Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Лаврухин, В. В. Прудников, П. В. Прудников,
Ренормгрупповое описание неравновесной критической
динамики спиновых систем при фиксированной размер-
ности пространства $d = 3$, *ТМФ*, 2017, том 190, но-
мер 3, 468–478

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9114>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 12:43:21

© 2017 г.

И. В. Лаврухин*, В. В. Прудников*,
П. В. Прудников*

РЕНОРМГРУППОВОЕ ОПИСАНИЕ НЕРАВНОВЕСНОЙ КРИТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ СПИНОВЫХ СИСТЕМ ПРИ ФИКСИРОВАННОЙ РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА $d = 3$

Представлены методика и результаты ренормгруппового описания неравновесной критической релаксации модели А с эволюцией из начального высокотемпературного состояния. Рассчитана двухвременная зависимость для корреляционной функции и функции отклика и выявлены нарушения флуктуационно-диссипативной теоремы в неравновесном критическом режиме. Для предельного флуктуационно-диссипативного отношения, являющегося универсальной характеристикой неравновесной критической динамики, проведен в двухпетлевом приближении расчет флуктуационных и примесных поправок при фиксированной размерности пространства $d = 3$ с применением методов суммирования асимптотических рядов Паде–Бореля.

Ключевые слова: неравновесная критическая динамика, ренормгруппа, флуктуационно-диссипативное отношение, эффекты старения.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9114>

Исследование поведения неравновесных систем является одной из актуальных фундаментальных проблем статистической физики. Интригующим явлением, возникающим в неравновесном поведении систем с медленной динамикой, является их *старение* [1]–[4], характеризуемое двухвременной зависимостью корреляционной функции и функции отклика от времени наблюдения t и времени ожидания s как времени, прошедшего с момента приготовления системы до начала измерений ее свойств. При этом на временах $s < t \ll t_{\text{rel}}$, где t_{rel} – время релаксации, с ростом времени ожидания s – возраста системы – происходит сильное замедление убывания по времени корреляционной функции и функции отклика. В то же время на

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-12-00562).

*Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского, Омск, Россия.
E-mail: prudnikov@mail.ru, prudnikov_pavel@mail.ru

равновесном этапе эволюции при $t > s \gg t_{\text{rel}}$ данные функции зависят только от временного промежутка $t - s$.

Экспериментальные, аналитические и численные исследования позволили выявить явления старения в поведении спиновых стекол [5]–[7] и в системах, испытывающих фазовый переход второго рода, вблизи критической температуры [8]–[11]. Такие системы характеризуются аномально большими временами релаксации, поэтому их поведение описывается в рамках неравновесной динамики на больших временных интервалах. Одной из особенностей неравновесного этапа релаксации является нарушение флуктуационно-диссипативной теоремы (ФДТ), для описания которого вводятся такие новые понятия, как флуктуационно-диссипативное отношение (ФДО) [12] и эффективная температура [13], [14].

Ренормгрупповые [15], [16], численные [17]–[20] и экспериментальные [21] методы исследования критической динамики структурно неупорядоченных систем позволили к настоящему времени однозначно установить, что присутствие в системах как некоррелированных дефектов структуры, так и дефектов с эффектами дальнедействующей корреляции приводит к новым типам критического поведения и заметному усилению эффектов критического замедления по сравнению с “чистыми” системами. В связи с этим особенности неравновесного поведения, такие как эффекты старения, несомненно должны найти более яркое проявление в структурно неупорядоченных системах с новыми универсальными значениями ФДО.

Ренормгрупповые расчеты ФДО, проведенные в работах [22], [23] в рамках метода ε -разложения для диссипативной модели А с несохраняющимся параметром порядка [24] в низших порядках теории, показали, что сложности выделения флуктуационных поправок в двухвременных зависимостях для корреляционной функции и функции отклика не позволяют пока с достаточной убедительностью выявить характер влияния дефектов на относительное соответствие значений предельного ФДО для структурно неупорядоченной и “чистой” модели Изинга. Представленные в работах [11], [25], [26] численные исследования на основе метода Монте-Карло, непerturbативные по своей сути, позволили более однозначно ответить на этот вопрос и выделить влияние дефектов структуры на эффекты старения и значения ФДО в неравновесном критическом поведении трехмерной модели Изинга. Так, в статьях [11], [25], [26] было показано, что присутствие дефектов структуры приводит к усилению эффектов старения в системе и увеличению значений предельного ФДО по сравнению с его значением для “чистой” модели Изинга.

