Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Д. Ляховский, Численные построения с привлечением полиномов Чебышёва, *ТМФ*, 2017, том 190, номер 2, 354–365

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9116>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 13:26:33

© 2017 г.

В. Д. Ляховский*

ЧИСЛЕННЫЕ ПОСТРОЕНИЯ С ПРИВЛЕЧЕНИЕМ ПОЛИНОМОВ ЧЕБЫШЁВА

Предложен новый алгоритм разложения характеров тензорных произведений конечномерных неприводимых представлений простых алгебр Ли. Этот алгоритм приводит к правильным результатам для алгебр B_3 , C_3 и D_3 . Используется прямое соответствие между антиинвариантными функциями Вейля и полиномами Чебышёва второго рода от многих переменных. Построены треугольные тригонометрические многочлены для алгебры D_3 .

Ключевые слова: представления алгебры, фундаментальные модули, трехмерные алгебры Ли, полиномы Чебышёва.

DOI: 10.4213/tmf9116

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе мы рассматриваем полиномы Чебышёва от многих переменных для неприводимого представления простых трехмерных алгебр B_3 , C_3 и D_3 и получаем положительные целые коэффициенты, которые образуют треугольную матрицу с единицами на главной диагонали. Существует область, в которой множество многочленов типа полиномов Чебышёва от многих переменных определяется как множество должным образом определенных формальных характеров.

В 1974 г. Курвиндер в работе [1] расширил идею преобразования характеров A_1 -модулей в набор ортогональных полиномов Чебышёва, построив многочлены $T_{A_2}^\mu$ и $U_{A_2}^\mu$. Их область определения ограничена так называемой гипоциклоидой Штайнера. Связь между полиномами Чебышёва T -типа от многих переменных и различными видами орбитальных функций исследована в работе [2]. Полиномы Чебышёва использовались в работе [3], где было выведено рекуррентное соотношение между ядрами звездочного произведения для разных спинов и получен явный вид ядер звездочного произведения в спиновой томографии (связанный с неприводимыми представлениями группы $SU(2)$).

В конце XX столетия Лэнг в работе [4] предложил использовать полиномы Чебышёва для приближения функций и сжатия табличной базы аэродинамических данных. В частности, Лэнг протестировал свой метод на примере истребителя F16 (см. рис. 1). В 2007 г. Ченг с соавторами получил патент [5] на изобретение, в котором

Работа поддержана РФФИ (грант № 15-01-03148).

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: lyakvladimir@yandex.ru

Рис. 1. Крыло Лэнга.

представлен удобный способ сжатия потоков последовательных данных. Начальные входные данные приближаются полиномами Чебышёва, с помощью чего достигается очень высокая степень сжатия потоков последовательных данных с минимальной потерей научной информации.

Мы предлагаем использовать полиномы Чебышёва для трехмерных алгебр, что может быть полезным при описании крыла самолета сложной формы. В статье [6] было получено простое выражение для меры, реализующей скалярное произведение в пространстве $\mathcal{L}_{\mathfrak{g}}^2(X)$, относительно которого набор $\{U_{\mathfrak{g}}^{\mu}(X)\}$ является ортонормированным.

Мы будем использовать следующие обозначения:

$\mathfrak{g}$ – полупростая алгебра Ли;

r – ранг алгебры $\mathfrak{g}$;

$W_{\mathfrak{g}}$ – группа Вейля с функцией $\epsilon(w) := \det(w) = (-1)^{\text{length}(w)}$, $w \in W_{\mathfrak{g}}$;

$C^{(0)}$ – фундаментальная камера Вейля, $\overline{C^{(0)}}$ – ее замыкание;

α_i – i -й простой корень алгебры $\mathfrak{g}$, $i = 1, \dots, r$;

ω_j – j -й фундаментальный вес алгебры $\mathfrak{g}$, $j = 1, \dots, r$;

$\rho_{\mathfrak{g}}$ – вектор Вейля;

$L_{\mathfrak{g}}^{\mu}$ – интегрируемый $\mathfrak{g}$ -модуль со старшим весом μ ;

$L_{\mathfrak{g}}^{\omega_j}$ – j -й фундаментальный модуль;

$\mathcal{LP}_{\mathfrak{g}}$ – пространство весов;

$\Psi_{\mathfrak{g}}^{(\mu)} := \sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w \circ (\mu + \rho) - \rho}$ – сингулярный элемент $\mathfrak{g}$ -модуля L^{μ} ;

$\Phi_{\mathfrak{g}}^{(\mu)} := \sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w \circ (\mu + \rho)}$ – несдвинутый сингулярный элемент.

2. ПОЛИНОМЫ ЧЕБЫШЁВА ОТ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Мы представляем полиномы Чебышёва от многих переменных в r -мерном пространстве $\mathbb{R}^r$ переменной x . Рассмотрим характеры $\text{ch}(L_{\mathfrak{g}}^{\mu})$ полиномов второго рода $U_{\mathfrak{g}}^{\mu}$:

$$U_{\mathfrak{g}}^{\mu}(x) := \text{ch}(L^{\mu; a(x)}) = \sum_{\nu \in P} c_{\nu}^{(\mu)} \exp(\nu, a(x)).$$

Здесь $a(x) := 2\pi i \sum^r \alpha^j x_j$ – спиновая мультиплетность тора, $c_\nu^{(\mu)}$ – кратность весов модуля L^μ , $\nu = \sum^r \nu^j \omega_j$. Поскольку полиномы Чебышёва вводятся как специализированные характеры для полного набора неприводимых конечномерных модулей $L_{\mathfrak{g}}$, система $U_{\mathfrak{g}}^\mu$ образует базис в $\mathcal{L}^2(\mathcal{F}_{\mathfrak{g}})$, где $F_{\mathfrak{g}}$ – фундаментальная область. Фундаментальные модули L^{ω_j} ($j = 1, \dots, r$),

$$\{X^j\} := \{U_{\mathfrak{g}}^{\omega_j}(x)\}_{j=1, \dots, r},$$

дают набор независимых переменных $X \longleftrightarrow x$. Обозначим через $|F_{\mathfrak{g}}(x)|$ и $|W_{\mathfrak{g}}|$ объемы фундаментальной области и группы $W_{\mathfrak{g}}$,

$$\frac{1}{|F_{\mathfrak{g}}(x)| |W_{\mathfrak{g}}|} \int_{F_{\mathfrak{g}}(x)} \Phi^{\mu; \alpha(x)} \overline{\Phi^{\lambda; \alpha(x)}} dx^1 \dots dx^r = \delta^{\mu\lambda}.$$

Сделаем переход $X \longleftrightarrow x$:

$$\frac{\Phi^{0; a(x(X))} \overline{\Phi^{0; a(x(X))}}}{|F_{\mathfrak{g}}(x(X))| |W_{\mathfrak{g}}| |\partial X_i / \partial x_j|} dX^1 \dots dX^n = \gamma_{\mathfrak{g}}(X) dX^1 \dots dX^r.$$

Далее мы покажем, что это выражение можно упростить, а весовую функцию $\gamma(X)$ можно легко построить для любой простой алгебры Ли.

