Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Антонов, М. Гнатич, А. С. Капустин, Т. Лучивянски, Л. Мижишин, Процесс направленного протекания в присутствии “синтетического” поля скорости со сжимаемостью: ренормгрупповой анализ, *ТМФ*, 2017, том 190, номер 3, 377–390

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9115>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 14:53:41

© 2017 г. Н. В. Антонов*, М. Гнатич^{†‡§}, А. С. Капустин*,
Т. Лучивянский^{†¶}, Л. Мижишин[‡]

ПРОЦЕСС НАПРАВЛЕННОГО ПРОТЕКАНИЯ В ПРИСУТСТВИИ “СИНТЕТИЧЕСКОГО” ПОЛЯ СКОРОСТИ СО СЖИМАЕМОСТЬЮ: РЕНОРМГРУППОВОЙ АНАЛИЗ

Изучается процесс направленного протекания со связями (иногда называемый процессом Грибова из-за формального сходства с реджеонной теорией поля) в присутствии безвихревых флуктуаций поля скорости, коррелятор которых обладает дальностью действия. Для исследования фазового перехода из активного в абсорбированное состояние использован метод ренормализационной группы. Все расчеты проведены в однопетлевом приближении. Неподвижные точки уравнения ренормгруппы и их области устойчивости вычислены в виде разложения по трем параметрам (ε, y, η) . Рассмотрены различные режимы задачи, соответствующие модели Крейчнана быстро изменяющегося поля и “замороженного” поля скорости.

Ключевые слова: неравновесное критическое поведение, процесс Грибова, перколяция, ренормализационная группа.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9115>

Данная работа поддержана The Ministry of Education, Science, Research and Sport of the Slovak Republic (грант VEGA № 1/0345/17). Н. В. Антонов и А. С. Капустин благодарят за поддержку Санкт-Петербургский государственный университет (грант № 11.38.185.2014). Работа А. С. Капустина поддержана РФФИ (грант № 16-32-00086).

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: nikolai.antonov@pobox.spbu.ru

[†] Institute of Experimental Physics, Slovak Academy of Sciences, Košice, Slovakia.
E-mail: hnatic@saske.sk

[‡] Pavol Jozef Šafárik University in Košice, Košice, Slovakia.
E-mail: lukas.mizisin@student.upjs.sk

[§] Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия

[¶] University of Duisburg-Essen, Essen, Germany. E-mail: tomas.lucivjansky@uni-due.de

1. ВВЕДЕНИЕ

Долгое время неравновесные фазовые переходы [1] представляли особенный интерес для исследований. Лежащие в их основе динамические законы имеют гораздо более разнообразное поведение, нежели их равновесные аналоги. Показательным в этом смысле является направленный процесс протекания со связями [2], [3], также известный как процесс реакции Шлегля [4], [5]. В физике частиц для описания адронных взаимодействий при высоких энергиях данный процесс был введен Грибовым (реджеонная теория поля) [6], [7]. Кроме того, данная модель используется при описании стохастических процессов реакции-диффузии на решетке [8], процессов распространения инфекций среди особей [9].

Известно, что фазовые переходы довольно чувствительны к некоторым дополнительным возмущениям, таким как “насыщенный” беспорядок [10] или взаимодействие с дальнодействием [8]. С практической точки зрения этот факт является причиной отсутствия большого числа экспериментов для исследования процессов перколяции [11], [12]. Большинство реальных процессов реакции-диффузии происходят в некоторой жидкой среде. Более того, подавляющее число химических реакций происходит при конечной температуре, что неизбежно ведет к наличию тепловых флуктуаций. В данной работе мы предполагаем, что эффект такого окружения можно смоделировать с помощью флуктуаций перемешивающего поля скорости [13]. В общем случае динамика жидкостей описывается уравнением Навье–Стокса [14], однако вопрос о его общем решении до сих пор остается открытым [15], [16]. Более удобным в нашем случае является использование модели поля скорости Обухова–Крейчнана. В этом случае поле скорости имеет гауссово распределение с заданными статистическими свойствами [13], [17]. Хотя с первого взгляда кажется, что данная модель слишком проста, однако она довольно хорошо передает физическую картину процессов переноса [13].

В последнее время возрос интерес к различным задачам переноса со сжимаемым турбулентным перемешиванием [18]–[21]. Эти исследования показывают, что сжимаемость играет важную роль в динамике популяций или хаотичном перемешивании в коллоидах. Мы будем рассматривать обобщенную модель Крейчнана, ранее представленную в статье [22]. В данной работе была рассмотрена задача переноса–диффузии с невзаимодействующей примесью в присутствии сжимаемого поля скорости с конечновременным коррелятором. Наша цель – определить, как изменятся критические свойства в процессе перколяции при использовании данной модели. Заметим, что в ней нет обратного влияния процесса перколяции на поле скорости, т. е. наша модель описывает пассивный перенос скалярной величины. Начальные шаги в этом направлении уже сделаны в работах [23]–[26], и мы будем уделять особое внимание описанию различий, связанных со сжимаемостью. Для данного описания мы используем теоретико-полевой подход [27] с диаграммами Фейнмана и последующим ренормгрупповым (РГ) анализом.

Настоящая работа организована следующим образом. В разделе 2 мы вводим теоретико-полевое описание задачи. В разделе 3 дано описание основных шагов РГ-процедуры. Затем в разделе 4 мы представляем анализ возможных критических режимов нашей модели. В разделе 5 содержатся заключения и выводы данной работы.