Данная работа посвящена нахождению значений предельного ФДО для чистых и структурно неупорядоченных систем с использованием ренормгруппового описания их неравновесного критического поведения в рамках диссипативной модели А (в классификации Гальперина и Хоэнберга [24]) при фиксированной пространственной размерности систем $d = 3$. Расчет осуществляется в двухпетлевом приближении с применением к получающимся рядам теории методов суммирования.

Поведение макроскопических систем вблизи критической температуры T_c характеризуется аномально большими по амплитудам и долгоживущими флуктуациями параметра порядка. Поэтому для описания свойств подобных систем в качестве параметра порядка вводят классические переменные – поля $\varphi(x, t)$. Так, поведение структурно неупорядоченной системы вблизи температуры фазового перехода второго рода можно описать эффективным модельным гамильтонианом Гинзбурга–

Ландау–Вильсона [27]

$$H_\psi[\varphi] = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2} [r_0 + \psi(x)] \varphi^2 + \frac{1}{4!} g \varphi^4 \right\}, \quad (1)$$

где $\varphi(x)$ – N -компонентный параметр порядка, $r_0 \propto (T - T_c)/T_c$ – приведенная температура, а $\psi(x)$ – потенциал случайного поля дефектов. Пространственное распределение системы замороженных точечных некоррелированных дефектов характеризуется гауссовым распределением $P[\psi]$ и полностью определяется значениями первого и второго моментов для случайных величин $\psi(x)$:

$$\langle\langle \psi(x) \rangle\rangle = 0, \quad \langle\langle \psi(x) \psi(y) \rangle\rangle = v \delta(x - y), \quad (2)$$

где v – положительная константа, пропорциональная концентрации дефектов и квадрату величины их потенциала. Для “чистых” систем $\psi(x) \equiv 0$.

Времена релаксации параметра порядка $\varphi(x, t)$ вблизи критической температуры очень велики, поэтому неравновесная динамика параметра порядка в этих условиях является медленным случайным процессом. Для описания релаксационной динамики данной системы (модель А в классификации Гальперина и Хоэнберга [24]) применяется уравнение эволюции в форме уравнения Ланжевена:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\lambda \frac{\delta H[\varphi]}{\delta \varphi(t)} + \zeta(x, t), \quad (3)$$

где ζ – дельта-коррелированная гауссова случайная сила:

$$\langle \zeta(x, t) \rangle = 0, \quad \langle \zeta(x, t), \zeta(x', t') \rangle = 2\lambda \delta(x - x') \delta(t - t'). \quad (4)$$

Введем в рассмотрение двухвременные корреляционную функцию и функцию отклика. *Функция отклика* $R(t, s)$ характеризует реакцию параметра порядка в момент времени t на внешнее поле h , приложенное в момент времени s :

$$R_{ij}(t, s) \equiv \frac{\delta \langle \varphi_i(t) \rangle_h}{\delta h_j(s)} \Big|_{h=0}, \quad (5)$$

а корреляционная функция $C(t, s)$ отражает взаимосвязь значений параметра порядка в различных точках системы и в различные моменты времени t и s при эволюции из высокотемпературного начального состояния:

$$C_{ij}(t, s) \equiv \langle \varphi_i(t) \varphi_j(s) \rangle. \quad (6)$$

Связь этих двух функций определяется ФДТ:

$$R_{ij}(t, s) = \frac{1}{T} \frac{\partial C_{ij}(t, s)}{\partial s}, \quad (7)$$

где T – температура. Однако на неравновесном этапе эволюции ФДТ может нарушаться, поэтому для описания неравновесного состояния системы вводят ФДО

$$X_x(t, s) = \frac{T R_x(t, s)}{\partial_s C_x(t, s)}, \quad (8)$$

предельное значение которого

$$X^\infty = \lim_{s \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} X_{x=0}(t, s) \quad (9)$$

