^{(2)}]_R(y) \rangle + b_1 \langle [O_3^{(1)}]_R(x)[O_3^{(1)}]_R(y) \rangle + \\ & + a_1 \langle [O_3^{(2)}]_R(x)[O_3^{(2)}]_R(y) \rangle = O(N^{-4}). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Коэффициент b_1^0 определяется по матрице смешивания в порядке $O(1/N)$ и имеет вид

$$b_1^0 = 2\gamma_{21}(\gamma[O_3^{(1)}] - \gamma[O_3^{(2)}])^{-1},$$

где $\gamma[O_3^{(i)}]$ – аномальные размерности соответствующих операторов в порядке $O(1/N)$ [12]. Коэффициент γ_{21} описывает смешивание операторов $O_3^{(1)}$ и $O_3^{(2)}$ в порядке $O(1/N)$. После несложных вычислений мы получаем

$$\gamma_{21} = \frac{4\mu(2\mu - 3)(4\mu^2 - 1)}{3(2 - \mu)} + O(1/N^2). \quad (3.11)$$

Здесь и далее все результаты даются в единицах η_1/N и $(\eta_1/N)^2$ для величин первого и второго порядков по $1/N$, соответственно. Если коэффициент b_1^0 известен, то a_1^0 может быть найден из условия ортогональности (3.10). Для этого достаточно вычислить первый коррелятор в (3.10) в однопетлевом приближении, а два других – в древесном. В результате имеем

$$a_1^0 = -\frac{3(2\mu - 3)(\mu - 1)}{2(3 - \mu)} \frac{\mu^2 + 7\mu - 24}{\mu^2 - 17\mu + 24}. \quad (3.12)$$

Определение этого коэффициента в рамках обычной схемы требует вычисления 20 диаграмм в порядке $O(1/N^2)$.

Коэффициенты a_2 , a_3 в главном порядке по $1/N$ могут быть определены из тех же соображений. Мы не будем приводить точных значений этих коэффициентов, поскольку они стоят при операторах, являющихся полными производными и, следовательно, несущественны для определения аномальной размерности оператора (3.8).

Зная точный вид оператора (3.8), для определения γ_{ψ^3} в порядке $O(1/N^2)$ достаточно ограничиться вычислением диагонального элемента γ_{11} матрицы аномальных размерностей в этом порядке. Действительно, используя треугольность матрицы γ в первом порядке по $1/N$, получаем для аномальной размерности оператора (3.8) в порядке $O(1/N^2)$ значение

$$\gamma_{\psi^3} = \gamma_{11}^{(1)} + \gamma_{11}^{(2)} - r\gamma_{12}^{(2)}, \quad (3.13)$$

где $r = -\gamma_{21}^{(1)}/(\gamma_{11}^{(1)} - \gamma_{22}^{(1)})$, и базис операторов выбран в виде $[O_3^{(1)}]_R$, $[O_3^{(2)}]_R$, $\partial^2 O_2$, $\partial^4 O_1$. Принимая во внимание, что оператор (3.8) диагонализует матрицу γ^T , нетрудно получить, что

$$a_1^0 = \frac{\gamma_{12}^{(2)}}{(\gamma_{11}^{(1)} - \gamma_{22}^{(1)})}. \quad (3.14)$$

С учетом (3.14) равенство (3.13) переписывается в виде

$$\gamma_{\psi^3} = \gamma_{11}^{(1)} + \gamma_{11}^{(2)} + a_1^0 \gamma_{21}^{(1)}, \quad (3.15)$$

где единственная величина, подлежащая определению во втором порядке по $1/N$, — это $\gamma_{11}^{(2)}$.