2. ТЕОРЕТИКО-ПОЛЕВАЯ МОДЕЛЬ

Эффективное теоретико-полевое действие [28] для процесса протекания можно получить как из ланжевеновой формулировки, так и из формализма Дои [29] для определения перколяции через описание реакции-диффузии. В конечном итоге это приводит нас к функционалу действия де Доминисиса–Янссена [30]–[32]

$$\mathcal{J}_{\text{per}}[\tilde{\psi}, \psi] = \tilde{\psi}[\partial_t + D_0(\tau_0 - \nabla^2)]\psi + \frac{D_0\lambda_0}{2}[\psi - \tilde{\psi}]\tilde{\psi}\psi, \quad (1)$$

в котором все несущественные вклады с точки зрения РГ-подхода были удалены. Поле ψ соответствует флуктуациям плотности протекающего агента, $\tilde{\psi}$ играет роль добавочного поля Мартина–Сиджа–Роуза (МСР), $\partial_t = \partial/\partial t$ – производная по времени, ∇^2 – оператор Лапласа, D_0 – коэффициент диффузии, λ_0 – константа связи и τ_0 – отклонение от критического значения вероятности накачки. Последний параметр является аналогом отклонения температуры от критического значения в стандартной теории φ^4 [28], [33]. В данной работе мы придерживаемся компактных обозначений, в которых опускаются пространственные и временные переменные x и t , а также матричные или векторные индексы, по которым подразумевается суммирование или интегрирование. Например, первое слагаемое в выражении (1) следует воспринимать как

$$\int dt \int d^d x \tilde{\psi}(t, x) \partial_t \psi(t, x), \quad (2)$$

где d – размерность x -пространства. Здесь и далее мы различаем неренормированные величины (с индексом 0) от их ренормированных аналогов (без индекса 0).

Следующим шагом нашего рассмотрения является добавление поля скорости в представленную выше модель. Это осуществляется с помощью стандартной замены [14]

$$\partial_t \rightarrow \partial_t + (v_i \partial_i), \quad (3)$$

где подразумевается суммирование по пространственным индексам i . В соответствии с работами [17], [22] мы полагаем, что поле скорости имеет гауссово распределение с нулевым средним и описывается трансляционно-инвариантным коррелятором [22]. Его фурье-образ имеет вид

$$\langle v_i v_j \rangle_0(\omega, \mathbf{k}) = [P_{ij}^k + \alpha Q_{ij}^k] \frac{g_{10} u_{10} D_0^3 k^{4-d-y-\eta}}{\omega^2 + u_{10}^2 D_0^2 (k^2 - \eta)^2}. \quad (4)$$

Здесь $P_{ij}^k = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$ – поперечный и $Q_{ij}^k = k_i k_j / k^2$ – продольный проекторы. Кроме того, $k = |\mathbf{k}|$, а положительный параметр $\alpha > 0$ интерпретируется как отклонения модели от несжимаемого случая [34], где $\partial_i v_i = 0$. Несжимаемый случай с $\alpha = 0$ был исследован в предыдущих работах [23], [25], [26]. Константа связи g_{10} и степень y задают равновременной коррелятор, который определяет энергетический спектр флуктуаций поля скорости [15], [17], [22]. Между тем константа $u_{10} > 0$ и степень η связаны с характерной частотой моды $\omega \simeq u_{10} D_0 k^{2-\eta}$ с длиной волны k .

Ядро коррелятора (4) имеет наиболее универсальный вид, который содержит в себе такие пределы, как ансамбль замороженного поля скорости, турбулентное перемешивание (см. статьи [17], [22]) и модель быстро изменяющегося поля. В настоящей

Таблица 1. Канонические размерности полей и параметров в модели, заданной суммой функционалов действий процесса протекания (1), поля скорости (7) и процесса переноса (16).

Q	$\psi, \tilde{\psi}$	$\mathbf{v}$	D_0	τ_0	g_{10}	λ_0	u_{10}	u_{20}, a_0, α
d_Q^k	$d/2$	-1	-2	2	y	$\varepsilon/2$	η	0
d_Q^ω	0	1	1	0	0	0	0	0
d_Q	$d/2$	1	0	2	y	$\varepsilon/2$	η	0

работе нашей основной целью является исследование случая безвихревого поля скорости. Для этого необходимо растянуть переменную g_1 :

$$\alpha g_1 \rightarrow g_1, \quad \alpha \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Таким образом, в теории возмущения мы используем следующий пропагатор скорости:

$$\langle v_i v_j \rangle_0(\omega, \mathbf{k}) \rightarrow k_i k_j \frac{g_{10} u_{10} D_0^3 k^{2-d-y-\eta}}{\omega^2 + u_{10}^2 D_0^2 (k^2 - \eta)^2}, \quad (6)$$

в котором произведена замена $g_1 \alpha \rightarrow g_1$. На функциональном языке гауссова прихода скорости проявляется в квадратичном действии

$$\mathcal{J}_{\text{vel}}[v] = \frac{1}{2} v D^{-1} v, \quad (7)$$

которое мы и добавим к полному теоретико-полевому функционалу.