определяется составляющей с $x = 0$ и (как было показано в статье [28]) является универсальной характеристикой неравновесного поведения в рамках определенной релаксационной модели. Для ФДО, заданного в импульсном пространстве через фурье-образы функций:

$$X_q(t, s) = \frac{T R_q(t, s)}{\partial_s C_q(t, s)}, \quad (10)$$

справедливо следующее равенство предельных отношений:

$$X_{q=0}^\infty = X_{x=0}^\infty = X^\infty. \quad (11)$$

Пусть в системе реализация любой конфигурации параметра порядка в момент времени t определяется условием, что в начальный момент $t = 0$ для системы с начальной намагниченностью m_0 распределение для поля параметра порядка, которое задается равенством $\varphi(x, 0) = \varphi_0(x)$, характеризуется функцией распределения $P[\varphi_0] \sim e^{-H_0[\varphi_0]}$, где

$$H_0[\varphi_0] = \int d^d x \frac{\tau_0}{2} [\varphi_0(x) - m_0]^2, \quad (12)$$

а τ_0^{-1} – ширина начального распределения намагниченности. Данное гауссово распределение для поля параметра порядка может реализоваться для температур $T \gg T_c$, при которых еще не возникает дальнедействующих корреляций для флуктуаций параметра порядка.

В рамках теоретико-полевого описания динамики критических явлений вводится вспомогательное поле $\tilde{\varphi}(x)$, позволяющее провести усреднение по случайным силам $\zeta(x, t)$ и осуществить эквивалентное ланжевеновской динамике описание критической динамики с помощью производящего функционала $W[h, \tilde{h}]$ для динамических корреляционных функций и функций отклика, имеющего вид

$$W[h, \tilde{h}] = \ln \left\{ \int \mathcal{D}(\varphi, i\tilde{\varphi}) P[\psi] e^{-S_\psi[\varphi, \tilde{\varphi}, \psi] - H_0[\varphi_0]} \exp \left(\int d^d x \int_0^\infty dt (\tilde{h}\tilde{\varphi} + h\varphi) \right) \right\}, \quad (13)$$

в котором функционал действия $S_\psi[\varphi, \tilde{\varphi}, \psi]$ системы характеризуется выражением

$$S_\psi[\varphi, \tilde{\varphi}, \psi] = \int_0^\infty dt \int d^d x \tilde{\varphi} \left[\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} + \lambda \frac{\delta H_\varphi[\varphi]}{\delta \varphi(x, t)} - \lambda \tilde{\varphi} \right]. \quad (14)$$

В выражении (13) для производящего функционала можно осуществить усреднение по случайным полям $\psi(x)$, задаваемым дефектами структуры:

$$\int P[\psi] e^{-S_\psi[\varphi, \tilde{\varphi}, \psi]} = e^{-S[\varphi, \tilde{\varphi}]}, \quad (15)$$

и получить функционал действия $S[\varphi, \tilde{\varphi}]$, не зависящий от случайных полей $\psi(x)$ и являющийся трансляционно-инвариантным, в следующем виде:

$$S[\varphi, \tilde{\varphi}] = \int_0^\infty dt \int d^d x \tilde{\varphi} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \lambda(r_0 - \nabla^2)\varphi + \frac{\lambda g}{6}\varphi^3 - \lambda \tilde{\varphi} \right] - v \frac{\lambda^2}{2} \left[\int_0^\infty dt \int d^d x \tilde{\varphi} \varphi \right]^2. \quad (16)$$

Корреляционную функцию и функцию отклика можно получить из производящего функционала как производные по сопряженным полям h и $\tilde{h}$:

$$R(x_1, t, x_2, s) = \langle \varphi(x_1, t) \tilde{\varphi}(x_2, s) \rangle = \frac{\delta^2 W[h, \tilde{h}]}{\delta h(x_1, t) \delta \tilde{h}(x_2, s)} \Big|_{h=0, \tilde{h}=0},$$

$$C(x_1, t, x_2, s) = \langle \varphi(x_1, t) \varphi(x_2, s) \rangle = \frac{\delta^2 W[h, \tilde{h}]}{\delta h(x_1, t) \delta h(x_2, s)} \Big|_{h=0, \tilde{h}=0}.$$

Затравочные выражения для динамических функций ($v = 0$, $g = 0$) находятся из решения вариационных уравнений [29]

$$\left[-\frac{\partial}{\partial t} + \lambda(r_0 + q^2) - r_t \right] \tilde{\varphi} = h,$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \lambda(r_0 + q^2) - r_t \right] \varphi - 2\lambda \tilde{\varphi} = \tilde{h}, \quad (17)$$

где $r_t \sim t^{-1/(\nu z)} \sim t^{-1}$ – временная зависимость приведенной температуры, связанная с увеличением корреляционной длины при приближении к точке фазового перехода.

