Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Браун, Об энергии Казимира в среде с дисперсией и поглощением в рамках подхода диагонализации Фано, *ТМФ*, 2017, том 190, номер 2, 277–292

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9111>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 17:18:08

© 2017 г.

М. А. Браун*

ОБ ЭНЕРГИИ КАЗИМИРА В СРЕДЕ С ДИСПЕРСИЕЙ И ПОГЛОЩЕНИЕМ В РАМКАХ ПОДХОДА ДИАГНОАЛИЗАЦИИ ФАНО

Энергия Казимира для электромагнитного поля в одномерном пространстве между двумя металлическими пластинами, заполненными диэлектриком с дисперсией и поглощением, вычислена в рамках микроскопического подхода, в котором среда моделируется набором осцилляторов с непрерывно распределенными частотами. Проанализирована трактовка сингулярных выражений, используемых в других работах, и показано, что при подходящем выборе калибровки и отбрасывании некоторых бесконечных членов результаты совпадают с теми, которые получаются при использовании подхода, где такие сингулярности отсутствуют. Изучено асимптотическое поведение на больших расстояниях, и сделан вывод, что оно всегда соответствует притяжению. Однако на конечных расстояниях влияние диэлектрика может приводить к отталкиванию.

Ключевые слова: квантовая электродинамика, среда с дисперсией и поглощением, энергия и силы Казимира.

DOI: 10.4213/tmf9111

1. ВВЕДЕНИЕ

Последовательный вывод сил Казимира в диэлектрике с дисперсией и поглощением требует включения поглощающей среды в качестве самостоятельной динамической системы. Эта проблема привлекла к себе внимание уже давно. Формализм, позволяющий рассматривать поглощение электромагнитного поля средой в микроскопическом подходе, был развит Хуттнером и Барнеттом [1]. Он заключается в моделировании среды набором осцилляторов с непрерывно распределенными частотами. Взаимодействие со средой ведет к поглощению электромагнитного поля и его исключению как независимой динамической переменной. В результате система полностью описывается набором эффективных осцилляторов, которые также

Работа поддержана Санкт-Петербургским государственным университетом (грант № 11.38.197.2014).

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: m.braun@spbu.ru

имеют непрерывно распределенные частоты. Возбуждения квантованного поля выражаются через возбуждения этих эффективных осцилляторов (“поляритонов”).

В рамках этой или сходной модели, сформулированной явно или подразумеваемой, можно получить выражение для энергии Казимира, используя макроскопические формулы и интерпретируя в них электромагнитное поле как квантовый оператор, подчиняющийся уравнениям Гейзенберга, в которых влияние среды представлено “квантовым шумом”, ответственным за поглощение (см. работы [2]–[5]). Проблемой остается полный учет взаимодействия между полем и средой, а также определение основного состояния, которое может изменяться за счет этого взаимодействия.

Последовательный подход предполагает нахождение основного состояния полного гамильтониана и среднего значения в нем. Эта программа была реализована в различных подходах в работах [4], [6]–[9]. В нашей работе [9] энергия Казимира вычислялась непосредственным усреднением гамильтониана, выраженного через операторы рождения и уничтожения эффективных осцилляторов. В других работах используется представление гамильтониана через операторы поля и их производные по времени. При этом в отличие от нашего подхода возникают сингулярные выражения, которые требуют не только регуляризации, но и отбрасывания некоторых бесконечных членов.

Возникает задача сравнения этих подходов с целью проверки обоснованности трактовки сингулярных выражений и ликвидации бесконечностей. Эта задача и решается в настоящей работе. Для простой модели электромагнитного поля в одномерном пространстве между двумя металлическими пластинами, заполненными диэлектриком с дисперсией и поглощением, мы вычисляем энергию Казимира, используя оба подхода: через операторы рождения и поглощения и через поля и их производные. Во втором случае мы используем некоторую естественную регуляризацию и отбрасываем бесконечности, следуя статье [7]. В результате мы находим, что оба пути приводят к одному и тому же значению для энергии Казимира. При этом во втором случае мы получаем выражение, которое совпадает по форме с результатом статьи [7], явно переписанным для нашего случая однородного диэлектрика в конечном интервале, но отличается от результата для однородной среды, полученного в работе [4], [6].

Кроме того, для иллюстрации мы численно определяем энергию Казимира, имея в виду поведение на малых и больших расстояниях между пластинами и возможность возникновения сил отталкивания на некотором интервале расстояний. Эти вычисления также исправляют численные результаты, полученные в нашей работе [9], в которых оказалось неучтенным одно слагаемое в гамильтониане.

2. МОДЕЛЬ

Как отмечено во введении, модель квантования электромагнитного поля в среде с дисперсией и поглощением была предложена Хуттнером и Барнеттом уже давно [1]. В ней электромагнитное поле непосредственно взаимодействует с атомными осцилляторами, которые в свою очередь взаимодействуют со средой, реализуя дисперсию и поглощение. Эта модель была упрощена Филбиным, который убрал промежуточные осцилляторы, позволяя электромагнитному полю непосредственно взаимодействовать со средой. Результаты оригинальной модели Хуттнера–Барнетта

можно легко получить из модели Филбина ее последовательным применением сначала к осцилляторам, а затем к электромагнитному полю. По этой причине мы используем заметно более простую модель Филбина.

С целью дальнейшего упрощения мы рассматриваем диэлектрик, однородный по крайней мере в части среды, представленный на микроскопическом уровне полем $\mathbf{Y}_\omega$ с непрерывно распределенными частотами. Лагранжева плотность распадается на три части: $\mathcal{L} = \mathcal{L}_e + \mathcal{L}_r + \mathcal{L}_i$. Здесь $\mathcal{L}_e$ есть лагранжева плотность электромагнитного поля:

$$\mathcal{L}_e = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{E}}^2 - \mathbf{B}^2), \quad \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}} - \nabla\phi, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (1)$$

$\mathcal{L}_r$ есть плотность “резервуара”:

$$\mathcal{L}_r = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega (\dot{\mathbf{Y}}_\omega^2 - \omega^2 \mathbf{X}^2), \quad (2)$$

и, наконец, $\mathcal{L}_i$ есть лагранжева плотность взаимодействия, которую мы выбираем, следуя работе [7]:

$$\mathcal{L}_i = - \int_0^\infty d\omega v(\omega) \mathbf{A} \dot{\mathbf{Y}}_\omega, \quad (3)$$

где $v^2(\omega)$ есть квадратично интегрируемая функция, аналитически продолжаемая на отрицательные значения ω как четная функция. В отличие от Филбина мы не вводим взаимодействия ни со скалярным потенциалом ϕ , ни с магнитным полем, предполагая среду магнитно нейтральной.