Распространение данной схемы на случай операторов более высокой размерности проходит без каких-либо изменений. Мы сформулируем здесь некоторые свойства матрицы смешивания системы операторов канонической размерности $2s$. Выберем в качестве базисных операторов операторы, конформно-инвариантные на классическом уровне. Очевидно, что, кроме скалярных, необходимо включить в рассмотрение также тензорные операторы, поскольку они могут примешиваться друг к другу в виде полных производных. Тогда можно показать, что в таком базисе матрица аномальных размерностей в первом порядке по $1/N$ имеет блочно-треугольный вид. Это означает, что к конформному оператору размерности $2s$ с числом полей ψ , равным k , могут примешиваться операторы с числом ψ -полей $k' \geq k$, причем операторы с $k' = k$ обязаны быть конформно-инвариантными. Таким образом, задача нахождения аномальных размерностей (собственных значений соответствующей матрицы) может решаться на каждом из подпространств операторов с фиксированным числом ψ -полей отдельно. Во втором порядке по $1/N$ к оператору, содержащему k ψ -полей, может примешиваться оператор с $k - 1$ ψ -полем и т.д. Коэффициенты при операторах с числом полей меньше k могут определяться из условий ортогональности, что значительно проще, чем их прямое вычисление через матрицу смешивания.

Поясним эти утверждения на примере интересующих нас операторов

$$\mathcal{O}_1^s = \psi^s \quad \text{и} \quad \mathcal{O}_2^s = \psi^{s-2} \partial^2 \psi - \frac{3 - \mu}{(s-1)(2s-1-\mu)} \partial^2 \psi^{s-1}$$

(оператор $\mathcal{O}_2^s$ конформно-инвариантен на классическом уровне).

В порядке $O(1/N)$ к оператору $\mathcal{O}_2^s$ примешивается оператор $\mathcal{O}_1^s$, который ренормируется мультипликативно. Заметим, что оператор $\partial^2 \psi^{s-1} = \partial^2 \mathcal{O}_1^{s-1}$ не примешивается к оператору $\mathcal{O}_2^s$, поскольку не является конформно-инвариантным. В следующем порядке к оператору $\mathcal{O}_1^s$ примешиваются операторы $\mathcal{O}_2^s$ и $\partial^2 \mathcal{O}_1^{s-1}$, т.е. скейлинговый оператор имеет вид

$$[\mathcal{O}_1^s]_R + \frac{\alpha_1}{N} [\mathcal{O}_2^s]_R + \frac{\alpha_2}{N} \partial^2 [\mathcal{O}_1^{s-1}]_R. \quad (3.16)$$

Соответственно для оператора $\mathcal{O}_2^s$ получаем

$$[\mathcal{O}_2^s]_R + \left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{N} \right) [\mathcal{O}_1^s]_R + \frac{\beta_2}{N} \partial^2 [\mathcal{O}_1^{s-1}]_R + \frac{\beta_3}{N} \partial^4 [\mathcal{O}_1^{s-2}]_R + \frac{\beta_4}{N} \partial^2 [\mathcal{O}_2^{s-1}]_R + \dots \quad (3.17)$$

Коэффициенты $\alpha_2, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \dots$ при операторах, являющихся полными производными, могут быть определены из условия ортогональности операторов (3.16), (3.17) соответствующим операторам. Для определения коэффициента β_0 необходимо вычислить матрицу аномальных размерностей (2.21) в первом порядке по $1/N$,

$$\beta_0 = \frac{\gamma_{21}^{(1)}}{\gamma_{11}^{(1)} - \gamma_{22}^{(1)}} = (s-2) \frac{4\mu(2\mu-3)}{4s(2\mu-3) - \mu^2 - 7\mu + 12}, \quad (3.18)$$

здесь

$$\gamma_{21}^{(1)} = 2(s-2) \frac{2\mu(2\mu-3)(4\mu^2-1)}{3(2-\mu)}, \quad (3.19)$$

$$\gamma_{11}^{(1)} = s(2\mu-1) \frac{[(s-1)\mu(2\mu-3) - 2(\mu-1)]}{(2-\mu)} \quad (3.20)$$

и

$$\gamma_{22}^{(1)} = (2\mu-1) \frac{(2\mu-3) [3\mu s^2 - s(11\mu+4) + \mu^2 + 9\mu + 2] - 6(s-1)(\mu-1)}{3(2-\mu)} \quad (3.21)$$

– аномальные размерности операторов $\mathcal{O}_1^s$, $\mathcal{O}_2^s$ [12]. Коэффициент α_1 определяется из условия ортогональности операторов (3.16), (3.17):

$$\alpha_1 = s(s-1) \frac{(2\mu-3)(\mu-1)}{4(3-\mu)} \frac{4s(\mu-3) + \mu^2 - 5\mu + 12}{4s(2\mu-3) - \mu^2 - 7\mu + 12}. \quad (3.22)$$