Таким образом, при $T = T_c$ получаем, что

$$R_q^0(t, s) = \theta(t - s) \frac{s}{t} e^{-q^2(t-s)},$$

$$C_q^0(t, s) = \frac{1}{q^2} \frac{s}{t} [e^{-q^2|t-s|} - e^{-q^2(t+s)}], \quad (18)$$

где мы считаем, что $\lambda = 1$. Зависимость от λ в конечном выражении для ФДО можно восстановить при осуществлении преобразования времени $t \rightarrow \lambda t$. Первое слагаемое в $C_q^0(t, s)$ зависит от времени наблюдения $t - s$ и играет главную роль в равновесном режиме, а второе быстро затухающее слагаемое – на неравновесном этапе эволюции. Данные вклады также называются равновесным $C_e(t, s)$ и начальным $C_i(t, s)$ корреляторами соответственно.

В случае $g = 0$, $v = 0$ (модель среднего поля Ландау без примесей) мы приходим к значениям предельного ФДО $X_{q=0} = 1/2$ и $X_{q \neq 0} = 1$, что свидетельствует о нарушении ФДТ для моды параметра порядка с $q = 0$.

С учетом взаимодействия флуктуаций параметра порядка и наличия дефектов функция отклика и корреляционная функция представляются в виде разложений по вершинам взаимодействия g и v :

$$R = R^0 - gR^{1,1} + g^2 \sum_i R^{2,i} - vR_d^{1,1} + gv \sum_i R_d^{2,i} + v^2 \sum_i R_{dd}^{2,i},$$

$$C = C^0 - gC^{1,1} + g^2 \sum_i C^{2,i} - vC_d^{1,1} + gv \sum_i C_d^{2,i} + v^2 \sum_i C_{dd}^{2,i}. \quad (19)$$

Коэффициенты при них определяются диаграммами Фейнмана (см. рис. 1–3) с соответствующими симметричными множителями. Каждой диаграмме соответствует

Рис. 1. Диаграммы Фейнмана, определяющие флуктуационные поправки к функциям отклика $R^{l,k}$ и корреляционной функции $C^{l,k}$. Линиям со стрелками соответствуют затравочные функции отклика, они направлены в сторону увеличения времени, сплошным линиям – затравочные корреляционные функции.

интеграл по временам и импульсам, например

$$\begin{aligned}
 R^{1,1} &= \int_0^\infty dt' R_{q=0}^0(t', s) \left\{ \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} C_i^0(q, t', t') \right\} R_{q=0}^0(t, t'), \\
 R_d^{1,1} &= \int_0^\infty dt' \int_0^\infty dt'' R_{q=0}^0(t', s) \left\{ \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} R^0(q, t'', t') \right\} R_{q=0}^0(t, t''), \\
 C^{1,1} &= \int_0^\infty dt' C_{q=0}^0(t', s) \left\{ \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} C_i^0(q, t', t') \right\} R_{q=0}^0(t, t') + \\
 &\quad + \int_0^\infty dt' R_{q=0}^0(t', s) \left\{ \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} C_i^0(q, t', t') \right\} C_{q=0}^0(t, t').
 \end{aligned} \tag{20}$$

В случае, когда замкнутая петля образована затравочной корреляционной функцией, при интегрировании по импульсам вклад вносит только начальный коррелятор C_i , так как вклад от равновесного коррелятора при $d = 3$ равен нулю [28]. В диаграммах для корреляционной функции, в которых внешние линии “расходятся” от внутренней петлевой части, можно воспользоваться следующим упрощением:

$$\frac{\partial C}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\int_0^s dt' f(t') \right) = f(s), \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial s} C_d^{1,1}(b) &= \frac{\partial}{\partial s} \left[\int_0^s dt' \int_0^t dt'' R_{q=0}^0(t', s) \left\{ \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} C^0(q, t'', t') \right\} R_{q=0}^0(t, t'') \right] = \\
 &= \int_0^t dt'' R_{q=0}^0(s, s) \left\{ \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} C^0(q, t'', s) \right\} R_{q=0}^0(t, t'').
 \end{aligned} \tag{22}$$

Конечные выражения для пропагаторов можно привести к скейлинговым формам [30], выделив универсальную часть:

$$C(t, s) \sim s^{-(d-2+\eta)/z} F_C\left(\frac{t}{s}\right), \quad R(t, s) \sim s^{-1-(d-2+\eta)/z} F_R\left(\frac{t}{s}\right), \tag{23}$$

Рис. 2. Диаграммы, описывающие вклад дефектов структуры в функцию отклика. Штриховой линией обозначена примесная вершина взаимодействия.