В кулоновской калибровке динамическая часть плотности лагранжиана оказывается выраженной через поперечные поля. В импульсном пространстве лагранжиан представляется суммой по двум поляризациям $\lambda = 1, 2$:

$$L_\lambda = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{1}{2} \left(|\dot{A}_\lambda|^2 - k^2 |A_\lambda|^2 + \int_0^\infty d\omega |\dot{Y}_{\omega,\lambda}|^2 - \omega^2 |Y_{\omega,\lambda}|^2 \right) - \int_0^\infty d\omega v(\omega) X_\lambda^* \dot{Y}_{\omega,\lambda} \right\}. \quad (4)$$

Здесь мы делаем дополнительное упрощение, переходя к одномерному ограниченному пространству $0 < x < a$ и накладывая граничные условия для двух металлических пластин

$$A(x=0) = A(x=a) = Y_\omega(x=0) = Y_\omega(x=a) = 0.$$

Тогда лагранжиан становится суммой по дискретным значениям импульса (модам) $k_n = \pi n/a$, $n = 1, 2, \dots$, и поля представляются как

$$A(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sum_n A_n \sin(k_n x), \quad Y_\omega(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sum_n Y_{n\omega} \sin(k_n x).$$

После этого квантование совершается стандартным образом посредством введения сопряженных полей $\pi(x)$ и $\Pi_\omega(x)$ для $A(x)$ и $Y_\omega(x)$ соответственно и накладыванием стандартных коммутационных соотношений.

Можно получить два эквивалентных выражения для полного гамильтониана. В терминах полей и их производных по времени

$$H = \frac{1}{2} \sum_n \left\{ \dot{A}_n^2 + k_n^2 A_n^2 + \int_0^\infty d\omega (\dot{Y}_{n,\omega}^2 + \omega^2 Y_{n,\omega}^2) \right\}, \quad (5)$$

а в терминах полей и их сопряженных импульсов

$$H = \frac{1}{2} \sum_n \left(\pi_n^2 + k_{1n}^2 A_n^2 + \int_0^\infty d\omega (\Pi_{n,\omega}^2 + \omega^2 Y_{n,\omega}^2) + \sum_n \int_0^\infty d\omega v(\omega) A_n \Pi_{n,\omega} \right), \quad (6)$$

где

$$k_{1n}^2 = k_n^2 + \int_0^\infty d\omega v^2(\omega). \quad (7)$$

Мы перешли к ограниченному одномерному пространству с целью сравнения со стандартным выводом энергии Казимира. Переход к бесконечному трехмерному пространству требует замены в окончательных формулах, имеющих вид

$$\sum_n (\cdot) \mapsto \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} (\cdot). \quad (8)$$

3. ДИАГОНАЛИЗАЦИЯ ФАНО, ЭНЕРГИЯ ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ И ЭНЕРГИЯ КАЗИМИРА

В терминах операторов рождения и уничтожения a_n , $a_n^\dagger$ для электромагнитного поля и $b_{n,\omega}$, $b_{n,\omega}^\dagger$ для среды гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2} \sum_n \left[k_{1n} \{a_n^\dagger, a_n\} + \int_0^\infty d\omega \omega \{b_{n\omega}^\dagger, b_{n\omega}\} + \frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega V_n(\omega) [a_n^\dagger + a_n] [b_{n\omega}^\dagger + b_{n\omega}] \right]. \quad (9)$$

Здесь $V_n(\omega) = \sqrt{\omega/k_{1n}v(\omega)}$. Можно показать, что гамильтониан H можно диагонализировать посредством введения новых полевых переменных [1]

$$B_{n,\omega} = \alpha_{0n}(\omega) a_n + \beta_{0n}(\omega) a_n^\dagger + \int_0^\infty d\omega' [\alpha_{1n}(\omega, \omega') b_{n,\omega'} + \beta_{1n}(\omega, \omega') b_{n,\omega'}^\dagger], \quad (10)$$

которые удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[B_{n,\omega}, B_{n',\omega'}^\dagger] = \delta_{nn'} \delta(\omega - \omega'), \quad [B_{n,\omega}, B_{n',\omega}] = 0. \quad (11)$$

Вместе с требованием

$$[B_{n,\omega}, H] = \omega B_{n,\omega} \quad (12)$$

они однозначно определяют коэффициенты α_{0n} , β_{0n} , α_{1n} , β_{1n} (см. статью [1]):

$$\alpha_{0n}(\omega) = -\left(\frac{\omega + k_{1n}}{2}\right) V_n(\omega) P_n^*(\omega), \quad \beta_{0n}(\omega) = -\left(\frac{\omega - k_{1n}}{2}\right) V_n(\omega) P_n^*(\omega), \quad (13)$$

$$\alpha_{1n}(\omega, \omega') = \delta(\omega - \omega') - \frac{k_{1n}}{2} \left(\frac{V_n^*(\omega') V_n(\omega)}{\omega - \omega' - i0} \right) P_n^*(\omega), \quad (14)$$

$$\beta_{1n}(\omega, \omega') = -\frac{k_{1n}}{2} \left(\frac{V_n(\omega') V_n(\omega)}{\omega + \omega'} \right) P_n^*(\omega). \quad (15)$$

Здесь

$$P_n(\omega) = \frac{1}{k^2 - \epsilon(\omega)\omega^2} \quad (16)$$

есть пропагатор электромагнитного поля в среде, а

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{k_{1n}}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega'} \frac{|V_n(\omega')|^2}{\omega' - \omega - i0} \quad (17)$$

есть диэлектрическая постоянная.

В терминах новых переменных гамильтониан H приобретает вид

$$H = \sum_n \int_0^{\infty} d\omega \omega B_{n,\omega}^{\dagger} B_{n,\omega} + E(a). \quad (18)$$

Здесь $E(a)$ – константа, которая, как очевидно, имеет смысл энергии основного состояния системы.