В работе [6] показано, что для любой полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ существует единственная функция $\gamma_{\mathfrak{g}}$, которую можно легко выразить через сингулярный элемент $\Phi_{\mathfrak{g}}^{0; a(x(X))}$:

$$\gamma_{\mathfrak{g}}(X) = \frac{\overline{\Phi_{\mathfrak{g}}^{0; a(x(X))}}}{(2\pi i)^r |F_{\mathfrak{g}}(x(X))| |W_{\mathfrak{g}}|}.$$

Она задает нормированное скалярное произведение функций в $\mathcal{L}^2(\mathcal{F}_{\mathfrak{g}})$. Поскольку характеры образуют набор ортонормированных функций на соответствующем торе, набор полиномов Чебышёва $U^\nu(X)$ от многих переменных является ортонормированным в пространстве $\mathcal{L}^2(\mathcal{F}, \gamma(X))$. Это индуцирует упорядочение на множестве моментов $\{X_{I(p)}\}$, описываемых мультииндексом $I(p)$, а также на множестве полиномов Чебышёва, где каждый $U^\nu(X)$ имеет свой индекс $H(p)$ с компонентами $\{p_j\}$, которые фиксируются разложением $\sum_j^r p_j \omega_j = \nu$.

Множитель $\overline{\Phi_{\mathfrak{g}}^{0; a(x(X))}}$ является сингулярным элементом, и поэтому его нельзя представить в виде линейной комбинации характеров. Напротив, квадрат этого множителя $(\Phi_{\mathfrak{g}}^{0; a(x(X))})^2$ является W -инвариантом, его можно разложить в линейную комбинацию характеров и выразить через $U^\nu(X)$. Многочлены строятся в явном виде с помощью соответствующих рекуррентных соотношений или набора разложенных моментов $(X_1)^{p_1} \dots (X_r)^{p_r}$. Достаточно записать разложение для

$$(\Phi_{\mathfrak{g}}^{0; \alpha(X)})^2 = b_{I(p)} X^{I(p)} \quad (1)$$

и ввести множители $\Phi^{0;\alpha(X)} = \sqrt{b_{I(p)} X^{I(p)}}$, $(-1)^{\max \text{length}(W)} \mathbf{q}_q$ в область, состоящую из $\mathbf{q}_q$ -альковов. Область $\mathcal{F}$ можно выразить в явном виде путем преобразования соответствующего алькова. Второй множитель – это число альковов в области $F(x)$. Третий множитель зависит от свойств сингулярных элементов относительно сопряжения. В результате имеем

$$\gamma_{\mathfrak{g}}(X) = \sqrt{b_{I(p)} X^{I(p)}} \frac{\mathbf{q}_q (-1)^{\max \text{length}(W)}}{(2\pi i)^r |F_{\mathfrak{g}}| |W_{\mathfrak{g}}|}. \quad (2)$$

3. ПОЛИНОМЫ

Рассмотрим тензорное произведение $(L_{\mathfrak{g}}^{\omega_1})^{\otimes p_1} \otimes \dots \otimes (L_{\mathfrak{g}}^{\omega_r})^{\otimes p_r}$, где $\{p_j\} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^r$, и его специализацию $(X_1)^{p_1} \dots (X_r)^{p_r}$. Собирая члены с фиксированным доминантным весом μ , получаем положительные целые коэффициенты $m_{\nu}^{I(p)}$. Сопоставим характер произведения $(L_{\mathfrak{g}}^{\omega_1})^{\otimes p_1} \otimes \dots \otimes (L_{\mathfrak{g}}^{\omega_r})^{\otimes p_r}$ и $I(p) = \sum_{i=1}^r p_i \omega_i$ [7], [8]. Мы должны фиксировать область определения функций в переменных $\{X_j\}$, чтобы найти в этой области соответствующую меру μ и, таким образом, определить

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 (L_{\mathfrak{g}}^{\omega_1})^{\otimes p_1} \dots (L_{\mathfrak{g}}^{\omega_r})^{\otimes p_r} \Phi^{(0)} e^{-\rho} \Big|_{\overline{C(0)}} e^{\sum_j^r l_j \omega_j} dx^1 \dots dx^r = m^{(\sum_i^r p_i \omega_i)(\sum_j^r l_j \omega_j)},$$

где l_j – отрицательные числа и $\omega_j(x) := 2\pi i x^j$. Нормированное инвариантное скалярное произведение имеет вид $e^{\sum_i^r l_i \omega_i}$, и после интегрирования мы получим конкретное число $m^{(\sum_i^r p_i \omega_i)(\sum_j^r l_j \omega_j)}$.

Выпишем фундаментальный вес для $\mathfrak{g}$:

$$(L^{\mu}(x))^2, \quad \mu = (j_1 = i_1 - 1, \dots, j_r = i_r - 1).$$

ЛЕММА 1. *Рассмотрим и сравним квадрат длины,*

$$((L^{\omega_1})^{\otimes p_1} \dots (L^{\omega_r})^{\otimes p_r})^2 \longleftrightarrow U^{(\sum_j^r l_j \omega_j)}(x). \quad (3)$$

Коэффициенты p_i и l_j образуют треугольную матрицу $M_{\mathfrak{g}}$ с единицами на главной диагонали.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя полученные выше веса, мы записываем в явном виде важное разложение, используя тензорное произведение и его специализацию $((X_1)^{p_1} \dots (X_r)^{p_r})^2$. Это индуцирует упорядочение набора моментов $\{U^{I(l)}\}$ в строке полиномов Чебышёва. В терминах сингулярных элементов $\Phi^{(\omega_j)}$ получим произведение

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 (L^{\omega_1})^{\otimes p_1} \dots (L^{\omega_r})^{\otimes p_r} \Phi^{(0)} e^{(-\omega_1 - \dots - \omega_r)} \Big|_{\overline{C(0)}} dx^1 \dots dx^r = M(m^{(\sum_i^r p_i \omega_i)}).$$

Здесь $M(m^{(\sum_i^r p_i \omega_i)})$ является строкой. Эта функция позволяет извлечь коэффициенты многочлена.

Сделаем два важных замечания.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При условии $A_3 \approx D_3$ можно найти соответствующую меру для функций от переменных $\{x_j\}$ и положить $R^4 > R^3$. Таким образом определяется алгебра D_3 .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Поскольку $(L^{\mu'}(x))^2 = (L^{\mu''}(x))^2$, можно сравнить полином $U_{\mathfrak{g}}^{\mu'}(x)$ с $U_{\mathfrak{g}}^{\mu''}(x)$ или полином $U_{\mathfrak{g}}^{\mu''}(x)$ с $U_{\mathfrak{g}}^{\mu'}(x)$.

Собирая члены с фиксированным доминантным весом μ , получаем положительный целый коэффициент $m_{(\sum_i r_i \omega_i)(\sum_j l_j \omega_j)}$.