где поведение скейлинговых функций $F_C(t/s)$, $F_R(t/s)$ известно на этапе существенно неравновесной динамики при $t \gg s$:

$$F_C(t, s) \approx A_C \left(\frac{t}{s} \right)^{-d/z-\theta'}, \quad F_R(t, s) \approx A_R \left(\frac{t}{s} \right)^{-d/z-\theta'}. \quad (24)$$

Таким образом, ФДО представляется в виде отношения амплитуд:

$$X^\infty = \frac{A_R}{A_{\partial C}} = \frac{A_R}{A_C(1-\theta)}. \quad (25)$$

Перенормировка вершин взаимодействия имеет следующий вид:

$$g = \frac{6}{(N+8)J} g_R \left(1 + g_R - \frac{3}{2} v_R \right) \sqrt{r_t}, \quad (26)$$

$$v = -\frac{1}{16J} v_R \left(1 + v_R - \frac{2}{3} g_R \right) \sqrt{r_t}, \quad (27)$$

где $J = 1/8\pi$ – значение для однопетлевого интеграла.

Поскольку ряды теории возмущений для физических величин являются асимптотическими, для получения их разумных значений применяются различные методы суммирования [27]. В настоящей работе был использован метод суммирования Паде–Бореля и в качестве значения предельного ФДО выбрано среднее от аппроксимант $[0/2]$, $[1/1]$, $[2/0]$.

Рис. 3. Диаграммы, описывающие вклад дефектов структуры в корреляционную функцию.

Таблица 1. Значения ФДО для чистых систем.

N	g_R^*	$X_{d=3}^\infty$, скейл.	$X_{d=3}^\infty$	X_ϵ^∞ [22]	X_{MC}^∞ [11], [25], [26]	X_{MC}^∞ [26]
1	1.418	0.471(3)	0.416(29)	0.429(6)	0.380(13)	0.390(12)
2	1.408	0.465(5)	0.400(27)	0.416(8)	—	—
3	1.393	0.468(8)	0.386(23)	0.405(10)	—	—

Таблица 2. Значения ФДО для слабо неупорядоченной модели Изинга. Фиксированные точки суть $g_R^* = 2.241$, $v_R^* = -0.707$.

$X_{d=3}^\infty$, скейл.	$X_{d=3}^\infty$	X_ϵ^∞ [23]	X_{MC}^∞ [11], [25], [26]	X_{MC}^∞ [26]
0.500(8)	0.446(59)	0.416	0.413(11)	0.415(18)

Наличие дефектов структуры согласно критерию Харриса [31] оказывает существенное влияние только на системы с числом компонент параметра порядка $N = 1$. Значения ФДО были получены для чистых систем с различными типами анизотропии и для слабо неупорядоченной модели Изинга. Результаты применения обоих вышеупомянутых методов: прямой подстановки (10) и с использованием скейлинговых форм (25), представлены в табл. 1 и 2. Также в них представлены результаты, полученные в рамках ϵ -разложения [22], [23] и с помощью компьютерного моделирования методом Монте-Карло [11], [25], [26].

Как видно из представленных в табл. 1 результатов для чистых систем, значения X^∞ , полученные методом прямой подстановки двухвременных функций в ФДО, лучше согласуются с рассчитанными в рамках метода ϵ -разложения и методами Монте-Карло, однако имеют большую погрешность аппроксимации за счет того, что ряды разложения по вершинам взаимодействия для ФДО являются знакопостоянными. Выявлена тенденция увеличения значения ФДО при учете присутствия дефектов структуры (табл. 2), что согласуется с результатами компьютерного моделирования. Подобные вычисления для структурно неупорядоченных систем были проведены в работе [23] с применением метода ϵ -разложения лишь в низшем однопетлевом приближении, поэтому они не дают надежной информации о влиянии дефектов на значение ФДО. При использовании скейлинговых зависимостей в расчетах ФДО удалось выделить знакпеременный ряд. Это привело к уменьшению погрешности получаемых значений при использовании аппроксимантов Паде [0/2], [1/1], [2/0], однако полученные средние значения X^∞ хуже коррелируют с результатами предыдущих работ. В свою очередь их можно рассматривать как верхнюю границу предельных значений ФДО.