Предполагая, что новые операторы $B_{n,\omega}$ и $B_{n,\omega}^{\dagger}$ образуют полный набор, можно обратить соотношения (10) и сопряженные к ним и выразить исходные операторы как линейные суперпозиции новых. Сравнивая коммутационные соотношения между старыми и новыми операторами, записанные в терминах старых и новых операторов, можно найти, что

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^{\infty} d\omega [\alpha_{0n}^*(\omega) B_{n,\omega} - \beta_{0n}(\omega) B_{n,\omega}^{\dagger}], \\ b_{n,\omega} &= \int_0^{\infty} d\omega' [\alpha_{1n}^*(\omega', \omega) B_{n,\omega'} - \beta_{1n}(\omega', \omega) B_{n,\omega'}^{\dagger}]. \end{aligned} \quad (19)$$

Выражая теперь старые операторы A_n , $Y_{n,\omega}$, их сопряженные импульсы и производные по времени, а затем находя среднее в основном состоянии, определяемом условием $B_{n,\omega}|0\rangle = 0$, можно найти энергию основного состояния E_0 . Для этого воспользуемся любой из форм (5) или (6). Окончательные формулы выглядят по-разному, но расчеты показывают, что они естественно приводят к одинаковым результатам.

Простейший вывод основан на выражении (6). Энергия основного состояния для данной моды n представляется суммой четырех членов:

$$E_n = \frac{1}{2}(k_{1n} - k_n) + \langle H_A \rangle_n + \langle H_I \rangle_n + \langle H_Y \rangle_n, \quad (20)$$

где $\langle H_A \rangle_n$, $\langle H_Y \rangle_n$ и $\langle H_I \rangle_n$ суть энергии основного состояния для электромагнитного поля, поля Y и их взаимодействия соответственно. Явные выражения для них имеют вид

$$\begin{aligned} \langle H_A \rangle_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} d\omega (\omega - k_{1n})^2 \text{Im } P_n(\omega), \\ \langle H_I \rangle_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega (\omega^2 - k_{1n}^2) \text{Im } P_n(\omega), \\ \langle H_Y \rangle_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} d\omega J(\omega) \text{Im } P_n(\omega), \end{aligned}$$

где

$$J(\omega) = \int_0^{\infty} d\omega' \frac{\omega'^2 \rho(\omega')}{(\omega' + \omega)^2}$$

и мы обозначили $\rho(\omega) = |v(\omega)|^2$. Положительным качеством этих формул является то, что их вывод осуществляется непосредственно и при этом мы не встречаем произведений сингулярных функций. Поэтому результат является вполне однозначным. Однако эти выражения непрозрачны и их отношение к диэлектрической постоянной неочевидно.

Альтернативный вывод, использованный в статье [7] для сред с гладкой неоднородностью, основан на выражении (5). Окончательные формулы в этом случае оказываются непосредственно выраженными через диэлектрическую постоянную. Однако ценой за это является то, что при выводе приходится выделять конечные члены из первоначально сингулярных выражений и прибегать к промежуточной регуляризации, что может приводить к определенной неоднозначности. Для ее устранения, а также для применения к случаю двух параллельных металлических пластин в следующем разделе мы выводим энергию Казимира, основываясь на выражении (5) и используя оригинальную технику. Результаты оказываются теми же, что получились бы из формулы, полученной в статье [7], при ее прямом обобщении на наш случай.

4. ЭНЕРГИЯ ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ ДЛЯ ГАМИЛЬТониАНА В ФОРМЕ (5)

4.1. Часть H , связанная с электромагнитным полем. Часть H , происходящая от электромагнитного поля (в расчете на одну моду n), определяется формулой

$$H_A = \frac{1}{2}(\dot{A}_n^2 + k_n^2 A_n^2). \quad (21)$$

Мы имеем

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{2k_{1n}}} \int_0^\infty d\omega [\gamma_{0n}^*(\omega) B_{n,\omega} + \text{э. с.}], \quad (22)$$

и в результате

$$\dot{A}_n = -\frac{i}{\sqrt{2\omega}} \int_0^\infty d\omega \omega [\gamma_{0n}^*(\omega) B_{n,\omega} - \text{э. с.}]. \quad (23)$$

В терминах операторов $B_{n,\omega}$ и $B_{n,\omega}^\dagger$ получаем, что $H_A = H_A^{(1)} + H_A^{(2)}$, где

$$H_A^{(1)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{2k_{1n}} \int_0^\infty d\omega_1 \omega_1 \int_0^\infty d\omega_2 \omega_2 [\gamma_{0n}^*(\omega_1) B_{n,\omega_1} - \gamma_{1n}(\omega_1) B_{n,\omega_1}^\dagger] \times \\ \times [\gamma_{1n}^*(\omega_2) B_{n,\omega_2} - \gamma_{1n}(\omega_2, \omega) B_{n,\omega_2}^\dagger]$$

и

$$H_A^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{k_n}{2k_{1n}} \int_0^\infty d\omega_1 \int_0^\infty d\omega_2 [\gamma_{0n}^*(\omega_1) B_{n,\omega_1} + \gamma_{0n}(\omega_1) B_{n,\omega_1}^\dagger] \times \\ \times [\gamma_{0n}^*(\omega_2) B_{n,\omega_2} + \gamma_{0n}(\omega_2) B_{n,\omega_2}^\dagger].$$

Вычисляя среднее в основном состоянии, получаем равенство

$$\langle H_A \rangle_n = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^2 + k_n^2}{2k_{1n}} |\gamma_{0n}(\omega)|^2. \quad (24)$$

Из наших формул следует выражение

$$|\gamma_{0n}(\omega)|^2 = k_{1n}^2 V_n^2(\omega) |P_n(\omega)|^2 = \frac{2}{\pi} k_{1n} \operatorname{Im} P_n(\omega_1), \quad (25)$$

что приводит к окончательному результату

$$\langle H_A \rangle_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\omega (\omega^2 + k_n^2) \operatorname{Im} P_n(\omega). \quad (26)$$

4.2. Часть H , связанная со средой. Часть H , происходящая за счет среды, в расчете на одну моду есть

$$H_Y = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega (\dot{Y}_{n,\omega}^2 + \omega^2 Y_{n,\omega}^2). \quad (27)$$