4. ПОЛИНОМЫ ЧЕБЫШЁВА ДЛЯ АЛГЕБР B_3 , C_3 И D_3

Область интегрирования $\mathcal{F}$ аффинной группы Вейля отображается в треугольные тригонометрические многочлены: $x \longrightarrow U_{\mathfrak{g}}^{\omega_j}$. Фундаментальный вес и несдвинутые сингулярные элементы для алгебр B_3 и C_3 вычислены в п. 4.1 и 4.2. Для этих алгебр область интегрирования $\mathcal{F}$ представляет собой очень сложный набор корней. Мы можем выписать полиномы Чебышёва, не используя область $\mathcal{F}$.

С другой стороны, область $\mathcal{F}$ для алгебры D_3 изначально имеет особую треугольную форму (см. п. 4.3 и рис. 3 и 4). Это означает, что полученный набор связей можно обратить. В результаты специализированные характеры можно представить в виде линейных комбинаций мономов $\{(X_1)^{p_1}(X_2)^{p_2}(X_3)^{p_3}\}$. Это приводит к явным выражениям, задающим характеры как полиномы $\{U_{\mathfrak{g}}^{\mu}(X)\}$.

Задав квадрат длины $((X_1)^{p_1} \dots (X_3)^{p_3})^2$ для алгебр B_3 , C_3 и D_3 , получаем $U^{I(l)}$. Эти коэффициенты образуют треугольную матрицу M с единицами на главной диагонали. Обратная матрица M^{-1} порождает явные выражения для полиномов Чебышёва:

$$U^{H(p)} = (M^{-1})_{I(p)}^{H(p)} X^{I(p)}. \quad (4)$$

Таким образом, мы можем выписать конкретные полиномы Чебышёва.

4.1. Полиномы для алгебры B_3 . Для алгебры $\mathfrak{g} = B_3$ удобно использовать евклидов базис $\{e_1, e_2, e_3\}$, простые корни алгебры B_3 имеют вид

$$\alpha_1 = e_1 - e_2, \quad \alpha_2 = e_2 - e_3, \quad \alpha_3 = e_3.$$

Фундаментальные веса для алгебры B_3 таковы:

$$\begin{aligned} L_{B_3}^{\omega_1} &:= e^{\omega_1} + e^{-\omega_1} + e^{-\omega_1+\omega_2} + e^{\omega_1-\omega_2} + e^{-\omega_2+2\omega_3} + e^{\omega_2-2\omega_3} + 1, \\ L_{B_3}^{\omega_2} &:= e^{\omega_2} + e^{-\omega_2} + e^{\omega_1} + e^{-\omega_1} + e^{2\omega_1-\omega_2} + e^{-2\omega_1+\omega_2} + e^{\omega_1-\omega_2} + \\ &\quad + e^{-\omega_1+\omega_2} + e^{\omega_1-\omega_2+2\omega_3} + e^{-\omega_1+\omega_2-2\omega_3} + e^{-\omega_2+2\omega_2} + \\ &\quad + e^{\omega_2-2\omega_2} + e^{-\omega_2+2\omega_3} + e^{\omega_2-2\omega_3} + e^{\omega_1+\omega_2-2\omega_3} + \\ &\quad + e^{-\omega_1-\omega_2+2\omega_3} + e^{-\omega_1+2\omega_2-2\omega_3} + e^{\omega_1-2\omega_2+2\omega_3} + 3, \\ L_{B_3}^{\omega_3} &:= e^{\omega_3} + e^{-\omega_3} + e^{-\omega_1+\omega_3} + e^{\omega_1-\omega_3} + e^{\omega_1-\omega_2+\omega_3} + \\ &\quad + e^{-\omega_1+\omega_2-\omega_3} + e^{\omega_2-\omega_3} + e^{-\omega_2+\omega_3}. \end{aligned}$$

Несдвинутый сингулярный элемент $\Phi_{B_3}^{(0)}$ записывается как

$$\begin{aligned} \Phi_{B_3}^{(0)} := & e^{\omega_1+\omega_2+\omega_3} - e^{-\omega_1+2\omega_2+\omega_3} - e^{2\omega_1-\omega_2+3\omega_3} + e^{\omega_1-2\omega_2+5\omega_3} + \\ & + e^{2\omega_1+2\omega_2-3\omega_3} + e^{3\omega_1-2\omega_2+3\omega_3} + e^{-2\omega_1+\omega_2+3\omega_3} - e^{2\omega_1-3\omega_2+5\omega_3} - \\ & - e^{-\omega_1-\omega_2+5\omega_3} - e^{-3\omega_1+\omega_2+3\omega_3} + e^{-2\omega_1-\omega_2+5\omega_3} - e^{4\omega_1-2\omega_2+\omega_3} + \\ & + e^{-4\omega_1+2\omega_2+\omega_3} - e^{-2\omega_1+4\omega_2-3\omega_3} - e^{-2\omega_1-2\omega_2+5\omega_3} + e^{2\omega_1-4\omega_2+5\omega_3} - \\ & - e^{-4\omega_1+\omega_2+\omega_3} + e^{-3\omega_1-\omega_2+3\omega_3} + e^{4\omega_1-3\omega_2+\omega_3} - e^{3\omega_1-4\omega_2+3\omega_3} - \\ & - e^{\omega_1+3\omega_2-5\omega_3} + e^{-\omega_1+4\omega_2-5\omega_3} + e^{4\omega_1-\omega_2-\omega_3} - e^{3\omega_1+\omega_2-3\omega_3} - \\ & - e^{-4\omega_1+3\omega_2-\omega_3} + e^{-3\omega_1+4\omega_2-3\omega_3} + e^{-\omega_1-3\omega_2+5\omega_3} - e^{\omega_1-4\omega_2+5\omega_3} + \\ & + e^{-4\omega_1+2\omega_2-\omega_3} - e^{-2\omega_1-2\omega_2+3\omega_3} - e^{4\omega_1-2\omega_2-\omega_3} + e^{2\omega_1-4\omega_2+3\omega_3} + \\ & + e^{2\omega_1+2\omega_2-5\omega_3} - e^{-2\omega_1+4\omega_2-5\omega_3} + e^{-\omega_1-2\omega_2+\omega_3} - e^{-3\omega_1+2\omega_2-3\omega_3} - \\ & - e^{\omega_1-3\omega_2+\omega_3} + e^{3\omega_1-\omega_2-3\omega_3} + e^{-2\omega_1+3\omega_2-5\omega_3} - e^{2\omega_1+\omega_2-5\omega_3} - \\ & - e^{-\omega_1-\omega_2-\omega_3} + e^{-2\omega_1+\omega_2-3\omega_3} + e^{\omega_1-2\omega_2-\omega_3} - e^{2\omega_1-\omega_2-3\omega_3} - \\ & - e^{-\omega_1+2\omega_2-5\omega_3} + e^{\omega_1+\omega_2-5\omega_3} - e^{\omega_1+2\omega_2-\omega_3} + e^{-\omega_1+3\omega_2-\omega_3}. \end{aligned}$$