В дальнейшем мы планируем провести исследование применения различных аппроксимационных схем в методе суммирования рядов, определяющих значения ФДО, с целью уменьшения погрешности аппроксимации, а также осуществить описание неравновесной критической динамики в рамках применения других динамических моделей [24] и вычислить для них значения ФДО.

Благодарности. Авторы благодарят организаторов V Международной конференции “Модели квантовой теории поля” (MQFT–2015), посвященной А. Н. Васильеву, за гостеприимство и высокий уровень организации.

Список литературы

- [1] L. F. Cugliandolo, “Course 7. Dynamics of glassy systems”, *Slow Relaxations and Nonequilibrium Dynamics in Condensed Matter*, v. 77, Les Houches Session LXXVIII (1–26 July, 2002), École d’Été de Physique Théorique, **77**, eds. J.-L. Barrat, M. V. Feigelman, J. Kurchan, J. Dalibard, Springer, Berlin, 2003, 367–521.
- [2] M. Henkel, M. Pleimling, *Non-Equilibrium Phase Transitions*, v. 2: *Ageing and Dynamical Scaling Far From Equilibrium*, Springer, Heidelberg, 2010.
- [3] N. Afzal, M. Pleimling, “Aging processes in systems with anomalous slow dynamics”, *Phys. Rev. E*, **87**:1 (2013), 012114, 8 pp.
- [4] G. Ehlers, “Study of slow dynamic processes in magnetic systems by neutron spin-echo spectroscopy”, *J. Phys.*, **18**:13 (2006), R231–R244.
- [5] L. Berthier, J. Kurchan, “Non-equilibrium glass transitions in driven and active matter”, *Nature Phys.*, **9** (2013), 310–314.
- [6] E. Vincent, J. Hammann, M. Ocio, J.-P. Bouchaud, L. F. Cugliandolo, “Slow dynamics and aging in spin glasses”, *Complex Behaviour of Glassy Systems*, Proceedings of the XIV Sitges Conference (Sitges, Barcelona, Spain, 10–14 June, 1996), eds. M. Rubi, C. Pérez-Vicente, Springer, Berlin, 1997, 184–219, [arXiv: cond-mat/9607224](https://arxiv.org/abs/cond-mat/9607224).
- [7] J.-P. Bouchaud, L. F. Cugliandolo, J. Kurchan, M. Mézard, “Out of equilibrium dynamics in spin-glasses and other glassy system”, *Spin Glasses and Random Fields*, Directions in Condensed Matter Physics, **12**, ed. A. P. Young, World Sci., Singapore, 1998, 161–223.
- [8] P. Calabrese, A. Gambassi, “Ageing properties of critical systems”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **38**:18 (2005), R133–R193.
- [9] L. Berthier, P. C. W. Holdsworth, M. Sellitto, “Nonequilibrium critical dynamics of the two-dimensional XY model”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **34**:9 (2001), 1805–1824.
- [10] A. Gambassi, “Relaxation phenomena at criticality”, *Eur. Phys. J. B*, **64**:2 (2008), 379–386.
- [11] V. V. Prudnikov, P. V. Prudnikov, E. A. Pospelov, P. N. Malyarenko, A. N. Vakilov, “Aging and non-equilibrium critical phenomena in Monte Carlo simulations of 3D pure and diluted Ising models”, *Prog. Theor. Exp. Phys.*, **2015** (2015), 053A01, 20 pp.
- [12] L. F. Cugliandolo, J. Kurchan, “Analytical solution of the off-equilibrium dynamics of a long-range spin-glass model”, *Phys. Rev. Lett.*, **71**:1 (1993), 173–176.
- [13] L. F. Cugliandolo, J. Kurchan, “Energy flow, partial equilibration, and effective temperatures in systems with slow dynamics”, *Phys. Rev. E*, **55**:4 (1997), 3898–3914.
- [14] L. F. Cugliandolo, “Effective temperatures out of equilibrium”, *AIP Conf. Proc.*, **484**:1 (1999), 238–248.
- [15] В. В. Прудников, П. В. Прудников, И. А. Калашников, С. С. Циркин, “Ренормгрупповое описание процессов неравновесной критической релаксации в коротковременном режиме: трехпетлевое приближение”, *ЖЭТФ*, **133**:6 (2008), 1251–1257.
- [16] В. В. Прудников, П. В. Прудников, И. А. Калашников, М. В. Рычков, “Неравновесная критическая релаксация структурно неупорядоченных систем в коротковременном режиме: ренормгрупповое описание и компьютерное моделирование”, *ЖЭТФ*, **137**:2 (2010), 287–300.
- [17] В. В. Прудников, П. В. Прудников, А. Н. Вакилов, А. С. Криницын, “Компьютерное моделирование критического поведения трехмерной неупорядоченной модели Изинга”, *ЖЭТФ*, **132**:2 (2007), 417–425.
- [18] V. V. Prudnikov, P. V. Prudnikov, A. S. Krinitsyn, A. N. Vakilov, E. A. Pospelov, M. V. Rychkov, “Short-time dynamics and critical behavior of the three-dimensional site-diluted Ising model”, *Phys. Rev. E*, **81**:1 (2010), 011130, 11 pp.