В полной аналогии с выводом формулы (3.15) находим для аномальной размерности оператора (3.16) во втором порядке по $1/N$ формулу

$$\gamma_{\psi^s}^{(2)} = \gamma_{11}^{(2)} + \alpha_1 \gamma_{21}^{(1)}. \quad (3.23)$$

Подчеркнем еще раз, что наиболее существенной в изложенном выше подходе является возможность определения формы скейлингового оператора (коэффициентов $\alpha_2, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \dots$) без полного вычисления матрицы смешивания. Структура матрицы, например ее треугольность в порядке $O(1/N)$, может быть сравнительно просто установлена и прямым вычислением нескольких диаграмм.

Прежде чем непосредственно заняться вычислением элемента $\gamma_{11}^{(2)}$ матрицы аномальных размерностей, кратко обсудим проблему, связанную с тем, что знаменатели в формулах (3.14), (3.18) и (3.22) в некоторых точках $\mu = \mu_s$ обращаются в нуль. Это обстоятельство вызвано тем, что разность $\gamma_{11}^{(1)} - \gamma_{22}^{(1)}$ обращается в нуль в этих точках, тогда как формулы (3.14), (3.18) и (3.22) выводились в предположении, что эта разность отлична от нуля. Поэтому указанные формулы должны быть соответствующим образом исправлены. Чтобы понять, что происходит в действительности, рассмотрим эту проблему более детально в случае операторов размерности 6.

Для определения аномальной размерности операторов (3.8), (3.9) достаточно рассмотреть блок матрицы аномальных размерностей, описывающий смешивание операторов $[O_3^{(1)}]_R$ и $[O_3^{(2)}]_R$ (смотри (3.7)),

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Для соответствующих собственных значений получаем

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ \gamma_{11} + \gamma_{22} \pm \sqrt{(\gamma_{11} - \gamma_{22})^2 + 4\gamma_{12}\gamma_{21}} \right\}, \quad (3.25)$$

где $\gamma_{12} \sim O(1/N^2)$ и $\gamma_{21} \sim O(1/N)$. При $\gamma_{11} - \gamma_{22} \sim O(1/N)$, раскладывая выражения (3.25) в ряд по $1/N$, мы приходим к формуле (3.13). В то же время, если $\gamma_{11} - \gamma_{22} = 0$, то

$$\lambda_{1,2} = \gamma_{11} \pm \sqrt{\gamma_{12}\gamma_{21}} = \frac{1}{N} \left(c_0 \pm \frac{c_1}{\sqrt{N}} + \dots \right). \quad (3.26)$$

Соответственным образом изменятся и коэффициенты смешивания в формулах (3.8), (3.9): a_1 будет иметь порядок $O(1/\sqrt{N})$ и b_1^0 — порядок $O(\sqrt{N})$. Более того, кривые $\lambda_1(\mu)$ и $\lambda_2(\mu)$ никогда не пересекаются,

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{(\gamma_{11} - \gamma_{22})^2 + 4\gamma_{12}\gamma_{21}} \geq 0. \quad (3.27)$$

Заметим, что $\gamma_{12}\gamma_{21} > 0$ при $1 < \mu < 2$. Таким образом, функция $\gamma_{11}(\gamma_{22})$ в первом порядке по $1/N$ вблизи значений $\mu = 1$ и $\mu = 2$ (по разные стороны от точки пересечения) описывает аномальные размерности *разных* операторов. Нетрудно понять, что то же самое происходит и в общем случае: все пересечения кривых аномальных размерностей, возникающие в первом порядке по $1/N$, фиктивные, точки пересечения исчезают при учете следующих поправок по $1/N$. Заметим также, что если в точке пересечения обращается в нуль один из коэффициентов γ_{12} или γ_{21} при ненулевом втором, то это означает неполноту базиса конформно-инвариантных операторов. Действительно, в этом случае матрица (3.25) может быть приведена только к жордановой форме и только один оператор из (3.8), (3.9) будет иметь определенную размерность.