Обратите внимание на способ получения полиномов Чебышёва с помощью соотношений (3) и (4):

$$\begin{aligned} U_{0,0,0} &:= 1, & U_{1,0,0} &:= X_1, & U_{0,1,0} &:= X_2, & U_{0,0,1} &:= X_3, \\ U_{2,0,0} &:= -1 - X_2 + X_1^2, & U_{1,1,0} &:= -X_1 - X_3 + X_1X_2, & U_{1,0,1} &:= -X_2 + X_1X_3, \\ U_{0,2,0} &:= X_2 - X_1^2 + X_2^2 - X_1X_3, & U_{0,1,1} &:= X_3 - X_1X_2 + X_2X_3, & U_{0,0,2} &:= -X_2^2 + X_3^2 + X_1X_3, \\ U_{3,0,0} &:= -X_1 + X_3 + X_1^3 - 2X_1X_2, & U_{2,1,0} &:= 1 - X_1^2 - X_2^2 - X_1X_3 + X_1^2X_2, \\ U_{2,0,1} &:= X_1 - X_3 - X_1X_2 - X_2X_3 + X_1^2X_3, & U_{1,2,0} &:= X_1 - X_1^3 + X_1X_2 - X_2X_3 - X_1^2X_3 + X_1X_2^2, \\ U_{1,1,1} &:= X_1X_2X_3 + X_1^2 - X_3^2 - X_1^2X_2, & U_{1,0,2} &:= -X_3 + X_1X_2 - X_2X_3 + X_1^2X_3 - X_1X_2^2 + X_1X_3^2, \\ U_{0,3,0} &:= -1 - X_2 - 2X_1X_2X_3 + X_1^2 + X_3^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_1X_3 - X_1^2X_2, \\ U_{0,2,1} &:= -X_1 + X_3 + X_1^3 - X_1X_2 + 3X_2X_3 - X_1^2X_3 - X_1X_2^2 - X_1X_3^2 + X_2^2X_3, \\ U_{0,1,2} &:= X_2 - X_1^2 - X_2^2 + X_3^2 - X_1X_3 + X_1^2X_2 + X_2X_3^2, \\ U_{0,0,3} &:= -X_3 - X_1^3 + X_3^3 + 2X_1X_2 - 2X_2X_3 + X_1X_2^2 + 2X_1X_3^2 - 2X_2^2X_3, \\ U_{4,0,0} &:= X_2 - X_1^2 + X_2^2 + X_1^4 + 2X_1X_3 - 3X_1^2X_2, \\ U_{3,1,0} &:= X_1 + X_3 - X_1^3 + X_1X_2 + 2X_2X_3 - X_1^2X_3 - 2X_1X_2^2 + X_1^3X_2, \\ U_{3,0,1} &:= -1 + X_2 - 2X_1X_2X_3 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - X_1X_3 - X_1^2X_2 + X_1^3X_3, \\ U_{2,2,0} &:= X_1^2 - X_2^3 - X_2^2 - X_1^4 + X_1X_3 + 2X_1^2X_2 - X_1^3X_3 + X_1^2X_3^2, \\ U_{2,1,1} &:= -X_1 + X_1^2X_2X_3 + X_1^3 + X_1X_2 - X_2X_3 + X_1X_2^2 - X_1X_3^2 - X_2^2X_3 - X_1^3X_2, \\ U_{2,0,2} &:= -X_2 - 2X_1X_2X_3 + X_2^3 + X_2^2 - X_3^2 - X_1X_3 + X_1^2X_2 - X_2X_3^2 + X_1^3X_3 - X_1^2X_2^2 + X_1^2X_3^2, \\ U_{1,3,0} &:= -X_1 - X_3 - 2X_1^2X_2X_3 + X_1^3 - X_1X_2 - 2X_2X_3 + 3X_1^2X_3 + X_1X_2^2 + 2X_1X_3^2 - X_2^2X_3 - X_1^3X_2 + X_1X_2^2, \\ U_{1,2,1} &:= 1 + X_1X_2^2X_3 + 4X_1X_2X_3 - 2X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 + X_1^4 + X_1X_3 - X_2X_3^2 - X_1^3X_3 - X_1^2X_2^2 - X_1^2X_3^2, \\ U_{1,1,2} &:= X_1 + X_3 + X_1X_2X_3^2 - X_1^3 - X_3^3 - X_1X_2 - X_1^2X_3 + X_1X_2^2 - X_1X_3^2 + X_2^2X_3 + X_1^3X_2 - X_1X_3^2, \\ U_{1,0,3} &:= -X_2 - 2X_1X_2^2X_3 - 2X_1X_2X_3 + X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 - X_1^4 + X_1^2X_2 - X_2X_3^2 + X_1^2X_2^2 + 2X_1^2X_3^2 + X_1X_3^3, \\ U_{0,4,0} &:= -X_2 - 3X_1X_2^2X_3 - 2X_1X_2X_3 + X_2^3 - X_2^2 + X_3^2 + X_2^4 - 2X_1X_3 + X_1^2X_2 + 2X_2X_3^2 + 2X_1^3X_3 - X_1^2X_2^2 + X_1^2X_3^2, \\ U_{0,3,1} &:= X_1 - X_3 - 2X_1X_2X_3^2 - X_1^3 + X_3^3 + 2X_2X_3 - X_1^2X_3 - 3X_1X_2^2 + 3X_2^2X_3 + 2X_1^3X_2 - X_1X_3^2 + X_2^3X_3, \\ U_{0,2,2} &:= -1 + X_2 + X_1X_2^2X_3 - 2X_1X_2X_3 + X_1^2 - X_2^2 + 2X_2^2 + 2X_3^2 - X_2^4 - 3X_1^2X_2 + 3X_2X_3^2 + \\ & + 2X_1^2X_2^2 - 2X_1^2X_3^2 - X_1X_3^3 + X_2^2X_3^2, \\ U_{0,1,3} &:= -X_1 + X_1X_2X_3^2 + X_1^3 + X_3^3 + 2X_1X_2^2 - 3X_2^2X_3 - 2X_1^3X_2 + 2X_1X_3^2 - 2X_2^3X_3 + X_2X_3^3 \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Введем функцию Чебышёва многих переменных $X_{i_1}^{p_1}$, $X_{i_2}^{p_2}$ и $X_{i_3}^{p_3}$:

$$\begin{aligned}
 (\Phi_{B_3}^{0;\alpha(X)})^2 := & -288 + 432X_1 + 912X_2 - 284X_3^2 + 72X_1^2 + 256X_3^4 + 904X_2^2 - 252X_1^3 + \\
 & + 220X_2^3 - 27X_3^6 + 16X_2^4 + 36X_1^5 - 258X_1X_2X_3^2 + 60X_1^2X_2X_3^2 + 18X_1X_2X_3^4 - \\
 & - 98X_1X_2^2X_3^2 + 22X_1^3X_2X_3^2 + X_1^2X_2^2X_3^2 + 912X_1X_2 - 252X_1^2X_2 + 668X_1X_2^2 - \\
 & - 264X_1^3X_2 + 32X_1^2X_2^2 - 1012X_2X_3^2 + 333X_1^2X_3^2 - 30X_1X_3^4 + 26X_1^3X_3^2 - \\
 & - 407X_2^2X_3^2 + 198X_2X_3^4 - 6X_1^2X_3^4 + 88X_1X_2^3 - 12X_1^4X_2 - 7X_1^4X_3^2 - \\
 & - 20X_1^3X_2^2 - 4X_1^3X_3^4 - 4X_2^3X_3^2 - 4X_1^2X_2^3 - 500X_1X_3^2.
 \end{aligned}$$

Это все полиномы Чебышёва для алгебры B_3 .