Как и для электромагнитного поля, находим, что

$$\langle H_Y \rangle_n = \frac{1}{2} \sum_n \int_0^\infty d\omega \frac{1}{2\omega} \int_0^\infty d\omega_1 (\omega^2 + \omega_1^2) |\gamma_{1n}(\omega_1, \omega)|^2. \quad (28)$$

К сожалению, $\gamma_{1n}(\omega_1, \omega)$ сингулярна:

$$\gamma_{1n}(\omega_1, \omega) = \delta(\omega_1 - \omega) - a_n(\omega_1, \omega) \left(\frac{1}{\omega_1 - \omega - i0} + \frac{1}{\omega_1 + \omega} \right), \quad (29)$$

где

$$a_n(\omega_1, \omega) = \frac{1}{2} k_{1n} V_n(\omega_1) P_n^*(\omega_1) V_n(\omega). \quad (30)$$

Поэтому $|\gamma_{1n}(\omega_1, \omega)|^2$ не существует из-за членов, сингулярных при $\omega = \omega_1$. Однако оказывается, что если отбросить некоторые бесконечные члены, то оставшиеся сингулярные члены сокращаются.

Следуя статье [7], мы отбрасываем член с квадратом $\delta(\omega_1 - \omega)$. Оставшиеся члены мы разобьем на две части:

$$T_1 = -\frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega \frac{1}{2\omega} \int_0^\infty d\omega_1 (\omega^2 + \omega_1^2) \delta(\omega_1 - \omega) \times \\ \times \left[a_n(\omega_1, \omega) \left(\frac{1}{\omega_1 - \omega - i0} + \frac{1}{\omega_1 + \omega} \right) + \text{к. с.} \right] \quad (31)$$

и

$$T_2 = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega \frac{1}{2\omega} \int_0^\infty d\omega_1 (\omega^2 + \omega_1^2) |a_n(\omega_1, \omega)|^2 \left| \frac{1}{\omega_1 - \omega - i0} + \frac{1}{\omega_1 + \omega} \right|^2. \quad (32)$$

Для анализа сокращений сингулярных членов мы вынуждены регуляризовать наши функции. Для этого выбираем

$$\frac{1}{\omega_1 - \omega - i0} \mapsto \frac{1}{\omega_1 - \omega - i\epsilon}, \\ \delta(\omega_1 - \omega) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{\omega_1 - \omega - i\epsilon} - \frac{1}{\omega_1 - \omega + i\epsilon} \right) \quad (33)$$

с малым конечным положительным ϵ .

В приложении мы показываем, что сингулярные члены, пропорциональные $1/\epsilon$, сокращаются в сумме T_1 и T_2 . Там же вычислены и конечные вклады F_1 и F_2 , происходящие от этих двух частей. Вычисляя их сумму, получаем, что

$$\begin{aligned}\langle H_Y \rangle_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\omega \omega^2 \{ [\omega \operatorname{Im}(\epsilon(\omega) - 1)]' \operatorname{Re} P_n(\omega) + ([\omega \operatorname{Re}(\epsilon(\omega) - 1)]' \operatorname{Im} P_n(\omega)) \} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\omega \omega^2 \operatorname{Im}([\omega(\epsilon(\omega) - 1)]' P_n(\omega)).\end{aligned}\quad (34)$$

Сумма $\langle H_A \rangle_n$ и $\langle H_Y \rangle_n$ дает полную энергию основного состояния в расчете на одну моду:

$$E_{0n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\omega \operatorname{Im} \left(\omega^2 \frac{d}{d\omega} [\omega \epsilon(\omega)] + k_n^2 \right) P_n(\omega). \quad (35)$$

Это выражение совпадает с формулой в [7], подходящим образом преобразованной к магнитно-нейтральному диэлектрику между двумя параллельными металлическими пластинами.

Численные расчеты показывают, что энергия Казимира, получающаяся из (35), в точности совпадает с той, что получается из (20).

5. ЭНЕРГИЯ КАЗИМИРА. АСИМПТОТИКИ И ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

Энергию Казимира можно получить как разность между энергией в интервале $0 \leq x \leq a$ и ее значением в вакууме в том же интервале. Она определяется разностью между суммой по всем модам n и интегралом по значениям k , который дает энергию в интервале $0 \leq x \leq a$ в вакууме:

$$E_{\text{Cas}} = \sum_{n=1}^{\infty} E_{0n} - \int_0^\infty dk E_{0k}, \quad (36)$$

где E_{0k} получается из (35) подстановкой $k_n \rightarrow \pi n/a$.

С точностью до бесконечного слагаемого, не зависящего от a и поэтому не влияющего на силы Казимира, выражение (35) можно переписать в виде

$$E_{0n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\omega \operatorname{Im} \omega^2 \left(\frac{d}{d\omega} [\omega \epsilon(\omega)] + \epsilon(\omega) \right) P_n(\omega). \quad (37)$$

Чтобы обеспечить возможность разворота контура на мнимую ось, мы вычисляем разность ΔE_{Cas} между энергией Казимира в среде и в вакууме. Суммирование по модам можно выполнить с помощью формулы [10]

$$\gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \gamma} = \frac{\pi}{2} \operatorname{cth}(\pi\gamma) - \frac{1}{2\gamma}. \quad (38)$$

Это дает энергию Казимира, связанную с наличием диэлектрика, в виде

$$\Delta E_{\text{Cas}} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\xi \xi^2 (\rho(\xi) W(q) - 2W(\xi)). \quad (39)$$

Здесь

$$\rho(\xi) = \left(\frac{d}{d\omega} [\omega \epsilon(\omega)] + \epsilon(\omega) \right)_{\omega=i\xi} \quad (40)$$

и

$$W(q) = \frac{a}{2q} \left(\text{cth}(aq) - 1 - \frac{1}{aq} \right), \quad q^2 = \xi^2 \epsilon(i\xi). \quad (41)$$

Полная энергия Казимира есть сумма (39) и вакуумного вклада $E_{\text{Cas}}^{(0)} = -\pi/24a$.

Переходя к интегрированию по q , преобразуем (39) в формулу

$$\Delta E_{\text{Cas}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dq q W(q, a) (q - \xi(q)), \quad (42)$$

где ξ следует выразить через q . Используя формулу (41), разлагаем ΔE_{Cas} в сумму $\Delta E_{\text{Cas}} = \Delta E_{\text{Cas}}^{(1)} + \Delta E_{\text{Cas}}^{(2)}$, где

$$\Delta E_{\text{Cas}}^{(1)} = \frac{a}{2\pi} \int_0^\infty dq (q - \xi(q) (\text{cth}(aq) - 1)), \quad (43)$$

а

$$\Delta E_{\text{Cas}}^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{dq}{q} (q - \xi(q) (\text{cth}(aq) - 1)) \quad (44)$$

и не зависит от a .