Таким образом, $1/N$ -разложение связывает $(2 + \varepsilon)$ - и $(4 - \varepsilon)$ -разложения, сохраняя упорядоченность операторов по размерности. В то же время вблизи каждой точки пересечения аналитическая зависимость от μ аномальных размерностей резко меняется, происходит переход с одной кривой на другую (с γ_{11} на γ_{22} в рассмотренном примере). Для большого числа смешивающихся операторов число точек пересечения будет также велико. Поэтому аномальные размерности, рассматриваемые как функции от μ , будут “кусочно-гладкими” функциями. Заметим, что такая структура вряд ли может быть обнаружена в рамках ε -разложений.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ РАЗМЕРНОСТИ ОПЕРАТОРА ψ^s

Для определения аномальной размерности оператора (3.16) нам необходимо вычислить элемент $\gamma_{11}^{(2)}$ матрицы аномальных размерностей. Удобно представить $\gamma_{11}^{(2)}$ в виде

$$\gamma_{11}^{(2)} = -s\gamma_{\psi}^{(2)} + s(s-1)r_2^{(2)} + s(s-1)(s-2)r_3^{(2)}, \quad (4.1)$$

Рис. 4

Рис. 5

Рис. 6

где $\gamma_\psi^{(2)}$ – аномальная размерность поля ψ в порядке $O(1/N^2)$ [15]. Коэффициенты $r_2^{(2)}$ и $r_3^{(2)}$ определяются диаграммами (рис. 4), описывающими переходы $\psi^2 \rightarrow \psi\psi$ (диаграмма А) и $\psi^3 \rightarrow \psi\psi\psi$ (диаграмма В), соответственно. Используя связь между критической размерностью оператора ψ^2 (y_2) и индексом ω ($\omega = d - y_2$), вычисленным недавно с точностью $O(1/N^2)$ [25, 26], мы можем восстановить коэффициент $r_2^{(2)}$. Таким образом, нам осталось определить только коэффициент $r_3^{(2)}$, для чего необходимо вычислить 26 диаграмм. Семь из них имеют в качестве подграфа диаграмму, изображенную на рис. 3, и фактически уже были вычислены при определении элемента $\gamma_{21}^{(1)}$. Вклад этих диаграмм в $r_3^{(2)}$ дается следующим выражением (смотри формулы (3.6), (3.11)):

$$\frac{1}{2} c \gamma_{21}^{(1)} = \frac{\mu(\mu-1)(2\mu-3)^2(4\mu^2-1)}{3(2-\mu)(3-\mu)}. \quad (4.2)$$

Из оставшихся диаграмм девять содержат расходящийся подграф (возможные типы расходящихся подграфов приведены на рис. 5). Эти диаграммы схематически показаны на рис. 6, где расходящийся подграф А соответствует одному из блоков на рис. 5. Поскольку техника расчета довольно подробно описывалась в работах [15, 17], мы приведем лишь результаты. Суммарный вклад девяти диаграмм (рис. 6) в $r_3^{(2)}$ записывается

Рис. 7

в виде

$$\begin{aligned}
 & - \frac{3(2\mu - 1)(2\mu - 3)(\mu - 1)\mu^2}{\mu - 2} C - \\
 & - \frac{(5\mu^4 - 37\mu^3 + 96\mu^2 - 103\mu + 43)(2\mu - 1)(2\mu - 3)^2\mu^2}{(\mu - 1)(\mu - 2)^3(\mu - 3)}, \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

где $C = \psi'(1) - \psi'(\mu - 1)$ и $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$.

Оставшиеся 10 диаграмм (рис. 7) имеют лишь поверхностную расходимость. Ниже мы приводим ответы для полюсных частей соответствующих диаграмм в виде $C_{\text{sym}} \times R$, где C_{sym} – симметричный коэффициент диаграммы и R – вычет в полюсе по Δ .