4.2. Полиномы для алгебры C_3 . В этом пункте мы используем результаты, заявленные в [5].

Простые корни алгебры C_3 записываются как

$$\alpha_1 = e_1 - e_2, \quad \alpha_2 = e_2 - e_3, \quad \alpha_3 = 2e_3.$$

Фундаментальные веса имеют вид

$$\begin{aligned}
 L_{C_3}^{\omega_1} &:= e^{\omega_1} + e^{-\omega_1} + e^{-\omega_1+\omega_2} + e^{-\omega_2+\omega_3} + e^{\omega_2-\omega_3} + e^{\omega_1-\omega_2}, \\
 L_{C_3}^{\omega_2} &:= e^{\omega_2} + e^{-\omega_2} + e^{\omega_1-\omega_2+\omega_3} + e^{\omega_1+\omega_2-\omega_3} + e^{-\omega_1+\omega_3} + e^{2\omega_1-\omega_2} - e^{-\omega_1+2\omega_2-\omega_3} + \\
 &+ 2 + e^{\omega_1-2\omega_2+\omega_3} + e^{-2\omega_1+\omega_2} + e^{\omega_1-\omega_3} + e^{-\omega_1-\omega_2+\omega_3} + e^{-\omega_1+\omega_2-\omega_3}, \\
 L_{C_3}^{\omega_3} &:= e^{\omega_3} + e^{-\omega_3} + e^{2\omega_2-\omega_3} + e^{\omega_1} + e^{2\omega_1-2\omega_2+\omega_3} + e^{-\omega_1+\omega_2} + e^{2\omega_1-\omega_3} + e^{-\omega_2+\omega_3} + \\
 &+ e^{\omega_2-\omega_3} + e^{-2\omega_1+\omega_3} + e^{\omega_1-\omega_2} + e^{-2\omega_1+2\omega_2-\omega_3} + e^{-\omega_1} + e^{-2\omega_2+\omega_3}.
 \end{aligned}$$

Несдвинутый сингулярный элемент $\rho_{C_3} = \Phi_{C_3}^{(0)}$ есть

$$\begin{aligned}
 \Phi_{C_3}^{(0)} = & e^{4\omega_1-3\omega_2+2\omega_3} + e^{\omega_1-2\omega_2+3\omega_3} + e^{-\omega_1+4\omega_2-\omega_3} + e^{2\omega_1+3\omega_2-2\omega_3} - \\
 & - e^{\omega_1+3\omega_2+\omega_3} - e^{2\omega_1-\omega_2+2\omega_3} + e^{\omega_1+\omega_2+\omega_3} - e^{-\omega_1+2\omega_2+\omega_3} - \\
 & - e^{\omega_1+4\omega_2-3\omega_3} - e^{-\omega_1-\omega_2+3\omega_3} - e^{-2\omega_1+5\omega_2-2\omega_3} - e^{3\omega_1-4\omega_2+3\omega_3} + \\
 & + e^{-2\omega_1+\omega_2+2\omega_3} - e^{-5\omega_1+4\omega_2-\omega_3} - e^{\omega_1-5\omega_2+3\omega_3} - e^{-5\omega_1+\omega_2+\omega_3} - \\
 & - e^{4\omega_1-5\omega_2+2\omega_3} - e^{3\omega_1+\omega_2-3\omega_3} - e^{-3\omega_1-2\omega_2+3\omega_3} - e^{5\omega_1-2\omega_2-\omega_3} - \\
 & - e^{-3\omega_1+5\omega_2-3\omega_3} + e^{5\omega_1-\omega_2-\omega_3} + e^{-4\omega_1+5\omega_2-2\omega_3} + e^{5\omega_1-4\omega_2+\omega_3} + \\
 & + e^{-\omega_1+5\omega_2-3\omega_3} + e^{3\omega_1-5\omega_2+3\omega_3} + e^{3\omega_1+2\omega_2-3\omega_3} + e^{-3\omega_1-\omega_2+3\omega_3} - \\
 & - e^{4\omega_1+\omega_2-2\omega_3} - e^{-4\omega_1+\omega_2+2\omega_3} - e^{-\omega_1-\omega_2-\omega_3} + e^{\omega_1-2\omega_2-\omega_3} + \\
 & + e^{-\omega_1-3\omega_2+\omega_3} + e^{-2\omega_1+\omega_2-2\omega_3} - e^{-\omega_1+2\omega_2-3\omega_3} - e^{-4\omega_1+3\omega_2-2\omega_3} - \\
 & - e^{\omega_1-4\omega_2+\omega_3} - e^{2\omega_1-\omega_2-2\omega_3} - e^{-2\omega_1-3\omega_2+2\omega_3} + e^{\omega_1+\omega_2-3\omega_3} + \\
 & + e^{-\omega_1-4\omega_2+3\omega_3} + e^{-4\omega_1-\omega_2+2\omega_3} + e^{4\omega_1-\omega_2-2\omega_3} + e^{-3\omega_1+4\omega_2-3\omega_3} + \\
 & + e^{-5\omega_1+2\omega_2+\omega_3} + e^{-5\omega_1+3\omega_2-\omega_3} + e^{2\omega_1-5\omega_2+2\omega_3} - e^{5\omega_1-3\omega_2+\omega_3}.
 \end{aligned}$$

Теперь мы можем выписать полиномы Чебышёва (см. (4)):