- [19] V. V. Prudnikov, P. V. Prudnikov, B. Zheng, S. V. Dorofeev, V. Yu. Kolesnikov, “Short-time critical dynamics of the three-dimensional systems with long-range correlated disorder”, *Progr. Theor. Phys.*, **117**:6 (2007), 973–991.
- [20] P. V. Prudnikov, M. A. Medvedeva, “Non-equilibrium critical relaxation of the 3d heisenberg magnets with long-range correlated disorder”, *Progr. Theor. Phys.*, **127**:3 (2012), 369–382.
- [21] N. Rosov, C. Hohenemser, M. Eibschütz, “Dynamic critical behavior of the random-exchange Ising system $\text{Fe}_{0.9}\text{Zn}_{0.1}\text{F}_2$ determined via Mössbauer spectroscopy”, *Phys. Rev. B*, **46**:6 (1992), 3452–3457.
- [22] P. Calabrese, A. Gambassi, “Two-loop critical fluctuation-dissipation ratio for the relaxational dynamics of the $O(N)$ Landau–Ginzburg Hamiltonian”, *Phys. Rev. E*, **66**:6 (2002), 066101, 12 pp.
- [23] P. Calabrese, A. Gambassi, “Aging and fluctuation-dissipation ratio for the dilute Ising model”, *Phys. Rev. B*, **66**:21 (2002), 212407, 4 pp.
- [24] P. C. Hohenberg, B. I. Halperin, *Rev. Modern Phys.*, **49**:3 (1977), 435–479.
- [25] П. В. Прудников, В. В. Прудников, Е. А. Поспелов, “Расчет флуктуационно-диссипативного отношения для неравновесного критического поведения неупорядоченных систем”, *Письма в ЖЭТФ*, **98**:10 (2013), 693–699.
- [26] В. В. Прудников, П. В. Прудников, Е. А. Поспелов, “Численные исследования влияния дефектов структуры на эффекты старения и нарушения флуктуационно-диссипативной теоремы для неравновесного критического поведения в трехмерной модели Изинга”, *ЖЭТФ*, **145**:3 (2014), 462–471.
- [27] В. В. Прудников, П. В. Прудников, А. Н. Вакилов, *Теоретические методы описания неравновесного критического поведения структурно неупорядоченных систем*, Физматлит, М., 2013.
- [28] P. Calabrese, A. Gambassi, “Aging in ferromagnetic systems at criticality near four dimensions”, *Phys. Rev. E*, **65**:6 (2002), 066120, 6 pp.
- [29] H. K. Janssen, B. Schaub, B. Schmittmann, “New universal short-time scaling behaviour of critical relaxation processes”, *Z. Phys B.*, **73**:4 (1989), 539–549.
- [30] C. Godrèche, J. M. Luck, “Response of non-equilibrium systems at criticality: ferromagnetic models in dimension two and above”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **33**:50 (2000), 9141–9164.
- [31] A. B. Harris, “Effect of random defects on the critical behaviour of Ising models”, *J. Phys. C*, **7**:9 (1974), 1671–1692.