Аналитическая запись диаграмм рис. 7 имеет вид

$$\begin{aligned}
A1 &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{36} \frac{\mu^2(\mu-1)(5-\mu)(2\mu-3)(2\mu-5)}{(2-\mu)/(3-\mu)}, \\
A2 &= 1 \times \left[-\frac{1}{12} \mu^2(\mu-1) \left(-3(3-\mu)C + \frac{(2\mu-3)(\mu^3-5\mu^2+2\mu+11)}{(2-\mu)^2(3-\mu)} \right) \right], \\
A3 &= \frac{1}{6} \times - \left[\frac{\mu^2(\mu-1)}{(2-\mu)^2} \left(-(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)C + \frac{(3-\mu)(2\mu-3)(\mu^2-5\mu+7)}{(2-\mu)} \right) \right], \\
B1 &= 1 \times \frac{1}{8} \frac{\mu^2(\mu-1)(2\mu-3)^2(2\mu-5)(4-\mu)}{(2-\mu)^2(3-\mu)}, \\
B2 = B3 &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \mu^2(\mu-1)(2\mu-3) \left(3C - \frac{(2\mu-3)(\mu-1)}{(2-\mu)^2} \right), \\
B4 &= 1 \times \left[-\frac{1}{4} \frac{\mu^2(\mu-1)(2\mu-3)}{(2-\mu)^2} \left(3(\mu-2)C + \frac{(2\mu-3)}{(2-\mu)} + \frac{2(2\mu-3)(3-\mu)^2}{(2-\mu)} \right) \right], \\
C1 &= \frac{1}{2} \times \left[-\frac{1}{5} \frac{4\mu^2(\mu-1)(2\mu-3)^3(3-\mu)}{(2-\mu)^3} \right], \\
C2 &= 1 \times \left[-\frac{2}{5} \frac{\mu^2(\mu-1)(2\mu-3)^2}{(2-\mu)^2} \left(3(\mu-2)C + \frac{(2\mu-3)}{(2-\mu)} \right) \right], \\
D1 &= \frac{1}{6} \times \frac{2\mu^2(\mu-1)(2\mu-3)^3}{(\mu-2)^2} C.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Умножая вклады (4.4) от диаграмм (см. рис. 7) на удвоенное число внутренних линий в диаграмме и складывая с выражениями (4.2), (4.3), получаем окончательный ответ для $r_3^{(2)}$:

$$\begin{aligned}
r_3^{(2)} &= \frac{\mu^2(\mu-1)(15\mu^3-51\mu^2+52\mu-12)}{2(\mu-2)^2} C + \\
&+ \frac{\mu(2\mu-3)(104\mu^5-383\mu^4+542\mu^3-383\mu^2+104\mu-8)}{12(\mu-1)(\mu-2)^2}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Мы не будем приводить полный ответ для критической размерности оператора (3.16) из-за его громоздкости, а выпишем лишь соответствующие ε -разложения вблизи значений $d = 2$ и $d = 4$, удерживая в каждом порядке только главные члены по s ,

$$x_s^{2+\varepsilon} = 2s - s \left(\frac{s\varepsilon}{N} \right) - \frac{s}{2} \left(\frac{s\varepsilon}{N} \right)^2 + \dots, \tag{4.6}$$

$$x_s^{4-\varepsilon} = 2s + 6s \left(\frac{s\varepsilon}{N} \right) - 34s \left(\frac{s\varepsilon}{N} \right)^2 + \dots. \tag{4.7}$$

Сравнивая (4.6) с (1.1), заключаем, что оператору (3.16) соответствует оператор (1.2) в $(2+\varepsilon)$ -разложении. В $(4-\varepsilon)$ -разложении оператор (3.16) переходит в оператор Φ^{2s} с критической размерностью [20]:

$$\begin{aligned}
x_s^{4-\varepsilon} &= 2s + 6\varepsilon \frac{s(s-2)}{N+8} - \frac{\varepsilon^2 s}{(N+8)^3} \{ (s-1) [34(s-2)(N+8) + \\
&+ (11N^2 + 92N + 212)] - (13N + 44)(N+2)/2 \}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Рис. 8

Подчеркнем еще раз, что формула (4.1) не может рассматриваться на всем интервале $2 < d < 4$ как аномальная размерность одного и того же оператора. Полагая в формуле (3.16) $d = 2 + \varepsilon$ и $d = 4 - \varepsilon$, мы получаем два оператора $O_{2+\varepsilon}$ и $O_{4-\varepsilon}$, аномальные размерности которых даются формулой (4.1) при соответствующих значениях $\mu = d/2$, но которые не переходят друг в друга, когда μ плавно меняется от 1 до 2. Строго говоря, невозможно найти критическую размерность какого-либо оператора на всем интервале $1 < \mu < 2$, не вычислив размерностей всех операторов данной системы, даже несмотря на треугольность матрицы аномальных размерностей в первом порядке по $1/N$.