$$\begin{aligned}
 U_{0,0,0} &:= 1, & U_{1,0,0} &:= X_1, & U_{0,1,0} &:= X_2, & U_{0,0,1} &:= X_3, \\
 U_{2,0,0} &:= -1 - X_2 + X_1^2, & U_{1,1,0} &:= -X_1 - X_3 + X_1X_2, \\
 U_{1,0,1} &:= -X_2 + X_1X_3, & U_{0,2,0} &:= X_2 - X_1^2 + X_2^2 - X_1X_3, & U_{0,1,1} &:= X_3 - X_1X_2 + X_2X_3, \\
 U_{0,0,2} &:= -X_2^2 + X_3^2 + X_1X_3, & U_{3,0,0} &:= -X_1 + X_3 + X_1^3 - 2X_1X_2, \\
 U_{2,1,0} &:= 1 - X_1^2 - X_2^2 - X_1X_3 + X_1^2X_2, & U_{2,0,1} &:= X_1 - X_3 - X_1X_2 - X_2X_3 + X_1^2X_3, \\
 U_{1,2,0} &:= X_1 - X_1^3 + X_1X_2 - X_2X_3 - X_1^2X_3 + X_1X_2^2, & U_{1,1,1} &:= X_1X_2X_3 + X_1^2 - X_2^2 - X_1^2X_2, \\
 U_{1,0,2} &:= -X_3 + X_1X_2 - X_2X_3 + X_1^2X_3 - X_1X_2^2 + X_1X_3^2, \\
 U_{0,3,0} &:= -1 - X_2 - 2X_1X_2X_3 + X_1^2 + X_2^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_1X_3 - X_1^2X_2 \\
 U_{0,2,1} &:= -X_1 + X_3 + X_1^3 - X_1X_2 + 3X_2X_3 - X_1^2X_3 - X_1X_2^2 - X_1X_3^2 + X_2^2X_3, \\
 U_{0,1,2} &:= X_2 - X_1^2 - X_2^2 + X_3^2 - X_1X_3 + X_1^2X_2 + X_2X_3^2, \\
 U_{0,0,3} &:= -X_3 - X_1^3 + X_3^3 + 2X_1X_2 - 2X_2X_3 + X_1X_2^2 + 2X_1X_3^2 - 2X_2^2X_3, \\
 U_{4,0,0} &:= X_2 - X_1^2 + X_2^2 + X_1^4 + 2X_1X_3 - 3X_1^2X_2, \\
 U_{3,1,0} &:= X_1 + X_3 - X_1^3 + X_1X_2 + 2X_2X_3 - X_1^2X_3 - 2X_1X_2^2 + X_1^3X_2, \\
 U_{3,0,1} &:= -1 + X_2 - 2X_1X_2X_3 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - X_1X_3 - X_1^2X_2 + X_1^3X_3, \\
 U_{2,2,0} &:= X_1^2 - X_2^3 - X_2^2 - X_1^4 + X_1X_3 + 2X_1^2X_2 - X_1^3X_3 + X_1^2X_2^2, \\
 U_{2,1,1} &:= -X_1 + X_1^2X_2X_3 + X_1^3 + X_1X_2 - X_2X_3 + X_1X_2^2 - X_1X_3^2 - X_2^2X_3 - X_1^3X_2, \\
 U_{2,0,2} &:= -X_2 - 2X_1X_2X_3 + X_2^2 + X_2^2 - X_3^2 - X_1X_3 + X_1^2X_2 - X_2X_3^2 + X_1^3X_3 - X_1^2X_2^2 + X_1^2X_3^2, \\
 U_{1,3,0} &:= -X_1 - X_3 - 2X_1^2X_2X_3 + X_1^3 - X_1X_2 - 2X_2X_3 + 3X_1^2X_3 + X_1X_2^2 + 2X_1X_3^2 - X_2^2X_3 - X_1^3X_2 + X_1X_2^3, \\
 U_{1,2,1} &:= 1 + X_1X_2^2X_3 + 4X_1X_2X_3 - 2X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 + X_1^4 + X_1X_3 - X_2X_3^2 - X_1^3X_3 - X_1^2X_2^2 - X_1^2X_3^2, \\
 U_{1,1,2} &:= X_1 + X_3 + X_1X_2X_3^2 - X_1^3 - X_3^3 - X_1X_2 - X_1^2X_3 + X_1X_2^2 - X_1X_3^2 + X_2^2X_3 + X_1^3X_2 - X_1X_2^3, \\
 U_{1,0,3} &:= -X_2 - 2X_1X_2^2X_3 - 2X_1X_2X_3 + X_1^2 + X_2^3 - X_3^2 - X_1^4 + X_1^2X_2 - X_2X_3^2 + X_1^2X_2^2 + 2X_1^2X_3^2 + X_1X_3^3, \\
 U_{0,4,0} &:= -X_2 - 3X_1X_2^2X_3 - 2X_1X_2X_3 + X_2^3 - X_2^2 + X_3^2 + X_2^4 - 2X_1X_3 + X_1^2X_2 + 2X_2X_3^2 + \\
 &\quad + 2X_1^3X_3 - X_1^2X_2^2 + X_1^2X_3^2, \\
 U_{0,3,1} &:= X_1 - X_3 - 2X_1X_2X_3^2 - X_1^3 + X_3^3 + 2X_2X_3 - X_1^2X_3 - 3X_1X_2^2 + 3X_2^2X_3 + 2X_1^3X_2 - X_1X_2^3 + X_2^3X_3, \\
 U_{0,2,2} &:= -1 + X_2 + X_1X_2^2X_3 - 2X_1X_2X_3 + X_1^2 - X_2^3 + 2X_2^2 + 2X_3^2 - X_2^4 - 3X_1^2X_2 + 3X_2X_3^2 + \\
 &\quad + 2X_1^2X_2^2 - 2X_1^2X_3^2 - X_1X_3^3 + X_2^2X_3^2, \\
 U_{0,1,3} &:= -X_1 + X_1X_2X_3^2 + X_1^3 + X_3^3 + 2X_1X_2^2 - 3X_2^2X_3 - 2X_1^3X_2 + 2X_1X_3^2 - 2X_2^3X_3 + X_2X_3^3, \\
 U_{0,0,4} &:= 1 + 6X_1X_2X_3 - X_1^2 - 2X_2^2 - 3X_3^2 + X_2^4 + X_3^4 + 2X_1^2X_2 - 4X_2X_3^2 - 2X_1^3X_3 - X_1^2X_2^2 + \\
 &\quad + X_1^2X_3^2 + 3X_1X_3^3 - 3X_2^2X_3^2 \quad \text{и т. д.}
 \end{aligned}$$

Введем функцию Чебышёва многих переменных $X_{i_1}^{p_1}$, $X_{i_2}^{p_2}$ и $X_{i_3}^{p_3}$, заданную как специализированный характер типа X (см. соотношения (3) и (4)):

$$\begin{aligned}
 (\Phi_{C_3}^{0;\alpha(X)})^2 &:= 512 + 298X_2^2 + 95X_1^4 + 59X_1^2 - 32X_2^4 + 256X_2 + X_1^2X_2^2X_3^2 + \\
 &\quad + 18X_1X_2X_3^3 + 86X_1^2X_2X_3^2 + 94X_1^3X_2X_3 - 96X_1X_3^2X_3 - 216X_1X_2^2X_3 - \\
 &\quad - 738X_1X_2X_3 + 22X_1^3X_2^2X_3 - 12X_1^5X_3 - 7X_1^4X_2^2 - 20X_1^4X_3^2 - 122X_1^2X_3^2 - \\
 &\quad - 144X_1X_3^3 + 384X_2X_3^2 + 36X_1^2X_2^2 + 132X_2^2X_3^2 - 4X_1^2X_2^4 + 15X_1^6 + 16X_2^5 - \\
 &\quad - 4X_2^3X_3^2 - 4X_1^3X_3^3 - 27X_3^4 + 220X_1^3X_3 - 157X_1^4X_2 - 414X_1^2X_2 + \\
 &\quad + 374X_1^2X_2^2 + 30X_1X_3 + 443X_3^2 - 107X_2^3.
 \end{aligned}$$

Это все полиномы Чебышёва для алгебры C_3 .