3. РГ-АНАЛИЗ

Для процедуры ренормировки первым делом необходимо провести анализ возможных поверхностных расходимостей. В трансляционно-инвариантных системах достаточно рассмотреть лишь 1-неприводимые функции Грина [33], [35]. В отличие от статических моделей динамические модели [27], [36] включают в себя два независимых масштаба для любой величины Q : частотный d_Q^ω и импульсный d_Q^k . Соответствующие размерности находятся с помощью стандартных нормировочных условий

$$d_k^k = -d_x^k = 1, \quad d_\omega^k = d_t^k = 0, \quad d_k^\omega = d_x^\omega = 0, \quad d_\omega^\omega = -d_t^\omega = 1 \quad (8)$$

и требования того, что теоретико-полевой функционал действия должен быть безразмерным. Используя значения d_Q^ω и d_Q^k , можно определить полную каноническую размерность d_Q :

$$d_Q = d_Q^k + 2d_Q^\omega, \quad (9)$$

выражение для которой следует из того, что наиболее значимые инфракрасные (ИК) вклады (∂_t и ∇^2) в действие (1) должны иметь одинаковые масштабы. Полная размерность d_Q в динамических моделях играет ту же самую роль, что и обычная (импульсная) размерность в статических задачах. Канонические размерности всех величин представлены в табл. 1. Для сохранения стандартных обозначений мы

ТАБЛИЦА 2. Канонические размерности для 1-неприводимых функций Грина.

Γ_{1-ir}	$\Gamma_{\tilde{\psi}\psi}$	$\Gamma_{\tilde{\psi}\psi\mathbf{v}}$	$\Gamma_{\tilde{\psi}^2\psi}$	$\Gamma_{\tilde{\psi}\psi^2}$	$\Gamma_{\tilde{\psi}\psi\mathbf{v}^2}$
d_Γ	2	1	$\varepsilon/2$	$\varepsilon/2$	0
δ_Γ	2	1	0	0	0

ввели величину ε , задающуюся соотношением $d = 4 - \varepsilon$. Модель является логарифмической (все константы связи безразмерны) при $\varepsilon = y = \eta = 0$. В этом случае ультрафиолетовые (УФ) расходимости имеют вид полюсов по этим параметрам. Для РГ-анализа чрезвычайно важно, чтобы константы становились логарифмически одновременно. В противном случае можно было бы отбросить несущественные ИК-вклады, что привело бы к потере некоторых скейлинговых режимов.

Полная каноническая размерность произвольной 1-неприводимой функции Грина задается соотношением

$$d_\Gamma = d_\Gamma^k + 2d_\Gamma^\omega = d + 2 - \sum_{\varphi} N_\varphi d_\varphi, \quad \varphi \in \{\tilde{\psi}, \psi, \mathbf{v}\}. \quad (10)$$

Полная размерность d_Γ в логарифмической теории является формальным индексом УФ-расходимости $\delta_\Gamma = d_\Gamma|_{\varepsilon=y=\eta=0}$. Поверхностные расходимости, удаление которых требует введения контрчленов в действие, могут появляться только в таких функциях Γ , у которых δ_Γ неотрицательно [27].

Анализ размерностей можно дополнить следующими соображениями. В динамических моделях с дополнительными полями отклика [36] все 1-неприводимые диаграммы без полей $\tilde{\psi}$ равны нулю, что приводит к возможности рассматривать только функции, для которых $N_{\tilde{\psi}} \geq 1$. В дополнение к этому, как было показано в статье [24], наличие симметрии $\psi(t) \rightarrow -\tilde{\psi}(-t)$, $\tilde{\psi} \rightarrow -\psi(-t)$ в нашей задаче приводит к неравенству $N_\psi \geq 1$. Используя данные свойства и соотношение (10), можно получить множество всех УФ-расходящихся функций Грина, которое представлено в табл. 2.

В дальнейшем это позволяет нам использовать РГ-подход для вычисления универсальных величин в форме рядов по малому параметру. В отличие от стандартной теории φ^4 наша модель включает в себя три малых параметра разложения: ε , η , y . Также следует заметить, что реальными параметрами разложения в пертурбативном смысле являются заряды g_1 и $g_2 = \lambda^2$ (последний факт является следствием симметрии задачи). Параметры u_{10} и α соответствуют непертурбативным величинам и не имеют физических ограничений на свои значения, следовательно, можно рассматривать их предельные случаи, такие как $u_{10} \rightarrow 0$ или $u_{10} \rightarrow \infty$.

Перед тем как перейти к результатам РГ-анализа, обсудим, к чему приводят наличие сжимаемости и отсутствие галилеевой инвариантности [37]–[39] в нашей модели. Как показано в работе [24], для введения сжимаемого поля скорости в модель требуется замена

$$\partial_t \rightarrow \partial_t + (v_i \partial_i) + a_0(\partial_i v_i), \quad (11)$$

где a_0 – дополнительный положительный параметр, значение которого мы обсудим в дальнейшем. В задаче адвекции–диффузии [22] выбор $a_0 = 1$ соответствует