Легко найти, что $\Delta E_{\text{Cas}} = 0$ в точке $a = 0$. Поскольку $\text{cth}(aq) - 1$ положительно и убывает с ростом aq , мы находим, что ΔE_{Cas} отрицательна и убывает с ростом a , что означает наличие силы отталкивания.

Асимптотическое поведение при больших a зависит от поведения $\epsilon(\omega)$ при $\omega \rightarrow 0$. Если $\text{Im } \epsilon(\omega) \sim 1/\omega$ (случай А), тогда при малых ξ находим, что $\beta(\xi) = c_A \xi$. Если же $\text{Im } \epsilon(\omega) \sim \omega$ (случай Б), то тогда $\beta(\xi) = c_B \xi^2$. В обоих случаях $c_{A,B} > 0$. Используя это, легко получить, что в случае А при больших a

$$\Delta E_{\text{Cas}}^{(1)} = \frac{\pi^2}{24a} - \frac{\zeta(3)}{4\pi c_A} \frac{1}{a^2}. \quad (45)$$

Первое слагаемое сокращает вклад вакуума, и полная энергия Казимира (с точностью до константы) ведет себя как $-1/a^2$ (случай притяжения, быстро убывающего с расстоянием).

В случае Б асимптотика $\Delta E_{\text{Cas}}^{(1)}$ такая же, как и у вакуумного вклада (т. е. $\propto -1/a$) с меньшим коэффициентом и противоположным знаком, так что полная энергия Казимира имеет асимптотику

$$E_{\text{Cas}}(a) = -\frac{\pi^2}{24(1 + c_B)a}, \quad a \rightarrow \infty, \quad (46)$$

(случай ослабленного притяжения).

Рис. 1. Энергия Казимира (а) и сила (б), связанные с наличием диэлектрика, как функции расстояния a для случаев А (нижние кривые) и Б (верхние кривые).

При малых a энергия Казимира, связанная с диэлектриком, имеет логарифмическое поведение:

$$\Delta E_{\text{Cas}} = \frac{\beta_{\infty}}{4\pi} a \ln a, \quad (47)$$

где β_{∞} – конечное положительное предельное значение $\beta(\xi)$ при $\xi \rightarrow \infty$. В зависимости от силы взаимодействия этот вклад может оказаться доминирующим и привести к силам отталкивания в ограниченной области a .

Для иллюстрации приложения этой техники мы вычисляем энергию Казимира, связанную с наличием диэлектрика, для двух типичных форм функции связи $v(\omega)$ и следующей из нее $\epsilon(\omega)$, соответствующих случаям А и Б, описанным выше. В случае А

$$v(\omega) = \frac{g^2 m^3}{\omega^2 + m^2}, \quad \epsilon(i\xi) = \frac{\pi g^2 m^2}{2\xi(\xi + m)}. \quad (48)$$

В случае Б

$$v(\omega) = \frac{g^2 m^3 \omega^2}{(\omega^2 + m^2)^2}, \quad \epsilon(i\xi) = 1 + \frac{\pi g^2 m^2}{4(\xi + m)^2}. \quad (49)$$

Здесь параметрами являются g (безразмерный параметр) и m (имеющий размерность массы), которые определяют силу и ω -зависимость взаимодействия с диэлектриком. При наличии единственного масштаба m энергия дается как $E = mf(ma)$. Мы положили $m = 1$, так что энергия измеряется в единицах m , а расстояния – в единицах $1/m$. Для простоты мы выбрали $g^2\pi = 1$.

Результаты наших вычислений энергии Казимира, связанной с наличием диэлектрика, показаны на рис. 1а для этих двух случаев. Соответствующая сила (притяжения) показана на рис. 1б.

Отметим, что эти результаты отличаются от опубликованных ранее в сходной задаче в статье [9], где опущено первое (тривиальное) слагаемое в (20), которое ошибочно было сочтено несущественным.

6. ОБСУЖДЕНИЕ

Для случая диэлектрика между двумя металлическими пластинами в пространстве одного измерения в формулах, полученных в работах [4] и [7], можно провести прямые замены

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}(\cdot) \mapsto \sum_n(\cdot), \quad k \mapsto \frac{n\pi}{a}. \quad (50)$$

Тогда формула, полученная в статье [7], преобразуется в формулу (35), которую мы вывели непосредственно из гамильтониана. Таким образом, прямая подстановка (50) в выражения для плотности энергии, полученные в статьях [4], [6] или [8], дает правильное значение энергии Казимира.

Отметим, что в своих работах [4], [6] Роза, Далвит и Милони вывели выражение для плотности энергии специально для однородной среды в виде

$$\bar{u}_{\text{RAM}} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty d\omega \omega^3 n_{\text{R}}^2 \frac{d}{d\omega} [\omega n_{\text{R}}(\omega)], \quad (51)$$

где $n(\omega)$ есть индекс преломления, $\epsilon(\omega) = n^2(\omega)$. В эту формулу входит только действительная часть $n(\omega)$, что дало авторам основание утверждать, что энергия дается той же самой формулой, что и для среды без поглощения. Наши результаты противоречат этому выводу.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вычисление $\langle H_Y \rangle$, формулы (31) и (32)

Сингулярные члены T_1 . Перепишем T_1 как

$$T_1 = -\frac{1}{2} \sum_n \int_0^\infty d\omega_1 t_{1n}(\omega_1) + \text{к. с.}, \quad (\text{П.1})$$

где

$$t_{1n}(\omega_1) = \int_0^\infty d\omega f_n(\omega_1, \omega) (\delta(\omega_1 - \omega) + \delta(\omega_1 + \omega)) \left(\frac{1}{\omega_1 - \omega - i0} + \frac{1}{\omega_1 + \omega} \right), \quad (\text{П.2})$$

и $f_n(\omega_1, \omega) = (\omega^2 + \omega_1^2) a_n(\omega_1, \omega) / 2\omega$.