Рис. 2. Простые корни α (тонкие векторы) и фундаментальные веса ω (жирные векторы) для алгебры D_3 .

4.3. Полиномы для алгебры D_3 . Наконец, выпишем простые корни алгебры D_3 :

$$\alpha_1 = e_1 - e_2, \quad \alpha_2 = e_2 - e_3, \quad \alpha_3 = e_3;$$

вектор Вейля $\rho_{D_3} = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 2x_1 + x_2$. Совершим переход $\omega \rightarrow x$ в соответствии с формулами

$$\omega_1 = i2\pi x_1, \quad \omega_2 = i2\pi x_2, \quad \omega_3 = i2\pi x_3.$$

Фундаментальные веса для D_3 имеют вид (см. рис. 2)

$$L_{D_3}^{\omega_1} := e^{\omega_1} + e^{-\omega_2} + e^{-\omega_3 + \omega_2} + e^{\omega_3 - \omega_1},$$

$$L_{D_3}^{\omega_2} := e^{\omega_2} + e^{-\omega_1} + e^{\omega_3 - \omega_1} + e^{-\omega_3 + \omega_1},$$

$$L_{D_3}^{\omega_3} := e^{\omega_3} + e^{-\omega_3} + e^{\omega_1 + \omega_2 - \omega_3} + e^{-\omega_1 - \omega_2 + \omega_3} + e^{\omega_1 - \omega_2} + e^{-\omega_1 + \omega_2}.$$

Выпишем основные полиномиальные переменные, соответствующие фундаментальным весам $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$:

$$X_1 = U^{\omega_1; a(X)}, \quad X_2 = U^{\omega_2; a(X)}, \quad X_3 = U^{\omega_3; a(X)}.$$

Несдвинутый сингулярный элемент

$$\begin{aligned} \Phi_{D_3}^{(0)} := & e^{\omega_3 + \omega_1 + \omega_2} - e^{-\omega_3 + 2\omega_1 + 2\omega_2} - e^{2\omega_3 + \omega_1 - \omega_2} - e^{2\omega_3 - \omega_1 + \omega_2} + \\ & + e^{\omega_3 + 2\omega_1 - 2\omega_2} + e^{\omega_3 - 2\omega_1 + 2\omega_2} + e^{3\omega_1 + \omega_2 - 2\omega_3} + e^{3\omega_3 - \omega_1 - \omega_2} + \\ & + e^{\omega_1 + 3\omega_2 - 2\omega_3} - e^{3\omega_1 - \omega_2 - \omega_3} - e^{3\omega_3 - 2\omega_1 - 2\omega_2} - e^{-\omega_1 + 3\omega_2 - \omega_3} - \\ & - e^{-3\omega_1 + \omega_2 + \omega_3} - e^{-3\omega_3 + 2\omega_1 + 2\omega_2} - e^{\omega_1 - 3\omega_2 + \omega_3} + e^{-3\omega_1 - \omega_2 + 2\omega_3} + \\ & + e^{-3\omega_3 + \omega_1 + \omega_2} + e^{-\omega_1 - 3\omega_2 + 2\omega_3} + e^{-\omega_3 - 2\omega_1 + 2\omega_2} + e^{-\omega_3 + 2\omega_1 - 2\omega_2} - \\ & - e^{-2\omega_3 - \omega_1 + \omega_2} - e^{-2\omega_3 + \omega_1 - \omega_2} - e^{\omega_3 - 2\omega_1 - 2\omega_2} + e^{-\omega_3 - \omega_1 - \omega_2}. \end{aligned}$$

Раскрывая формулы для полиномов Чебышёва (см. (3) и (4)), получаем

$$\begin{aligned}
 U_{0,0,0} &:= 1, & U_{0,1,0} &:= X_2, & U_{1,0,0} &:= X_1, & U_{0,0,1} &:= X_3, \\
 U_{1,1,0} &:= -1 + X_1 X_2, & U_{1,0,1} &:= X_1 X_3 - X_2, & U_{0,1,1} &:= X_2 X_3 - X_1, & U_{2,0,0} &:= -X_3 + X_1^2, \\
 U_{0,2,0} &:= -X_3 + X_2^2, & U_{0,0,2} &:= -X_1 X_2 + X_3, & U_{1,2,0} &:= -X_1 X_3 + X_1 X_2^2 - X_2, \\
 U_{2,1,0} &:= -X_2 X_3 + X_1^2 X_2 - X_1, & U_{1,1,1} &:= X_1 X_2 X_3 - X_1 - X_2, & U_{0,2,1} &:= 1 - X_1 X_2 + X_2^2 X_3 - X_3^2, \\
 U_{1,0,2} &:= -X_2 X_3 - X_1^2 X_2 + X_1 X_3^2 + X_1, & U_{0,1,2} &:= -X_1 X_3 - X_1 X_2^2 + X_2 X_3^2 + X_2, \\
 U_{0,3,0} &:= -2X_2 X_3 + X_2^2 + X_1, & U_{3,0,0} &:= -2X_1 X_3 + X_1^3 + X_2, \\
 U_{2,2,0} &:= -X_1 X_2 - X_2^2 X_3 - X_1^2 X_3 + X_1^2 X_2^2 + X_3^2, \\
 U_{1,2,1} &:= X_2 X_3 + X_1 X_2^2 X_3 - X_1^2 X_2 - X_1 X_3^2 - X_2^3 + X_1, \\
 U_{2,1,1} &:= X_1 X_3 + X_1^2 X_2 X_3 - X_1 X_2^2 - X_2 X_3^2 - X_1^3 + X_2, \\
 U_{3,1,0} &:= X_3 - 2X_1 X_2 X_3 + X_1^3 X_2 - X_1^2 + X_2^2, & U_{1,3,0} &:= X_3 - 2X_1 X_2 X_3 + X_1 X_2^3 + X_1^2 - X_2^2, \\
 U_{0,0,3} &:= -X_3 - 2X_1 X_2 X_3 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^3, \\
 U_{1,1,2} &:= -1 + 3X_1 X_2 + X_1 X_2 X_3^2 - X_2^2 X_3 - X_1^2 X_3 - X_1^2 X_2^2, \\
 U_{3,0,1} &:= X_1^3 X_3 + 2X_2 X_3 - X_1^2 X_2 - 2X_1 X_3^2 + X_1, \\
 U_{0,3,1} &:= X_2^3 X_3 + 2X_1 X_3 - X_1 X_2^2 - 2X_2 X_3^2 + X_2, \\
 U_{2,0,2} &:= X_3 + X_1 X_3 - X_1 X_2 + X_1 - X_3, & U_{0,2,2} &:= X_3 + X_2 X_3 - X_1 X_2 + X_2 - X_3, \\
 U_{4,0,0} &:= -1 + 2X_1 X_2 - 3X_1 X_3 + X_1 + X_3, & U_{0,4,0} &:= -1 + 2X_1 X_2 - 3X_2 X_3 + X_2 + X_3, \\
 U_{1,0,3} &:= X_1 X_3 - 2X_1 X_2 X_3 + 2X_1 X_2 - X_2 X_3 + X_1 - X_2, \\
 U_{0,1,3} &:= X_2 X_3 - 2X_1 X_2 X_3 + 2X_1 X_2 - X_1 X_3 + X_2 - X_1, \\
 U_{3,2,0} &:= -X_1 X_3 + X_1 X_2 - 2X_1 X_2 X_3 - X_1 X_2 + 2X_1 X_3 + X_2, \\
 U_{2,3,0} &:= -X_2 X_3 + X_1 X_2 - 2X_1 X_2 X_3 - X_1 X_2 + 2X_2 X_3 + X_1, \\
 U_{2,2,1} &:= -2X_3 - X_1 X_3 - X_2 X_3 + X_1 X_2 X_3 + 2X_1 X_2 X_3 - X_1 X_2 - X_1 X_2 + X_1 + X_2 + X_3 \quad \text{и т. д.}
 \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что нормированная область интегрирования содержит три фундаментальные области определения, получаем условие нормировки полиномов Чебышёва:

$$\begin{aligned}
 \frac{(-1)^{\max \text{length}(W)}}{(2\pi i)^3 |\mathcal{F}| |W|} \int_{\mathcal{F}} U_{m_1, m_2, m_3}(X) \overline{U_{n_1, n_2, n_3}(X) \Phi^{0; a(X)}} dX_1 dX_2 dX_3 = \\
 = \delta^{n_1, m_1} \delta^{n_2, m_2} \delta^{n_3, m_3}.
 \end{aligned}$$

Остается найти явное выражение для $\overline{\Phi^{0; a(X)}}$ и область интегрирования $\mathcal{F}$ в терминах переменных $\{X_j\}$. Разлагая $(\Phi_{D_3}^{0; a(X)})^2 = b_{I(p)} X^{I(p)}$ по характеристам и подставляя их явные полиномиальные выражения, получаем

$$\begin{aligned}
 (\Phi_{D_3}^{0; a(X)})^2 &:= 256 + 144X_2^2 X_3 + 144X_1^2 X_3 - 6X_1^2 X_2^2 - 27X_1^4 - 27X_2^4 + \\
 &+ X_1^2 X_2^2 X_3^2 + 18X_1 X_2^3 X_3 + 18X_1^3 X_2 X_3 - 80X_1 X_2 X_3^2 - 4X_1^2 X_3^3 - \\
 &- 4X_2^2 X_3^3 - 4X_1^3 X_2^3 + 16X_3^4 - 192X_1 X_2 - 128X_3^2.
 \end{aligned}$$

Для сингулярных элементов (2) имеет место равенство

$$\gamma_{D_3}(X) = \sqrt{b_{I(p)} X^{I(p)}} \frac{(-1)^{\max \text{length}(W)}}{(2\pi i)^3 |F_{D_3}|}.$$

Рис. 3. Область интегрирования $\mathcal{F}$ для алгебры D_3 в пространстве переменных $\{Z_1, Z_2, Z_3\}$ (вид слева и справа).

Рис. 4. Сечение области определения $\mathcal{F}$ для алгебры D_3 .

Область определения $\mathcal{F}$ записывается через действительные переменные $Z_1 = X_3$, $Z_2 = (X_1 + X_2)/2$ и $Z_3 = -i(X_1 - X_2)/2$ вместо комплексных. Эти переменные имеют вид

$$\begin{aligned} Z_1 &= \cos(2\pi(x_2 - x_3)) + \cos(2\pi(x_1 - x_3)) + \cos(2\pi x_1) + \cos(2\pi x_2), \\ Z_2 &= \sin(2\pi(x_2 - x_3)) - \sin(2\pi(x_1 - x_3)) - \sin(2\pi x_1) + \sin(2\pi x_2), \\ Z_3 &= 2 \cos(2\pi(x_1 + x_2 - x_3)) + 2 \cos(2\pi(x_1 - x_2)) + 2 \cos(2\pi x_3). \end{aligned}$$

Область интегрирования для полиномов Чебышёва в случае алгебры D_3 , выраженная через переменные Z_1, Z_2, Z_3 , показана на рис. 3. Возьмем проекции области на плоскости, расположенные под некоторыми заданными углами Эйлера, например $\phi = 70^\circ, \theta = \psi = 0$. Тогда форма проекции будет похожа на область интегрирования для A_2 -полиномов Чебышёва от двух переменных. Сечение области определения $\mathcal{F}$ изображено на рис. 4. Как было показано в работе [9], эта область ограничена замкнутой гипоциклоидой Штайнера, состоящей из трех каспов. Наши иллюстрации демонстрируют возможность соотнести крыло самолета F16 с этим рисунком.

Благодарности. Мне бы хотелось выразить глубокое уважение Александру Николаевичу Васильеву и напомнить о его широкой эрудиции в физике и других областях знаний. Я выражаю признательность организационному комитету V Международной конференции “Модели квантовой теории поля” (MQFT–2015), на которой была представлена эта работа.

Список литературы

- [1] T. H. Koornwinder, “Orthogonal polynomials in two variables which are eigenfunctions of two algebraically independent partial differential operators. III, IV”, *Nederl. Acad. Wetensch. Proc. Ser. A*, **77** (1974), 357–369, 370–381.
- [2] M. Nesterenko, J. Patera, A. Tereszkievich, *Internat. J. Math. Math. Sci.*, **2011** (2011), 969424, 23 pp., arXiv: 1001.3683.
- [3] S. N. Filippov, V. I. Man’ko, “Chebyshev polynomials and Fourier transform of $SU(2)$ irreducible representation character as spin tomographic star-product kernel”, *J. Russ. Laser Res.*, **30**:3 (2009), 224–241.
- [4] G. Leng, “Compression of aircraft aerodynamic database using multivariable Chebyshev polynomials”, *Adv. Eng. Software*, **28**:2 (1997), 133–141.
- [5] A. F. Cheng, S. E. Hawking, L. Nguyen, C. A. Monoco, G. G. Seagrave, *Data compression using Chebyshev transform*, US Patent No. US 7,249,153 B2, 2007.
- [6] V. D. Lyakhovsky, Ph. V. Uvarov, “Multivariate Chebyshev polynomials”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **46**:12 (2013), 125201, 22 pp.
- [7] В. Д. Ляховский, “Многочлены Чебышёва от многих переменных в терминах сингулярных элементов”, *ТМФ*, **175**:3 (2013), 419–428.
- [8] В. Д. Ляховский, “Полиномы Чебышёва для трехмерной алгебры”, *ТМФ*, **185**:1 (2015), 118–126.
- [9] R. J. Beerends, “Chebyshev polynomials in several variables and the radial part of the Laplace–Beltrami operator”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **328**:2 (1991), 779–814.