сохранению величины ψ (плотности), в то время как $a_0 = 0$ соответствует сохранению величины $\tilde{\psi}$. В общем случае ψ и $\tilde{\psi}$ не сохраняются, следовательно, эти поля являются флуктуирующими величинами и порождают оба контрчлена $\tilde{\psi}(v_i \partial_i)\psi$ и $\tilde{\psi} \partial_i(v_i \psi)$. На языке фейнмановских диаграмм выражение для 1-неприводимой функции Грина $\tilde{\psi}\psi\mathbf{v}$ имеет вид

$$\Gamma_{\tilde{\psi}\psi\mathbf{v}} = -ip_j Z_4 - iaq_j Z_5 + \text{[diagram 1]} + \text{[diagram 2]}, \quad (12)$$

где p и q – импульсы полей ψ и $\mathbf{v}$ соответственно. Выражение для расходящейся части первого графа имеет вид

$$\frac{i\lambda_0^2}{4d(2\pi)^d\varepsilon} [2p_j - q_j]. \quad (13)$$

Рассмотрим эту функцию как подграф в некотором графе более высокого порядка для несжимаемого случая. В этом случае пропагаторы скорости пропорциональны поперечному проектору и при свертке с (13) все вклады со сжимаемостью должны исчезнуть. Однако в нашей модели пропагатор скорости (4) содержит продольную составляющую. Более того, в отличие от модели Крейчнана, второй граф в (12) также расходится (из-за конечного времени корреляции данный граф не содержит замкнутого цикла пропагаторов) [27], [36]). Симметрии играют фундаментальную роль в физике. Для турбулентности галилеева инвариантность [27] имеет большое значение. Она описывает инвариантность законов относительно преобразований $\varphi \rightarrow \varphi_v$, заданных следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \varphi_v(x) &= \varphi(x_v) - v(t), & \varphi'_v(x) &= \varphi'(x_v), & x &\equiv (t, \mathbf{x}), \\ x_v &\equiv (t, \mathbf{x} + \mathbf{u}(t)), & \mathbf{u}(t) &= \int_{-\infty}^t dt' \mathbf{v}(t'). \end{aligned} \quad (14)$$

Из табл. 2 следует, что возможные поверхностные расходимости могут появляться в функции $\Gamma_{\tilde{\psi}\psi\mathbf{v}^2}$. Вышеупомянутая галилеева инвариантность запрещает наличие таких членов. Однако в нашей модели данный член следует учитывать и рассматривать как новый параметр взаимодействия. Однопетлевое выражение для данной функции имеет вид

$$\Gamma_{\tilde{\psi}\psi\mathbf{v}^2} = \frac{u_2}{D} \delta_{ij} Z_8 + \text{[diagram 1]} + \text{[diagram 2]} + \frac{1}{2} \text{[diagram 3]}. \quad (15)$$

Прямые вычисления показывают, что первый и третий графы сокращают друг друга, второй же дает ненулевой вклад. Это происходит из-за наличия конечного времени корреляции, которое не позволяет появляться замкнутым циклам по времени. Подводя итог нашим рассуждениям, можно сказать, что к полному теоретико-полевому действию, заданному суммой (1) и (7), следует добавить взаимодействие, описывающее перенос и заданное следующим выражением:

$$\mathcal{J}_{\text{adv}}[\varphi] = -\frac{u_{20}}{2D_0} \tilde{\psi}\psi v^2 + \tilde{\psi}(v_i \partial_i)\psi + a_0 \tilde{\psi}(\partial_i v_i)\psi. \quad (16)$$

Полному теоретико-полевому действию $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{\text{per}} + \mathcal{J}_{\text{vel}} + \mathcal{J}_{\text{adv}}$ соответствует фейнмановская диаграммная техника, которую мы и будем использовать в нашем РГ-подходе.

Заметим, что добавление члена $\tilde{\psi}\psi v^2$ в функционал действия приводит к появлению дополнительных пяти фейнмановских диаграмм в выражении для 1-неприводимой функции Грина (15):

(17)

Мультипликативная ренормировка описывается следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} D_0 &= DZ_D, & \tau_0 &= \tau Z_\tau + \tau_c, & a_0 &= aZ_a, & g_{20} &= g_2 \mu^\varepsilon Z_{g_2}, \\ g_{10} &= g_1 \mu^y Z_{g_1}, & u_{10} &= u_1 \mu^n Z_{u_1}, & \lambda_0 &= \lambda \mu^{\varepsilon/2} Z_\lambda, & u_{20} &= u_2 Z_{u_2}, \\ \tilde{\psi} &= Z_{\tilde{\psi}} \tilde{\psi}_R, & \psi &= Z_\psi \psi_R, & \mathbf{v} &= Z_v \mathbf{v}_R, \end{aligned} \quad (18)$$

где μ – добавочный произвольный параметр в схеме минимальных вычитаний [33]. Заметим, что член τ_c соответствует непертурбативному эффекту [28], который невозможно описать с помощью размерной регуляризации. Физически он соответствует флуктуационному сдвигу критической вероятности τ_0 .