Для выделения сингулярной части запишем представление

$$f_n(\omega_1, \omega) = f_n(\omega_1, \omega_1) + (\omega_1 - \omega) f_{1n}(\omega_1, \omega) \quad (\text{П.3})$$

и соответственно разбиение $t_{1n} = t_{1n}^{(1)} + t_{1n}^{(2)}$. Сигулярные члены содержатся в $t_{1n}^{(1)}$. Благодаря симметрии относительно замены $\omega \rightarrow -\omega$ можно записать равенство

$$t_{1n}^{(1)} = f_n(\omega_1, \omega_1) \int_{-\infty}^\infty d\omega \delta(\omega_1 - \omega) \left(\frac{1}{\omega_1 - \omega - i0} + \frac{1}{\omega_1 + \omega} \right). \quad (\text{П.4})$$

Внутренний интеграл с регуляризованными функциями есть

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty d\omega \left(\frac{1}{\omega_1 - \omega - i\epsilon} - \frac{1}{\omega_1 - \omega + i\epsilon} \right) \left(\frac{1}{\omega_1 - \omega - i\epsilon} + \frac{1}{\omega_1 + \omega - i\epsilon} \right) = \frac{i}{2\epsilon} + \frac{1}{2\omega_1}.$$

Сингулярная часть T_1 оказывается равной

$$S_1 = -\frac{i}{4\epsilon} \int_0^\infty d\omega_1 \omega_1 (f_n(\omega_1, \omega_1) - f_n^*(\omega_1, \omega_1)) = \frac{1}{2\epsilon} \int_0^\infty d\omega_1 \omega_1 \operatorname{Im} a_n(\omega_1, \omega_1).$$

Используя формулу (30), окончательно получаем сингулярную часть T_1 в виде

$$S_1 = -\frac{\pi}{8\epsilon} k_{1n}^2 \int_0^\infty d\omega_1 \omega_1 V_n^4(\omega_1) |P_n(\omega_1)|^2. \quad (\text{П.5})$$

Также от слагаемого $t_{1n}^{(1)}$ возникает конечный вклад

$$F_1^{(1)} = -\frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{d\omega_1}{\omega_1} f_n(\omega_1, \omega_1). \quad (\text{П.6})$$

Сингулярные члены в T_2 . Перепишем T_2 в виде

$$T_2 = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega_1 \int_0^\infty d\omega g_n(\omega_1, \omega) \left| \frac{1}{\omega_1 - \omega - i0} + \frac{1}{\omega_1 + \omega} \right|^2, \quad (\text{П.7})$$

где

$$g_n(\omega_1, \omega) = \frac{\omega_1^2 + \omega^2}{2\omega} |a_n(\omega_1 \omega)|^2 = \tilde{g}_n(\omega_1) \frac{\omega_1^2 + \omega^2}{2\omega} V_n^2(\omega) \quad (\text{П.8})$$

и

$$\tilde{g}_n(\omega_1) = \frac{1}{4} k_{1n}^2 V_n^2(\omega_1) |P_n(\omega_1)|^2. \quad (\text{П.9})$$

Из четырех членов в квадрате модуля сингулярная часть порождается только произведением

$$\frac{1}{\omega_1 - \omega - i0} \frac{1}{\omega_1 - \omega + i0}.$$

Соответственно, только в этом члене запишем представление

$$g_n(\omega_1, \omega) = g_n(\omega_1 \omega_1) + (\omega_1 - \omega) g_{1n}(\omega_1, \omega). \quad (\text{П.10})$$

Сингулярный вклад содержится в

$$T_2^{(1)} = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega_1 g_n(\omega_1 \omega_1) \int_0^\infty d\omega \frac{1}{\omega_1 - \omega - i0} \frac{1}{\omega_1 - \omega + i0}. \quad (\text{П.11})$$

Регуляризованный внутренний интеграл есть

$$J = \int_0^\infty d\omega \frac{1}{\omega_1 - \omega - i\epsilon} \frac{1}{\omega_1 - \omega + i\epsilon}. \quad (\text{П.12})$$

Его можно вычислить поворотом контура на отрицательную действительную полуось и взятием вычета в полюсе при $\omega = \omega_1 + i\epsilon$:

$$J = \frac{\pi}{\epsilon} - \int_{-\infty}^0 \frac{d\omega}{(\omega - \omega_1)^2} = \frac{\pi}{\epsilon} - \frac{1}{\omega_1}. \quad (\text{П.13})$$

Получаем, что

$$T_2^{(1)} = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega_1 g_n(\omega_1 \omega_1) \left(\frac{\pi}{\epsilon} - \frac{1}{\omega_1} \right). \quad (\text{П.14})$$

Таким образом, мы находим сингулярный вклад

$$S_2 = \frac{\pi}{2\epsilon} \int_0^\infty d\omega_1 \omega_1 |a_n(\omega_1, \omega)|^2 = \frac{\pi}{8\epsilon} k_{1n}^2 \int_0^\infty d\omega_1 \omega_1 V_n^4(\omega_1) |P_n(\omega_1)|^2. \quad (\text{П.15})$$

Как видно, $S_1 + S_2 = 0$, так что сингулярные члены в $\langle H_Y \rangle$ и в самом деле сокращаются.

Кроме этого сингулярного члена в $T_2^{(1)}$ также содержится и конечный вклад

$$F_2^{(1)} = -\frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega_1 \frac{g_n(\omega_1 \omega_1)}{\omega_1}. \quad (\text{П.16})$$

Конечные члены в T_1 . Как мы видели, один конечный член в $T_1^{(1)}$ происходит от $t_{1n}^{(1)}$. Остальные связаны со слагаемым $t_{1n}^{(2)}$, происходящим от второго члена в (П.3):

$$t_{1n}^{(2)} = f_{1n}(\omega_1, \omega_1) = -\frac{\partial f_n(\omega_1, \omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_1}. \quad (\text{П.17})$$

Таким образом, дополнительный конечный вклад есть

$$F_1^{(2)} = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega_1 \frac{\partial f_n(\omega_1, \omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_1} + \text{к. с.} \quad (\text{П.18})$$

Полный конечный вклад от T_1 имеет вид

$$F_1 = F_1^{(1)} + F_1^{(2)} = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega_1 \left(\frac{\partial f_n(\omega_1, \omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_1} - \frac{f_n(\omega_1, \omega_1)}{2\omega_1} \right) + \text{к. с.} \quad (\text{П.19})$$