Заметим также, что знания критической размерности оператора (3.16) в порядке $O(1/N^2)$ недостаточно для восстановления полных критических размерностей $x_s^{2+\varepsilon}$, $x_s^{4-\varepsilon}$ в порядке $O(\varepsilon^2)$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании полученных результатов можно сделать некоторые выводы относительно проблемы стабильности. Прежде всего отметим, что операторы, получающие большие отрицательные поправки к канонической размерности в первых порядках теории возмущений, могут быть найдены как в $(2 + \varepsilon)$ -, так и в $1/N$ - и $(4 - \varepsilon)$ -разложениях нелинейной σ -модели (см. формулы (4.6), (4.7)). Этот факт имеет чисто комбинаторное происхождение и никак не связан с природой используемого разложения. Далее, поскольку оценочный член в формулах (4.6), (4.7) имеет порядок $O((s\varepsilon/N)^3)$, эти формулы вряд ли дают хорошее приближение для соответствующих критических экспонентов при $s\varepsilon/N \simeq 1$. Нетрудно понять, что k -й член разложения в формулах (4.6), (4.7) ве-

дет себя как s^{k+1} при больших s . Таким образом, для того чтобы получить значение для критических экспонент x_s , осмысленное при больших s , необходимо “собрать” весь ряд (4.6), что вряд ли возможно в обозримом будущем.

Не имея возможности получить точный ответ для x_s , лучшее, что мы можем сделать, это попытаться подметить общие закономерности по первым членам разложения. Для этой цели $1/N$ -разложение намного предпочтительнее ε -разложений, поскольку содержит информацию о поведении критических размерностей на всем интервале $2 < d < 4$.

Обозначим через $A_k(\mu)$ коэффициент при главном по s члене s^{k+1} в k -м члене $1/N$ -разложения критической размерности $x_s(\mu)$ оператора (3.16). Графики функций

$$A_1(\mu) = \eta(\mu) \frac{\mu(2\mu - 1)(2\mu - 3)}{2 - \mu} \quad (5.1)$$

и

$$A_2(\mu) = \eta^2(\mu) \left\{ \frac{\mu^2(\mu - 1)(15\mu^3 - 51\mu^2 + 52\mu - 12)}{2(\mu - 2)^2} C + \right. \\ \left. + \frac{\mu^2(2\mu - 3)(40\mu^4 - 149\mu^3 + 206\mu^2 - 133\mu + 28)}{4(\mu - 1)(\mu - 2)^2} \right\} \quad (5.2)$$

приведены на рис. 8 (для A_1 – штриховая линия, для A_2 – сплошная). Напомним, что на разных участках интервала $2 < d < 4$ функции A_1 , A_2 связаны с критическими размерностями разных операторов. Вблизи точки $d = 2$ эти функции отрицательны и, следовательно, сдвигают каноническую размерность оператора (3.16) в ИК-существенном направлении. Однако интервал I_2 , где обе функции отрицательны одновременно, значительно меньше интервала I_1 , где только $A_1(\mu) < 0$ ($I_1 = [1, 1.5]$, тогда как $I_2 \simeq [1, 1.2]$). Предположим, что эта тенденция сохраняется и в высших порядках $1/N$ -разложения, т.е. размер интервала I_k , где все первые k функций $A_i(\mu)$ меньше нуля ($i = 1, \dots, k$), стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ (начиная с некоторого номера k_0) $1/N$ -поправки будут сдвигать критические размерности в правильном, ИК-несущественном направлении (по крайней мере, ряд будет знакопеременным, что происходит вблизи величины $d = 4$). Это означает, что никаких принципиальных различий по отношению к проблеме стабильности между $(2 + \varepsilon)$ - и $(4 - \varepsilon)$ -разложениями не существует. Поскольку при $N > 3$ отсутствуют какие-либо признаки неустойчивости фиксированной точки как в одном, так и в другом разложениях, представляется разумным предположить, что учет высших поправок по ε должен решить проблему. Далее, интуитивно ясно, что о величине поправок высших порядков в $(2 + \varepsilon)$ -разложении можно судить по близости первого нуля функции $A_i(\mu)$ к точке $\mu = 1$. Результаты приведенных здесь вычислений показывают, что эти поправки велики и, следовательно, разложение (1.1) не позволяет судить о реальной величине критической размерности при $s\varepsilon/N \simeq 1$. Таким образом, представляется наиболее вероятным, что проблема вызвана скорее всего неоправданной экстраполяцией результатов первых порядков теории возмущений за пределы их применимости.