4. УСТОЙЧИВЫЕ ИК-РЕЖИМЫ

Хорошо известно, что скейлинговые режимы перенормируемой теоретико-полевой модели определяются асимптотикой дифференциальных РГ-уравнений вблизи ИК-притягивающих неподвижных точек g^* . Здесь и далее звездочка соответствует координатам неподвижной точки бегущей константы связи. Данные координаты определяются нулями бета-функций, которые описывают движение РГ-потокков [27], [33], [35]:

$$\beta_{g_1}(g^*) = \beta_{g_2}(g^*) = \beta_{u_1}(g^*) = \beta_{u_2}(g^*) = \beta_a(g^*) = 0. \quad (19)$$

Собственные значения матрицы $\Omega = \{\Omega_{ij}\}$ первых производных определяют ИК-стабильность точки (возможность существования данного режима в макроскопических масштабах). Матрица Ω определена как

$$\Omega_{ij} = \frac{\partial \beta_i}{\partial g_j}, \quad i, j \in \{g_1, g_2, u_1, u_2, a\}. \quad (20)$$

Точные выражения для бета-функций следуют из формул (18) и определений

$$\beta_g = \mu \partial_\mu g|_0.$$

Производя данную подстановку, получаем, что

$$\begin{aligned} \beta_{g_1} &= g_1(-y + 2\gamma_D - 2\gamma_v), & \beta_{g_2} &= g_2(-\varepsilon - \gamma_{g_2}), & \beta_a &= -a\gamma_a, \\ \beta_{u_1} &= u_1(-\eta + \gamma_D), & \beta_{u_2} &= -u_2\gamma_{u_2}, \end{aligned} \quad (21)$$

где $\gamma_x \equiv \mu \partial_\mu \ln Z_x|_0$ – аномальные размерности [27]. В однопетлевом приближении им соответствуют следующие выражения:

$$\begin{aligned}\gamma_{g_1} &= -\frac{g_1 u_1 (1 - 2u_2)}{2(1 + u_1)^2} - \frac{g_2}{4}, & \gamma_D &= \frac{g_1}{4(1 + u_1)} \left[\frac{u_1 - 1}{u_1 + 1} + \frac{4a(1 - a)}{(1 + u_1)^2} \right] + \frac{g_2}{8}, \\ \gamma_a &= (1 - 2a) \left[\frac{g_1(1 - a)}{2(1 + u_1)^3} + \frac{g_1 u_2 (u_1 - 1)}{4a(1 + u_1)^2} + \frac{g_2}{8a} \right], \\ \gamma_{u_2} &= \frac{g_1(1 - 2u_2)}{4(1 + u_1)} \left[\frac{u_1 - 1}{u_1 + 1} + \frac{2a(1 - a)}{u_2(1 + u_1)^2} \right] - \frac{g_2}{8}, \\ \gamma_{g_2} &= \frac{g_1}{1 + u_1} \left[\frac{(1 - 2a)^2}{2} + \frac{1 - 3a(1 - a)}{1 + u_1} + \frac{2a(1 - a)u_1}{(1 + u_1)^2} \right] - \frac{3g_2}{2}, \\ \gamma_\tau &= -\frac{g_1}{4(1 + u_1)^2} \left[u_1 - 1 + \frac{4a(1 - a)}{1 + u_1} \right] - \frac{3g_2}{8}.\end{aligned}\tag{22}$$

Поля ψ , $\tilde{\psi}$ и $\mathbf{v}$ тоже ренормируются и, следовательно, обладают ненулевыми аномальными размерностями

$$\begin{aligned}\gamma_\psi &= \frac{g_1}{2(1 + u_1)^2} [-a(1 - a) + (1 + u_1)(2a - 1)] - \frac{g_2}{8}, \\ \gamma_{\tilde{\psi}} &= \frac{g_1}{2(1 + u_1)^2} [-a(1 - a) + (1 + u_1)(1 - 2a)] - \frac{g_2}{8}, \\ \gamma_{\mathbf{v}} &= \frac{g_1}{4(1 + u_1)^2} \left[\frac{4a(1 - a)}{1 + u_1} - 1 \right] + \frac{g_1 u_1 u_2}{2(1 + u_1)^2}.\end{aligned}\tag{23}$$

Для упрощения дальнейшего анализа удобно ввести новые заряды g'_1 , u'_1 и a' :

$$\frac{g_1}{1 + u_1} = g'_1 \rightarrow g_1, \quad \frac{1}{1 + u_1} = u'_1 \rightarrow u_1, \quad (1 - 2a)^2 = a' \rightarrow a.\tag{24}$$

В новых переменных модель быстро изменяющегося поля скорости соответствует выбору $u_1 = 0$, а модель замороженного поля скорости соответствует $u_1 = 1$. Окончательные выражения для бета-функций имеют вид

$$\begin{aligned}\beta_{g_1} &= \frac{g_1}{8} \left\{ -8y + 8\eta(1 - u_1) + 2g_1(1 - u_1)[1 + u_1(2 + u_1(a - 1)) - 4u_2] + \right. \\ &\quad \left. + g_2(1 + u_1) \right\}, \\ \beta_{g_2} &= \frac{g_2}{4} \left\{ -4\varepsilon + g_1 u_1(2u_1 - 3) - a g_1(2 + u_1 + 2u_1^2) + 6g_2 \right\}, \\ \beta_{u_1} &= \frac{u_1(1 - u_1)}{8} \left\{ 8\eta + 2g_1[u_1(2 + u_1(-1 + a)) - 1] - g_2 \right\}, \\ \beta_{u_2} &= \frac{1}{8} \left\{ g_1(1 - 2u_2)[u_1^2(a - 1) - 2u_2 + 4u_1 u_2] + g_2 u_2 \right\}, \\ \beta_a &= \frac{a}{2} \left\{ g_1[u_1(u_1 - a u_1 - 4u_2) + 2u_2] + g_2 \right\}.\end{aligned}\tag{25}$$

Рис. 1. Области устойчивости неподвижных точек в плоскости (ε, y) для модели быстро изменяющегося поля скорости.