Получаем, что

$$\frac{\partial}{\partial \omega} f_n(\omega_1, \omega_1) = \frac{1}{4} k_{1n} \omega_1 P_n^*(\omega_1) [V_n^2]'(\omega_1).$$

Используя равенство

$$V_n^2(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{\omega_1^2}{k_{1n}} \epsilon_1(\omega), \quad (\text{П.20})$$

где ϵ_1 есть мнимая часть диэлектрической постоянной, находим, что

$$\frac{\partial}{\partial \omega} f_n(\omega_1, \omega_1) = \frac{1}{2\pi} \omega_1^2 P_n^*(\omega_1) (2\epsilon_1(\omega_1) + \omega_1 \epsilon_1'(\omega_1)).$$

Также справедливо равенство

$$\frac{f_n(\omega_1, \omega_1)}{2\omega_1} = \frac{1}{2\pi} \omega_1^2 P_n^*(\omega_1) \epsilon_1(\omega_1).$$

Это приводит к окончательному выражению

$$F_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\omega \omega^2 [\omega \epsilon_1(\omega)]' \text{Re } P_n(\omega). \quad (\text{П.21})$$

Конечные члены в T_2 . Мы используем ту же технику, что и в предыдущем пункте. Квадрат модуля в (П.7) содержит четыре члена

$$\frac{1}{\omega_1 - \omega - i0} \frac{1}{\omega_1 - \omega + i0} + \frac{1}{\omega_1 + \omega} \left(\frac{1}{\omega_1 - \omega - i0} + \frac{1}{\omega_1 - \omega + i0} \right) + \left(\frac{1}{\omega_1 + \omega} \right)^2.$$

Из них только первый дает вклад в сингулярную часть. Вычисляя $T_2^{(1)}$, содержащий эту сингулярную часть, мы представили $g_n(\omega_1, \omega)$ в первом слагаемом в виде (П.10), оставив нетронутыми остальные три слагаемые. Вклад от $g_n(\omega_1, \omega_1)$ в первом слагаемом есть сумма сингулярной части S_2 и конечной части $F_2^{(1)}$. Кроме этого остается еще конечная часть $F_2^{(2)}$, имеющая вид

$$F_2^{(2)} = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega_1 \int_0^\infty d\omega \left[\left(g_{1n}(\omega_1, \omega) + 2 \frac{g_n(\omega_1, \omega)}{\omega_1 + \omega} \right) \text{P} \frac{1}{\omega_1 - \omega} + \frac{g_n(\omega_1, \omega)}{(\omega_1 + \omega)^2} \right]. \quad (\text{П.22})$$

Рассмотрим первый член в подынтегральном выражении в (П.22) с g_{1n} . Вводя регуляризацию, перепишем его как

$$\frac{1}{2} \left(g_n(\omega_1, \omega) - g_n(\omega_1, \omega_1) \right) \left(\frac{1}{(\omega_1 - \omega - i\epsilon)^2} + \frac{1}{(\omega_1 - \omega + i\epsilon)^2} \right). \quad (\text{П.23})$$

Тогда мы получаем $F_2^{(2)}$ в виде

$$F_2^{(2)} = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega_1 \tilde{g}_n(\omega_1) J(\omega_1), \quad (\text{П.24})$$

где $\tilde{g}_n$ дается формулой (П.9), а $J(\omega_1)$ есть сумма трех слагаемых:

$$J = J^{(1)} + J^{(2)} + J^{(3)}.$$

В $J^{(1)}$ и $J^{(2)}$ входят первый член из первого множителя в (П.23) и вся оставшаяся часть подынтегрального выражения в (П.22), происходящая из частей $g_n(\omega_1, \omega)$, содержащих множители $\omega_1^2/2\omega$ и $\omega/2$ соответственно:

$$J^{(1)}(\omega_1) = \frac{1}{2} \omega_1^2 \int_0^\infty d\omega \frac{V_n^2(\omega)}{\omega} \left(\frac{1}{(\omega_1 - \omega)^2} + \frac{1}{(\omega_1 + \omega)^2} + \frac{2}{(\omega_1 + \omega)(\omega_1 - \omega)} \right), \quad (\text{П.25})$$

$$J^{(2)}(\omega_1) = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega \omega V_n^2(\omega) \left(\frac{1}{(\omega_1 - \omega)^2} + \frac{1}{(\omega_1 + \omega)^2} + \frac{2}{(\omega_1 + \omega)(\omega_1 - \omega)} \right), \quad (\text{П.26})$$

и мы выделили второе слагаемое в первом множителе в (П.23) с тривиальной зависимостью от ω как $J^{(3)}$:

$$J^{(3)}(\omega_1) = -\frac{1}{2} \omega_1 V_n^2(\omega_1) \int_0^\infty d\omega \left(\frac{1}{(\omega_1 - \omega - i\epsilon)^2} + \frac{1}{(\omega_1 - \omega + i\epsilon)^2} \right) = V_n^2(\omega_1). \quad (\text{П.27})$$

Этот интеграл легко вычисляется поворотом контура на отрицательную полуось в верхней или нижней полуплоскости. Вклад от $J^{(3)}$ сокращает ранее вычисленную конечную часть $F_2^{(1)}$. Поэтому полная конечная часть T_2 происходит от интегралов $J^{(1)}$ и $J^{(2)}$. В них все особенности при $\omega = \omega_1$ должны пониматься как главные значения с

$$\text{P} \frac{1}{(\omega_1 - \omega)^2} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(\omega_1 - \omega - i0)^2} + \frac{1}{(\omega_1 - \omega + i0)^2} \right). \quad (\text{П.28})$$

Первые два слагаемые в $J^{(1)}$ приводят к формуле

$$\begin{aligned} J_1^{(1)} &= -\frac{1}{2}\omega_1^2 \frac{\partial}{\partial \omega_1} \int_0^\infty d\omega \frac{V_n^2(\omega)}{\omega} \left(\frac{1}{\omega_1 - \omega} + \frac{1}{\omega_1 + \omega} \right) = \\ &= -\frac{1}{2}\omega_1^2 \frac{\partial}{\partial \omega_1} \int_{-\infty}^\infty d\omega \frac{V_n^2(\omega)}{\omega} \frac{1}{\omega_1 - \omega}. \end{aligned} \quad (\text{П.29})$$