Мы хотим выразить свою искреннюю признательность проф. А. Н. Васильеву и проф. С. Кирайну за многочисленные и плодотворные обсуждения.

Эта работа была частично подержана грантом № 97-01-011152 Российского фонда фундаментальных исследований и грантом INTAS № 93-2492-ext.

Список литературы

- [1] *K. Wilson, J. Kogut.* Phys. Rep. C. 1974. V. 12. P. 75.
- [2] *J. Zinn-Justin.* Quantum field theory and critical phenomena. Oxford: Clarendon, 1990.
- [3] *В. Е. Крауцов, И. В. Лернер, В. И. Юдсон.* ЖЭФТ. 1988. Т. 94. № 7. С. 255.
- [4] *V. E. Kravtsov, I. V. Lerner, V. I. Yudson.* Phys. Lett. A. 1989. V. 134. P. 245.
- [5] *F. Wegner.* Z. Phys. B. 1990. V. 78. P. 33.
- [6] *F. Wegner.* Nucl. Phys. B [FS]. 1991. V. 354. P. 441.
- [7] *H. Mall, F. Wegner.* Nucl. Phys. B [FS]. 1993. V. 393. P. 495.
- [8] *G. E. Castilla, S. Chakravarty.* Phys. Rev. Lett. 1993. V. 71. P. 384.
- [9] *G. E. Castilla, S. Chakravarty.* Nucl. Phys. B [FS]. 1997. V. 485. P. 613.
- [10] *S. K. Kehrein, F. Wegner, Y. M. Pismak.* Nucl. Phys. B [FS]. 1993. V. 402. P. 669.
- [11] *S. Derkachov, S. Kehrein, A. N. Manashov.* Nucl. Phys. B [FS]. 1997. V. 493. P. 660.
- [12] *А. Н. Васильев, А. С. Степаненко.* ТМФ. 1993. Т. 95. С. 160.
- [13] *K. Lang, W. Rühl.* Z. Phys. C. 1994. V. 63. P. 531.
- [14] *А. Н. Васильев, Ю. М. Письмак, Ю. Р. Хонконен.* ТМФ. 1981. Т. 46. С. 157.
- [15] *А. Н. Васильев, Ю. М. Письмак, Ю. Р. Хонконен.* ТМФ. 1981. Т. 47. С. 291.
- [16] *J. A. Gracey.* J. Phys. A. 1991. V. 24. P. L431; Int. J. Mod. Phys. A. 1991. V. 6. P. 395; J. Phys. A. 1992. V. 25. P. L109; Mod. Phys. Lett. A. 1992. V. 7. P. 1945.
- [17] *А. Н. Васильев, Ю. М. Письмак, Ю. Р. Хонконен.* ТМФ. 1982. Т. 50. С. 195.
- [18] *А. Н. Васильев, М. Ю. Налимов.* ТМФ. 1983. Т. 55. С. 163.
- [19] *А. Н. Васильев, М. Ю. Налимов.* ТМФ. 1983. Т. 56. С. 15.
- [20] *S. E. Derkachov, A. N. Manashov.* Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. P. 1423.
- [21] *E. S. Fradkin, M. Ya. Palchik.* Phys. Rep. 1978. V. 44. P. 249.
- [22] *H. Osborn, A. Petkou.* Ann. Phys. 1994. V. 231. P. 311.
- [23] *K. Lang, W. Rühl.* Nucl. Phys. B [FS]. 1993. V. 400. P. 597.
- [24] *А. М. Поляков.* ЖЭТФ. 1974. Т. 66. С. 23.
- [25] *D. J. Broadhurst, J. A. Gracey, D. Kreimer.* Z. Phys. C. 1997. V. 75. P. 559.
- [26] *J. A. Gracey.* Nucl. Instr. Methods A. 1997. V. 389. P. 361.

Поступила в редакцию 18.III.1998 г.