4.1. Модель быстро изменяющегося поля скорости. Модель быстро изменяющегося поля скорости [22] характеризуется выбором $u_1^* = 0$, что соответствует тому, что пропагатор скорости (6) обладает короткими корреляциями по времени. В этом случае мы имеем семь неподвижных точек (fixed points, FP). И только четыре из них (FP_1^I , FP_2^I , FP_5^I и FP_6^I) оказываются ИК-притягивающими. В табл. 3, 4 приведены координаты всех неподвижных точек. Нетрудно заметить, что они зависят только от разности $y - \eta$, что совпадает с предыдущими результатами [17], [22]. В табл. 3 НО (неоднозначность) означает, что соответствующее значение координаты заряда нельзя однозначно определить. В этом случае соответствующая неподвижная точка не является точкой в пространстве зарядов, а соответствует целой линии неподвижных точек. Из последнего в (25) выражения для β_a следует существование неподвижных точек, для которых $a^* = 0$. Данное соотношение для них является точным и выполнено во всех порядках теории возмущений.

Таблица 3. Координаты неподвижных точек для модели быстро изменяющегося поля скорости.

FP^I	g_1	g_2	u_2	a
FP_1^I	0	0	НО	НО
FP_2^I	0	$\frac{2\varepsilon}{3}$	0	0
FP_3^I	$4(y - \eta)$	0	0	НО
FP_4^I	$4(\eta - y)$	0	$\frac{1}{2}$	0
FP_5^I	$\frac{12(y - \eta) - \varepsilon}{3}$	$\frac{2\varepsilon}{3}$	0	0
FP_6^I	$\varepsilon + 4(\eta - y)$	$\frac{2\varepsilon}{3}$	$\frac{\varepsilon + 6(\eta - y)}{3[\varepsilon + 4(\eta - y)]}$	0
FP_7^I	$\eta - y$	$2(y - \eta)$	1	$\frac{-6 + 2\varepsilon}{y - \eta}$

На рис. 1 схематически изображены области устойчивости неподвижных точек. Границы устойчивости для точки FP_6^I можно найти только численно, поэтому мы их не включили в наш рисунок.

Рис. 2. Области устойчивости неподвижных точек для процесса протекания с тепловыми флуктуациями в плоскости (ε, y) . Обозначения неподвижных точек совпадают со случаем быстро изменяющегося поля скорости в таблице 3.

Точка FP_1^I соответствует свободной (гауссовой) теории, в которой никакое взаимодействие не вносит вклад, и здесь применима обычная теория возмущений. Однако существование такой точки в РГ-подходе является необходимым [27]. В точке FP_2^I коррелятор скорости не вносит вклад, и эта точка соответствует универсальному классу стандартного процесса протекания [28]. Остальные две неподвижные точки соответствуют новым нетривиальным режимам, для которых как флуктуации скорости, так и взаимодействие процесса протекания имеют значение.

На рис. 1 видно, что существование режима FP_5^I в решающей степени зависит от ненулевого значения параметра η .

4.2. Тепловые флуктуации. Для модели быстро изменяющегося поля скорости рассмотрим специальный случай, соответствующий тепловым флуктуациям [40]. Для него характерен квадратичный закон дисперсии, а также мы накладываем на наш коррелятор скорости (4) дополнительное условие

$$\eta = 6 + y - \varepsilon. \quad (26)$$

Области устойчивости неподвижных точек в плоскости (ε, y) изображены на рис. 2.

При физическом выборе параметров $d = 3$ ($\varepsilon = 1$) и $d = 2$ ($\varepsilon = 2$) возможен только режим, соответствующий “чистому” процессу перколяции. Нетривиальные режимы FP_5^I и FP_6^I могут существовать лишь в нефизической области, для которой характерен выбор большого значения параметра ε . Численные результаты находятся в соответствии с предыдущими работами [23], [24]. Как было показано в статье [41], тепловые флуктуации могут изменить картину устойчивости неподвижных точек, но для процесса протекания этого не происходит.

Рис. 3. Области устойчивости в плоскости (ε, y) для модели с замороженным полем скорости для случаев $\eta = 0$ (а) и $\eta = 4/3$ (б).

4.3. “Замороженное” поле скорости. Модель замороженного поля скорости получается из нашей общей модели при выборе $u_1 = 1$. В задаче переноса [22] этот случай соответствует блужданиям в среде с дальним радиусом корреляции [42]. В рассматриваемой модели есть пять неподвижных точек, координаты которых представлены в табл. 4. Только три точки: FP_1^{II} , FP_2^{II} и FP_4^{II} , оказываются ИК-притягивающими. Точка FP_1^{II} соответствует свободной (гауссовой) теории. Ее область устойчивости определяется условиями

$$y < 0, \quad \varepsilon < 0, \quad \eta < 0. \quad (27)$$

Для точки FP_2^{II} вклад поля скорости отсутствует, что соответствует чистому процессу протекания.

Таблица 4. Координаты неподвижных точек в модели с замороженным полем скорости.