Последнее слагаемое в $J^{(1)}$ можно переписать в виде

$$J_2^{(1)}(\omega_1) = \omega_1^2 \frac{1}{2\omega_1} \int_{-\infty}^\infty d\omega \frac{V_n^2(\omega)}{\omega} \frac{1}{\omega_1 - \omega}. \quad (\text{П.30})$$

В сумме получаем

$$J^{(1)} = \frac{1}{2}\omega_1^2 \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{\partial}{\partial \omega_1} \right) \int_{-\infty}^\infty d\omega \frac{V_n^2(\omega)}{\omega} \frac{1}{\omega_1 - \omega}. \quad (\text{П.31})$$

Таким же путем получаем, что

$$J^{(2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{\partial}{\partial \omega_1} \right) \int_{-\infty}^\infty d\omega \omega V_n^2(\omega) \frac{1}{\omega_1 - \omega}. \quad (\text{П.32})$$

Теперь свяжем интегралы по ω с диэлектрической постоянной. Определим

$$z(\omega_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{V_n^2(\omega)}{\omega} \frac{1}{\omega_1 - \omega + i0} = 2 \frac{\omega_1}{k_{1n}} (1 - \epsilon^*(\omega_1)). \quad (\text{П.33})$$

В смысле главного значения имеем

$$\text{Re } z(\omega_1) = 2 \frac{\omega_1}{k_{1n}} (1 - \epsilon_R(\omega_1)), \quad (\text{П.34})$$

где ϵ_R есть действительная часть диэлектрической постоянной.

Возьмем второй интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \omega V_n^2(\omega) \frac{1}{\omega_1 - \omega + i0} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega V_n^2(\omega) \frac{\omega - \omega_1 + \omega_1}{\omega_1 - \omega + i0} = \omega_1 u(\omega_1), \quad (\text{П.35})$$

где

$$u(\omega_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{V_n^2(\omega)}{\omega_1 - \omega + i0} = 2 \frac{\omega_1^2}{k_{1n}} (1 - \epsilon^*(\omega_1)) - 2C_n, \quad C_n = \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} V_n^2(\omega), \quad (\text{П.36})$$

так что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \omega V_n^2(\omega) \text{P} \frac{1}{\omega_1 - \omega} = 2 \frac{\omega_1^3}{k_{1n}} (1 - \epsilon_R(\omega_1)) - 2C_n \omega_1. \quad (\text{П.37})$$

Собирая наши результаты, мы получаем формулы

$$\begin{aligned} J^{(1)}(\omega_1) &= \frac{1}{2}\omega_1^2 \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{\partial}{\partial \omega_1} \right) 2 \frac{\omega_1}{k_{1n}} (1 - \epsilon_R(\omega_1)), \\ J^{(2)}(\omega_1) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{\partial}{\partial \omega_1} \right) \left[2 \frac{\omega_1^3}{k_{1n}} (1 - \epsilon_R(\omega_1)) - 2C_n \omega_1 \right]. \end{aligned} \quad (\text{П.38})$$

Их сумма есть

$$J(\omega_1) = 2 \frac{\omega_1^2}{k_{1n}} (\omega_1 \epsilon'_R(\omega_1) + \epsilon_R - 1) = 2 \frac{\omega_1^2}{k_{1n}} ([\omega_1(\epsilon_R(\omega_1) - 1)]'), \quad (\text{П.39})$$

что приводит к окончательному ответу для конечной части F_2 :

$$F_2 = F_2^{(1)} + F_2^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\omega \omega^2 [\omega(\epsilon_R(\omega) - 1)]' \text{Im } P_n(\omega). \quad (\text{П.40})$$

Отметим, что последний член в F_2 сокращает первое слагаемое в F_0 .

Сумма F_1 и F_2 дает равенство

$$\begin{aligned} \langle H_Y \rangle_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\omega \omega^2 \{ [\omega \text{Im}(\epsilon(\omega) - 1)]' \text{Re } P_n(\omega) + ([\omega \text{Re}(\epsilon(\omega) - 1)]') \text{Im } P_n(\omega) \} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\omega \omega^2 \text{Im}([\omega(\epsilon(\omega) - 1)]' P_n(\omega)). \end{aligned} \quad (\text{П.41})$$

В сумме с $\langle H_A \rangle_n$ это дает полную энергию основного состояния (35) в расчете на одну моду.

Список литературы

- [1] B. Huttner, S. M. Barnett, “Quantization of the electromagnetic field in dielectrics”, *Phys. Rev. A*, **46**:7 (1992), 4306–4322.
- [2] W. L. Mochán, C. Villarreal, “Casimir effect for arbitrary materials: contributions within and beyond the light cone”, *New J. Phys.*, **8** (2006), 242, 21 pp.
- [3] F. C. Lombardo, F. D. Mazzitelli, A. E. Rubio López, “Casimir force for absorbing media in an open quantum system framework: scalar model”, *Phys. Rev. A*, **84**:5 (2012), 052517, 12 pp.
- [4] F. S. S. Rosa, D. A. R. Dalvit, P. W. Milonni, “Electromagnetic energy, absorption, and Casimir forces: Uniform dielectric media in thermal equilibrium”, *Phys. Rev. A*, **81**:3 (2010), 033812, 12 pp., arXiv:0911.2736.
- [5] F. Interavia, R. Behunin, “Casimir effect as a sum over modes in dissipative systems”, *Phys. Rev. A*, **86**:6 (2012), 062517, 18 pp.
- [6] F. S. S. Rosa, D. A. R. Dalvit, P. W. Milonni, *Quantum fields in a dielectric: Langevin and exact diagonalization approaches*, arXiv:0912.0279.
- [7] T. G. Philbin, “Casimir effect from macroscopic quantum electrodynamics”, *New J. Phys.*, **13** (2011), 063026, 21 pp.
- [8] F. S. S. Rosa, D. A. R. Dalvit, P. W. Milonni, “Electromagnetic energy, absorption, and Casimir forces. II. Inhomogeneous dielectric media”, *Phys. Rev. A*, **84**:5 (2011), 053813, 13 pp., arXiv:1107.4369.
- [9] М. А. Браун, “Энергия Казимира квантованного поля в среде с дисперсией и поглощением”, *ТМФ*, **175**:3 (2013), 388–397.
- [10] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Специальные функции*, Наука, М., 1983.