FP^{II}	g_1	g_2	u_2	a'
FP_1^{II}	0	0	НО	НО
FP_2^{II}	0	$\frac{2\varepsilon}{3}$	0	0
FP_3^{II}	$\varepsilon - y$	$4y$	1	$\frac{5y - \varepsilon}{\varepsilon - y}$
FP_4^{II}	$4(6y - \varepsilon)$	$4y$	$\frac{4\varepsilon - 25y + \sqrt{-8\varepsilon y + 49y^2}}{8(\varepsilon - 6y)}$	0
FP_5^{II}	$4(6y - \varepsilon)$	$4y$	$\frac{4\varepsilon - 25y - \sqrt{-8\varepsilon y + 49y^2}}{8(\varepsilon - 6y)}$	0

Данная точка устойчива при

$$\varepsilon > 6y, \quad \varepsilon > 0, \quad \varepsilon > 12\eta. \quad (28)$$

Точка FP_4^{II} соответствует нетривиальному режиму, в котором как поле скорости, так и взаимодействие чистой модели дают вклад. Области устойчивости точек FP_1^{II}

и FR_2^{II} изображены на рис. 3. Из-за того что для этих точек фактически можно пренебречь полем скорости, границы их областей устойчивости не зависят от значения параметра α . Область устойчивости точки FR_4^{II} можно найти только численно, и она, конечно, зависит от α . На рис. 3 видно, что корреляционный параметр η в решающей степени влияет на границу между областями устойчивости для FR_2^{II} и FR_4^{II} .

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы изучили направленный процесс протекания в присутствии безвихревого поля скорости, коррелятор которого обладает дальностью действия. Подробно обсуждались способ построения и процедура мультипликативной ренормировки для данной модели.

Было обнаружено, что в зависимости от значений размерности пространства $d = 4 - \varepsilon$, показателей y и η наша модель демонстрирует различные типы критического поведения, связанные с различными классами универсальности. Некоторые из них уже хорошо известны: гауссова (свободная) неподвижная точка, процесс протекания без перемешивания и процесс перемешивания пассивного скалярного поля. Оставшиеся неподвижные точки РГ-уравнения соответствуют новым классам универсальности, для которых актуальны как взаимодействие процесса протекания, так и перемешивание.

Было показано [43], что аномальное критическое поведение разрушается, когда значения параметров α и y достаточно велики. Следовательно, в нашей модели допустимы только относительно малые значения ($\alpha \ll 1$). Эта ситуация соответствует малым флуктуациям плотности ρ . Другими словами, предполагается, что скорость звука в жидкости значительно больше типичной скорости в системе (число Маха $\text{Ma} \ll 1$).

Тем не менее мы считаем, что качественная картина при больших значениях сжимаемости остается прежней. В качестве дальнейших исследований можно рассматривать задачу с дополнительными эффектами, такими как обратная связь с динамикой перемешивающего поля, анизотропия или нарушение “зеркальной” симметрии.

Список литературы

- [1] H. Hinrichsen, “Non-equilibrium phase transitions”, *Phys. A*, **369**:1 (2006), 1–28.
- [2] D. Stauffer, A. Aharony, *Introduction to Percolation Theory*, Taylor and Francis, London, 1992.
- [3] M. Henkel, H. Hinrichsen, S. Lübeck, *Non-Equilibrium Phase Transitions*, v. 1: *Absorbing Phase Transitions*, Springer, Dordrecht, 2008.
- [4] F. Schlögl, “Chemical reaction models for non-equilibrium phase transitions”, *Z. Phys.*, **253**:2 (1972), 147–161.
- [5] P. Grassberger, “On phase transitions in Schlögl’s second model”, *Z. Phys. B*, **47**:4 (1982), 365–372.
- [6] В. Н. Грибов, “Реджеонная диаграммная техника”, *ЖЭТФ*, **53**:2 (1968), 654–672.
- [7] J. L. Cardy, R. L. Sugar, “Directed percolation and Reggeon field theory”, *J. Phys. A*, **13**:12 (1980), L423–L427.
- [8] H. Hinrichsen, “Non-equilibrium phase transitions with long-range interactions”, *J. Stat. Mech.*, **2007**:7 (2007), P07006, 35 pp.

- [9] H. K. Janssen, “On the nonequilibrium phase transition in reaction-diffusion systems with an absorbing stationary state”, *Z. Phys. B*, **42**:2 (1981), 151–154.
- [10] H. K. Janssen, “Renormalized field theory of the Gribov process with quenched disorder”, *Phys. Rev. E*, **55**:5 (1997), 6253–6256.
- [11] P. Rupp, R. Richter, I. Rehberg, “Critical exponents of directed percolation measured in spatiotemporal intermittency”, *Phys. Rev. E*, **67**:3 (2003), 036209, 7 pp.
- [12] K. A. Takeuchi, M. Kuroda, H. Chaté, M. Sano, “Directed percolation criticality in turbulent liquid crystals”, *Phys. Rev. Lett.*, **99**:23 (2007), 234503, 4 pp.
- [13] G. Falkovich, K. Gawędzki, M. Vergassola, *Rev. Modern Phys.*, **73**:4 (2001), 913–975.
- [14] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Курс теоретической физики*, т. 6: *Гидродинамика*, Наука, М., 1986.
- [15] U. Frisch, *Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [16] А. С. Монин, А. М. Яглом, *Статистическая гидромеханика. Ч. 2. Механика турбулентности*, Наука, М., 1967.
- [17] N. V. Antonov, “Anomalous scaling regimes of a passive scalar advected by the synthetic velocity field”, *Phys. Rev. E*, **60**:6 (1999), 6691–6707.
- [18] R. Benzi, D. R. Nelson, “Fisher equation with turbulence in one dimension”, *Phys. D*, **238**:19 (2009), 2003–2015.
- [19] S. Pigolotti, R. Benzi, M. H. Jensen, D. R. Nelson, “Population genetics in compressible flows”, *Phys. Rev. Lett.*, **108**:12 (2012), 128102, 5 pp.
- [20] R. Volk, C. Mauger, M. Bourgoïn, C. Cottin-Bizonne, C. Ybert, F. Raynal, “Chaotic mixing in effective compressible flows”, *Phys. Rev. E*, **90**:1 (2014), 013027, 5 pp.
- [21] M. De Pietro, M. A. T. van Hinsberg, L. Biferale, H. J. H. Clercx, P. Perlekar, F. Toschi, “Clustering of vertically constrained passive particles in homogeneous isotropic turbulence”, *Phys. Rev. E*, **91**:5 (2015), 053002, 7 pp.
- [22] N. V. Antonov, “Anomalous scaling of a passive scalar advected by the synthetic compressible flow”, *Phys. D*, **144**:3–4 (2000), 370–386.
- [23] N. V. Antonov, V. I. Iglovikov, A. S. Kapustin, “Effects of turbulent mixing on the nonequilibrium critical behaviour”, *J. Phys. A*, **42**:13 (2008), 135001, 19 pp.
- [24] N. V. Antonov, A. S. Kapustin, “Effects of turbulent mixing on critical behaviour in the presence of compressibility: renormalization group analysis of two models”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **43**:40 (2010), 405001, 22 pp.
- [25] Н. В. Антонов, А. С. Капустин, А. В. Малышев, “Влияние турбулентного переноса на критическое поведение”, *ТМФ*, **169**:1 (2011), 124–136.
- [26] М. Данчо, М. Гнатич, Т. Лучивянский, Л. Мижишин, “Критическое поведение процесса перколяции под влиянием случайного поля скоростей: однопетлевое приближение”, *ТМФ*, **176**:1 (2013), 79–88.
- [27] А. Н. Васильев, *Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике*, Изд-во ПИЯФ, СПб., 1998.
- [28] H.-K. Janssen, U. C. Täuber, “The field theory approach to percolation processes”, *Ann. Phys.*, **315**:1 (2004), 147–192, arXiv:cond-mat/0409670.
- [29] M. Doi, “Second quantization representation for classical many-particle system”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **9**:9 (1976), 1465–1478; “Stochastic theory of diffusion-controlled reaction”, 1976, 1479–1496.
- [30] H. K. Janssen, “On a Lagrangean for classical field dynamics and renormalization group calculations of dynamical critical properties”, *Z. Phys. B*, **23**:4 (1976), 377–380.
- [31] C. De Dominicis, “Techniques de renormalisation de la théorie des champs et dynamique des phénomènes critiques”, *J. Phys. Colloques France*, **37**:C1 (1976), C1-247–C1-254.
- [32] H. K. Janssen, *Dynamical Critical Phenomena and Related Topics*, v. 104 (University of Geneva, Geneva, April 2–6, 1979), Lecture Notes in Physics, Springer, Berlin, 1979.

- [33] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2002.
- [34] L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, “Renormalization group and anomalous scaling in a simple model of passive scalar advection in compressible flow”, *Phys. Rev. E*, **58**:6 (1998), 7381–7396.
- [35] D. J. Amit, V. Martín-Mayor, *Field Theory, the Renormalization Group, and Critical Phenomena*, World Sci., Singapore, 2005.
- [36] U. C. Täuber, *Critical Dynamics: A Field Theory Approach to Equilibrium and Non-Equilibrium Scaling Behavior*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2014.
- [37] Л. Ц. Аджемян, Н. В. Антонов, Т. Л. Ким, “Составные операторы, операторное разложение и галилеева инвариантность в теории развитой турбулентности. Инфракрасные поправки к колмогоровскому скейлингу”, *ТМФ*, **100**:3 (1994), 382–401.
- [38] Н. В. Антонов, С. В. Борисенок, В. И. Гирина, “Ренормализационная группа в теории развитой турбулентности. Составные операторы канонической размерности восемь”, *ТМФ*, **106**:1 (1996), 92–101.
- [39] Н. В. Антонов, А. Н. Васильев, “Ренормализационная группа в теории развитой турбулентности. Проблема обоснования гипотез Колмогорова для составных операторов”, *ТМФ*, **110**:1 (1997), 122–136.
- [40] D. Forster, D. R. Nelson, M. J. Stephen, “Large-distance and long-time properties of a randomly stirred fluid”, *Phys. Rev. A*, **16**:2 (1977), 732–749.
- [41] M. Hnatich, J. Honkonen, “Velocity-fluctuation-induced anomalous kinetics of the $A + \vec{A} \rightarrow \emptyset$ reaction”, *Phys. Rev. E*, **61**:4 (2000), 3904–3911.
- [42] J. Honkonen, E. Karjalainen, “Diffusion in a random medium with long-range correlations”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **21**:22 (1988), 4217–4234.
- [43] K. Gawędzki, M. Vergassola, “Phase transition in the passive scalar advection”, *Phys. D*, **138**:1–2 (1999), 63–90.